Repetitorium der Mathematik

mit Beispielen aus der Physik

von

Martin Lommatzsch

27. März 2021

Diese Version kann inhaltliche und sprachliche Tippfehler enthalten und hat somit keinen Anspruch auf Richtigkeit. Außerdem kann nicht gewährleistet werden, dass der „Lehrplan“ jedes Bundeslandes abgedeckt ist.

Neueste Version des Buches, durch einen Klick, immer hier zu finden!
(www.bildung-bedeutet-freiheit.de/maths)

Mehr als 1400 Onlineübungsaufgaben des Buches sind nach Themengebieten sortiert, durch einen Klick, immer hier zu finden! (www.bildung-bedeutet-freiheit.de/quiz)

Vorwort

Dieses Repetitorium ist aus der Motivation entstanden den naturwissenschaftlichen Unterricht an Schulen für die Schüler zu erleichtern. Dazu werden in den ersten Kapiteln mathematische Grundlagen in Form von Vokabeln, Zahleneigenschaften, Rechenoperationen und Abkürzungen eingeführt. Da viele Schüler von der gesellschaftlichen Meinung, Mathematik und Naturwissenschaften seien schwer, zu Ausreden in der Leistung inspiriert werden, soll in diesem Buch explizit auf die Einfachheit der mathematischen Sprache hingewiesen werden. Dieser Trivialität gehen allerdings einige Dinge voraus, die dem durchschnittlichen Schüler erst nach seiner Schullaufbahn bewusst werden - das Mathematik vom Vokabular lebt, da Wörter und ihre Abkürzungen eindeutige Bedeutungen erhalten, welche in anderen Sprachen, wie Deutsch oder Englisch, oftmals erst durch den Satz eine genauere Bedeutung erhalten. Auch soll dargestellt werden, dass es in der Mathematik im Vergleich zu anderen Sprachen keine Ausnahmen gibt.

Dieses Buch soll ein Leitfaden für den mathematischen Unterricht werden und als Wiederholungswerk für die naturwissenschaftlichen Fächer dienen. Aus diesem Grund wird sich dieses Werk ständig weiterentwickeln und dabei auf das Verständnis der Schüler ausgerichtet werden. Als Grundlage zum Verständnis dieses Buches soll der Umgang mit Zahlen und Grundrechenoperationen genügen, sodass es für jeden Schüler einer weiterführenden Schule geeignet ist. In diesem Buch wird schnell deutlich, dass das mathematische Verständnis stark verknüpft mit der korrekten Verwendung von definierten Begriffen ist. Deswegen sollte jeder Schüler angeregt werden die jeweiligen eingeführten Vokabeln zu verinnerlichen.

Zu jedem Abschnitt werden Übungsaufgaben existieren, welche mit den Lösungen im Anhang verglichen werden können. Die Aufgaben sind so gestellt, dass sie das Verständnis überprüfen und vertiefen. Deswegen ist es ratsam, wenn alle Aufgaben bearbeitet und erst danach mit den Lösungen verglichen werden. In der Geometrie werden auch Aufgaben zum Zeichnen von Körpern gestellt. In den Lösungen werden allerdings keine Lösungen zu diesen Zeichnungen vorhanden sind. Auch werden Aufgaben gestellt, die erst mit Wissen aus den nachfolgenden Kapiteln zu lösen sind. Diese Aufgaben sollten bearbeitet werden, wenn das Wissen mit dem Umgang der Abkürzungen oder Operatoren bekannt ist, um das schon bestehende Wissen zu reaktivieren und weiter zu vertiefen. Bei der Betrachtung der Unteraufgaben wird auffallen, dass die Unteraufgaben an Schwierigkeit gewinnen, sodass eine Binnendifferenzierung hierüber erlangt werden kann. Den Schülern besteht somit auch die Möglichkeit ihre Kompetenzen und

Fähigkeiten auszureizen, sodass jeder Schüler gefordert und gefördert werden kann, da von jedem Schwierigkeitsgrad genügend Aufgaben vorhanden sein werden.

Alle Wörter die leicht *schräggestellt* sind, können im Anhang des Buches in einem mathematischen Wörterverzeichnis mit einer kurzen Erklärung nachgeschlagen werden. Der Abschnitt zum Nachschlagen der Wörter soll dem Schüler den Umgang mit der mathematischen Sprache erleichtern und auch aufzeigen, wie aufbauend die mathematische Sprache ist.

Zu Letzt sei angemerkt, dass in absehbarer Zeit wesentlich mehr Aufgaben mit Lösungen es in dieses Buch schaffen werden. Des Weiteren werden auch Aufgaben folgen, die Abschnitte voraussetzen, welche weiter hinten im Buch sind. Zu diesen Aufgaben werden Hinweise auf die betreffenden Abschnitte geliefert, sodass je nach Vorwissen auch komplexere Aufgaben bearbeitet werden können. Generell sollten die Schüler die Aufgaben mit den Rechenmethoden lösen wie es ihnen beliebt, da das Ergebnis das wichtigste an einer Rechnung ist. Folglich sind alle Rechenwege zugelassen, die keine Fehler beinhalten.

„Die Bildung kommt nicht vom Lesen, sondern vom Nachdenken über das Gelesene.“

-Carl Hilty

„Gebildet ist der Mensch, der die höchsten Ergebnisse des Geistes in physiologische Reflexe umformt.“

-Nicolás Gómez Dávila

Besonderen Dank gebührt den Menschen, die bei der Erstellung dieses Buches geholfen haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Einige Themengebiete der Mathematik sind besonders essentiell für ein grundlegendes Verständnis der Mathematik. In diesem Buch werden nach der Einführung diese Themen immer wieder in Aufgaben oder Erklärungen vorkommen. Die Themen sind in der nachfolgenden Auflistung nach Wichtigkeit geordnet. In Klammern sind die Themenbereich beschrieben, die mit dem zentralen Thema direkt verknüpft sind:

- Bruchrechnung
- Äquivalenzumformung
- Einsetzungsverfahren
- Funktionen
- Trigonometrie (Dreiecke)
- Einheiten (Potenzen)

Ohne das Verständnis dieser Themenbereiche lassen sich weiterführende Themen nur schwer erschließen. Wenn diese Themen nicht verinnerlicht wurden, sollten diese weiter erschlossen werden, da im Kern nahezu alle Aufgaben letztendlich auf diesen Grundprinzipien basieren.

2 Mengen

Zahlen können in verschiedene Kategorien, sogenannte *Mengen*, eingeordnet werden. Dabei bilden die sogenannten *natürlichen Zahlen* die Basis aller anderen Zahlenmengen, die in der Schule besprochen werden. Die natürlichen Zahlen werden durch das Symbol $\mathbb{N}$ beschrieben und beinhalten Zahlen wie $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...$. Die mathematische Schreibweise dazu wäre: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, wobei in den geschweiften Klammern $\{\}$ alle Zahlen aufgelistet werden, die zur *Zahlenmenge* gehören. Oftmals werden die *natürlichen Zahlen* auch ohne Null verwendet und werden im Folgenden als $\mathbb{N}^+$ bezeichnet. Die erste Erweiterung der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ sind die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$. Bei genauem Betrachten fällt auf, dass die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ eine *Teilmenge* der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind, was mit dem *Mengenoperator* $\subset$ („ist *Teilmenge* von“) wie folgt geschrieben wird:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

Die Folgen der Einführung der *ganzen Zahlen* sind gravierend, da die *Subtraktion* damit an Wichtigkeit verliert, da zum Beispiel aus $-1 = +(-1)$ wird.
Die Erweiterung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind alle Zahlen, die durch *Brüche* dargestellt werden können. Diese Zahlen werden *rationale Zahlen* $\mathbb{Q} = \left\{..., -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{7}, 1, 2, \frac{34}{15}, ...\right\}$ genannt.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \tag{2.2}$$

Aber es gibt auch noch Zahlen, die nicht durch einen Bruch dargestellt werden können. Diese werden *reelle Zahlen* $\mathbb{R}$ genannt und beherbergen Zahlen wie zum Beispiel $\pi, \sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$. Die letzte Erweiterung der Zahlenmengen wird durch die Zahl $i = \sqrt{-1}$ gegeben und führt somit die *komplexen Zahlen* ein $\mathbb{C}$. *Komplexe Zahlen* werden in der Regel nicht an Schulen besprochen, dennoch hat ihre Einführung einige Vorteile beim Beschreiben von Zusammenhängen im Bereich der *Analysis*[1].

[1]Die *Analysis* ist eines der großen Teilgebiete der Mathematik neben der *Algebra*. Der Begriff rührt von analysieren her.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{2.3}$$

2.1 Mengenoperatoren

Es ist möglich *Teilmengen* auf zustellen, dazu werden bestimmte *Mengenoperatoren* wie $\subset$ verwendet. Sei die *Menge* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ und die *Menge* $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6\}$ gegeben, dann existieren folgende *Mengenoperationen*:
Die *Vereinigung* $\cup$, welche wie folgt dargestellt wird:

$$\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad \textit{Vereinigung} \text{ von } \mathbb{M} \text{ mit } \mathbb{K} \tag{2.4}$$

Die *Vereinigung* wird auch gelesen als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ oder $\mathbb{K}$ befinden“, damit ist gemeint, dass alle Zahlen der ersten *Menge* $\mathbb{M}$ und alle Zahlen der zweiten *Menge* $\mathbb{K}$ eine neue *Menge* bilden in der alle Zahlen aus der *Menge* $\mathbb{M}$ und der *Menge* $\mathbb{K}$ vorkommen. Das mathematische „oder“ ist anders zu gebrauchen als das „oder“ im normalen Sprachgebrauch, da es in der Sprache im Zusammenhang betrachtet werden muss, während es immer die selbe Vorgehensweise in der Mathematik fordert. Falls keine *Schnittmenge* vorhanden ist, sind die beiden *Mengen disjunkt* zu einander.

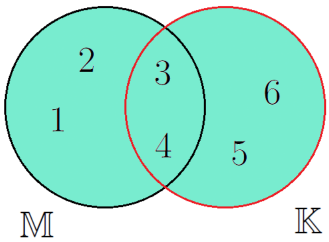


Abbildung 2.1: *Vereinigung* von zwei *Mengen*. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet die *Vereinigung* der beiden *Mengen*.

Die Abbildung (1.1) zeigt wie in der *Menge* $\mathbb{M}$ die Zahlen $1, 2, 3$ und 4 und in der *Menge* $\mathbb{K}$ die Zahlen $3, 4, 5$ und 6 enthalten sind, da $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6\}$.

Eine weitere *Mengenoperation* ist der sogenannte *Durchschnitt* $\cap$:

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3, 4\} \qquad \textit{Durchschnitt} \text{ von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \tag{2.5}$$

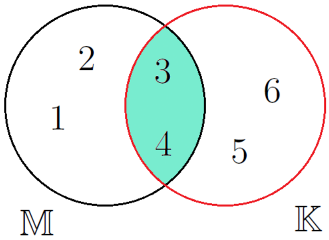


Abbildung 2.2: *Durchschnitt* von zwei *Mengen*. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet den *Durchschnitt* der beiden *Mengen*.

Der *Durchschnitt* wird gelesen als „Alle Zahlen, die sich in $\mathbb{M}$ und $\mathbb{K}$ befinden“. Auch hier ist zu unterscheiden zwischen dem mathematischen und sprachlichen „und“.
Die Abbildung (1.2) zeigt, was sich hinter dem mathematischen logischen *Operator* „und“ verbirgt. Der *Durchschnitt* ist gegeben als alle Zahlen einer *Menge*, die auch in der anderen *Menge* vorhanden sind. Somit sind nur die 3 und die 4 in diesem Fall in der resultierenden *Durchschnittsmenge*.

Die letzte wichtige *Mengenoperation* ist die *Differenz* $\setminus$:

$$\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1, 2\} \qquad \textit{Differenz} \text{ von } \mathbb{M} \text{ und } \mathbb{K} \tag{2.6}$$

Dabei wird die *Differenz* gelesen als „Alle Zahlen von $\mathbb{M}$ ohne die Zahlen aus $\mathbb{K}$ “. Grafisch veranschaulicht würde dies wie folgt aussehen:

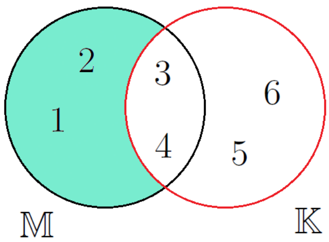


Abbildung 2.3: *Differenz* von $\mathbb{M}$ ohne $\mathbb{K}$. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet die *Menge*, welche alle Zahlen beinhaltet aus $\mathbb{M}$ allerdings ohne die Zahlen, die in der *Menge* $\mathbb{K}$ enthalten sind.

Deutlich zu erkennen ist, dass die Zahlen, welche in beiden *Mengen* $\mathbb{M}$ und $\mathbb{K}$ vorkommen nicht Teil der resultierenden *Menge* sind. Außerdem wird deutlich, dass die resultierende *Menge* sich unterscheidet wenn die *Mengen* bei dieser *Operation* umdrehen würde.

$$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{5, 6\} \qquad \text{Differenz von } \mathbb{K} \text{ und } \mathbb{M} \tag{2.7}$$

Diese Umkehrung der *Mengen* bei der *Operation* hätte ein vollkommen anderes Ergebnis, wie auch in der folgenden Abbildung zu sehen ist.

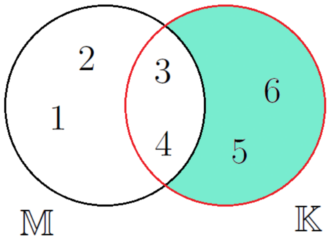


Abbildung 2.4: *Differenz* von $\mathbb{K}$ ohne $\mathbb{M}$. Schwarz ist die *Menge* $\mathbb{M}$ und rot die *Menge* $\mathbb{K}$ umrandet. Die Zahlen in der ausgefüllte *Fläche* bildet die *Menge*, welche alle Zahlen beinhaltet aus $\mathbb{K}$ allerdings ohne die Zahlen, die in der *Menge* $\mathbb{M}$ enthalten sind.

Es wird deutlich, dass bei der *Differenz* von *Mengen* $\setminus$ die Reihenfolge entscheidender Natur ist, während sich der *Durchschnitt* und die *Vereinigung* nicht verändern würden.

Nun da alle wichtigen *Mengenoperationen* eingeführt wurden, werden noch einige wichtige mathematische Abkürzungen eingeführt, welche zur Beschreibung einer *Menge* des Öfteren von Nöten sein. Diese Abkürzungen können als Vokabeln angesehen werden, welche jeder Schüler beherrschen sollte.
Wenn eine Zahl ein *Element* einer *Zahlenmenge* ist, dann wird dies mathematisch geschrieben als:

$$4 \in \mathbb{N} \tag{2.8}$$

Weitere wichtige Abkürzungen der Mathematik werden nun aufgelistet und im Folgenden verwendet.

$$\begin{array}{ll}
\forall & \text{für alle gilt} \\
\exists & \text{es existiert} \\
\exists! & \text{es existiert genau ein} \\
\wedge & \text{und} \\
\vee & \text{oder} \\
\neg & \text{nicht} \\
:= & \text{definiert als} \\
\| & \text{parallel zu} \\
\perp & \text{orthogonal (senkrecht) zu} \\
\measuredangle & \text{Winkelmaß zwischen} \\
\angle & \text{Winkel zwischen} \\
\varnothing & \text{leere Menge} \\
\Rightarrow & \text{daraus folgt} \\
< & \text{kleiner als} \\
> & \text{größer als} \\
\overset{!}{=} & \text{setze gleich} \\
\hat{=} & \text{entspricht}
\end{array} \tag{2.9}$$

So würde der Satz „Die *Menge* $\mathbb{M}$ beinhaltet alle Zahlen x, die die Bedingung erfüllen, dass sie *Element* der *reellen Zahlen* sind und dass es genau ein Zahl e gibt durch die man die Zahl x teilen kann, sodass 1 dabei heraus kommt.“ mathematisch so aussehen:

$$\mathbb{M} = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \exists! e \forall x \mid \frac{x}{e} = 1 \right\} \tag{2.10}$$

Mittels dieser Abkürzungen ist es möglich eine *Zahlenmenge* einzuführen, welche von besonderer Bedeutung ist - die *Primzahlen*. Also die Zahlen die nur durch selbst oder durch Eins teilbar sind. Diese *Zahlenmenge* kann wie folgt definiert werden:

$$\mathbb{P} = \left\{ p \in \mathbb{N} | \forall p > 1 | \nexists \frac{p}{n} \in \mathbb{N} \forall n \neq \{1, p\} \right\} \tag{2.11}$$

2.2 Infimum und Supremum

Das *Supremum* ist definiert als die „kleinste oberste Schranke“ einer *Zahlenmenge*, während das *Infimum* als „größte unterste Schranke“ definiert ist. Sei als Beispiel dazu folgende *Zahlenmenge* aus *natürlichen Zahlen* betrachtet, $\mathbb{M} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, dann ergibt sich hieraus folgendes *Infimum* und *Supremum*:

$$\begin{aligned} \sup \mathbb{M} &= 9 \\ \inf \mathbb{M} &= 2 \\ \Rightarrow \quad 2 &< x < 9 \;\; \forall x \in \mathbb{M} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Hierbei können dem *Supremum* und *Infimum* Grenzen auferlegt werden, sodass das *Supremum* der *Menge* $\mathbb{M}$ in den Grenzen zwischen $3 < x < 6$ und das *Infimum* zwischen $4 < x < 7$ wie folgt geschrieben wird:

$$\begin{aligned} \sup_{3<x<6} \mathbb{M} &= 7 \\ \inf_{4<x<7} \mathbb{M} &= 3 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Aber die Grenzen müssen nicht ausschließend - *exklusiv* - sondern können auch einschließend - *inklusiv* - sein.

$$\begin{aligned} \sup \mathbb{M} &= 8 \\ \inf \mathbb{M} &= 3 \\ \Rightarrow \quad 3 &\leq x \leq 8 \;\; \forall x \in \mathbb{M} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dabei bildet das *Supremum* die größte Zahl der *Menge* und ist gleichzeitig das *Maximum*, während das *Infimum* gleich dem *Minimum* ist. Somit ergibt sich für *inklusive Grenzen*:

$$\begin{aligned} \sup \mathbb{M} &= \max \mathbb{M} \\ \inf \mathbb{M} &= \min \mathbb{M} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Im folgenden Buch werden die Begriffe *Infimum* und *Supremum* lediglich zur Vollständigkeit erwähnt, sie sind jedoch nicht essentiell für ein allgemein bildendes Grundlagenverständnis.

2.2.1 Übungsaufgaben zu Mengen

Aufgaben mit Zahlen, die noch unbekannt sind, können vorerst ausgelassen werden. Allerdings sollten diese nach der jeweiligen Einführung nachgeholt werden.

Aufgabe 1: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

a) $4 \in$	b) $-1 \in$	c) $9 \in$	d) $0,45 \in$
e) $\frac{1}{2} \in$	f) $-6 \in$	g) $4,75 \in$	h) $0,\bar{3} \in$
i) $\frac{1}{81} \in$	j) $-\frac{3}{7} \in$	k) $3 \in$	l) $0,125 \in$
m) $0,01 \in$	n) $\frac{1}{11} \in$	o) $3,141 \in$	p) $-0,75 \in$

Aufgabe 2: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

a) $0,\bar{6} \in$	b) $-\sqrt{4} \in$	c) $0 \in$	d) $\sqrt{3} \in$
e) $\frac{7}{8} \in$	f) $\sqrt{13} \in$	g) $\frac{2}{\sqrt{16}} \in$	h) $1\% \in$
i) $\frac{1}{\sqrt{5}} \in$	j) $-42 \in$	k) $\sqrt{144} \in$	l) $\frac{16}{2} \in$
m) $5,01 \in$	n) $17 \in$	o) $1,1\bar{6} \in$	p) $-\sqrt{64} \in$

Aufgabe 3: *Bestimme die kleinste Zahlenmengen ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$) zu denen die jeweiligen Zahlen gehören.*

a) $\lg 10 \in$	b) $\sqrt{9} \in$	c) $-7 \in$	d) $\pi \in$
e) $\frac{e^2}{2} \in$	f) $-\frac{1}{6} \in$	g) $1 \in$	h) $0,597813553 \in$
i) $\ln 2 \in$	j) $-e^{\ln \frac{1}{3}} \in$	k) $\log_3 9 \in$	l) $0,1 \in$
m) $28\% \in$	n) $\frac{\pi}{4} \in$	o) $\sqrt{17} \in$	p) $-\frac{1}{\ln e} \in$

Aufgabe 4: *Bestimme die Vereinigung, den Durchschnitt und jede mögliche Differenz der jeweiligen Mengen.*

a) $\mathbb{M} = \{1, 5, 6, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{3, 4, 6, 8\}$

b) $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und: $\mathbb{K} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$

c) $\mathbb{M} = \{5, 7, 9, 11\}$ und: $\mathbb{K} = \{4, 6, 8, 10\}$

d) $\mathbb{M} = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ und: $\mathbb{K} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$

e) $\mathbb{M} = \{3, 6, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{2, 3, 5, 6, 8\}$

f) $\mathbb{M} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ und: $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

Aufgabe 5: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3, 6\}$, $\mathbb{L} = \{4, 5, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{3, 4, 6, 8, 9\}$ *die jeweils resultierenden Mengen. (Tipp: Rechne die Klammern immer zu erst.)*

a) $(\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) \cap \mathbb{L} =$

b) $(\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$

c) $(\mathbb{K} \setminus \mathbb{L}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$

d) $(\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) =$

e) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{M} \cup \mathbb{K}) =$

f) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) =$

g) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{L} \cap \mathbb{K}) := \mathbb{L} \varDelta \mathbb{K} =$

h) $\mathbb{M} \varDelta \mathbb{K} =$

Aufgabe 6: *Bestimme* $\mathbb{M} \varDelta \mathbb{K}$ *wie in Aufgabe 5 definiert und zeichne wie in den Abbildungen (1.1) bis (1.4) und kennzeichne die Fläche der resultierenden Menge. Hierbei soll* $\mathbb{M} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{0, 2, 4, 5, 6, 8\}$ *sein.*

Aufgabe 7: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{1, 2, 3\}$ *und* $\mathbb{K} = \{\} = \varnothing$ *die jeweils resultierenden Mengen.*

a) $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} =$

b) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} =$

c) $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} =$

Aufgabe 8: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{4, 6, 8, 9\}$, $\mathbb{L} = \{2, 3, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 8, 9\}$ *das jeweils resultierende Infimum beziehungsweise Supremum.*

a) $\inf\left[(\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K})\right] =$

b) $\sup\left[(\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K})\right] =$

c) $\sup\left[(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K})\right] =$

d) $\inf\left[\mathbb{M} \mathit{\Delta} \mathbb{K}\right] =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.1) Lösungen zu Mengen.

3 Algebraische Grundlagen

Um den naturwissenschaftlichen Unterricht und mathematischen Erklärungen besser folgen zu können, müssen die Begrifflichkeiten der *Algebra* geklärt werden. Dazu werden im Laufe dieses Kapitels die wichtigsten mathematischen Vokabeln, Abkürzungen und Rechenvorschriften erläutert.

3.1 Terme

Hinter großen Teilen des Verständnis der Mathematik steht das Wissen, was ein Term ist. Bei dem Beispiel

$$4 + 5 = 3 + 6 \tag{3.1}$$

handelt es sich um eine Gleichung wobei die Terme $4+5$ und $3+6$ den gleichen Wert 9 besitzen. Das Äquivalenzzeichen „=“ wird oftmals fälschlicherweise als Aufforderung interpretiert, den Wert des Terms zu berechnen, doch gibt dieses lediglich die Gleichheit an.
In einer weiteren Beispielaufgabe stehen drei verschiedene Seillängen mit 3 cm, 6 cm und 7 cm zur Verfügung. Wenn nun der Term

$$4 \cdot 3\,\mathrm{cm} + 5 \cdot 6\,\mathrm{cm} + 2 \cdot 7\,\mathrm{cm} \tag{3.2}$$

niedergeschrieben wird, dann können dem Term verschiedene Informationen entnommen werden. So ist bekannt, dass viermal das 3 cm, fünfmal das 6 cm und zweimal das 7 cm Seilstück verwendet wurde und dass die Seilstücke zusammen eine Länge von 56 cm besitzen. Es wird deutlich, dass Terme auch ohne ein Äquivalenzzeichen niedergeschrieben werden können und dennoch eine Bedeutung besitzen.
Wenn ein Term berechnet werden soll, ist eine systematisches Vorgehen zu empfehlen. Hierbei sollten einzelne Schritte visualisiert werden, sodass ein anderer Betrachter schnell die Rechnung nachvollziehen kann. Dies ist im folgenden Beispiel dargestellt:

$$\begin{aligned} &(6 \cdot 5 + 9 \cdot 8) : 3 - 3 \cdot 7 \\ =\ &(30 + 72) : 3 - 21 \\ =\ &102 : 3 - 21 \\ =\ &34 - 21 \\ =\ &13 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Deutlich zu erkennen ist, dass nach jeder Rechnung eine neue Zeile begonnen wurde und hierbei die Äquivalenzzeichen „=“ stets untereinander stehen. Auch sind die Rechenregeln (wie Punkt- vor Strichrechnung und die Beachtung der Klammern) erkennbar, da im ersten Schritt alle Produktwerte, anschließend der Summenwert in der Klammer gefolgt vom Quotientenwert und abschließend der Differenzwert bestimmt wurde.
Besonders das strukturierte, systematische und nachvollziehbare Niederschreiben von Termveränderungen bietet die Möglichkeit neue Erkenntnisse zu generieren und Auffälligkeiten zu entdecken, was ein wesentlicher Bestandteil der Mathematik ist.

3.1.1 Übungsaufgaben zu Terme

Aufgabe 1: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Grundrechenarten“!)

a) $56 + 7 \cdot 5$
$$= \square + \square$$
$$= \square$$

b) $11 \cdot 8 - 8 \cdot 4$
$$= \square - \square$$
$$= \square$$

c) $76 \cdot 46 - 35 \cdot 39$
$$= \square - \square$$
$$= \square$$

d) $8 \cdot (24 + 4 \cdot 5)$
$$= 8 \cdot \left(24 + \square\right)$$
$$= 8 \cdot \square$$
$$= \square$$

e) $45 + 7 \cdot (98 - 144 : 9)$
$$= 45 + 7 \cdot \left(98 - \square\right)$$
$$= 45 + 7 \cdot \square$$
$$= 45 + \square$$
$$= \square$$

f) $(13 \cdot 21 - 112) \cdot (4 + 264 : 24)$
$$= \left(\square - 112\right) \cdot \left(4 + \square\right)$$
$$= \square \cdot \square$$
$$= \square$$

Aufgabe 2: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Grundrechenarten“!)

a) $((36 + 45) : (77 - 68) + 13) \cdot 3$
$$= \left(\square : \square + 13\right) \cdot 3$$
$$= \left(\square + 13\right) \cdot 3$$
$$= \square \cdot 3$$
$$= \square$$

b) $5 \cdot (2364 - 7 \cdot [15 \cdot 17 - 97]) + 178$
$$= 5 \cdot \left(2364 - 7 \cdot \left[\square - 97\right]\right) + 178$$
$$= 5 \cdot \left(2364 - 7 \cdot \square\right) + 178$$
$$= 5 \cdot \left(2364 - \square\right) + 178$$
$$= 5 \cdot \square + 178$$
$$= \square + 178$$
$$= \square$$

c) $(84 \cdot 34 - 68 \cdot 29) \cdot (45 \cdot 97 - 643)$
$$= \left(\square - \square\right) \cdot \left(\square - 643\right)$$
$$= \square \cdot \square$$
$$= \square$$

d) $(11 \cdot 3 + 12 \cdot 7) \cdot (235 - 8 \cdot 28) \cdot (27 \cdot 45 - 36 \cdot 25)$
$$= \left(\square + \square\right) \cdot \left(235 - \square\right) \cdot \left(\square - \square\right)$$
$$= \square \cdot \square \cdot \square$$
$$= \square$$

Aufgabe 3: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Bruchrechnung"!)

a)
$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\square+\square$$
$$=\square\cdot\square+\square\cdot\square$$
$$=\square+\square$$
$$=\square$$

b)
$$\frac{6}{7}:\frac{4}{3}+\frac{3}{4}:\frac{6}{5}$$
$$=\square\cdot\square+\square\cdot\square$$
$$=\square+\square$$
$$=\square\cdot\square+\square\cdot\square$$
$$=\square+\square$$
$$=\square$$
$$=\square$$

c)
$$\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}-\square\right)$$
$$=\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}\cdot\square-\square\cdot\square\right)$$
$$=\frac{3}{8}\cdot\square$$
$$=\square$$
$$=\square$$

d)
$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\left(\frac{3}{4}\cdot\square+\frac{2}{5}\cdot\square\right)\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\left(\square+\square\right)\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\square\cdot\frac{3}{2}$$
$$=\square$$
$$=\square$$

e)
$$\frac{6}{7}:\left[\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right):\frac{6}{5}\right]$$
$$=\frac{6}{7}:\left[\left(\frac{4}{3}\cdot\square+\frac{3}{4}\cdot\square\right):\frac{6}{5}\right]$$
$$=\frac{6}{7}:\left[\left(\square+\square\right):\frac{6}{5}\right]$$
$$=\frac{6}{7}:\left[\square:\frac{6}{5}\right]$$
$$=\frac{6}{7}:\left[\square\cdot\square\right]$$
$$=\frac{6}{7}:\square$$
$$=\frac{6}{7}\cdot\square$$
$$=\square$$

f)
$$\left[\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}-\frac{5}{6}\right)+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\left[\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}\cdot\square-\frac{5}{6}\cdot\square\right)+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\left[\frac{3}{8}\cdot\left(\square-\square\right)+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\left[\frac{3}{8}\cdot\square+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\left[\square+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\left[\square\cdot\square+\frac{5}{8}\cdot\square\right]\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\left[\square+\square\right]\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\square\cdot\frac{1}{3}$$
$$=\square$$
$$=\square$$

Aufgabe 4: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Distributivgesetz“!)

a) $(56 + 7 \cdot 5)$

$= \left(\square + 5\right) \cdot 7$

b) $54 : 8 + 26 : 8$

$= (54 + 26) : \square$

$= \square : \square$

$= \square$

c) $164 + 96$

$= \left(\square + \square\right) \cdot 4$

d) $198 - 77$

$= \left(\square - \square\right) : 5$

e) $123 - 54 + 464$

$= \left(\square - \square + \square\right) : 33$

f) $896 - 488 + 4 \cdot 224$

$= \left(\square - \square + \square\right) \cdot 8$

Aufgabe 5: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Bruchrechnung“!)

a) $8 \cdot 7 - 4 \cdot 6$

$= \square - \square$

$= \square$

b) $5 \cdot 6 + 2 \cdot 4$

$= \square + \square$

$= \square$

c) $12 \cdot 31 - 14 \cdot 22$

$= \square - \square$

$= \square$

d) $1,3 \cdot 7 - 4,5 \cdot 0,8$

$= \square - \square$

$= \square$

e) $5,2 \cdot 7 - 3 \cdot 4,7$

$= \square - \square$

$= \square$

f) $1,2 \cdot 5,7 + 9 \cdot 0,2$

$= \square + \square$

$= \square$

g) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{8} \cdot 2$

$= \square + \square$

$= \square$

h) $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} + \frac{7}{8} : \frac{7}{3}$

$= \square + \square$

$= \square$

i) $\frac{5}{9} : \frac{2}{3} - \frac{2}{5} : \frac{8}{3}$

$= \square - \square$

$= \square$

Aufgabe 6: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Bruchrechnung“!)

a) $(12 \cdot 7 - 43) \cdot 5$

$= \left(\square - 43\right) \cdot 5$

$= \square \cdot 5$

$= \square$

b) $(13 \cdot 8 + 7 \cdot 16) : 4 + 65$

$= \left(\square + \square\right) : 4 + 65$

$= \square : 4 + 65$

$= \square + 65$

$= \square$

c) $[3 \cdot (1464 - 16 \cdot 82) + 872] : 4$

$= \left[3 \cdot \left(1464 - \square\right) + 872\right] : 4$

$= \left[3 \cdot \square + 872\right] : 4$

$= \left[\square + 872\right] : 4$

$= \square : 4$

$= \square$

Aufgabe 7: *Um mehrere kleine Gehege mit rechtwinkligen Ecken zu bauen, muss die Länge des gesamten zu bestellenden Zauns bestimmt werden. Dies wurde mit dem Term* $2 \cdot (3\,m + 6\,m) + 2 \cdot (4\,m + 4\,m) + 2 \cdot (2\,m + 5\,m)$ *berechnet. Beantworte die Fragen.* (Benötigt Abschnitt „Spezielle Vierecke"!)

a) Was wurde bei den jeweiligen der drei Summanden berechnet?

b) Ein Meter Zaun kostet 65 €. Wie viel kostet der gesamte Zaun?

c) Wie groß ist der Flächeninhalt der einzelnen Gehege?

d) Um was für geometrische Flächen handelt sich bei den jeweiligen Gehegen?

e) Wie groß ist die Spannweite der Gehegeflächeninhalte?

Aufgabe 8: *Von einer Familienpizza essen bei einer Feier Erwachsene jeweils genau* $\frac{1}{4}$ *und Kinder jeweils genau* $\frac{1}{6}$ *einer solchen Familienpizza. Eine Familienpizza kostet* $13,50$ € *und bei einer Bestellung ab drei Pizzen gibt es pro Pizza* $1,75$ € *Rabatt. Beantworte die Fragen.* (Benötigt Abschnitt „Bruchrechnung"!)

a) Der Term $\frac{7}{6} + \frac{9}{4}$ beschreibt die Planung einer Feier. Wie viele Erwachsene und Kinder werden erwartet und wie viele Pizzen müssen bestellt werden?

b) Zu einer Feier kommen 5 Erwachsene und 8 Kinder. Wie viel Geld muss für Pizzen eingeplant werden?

c) Wie groß ist der Anteil der Pizzen die übrig bleiben, wenn 6 Erwachsene und 3 Kinder erwartet werden und der Term zur Berechnung der Kosten folgender ist: $40,50$ €$-5,25$ €.

Aufgabe 9: *Ein Kapital von* 6000 € *soll angelegt werden. Bearbeite alle Teilaufgaben.* (Benötigt Abschnitt „Prozentrechnung"!)

a) Für wie viele Jahre wurde das Kapital im folgenden Term 6000 €$\cdot 1,022 \cdot 1,022 \cdot 1,022 \cdot 1,022$ zu welchen Zinssatz angelegt?

b) Beschreibe diese Geldanlage 6000 €$\cdot 1,012 \cdot 1,015 \cdot 1,017 \cdot 1,02 \cdot 1,04$.

c) Beschreibe diese Geldanlage 6000 €$\cdot 1,025^3 - 2,5$ €$\cdot 12 \cdot 3$.

Aufgabe 10: *In einer Eintrittskasse wurde in einer Schicht Geld eingenommen, stelle lediglich den Term zu Berechnung der Geldsumme auf. Es gelten folgende Preise: Kinder müssen* 4 €*, Jugendliche* $4,50$ €*, Erwachsene* 7 € *und Rentner* 6 € *pro Person bezahlen. Wird eine Gruppe angemeldet, werden pro Person* 10% *Preisnachlass gewährt.*

a) 12 Kinder, 6 Jugendliche, 25 Erwachsene, 11 Rentner.

b) 3 Erwachsene, eine Kindergruppe mit 27 Kindern.

c) 8 Kinder, 12 Erwachsene und zwei Rentergruppen mit einmal 17 und einmal 25 Rentnern.

d) 22 Erwachsene, 3 Kindergruppen mit jeweils 23 Kindern, 15 Jugendliche und eine Rentnergruppe mit 31 Rentern.

e) 42 Jugendliche, wovon 8 einen 2 € Preisnachlass bekommen, 16 Rentner, eine Rentnergruppe mit 28 Rentern, 65 Erwachsene und 18 Kinder.

Aufgabe 11: *Ein Zoo verlangt für Kinder* 3 €*, für Erwachsene* 5 € *und für Rentner* 4 € *Eintritt. Beschreibe den Term* $7 \cdot 4$ €$+18 \cdot 4$ €$+31 \cdot 5$ €*.*

Aufgabe 12: *Ein Kapital wurde angelegt. Die Kaptialentwicklung wird durch den Term* 4000 €$\cdot 1,007$ *beschrieben. Beantworte die Fragen.*
a) Wie viel Kapital wurde angelegt?
b) Zu welchen Zinssatz wurde das Geld angelegt?

Aufgabe 13: *Ein Gehege soll rechteckig eingezäunt werden. Beschreibe in diesem Sachzusammenhang den Term* $(2 \cdot 4,5m + 2 \cdot 5,6m) \cdot 17,95\frac{€}{m}$*.*

Aufgabe 14: *In einer Flaschenkiste befinden sich* 18 *Flaschen. Bei der Leergutannahme brachten Kunden folgende Anzahlen von Flaschen:* $13; 7; 15; 17; 4; 5; 41; 3; 18; 11; 23$*. Beschreibe die Terme* $\frac{13+7+15+17+4+5+41+3+18+11+23}{11}$ *und* $\frac{13+7+15+17+4+5+41+3+18+11+23}{18}$*.*

Aufgabe 15: *Auf einer Speisekarte sind folgende Preise niedergeschrieben: Steak* $18,99$ €*; Nudelauflauf* $12,99$ €*; Fischplatte* $21,99$ €*; Salat* $7,99$ €*; Softdrink* $2,99$ €*; Kaffee* $2,49$ €*. Beschreibe den folgenden Term.*

$2 \cdot 18,99$ € $+ 5 \cdot 7,99$ € $+ 7 \cdot 2,99$ € $+ 2,49$ € $+ 21,99$ €

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.2) Lösungen zu Terme.

3.2 Grundrechenarten

In diesem Abschnitt sollen zunächst die Begrifflichkeiten der Grundrechenarten und ihre schriftlichen Rechenverfahren erklärt werden. Dazu wird zunächst ein Beispiel betrachtet, um die Art dieser Rechnung zu verdeutlichen. Anschließend wird anhand eines weiteren Beispiels die Rechenvorschrift in ihrer schriftlichen Anwendung beschrieben.

- *Addition*: Die *Addition* ist die wichtigste Grundrechenart. Mit ihr werden Zahlen zusammengezählt, was immer durch den *Additionsoperator* $+$ beschrieben wird. Das Ergebnis, die sogenannte *Summe*, wird immer auf der anderen Seite eines Gleichheitszeichen $=$ geschrieben.

$$2 + 4 = 6 \tag{3.4}$$

  Im Beispiel aus Gleichung (3.4) ist zu sehen, dass die Zwei mit der Vier zusammengezählt wurde, wie es der *Additionsoperator* $+$ (gesprochen „plus") gefordert hat. Für größere Zahlen lohnt sich eine Schreibweise, die die Zahlen, die addiert werden sollen, untereinander schreibt. Dabei wird das Ergebnis unter einem Strich ausgerechnet.

$$\begin{array}{r} 1337 \\ +4265 \\ \color{red}{11} \\ \hline 5602 \end{array} \tag{3.5}$$

  Bei dieser Art der Schreibweise, werden die Zahlen die untereinander stehen einzeln *addiert*. Dabei wird immer bei den hintersten Zahlen begonnen. Wenn die *addierte* Zahl höher ist als Neun, dann wird die Eins der Zehn zur nächsten Zahlenspalte hinzugezählt. Diese Eins wird auch oft Merkeins genannt und ist in der Beispielrechnung rot eingefärbt. Der Vorteil dieser Schreibweise ist es, dass niemals höhere Zahlen als 9 und 9 *addiert* werden können. Folglich benötigt der Schüler nur ein sehr gutes Zahlenverständnis von der Zahl 0 bis 18 um jegliche Additionsaufgabe zu lösen. Falls mehr als zwei *Summanden* (im Beispiel sind 1337 und 4265 die *Summanden*) vorkommen ist es immer erlaubt in einer Nebenrechnung zunächst nur zwei *Summanden* zu *addieren* um dann anschließend die *Summe* der ersten beiden *Summanden* mit der nächsten *Summanden* zu verrechnen.

- *Subtaktion*: Die *Subtraktion* ist das Gegenteil der *Addition* und wird durch den *Subtraktionsoperator* $-$ (gesprochen „minus") beschrieben.

$$5 - 2 = 3 \tag{3.6}$$

Wie die Gleichung (3.6) zeigt, wird von der Zahl 5, dem sogenannten *Minuend*, die Zahl 2, dem *Subtrahend*, abgezogen. Das Ergebnis wird dabei *Differenz* genannt. Wie schon bei der *Addition* lohnt sich die Schreibweise, in der alle Zahlen untereinander aufgeführt werden.

$$\begin{array}{r} 6337 \\ -4265 \\ \color{red}{1} \\ \hline 2072 \end{array} \tag{3.7}$$

Auch bei der *Subtraktion* werden die Zahlen startend von hinten bearbeitet. Dabei kann die Zahl des *Subtrahenden* größer sein als die des *Minuenden*, wie in der zweiten Zahlenspalte. Hierbei ist die Zahl 6 statt von der 3 von der 13 zu subtrahieren. Die dazu geschriebene Zehn muss anschließend von der nächsten Zahlenspalte abgezogen werden, was durch die Merkeins in rot wieder symbolisiert wird. Auch bei der *Subtraktion* kann es vorkommen, dass mehrere *Subtrahenden* vorzufinden sind. Dabei sind zwei Arten von Nebenrechnungen zulässig: Die erste Variante sieht vor, dass die *Subtrahenden* nacheinander vom *Minuenden subtrahiert* werden, während die zweite Variante vorsieht, dass die *Subtrahenden addiert* werden und anschließend die *Summe* der *Subtrahenden* vom *Minuend* abgezogen werden.
Beim schriftlichen *Subtrahieren* kann maximal die Zahl 9 als *Subtrahend* der einzelnen Spalten auftauchen. Somit ist die größte Zahl von der abgezogen werden kann die 18. Folglich braucht der Schüler lediglich ein gutes Zahlenverständnis bei der *Subtraktion* von den Zahlen 0 bis 18.

- *Multiplikation*: Die *Multiplikation* ist die erste abkürzende Schreibweise, die ein der Schule eingeführt wird. Dabei wird die Rechnung $3 + 3 + 3 + 3$ abgekürzt zu $4 \cdot 3$, also vier mal die Drei, was durch den *Multiplikationsoperator* $\cdot$ beschrieben wird. Die schriftliche *Multiplikation* sieht Zahlen von 0 bis $9 \cdot 9 = 81$ vor, da auch hier die einzelnen *Ziffern* der Zahl nacheinander bearbeitet werden.

  Die *Multiplikation* kann in mehreren Schritten aus der *Addition* heraus eingeführt werden. Hierbei wird das Beispiel $3463 \cdot 5$ betrachtet:

$$\begin{array}{r} 3463 \\ +3463 \\ +3463 \\ +3463 \\ +3463 \\ \color{red}{231} \\ \hline 17315 \end{array} \tag{3.8}$$

$$\begin{array}{l} \underline{3463 \cdot 5} \\ + \quad\; 15 \\ + \quad 30 \\ + \; 20 \\ +15 \\ \hline \quad 17315 \end{array} \tag{3.9}$$

$$\begin{array}{r} 3_{\color{red}{2}}4_{\color{red}{3}}6_{\color{red}{1}}3 \cdot 5 \\ \hline 17315 \end{array} \tag{3.10}$$

Hierbei wird deutlich, dass die Schreibweisen sich verkürzen, sodass bei der dritten Variante die Merkzahlen im *Index* der Ziffern des ersten *Faktors* geschrieben wurden. Dies ist nicht mehr übersichtlich genug, wenn beide *Faktoren* über mehrere Ziffern verfügen, sodass dann die Merkzahlen entweder seperat niedergeschrieben oder im Kopf behalten werden müssen.

$$\begin{array}{r} 1337 \cdot 23 \\ \hline 2674\; \\ + \; 3011 \\ \hline 29751 \end{array} \tag{3.11}$$

Aus der Gleichung (3.11) ist zu erkennen, dass die 2 auf die Zahl 7 wirkt und danach auf die 3. Dabei wird die Zehn der Rechnung $2 \cdot 7 = 14$ mit zur nächsten Ziffer von rechts gezählt. Das Ergebnis wird so notiert, dass die am weitest stehende *Ziffer* direkt unter der betrachten Zahl steht (im Beispiel unter der 2). Anschließend wird dies mit der nächsten *Ziffer*, hier die Drei, wiederholt. Die untereinander geschriebenen Zahlen werden dann *addiert*, sodass sich das Ergebnis, das sogenannte *Produkt*, dann ergibt. Die Zahlen die *multipliziert* werden heißen dabei *Faktoren*.

- *Division*: Die *Division* stellt die umkehrende Frage der *Multiplikation*: „Wie oft passt die Zahl in die andere Zahl?“. Da es sich um die Umkehrung der *Multiplikation* handelt sollten auch wiederum alle Zahlen von 0 bis 81 beherrscht werden. Diese Umkehrung wird besonders deutlich, wenn die *Multiplikation* wie in Gleichung (3.9) verwendet wird.

$$\begin{array}{r} \underline{8123 \cdot 3} \\ + \quad\;\; 9 \\ + \quad 6\; \\ + \;\; 3 \;\;\; \\ \underline{+24 \quad\;\;} \\ 24369 \end{array} \tag{3.12}$$

$$\begin{array}{l} \;\;2\;\;43\,69 : 3 = 8123 \\ -2\;\;4 \\ \hline \quad\;\;03 \\ \quad - \;\;3 \\ \hline \quad\quad 0\,6 \\ \quad\quad - \;\;6 \\ \hline \quad\quad\quad 09 \\ \quad\quad\quad - \;9 \\ \hline \quad\quad\quad\quad 0 \end{array} \tag{3.13}$$

Bei der schriftlichen *Division* wird zunächst gefragt „Wie oft passt der *Divisor* (3) in die erste *Ziffer* des *Dividenden* (2)?“ Die Antwort wäre „Null mal“ und somit ist die Null die erste *Ziffer* des Ergebnisses, dem sogenannten *Quotienten*. Anschließend wir die gefundene Ziffer des *Quotienten* mit dem *Divisor multipliziert* und das Ergebnis dieser Rechnung von der ersten *Ziffer subtrahiert*. Dann wird die nächste *Ziffer* zur Betrachtung mit nach unten gezogen (im Beispiel die Zahl 4) und nun die sich danach immer wiederholende Frage „Wie oft passt der *Divisor* in diese Zahl?“ gestellt. Die Antwort wird beim Ergebnis notiert (im Beispiel 8) und diese *Ziffer* des *Quotienten* dann wieder *multipliziert* mit dem *Divisor* von der besagten Zahl *subtrahiert* und anschließend die nächste *Ziffer* des *Dividenden* zur Betrachtung nach unten gezogen. Dieses Prozedur wiederholt sich solange bis alle Zahlen betrachtet wurden.
Bei höheren Zahlen im *Divisor* lohnt es sich diesen in zwei Zahlen zu zerlegen. So kann zum Beispiel der *Divisor* 72 in zwei *Divisoren* 8 und 9 zerlegt werden. Dann muss zu erst durch eine Zahl *dividiert* werden und anschließend der *Quotient* aus der ersten *Division* durch die zweite Zahl dividiert werden. Da die *Division* mit am zeitaufwendigsten ist, wird später die Bruchrechnung eingeführt, welche eine *Division* bis zum Ergebnis hin herauszögern kann.

Die mathematischen Vokabeln der Grundrechenarten sind in der folgenden Tabelle noch einmal zusammen gefasst.
Generell gilt, dass die Rechnungen der *Multiplikation* und die der *Division* immer vor jeglicher *Addition* oder *Subtraktion* durchgeführt werden müssen (Punkt- vor Strichrechnung)!
Die Regel „Punkt- vor Strichrechnung“ wird offensichtlich, wenn die Abkürzung hinter der Multiplikation ausgeschrieben wird:

Rechenart	1. Teil	Rechenoperator	2.Teil	Wert der/des
Addition	Summand	+	Summand	= Summe
Subtraktion	Minuend	-	Subtrahend	= Differenz
Multiplikation	Faktor	·	Faktor	= Produkt
Division	Dividend	:	Divisor	= Quotient
Division (als Bruch)	Zähler	/	Nenner	= Quotient

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 &= 5 + 5 + 5 + 7 + 7 + 7 + 7 \\ &= 15 + 28 \\ &= 43 \end{aligned} \tag{3.14}$$

An diesem Demonstrationsbeispiel ist auch zu erkennen, dass Rechnungen mit Zwischenschritten gerechnet werden können und was dabei beachtet werden muss. Dabei gilt, dass ein Gleichheitszeichen aussagt, dass was links steht gleich ist zu dem was rechts steht. Das heißt wiederum, dass kein Teil ausgelassen werden darf, wenn ein Gleichheitszeichen benutzt wird. Nebenrechnungen, also Teilrechnungen, können in separaten Rechnungen durchgeführt werden und deren Ergebnisse dann wieder in die komplette Rechnung eingesetzt werden.

Operation	Umkehroperation
Addition	Subtraktion
Subtraktion	Addition
Multiplikation	Division
Division	Multiplikation

Zu jeder *Rechenoperation* existiert eine *Umkehroperation*, somit kann jede Rechnung überprüft werden. Dies wird in der Regel „Probe“ genannt und sollte immer durchgeführt werden, wenn die Zeit es zulässt, um für weiterführende Rechnungen Folgefehler zu vermeiden.

So kann zum Beispiel zur Probe einer *Subtraktionsaufgabe* die *Differenz* mit dem *Subtrahenden* addiert werden. Die Summe hieraus muss äquivalent zum *Minuenden* sein.

$$29 - 7 = 22 \quad \Rightarrow \quad 22 + 7 = 29 \tag{3.15}$$

Durch die Einführung der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ werden die Begriffe der *Subtraktion* nicht länger benötigt, da ein *Summand* oder sogar beide *Summanden* negativ sein können, sodass die *Addition* mit *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ die Verallgemeinerung von Addition und *Subtraktion* der *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ ist. Auch die Divisionsbegriffe werden nur noch im Sinne der Bruchrechnung verwendet.

Um Rechnungen mit natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ schnell zu überprüfen lohnt sich die sogenannte Überschlagsrechnung, bei der die Zahlen gerundet werden. Um das Runden zu verstehen, muss sich nochmal die Stellenwerttafel vergegenwärtigt werden, da immer bestimmte Stellen betrachtet werden müssen:

Zahl	Millionener	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
3148629	3	1	4	8	6	2	9

Beim Runden wird die in der vorherigen Stelle der betrachtete Stelle der Zahl analysiert. Soll also auf Tausender gerundet werden, muss die Hunderterziffer betrachtet werden. Handelt es sich um eine der Ziffern $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ wird die betrachtete Stelle abgerundet - sie bleibt also unverändert. Handelt es sich allerdings um $\{5; 6; 7; 8; 9\}$, dann wird aufgerundet - also an der betrachteten Stelle wir die Ziffer um 1 erhöht. Dies kann begründet werden, dass die Ziffern $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ dichter an einer Null sind als an einer Zehn wie $\{5; 6; 7; 8; 9\}$.

Zahl	Auf Zehner gerundet	Auf Hunderter gerundet
391	≈ 390	≈ 400
382	≈ 380	≈ 400
373	≈ 370	≈ 400
364	≈ 360	≈ 400
355	≈ 360	≈ 400
346	≈ 350	≈ 300
337	≈ 340	≈ 300
328	≈ 330	≈ 300
319	≈ 320	≈ 300

Somit kann eine länger dauernde Rechnung wie folgt dargestellt durch das Runden der Faktoren überschlagen werden:

$$6167 \cdot 3139 \approx 6000 \cdot 3000 = 18000000 \tag{3.16}$$

3.2.1 Übungsaufgaben zu Grundrechenarten

Aufgabe 1: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

$a)$ $3821 + 1347 =$	$b)$ $5962 + 8912 =$	$c)$ $2512 + 3246 =$	$d)$ $2353 + 4636 =$
$e)$ $4462 + 9543 =$	$f)$ $4156 + 3737 =$	$g)$ $9948 + 5499 =$	$h)$ $4784 + 8377 =$
$i)$ $9745 + 3726 =$	$j)$ $3269 + 9289 =$	$k)$ $4577 + 6201 =$	$l)$ $5031 + 5768 =$
$m)$ $5465 + 1202 =$	$n)$ $8415 + 2560 =$	$o)$ $8762 + 7355 =$	$p)$ $7437 + 1221 =$
$q)$ $4578 + 7377 =$	$r)$ $5786 + 4532 =$	$s)$ $1057 + 7800 =$	$t)$ $4204 + 4621 =$
$u)$ $9424 + 8054 =$	$v)$ $4438 + 4575 =$	$w)$ $7873 + 9724 =$	$x)$ $3432 + 7387 =$

Aufgabe 2: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

$a)$ $3821 - 1347 =$	$b)$ $5962 - 1912 =$	$c)$ $4512 - 3246 =$	$d)$ $9353 - 4636 =$
$e)$ $4462 - 2543 =$	$f)$ $4156 - 3737 =$	$g)$ $9948 - 5499 =$	$h)$ $4784 - 3377 =$
$i)$ $9745 - 3726 =$	$j)$ $7269 - 3289 =$	$k)$ $6201 - 4513 =$	$l)$ $5931 - 5768 =$
$m)$ $5465 - 1202 =$	$n)$ $8415 - 2560 =$	$o)$ $8762 - 7355 =$	$p)$ $7437 - 1221 =$
$q)$ $8578 - 7377 =$	$r)$ $5786 - 4532 =$	$s)$ $9057 - 7800 =$	$t)$ $7204 - 4621 =$
$u)$ $9424 - 8054 =$	$v)$ $7838 - 4575 =$	$w)$ $9873 - 9724 =$	$x)$ $8432 - 7387 =$

Aufgabe 3: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

$a)$ $8746 \cdot 5 =$	$b)$ $15366 \cdot 2 =$	$c)$ $24367 \cdot 7 =$	$d)$ $46383 \cdot 9 =$
$e)$ $76373 \cdot 3 =$	$f)$ $79342 \cdot 9 =$	$g)$ $78689 \cdot 4 =$	$h)$ $12057 \cdot 4 =$
$i)$ $13485 \cdot 6 =$	$j)$ $46024 \cdot 5 =$	$k)$ $97921 \cdot 7 =$	$l)$ $48566 \cdot 9 =$
$m)$ $27863 \cdot 6 =$	$n)$ $48760 \cdot 2 =$	$o)$ $97231 \cdot 9 =$	$p)$ $76867 \cdot 7 =$
$q)$ $38793 \cdot 8 =$	$r)$ $32138 \cdot 4 =$	$s)$ $79523 \cdot 3 =$	$t)$ $16967 \cdot 8 =$
$u)$ $23739 \cdot 7 =$	$v)$ $13877 \cdot 9 =$	$w)$ $24672 \cdot 3 =$	$x)$ $37979 \cdot 6 =$

Aufgabe 4: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

$a)$ $3821 \cdot 1347 =$	$b)$ $5962 \cdot 1912 =$	$c)$ $4512 \cdot 3246 =$	$d)$ $9353 \cdot 4636 =$
$e)$ $4462 \cdot 2543 =$	$f)$ $4156 \cdot 3737 =$	$g)$ $9948 \cdot 5499 =$	$h)$ $4784 \cdot 3377 =$
$i)$ $9745 \cdot 3726 =$	$j)$ $7269 \cdot 3289 =$	$k)$ $6201 \cdot 4513 =$	$l)$ $5931 \cdot 5768 =$
$m)$ $5465 \cdot 1202 =$	$n)$ $8415 \cdot 2560 =$	$o)$ $8762 \cdot 7355 =$	$p)$ $7437 \cdot 1221 =$
$q)$ $8578 \cdot 7377 =$	$r)$ $5786 \cdot 4532 =$	$s)$ $9057 \cdot 7800 =$	$t)$ $7204 \cdot 4621 =$
$u)$ $9424 \cdot 8054 =$	$v)$ $7838 \cdot 4575 =$	$w)$ $9873 \cdot 9724 =$	$x)$ $8432 \cdot 7387 =$

Aufgabe 5: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

$a)$ $7095 : 3 =$	$b)$ $2568 : 6 =$	$c)$ $4512 : 2 =$	$d)$ $5033 : 7 =$
$e)$ $7389 : 9 =$	$f)$ $9475 : 5 =$	$g)$ $9872 : 8 =$	$h)$ $6024 : 8 =$
$i)$ $9416 : 4 =$	$j)$ $7273 : 7 =$	$k)$ $7587 : 9 =$	$l)$ $3682 : 7 =$
$m)$ $7578 : 3 =$	$n)$ $6738 : 2 =$	$o)$ $8638 : 7 =$	$p)$ $8464 : 8 =$
$q)$ $8231 : 1 =$	$r)$ $4755 : 5 =$	$s)$ $6024 : 8 =$	$t)$ $5112 : 6 =$
$u)$ $6840 : 15 =$	$v)$ $9468 : 12 =$	$w)$ $7704 : 24 =$	$x)$ $5904 : 16 =$

Aufgabe 6: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

$a)$ $52589 + 26181 + 29292 =$	$b)$ $76332 + 43433 + 17660 =$
$c)$ $41374 + 43786 + 38997 =$	$d)$ $77893 + 13896 + 10459 =$
$e)$ $65643 + 48955 + 45505 =$	$f)$ $75125 + 16387 + 48762 =$
$g)$ $84153 + 45767 + 76242 + 34886 =$	$h)$ $10687 + 43783 + 27563 + 12075 =$
$i)$ $78913 + 16897 + 13459 + 46367 =$	$j)$ $16557 + 67899 + 12313 + 43781 =$
$k)$ $78979 + 21456 + 24870 + 49679 =$	$l)$ $79791 + 45646 + 16787 + 43485 =$
$m)$ $27958 + 85676 + 43131 + 10748 =$	$n)$ $78101 + 46670 + 45678 + 42389 =$

Aufgabe 7: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

$a)$ $25641 - 2985 - 9893 =$

$b)$ $89422 - 12995 - 29845 =$

$c)$ $79235 - 24242 - 11238 =$

$d)$ $85797 - 24563 - 24288 =$

$e)$ $61345 - 4253 - 43534 =$

$f)$ $78899 - 41234 - 24975 =$

$g)$ $899492 - 294412 - 21842 - 84492 =$

$h)$ $451574 - 12902 - 21085 - 258180 =$

$i)$ $785975 - 43733 - 73734 - 13488 =$

$j)$ $974276 - 82124 - 13749 - 57456 =$

$k)$ $913749 - 78622 - 46897 - 13789 =$

$l)$ $737133 - 52439 - 42397 - 23979 =$

$m)$ $331387 - 49792 - 92272 - 93961 =$

$n)$ $397321 - 41917 - 24427 - 104578 =$

Aufgabe 8: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

$a)$ $304 + 2345 + 7347 + 35 + 65474 + 4667 + 7554 + 890 + 756 =$

$b)$ $757 + 5763 + 7676 + 7621 + 13174 + 343 + 13453 + 43123 + 1231 =$

$c)$ $12305 + 4205 + 4634 + 781 + 7468 + 912 + 7287 + 1078 + 7866 + 42 =$

$d)$ $72876 + 456 + 4224 + 74866 + 7861 + 10556 + 10077 + 5761 + 289 =$

$e)$ $7866 + 2427 + 7644 + 44166 + 12404 + 786 + 72 + 9 + 72 + 1464 + 676 =$

$f)$ $928 + 13831 + 37227 + 82189 + 48422 + 12779 + 14456 + 468 + 42 =$

$g)$ $4323 + 23127 + 31978 + 23761 + 45 + 375 + 9 + 7 + 8 + 973 + 789 + 58 =$

$h)$ $1348 + 4638 + 743 + 438 + 763 + 4213 + 78791 + 1676 + 34522 + 127 =$

$i)$ $3723 + 3978 + 1418 + 8676 + 1357 + 52560 + 4567 + 121 + 3879 + 2 =$

$j)$ $7676 + 7687 + 164 + 4658 + 9723 + 15085 + 564 + 16678 + 1056 + 66 =$

$k)$ $4689 + 16876 + 1646 + 13034 + 13028 + 68234 + 38432 + 1684 + 1669 =$

$l)$ $4378 + 37653 + 5689 + 568 + 4 + 34789 + 76567 + 4576 + 56767 + 87 =$

$m)$ $565 + 17678 + 975 + 67332 + 25356 + 71251 + 26251 + 256 + 5148 =$

$n)$ $7864 + 463 + 46384 + 12344 + 894 + 89 + 7994 + 46876 + 2456 + 4646 =$

Aufgabe 9: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

a) $784461 - 5218 - 612 - 29 - 518 - 5184 - 51818 - 12123 - 512 =$

b) $579235 - 5436 - 3462 - 737 - 5478 - 23456 - 235 - 5347 - 8745 - 235 - 78 =$

c) $676697 - 657 - 435 - 76 - 36 - 876 - 896 - 436 - 6954 - 7568 - 345 - 34547 =$

d) $646876 - 4567 - 4578 - 2334 - 2340 - 7695 - 4576 - 346 - 768 - 345 - 89 - 5 =$

e) $246897 - 756 - 4697 - 7224 - 154 - 789 - 42 - 428 - 7899 - 4641 - 3105 - 456 =$

f) $121605 - 796 - 4610 - 1604 - 4567 - 10857 - 4676 - 4668 - 2133 - 4387 - 7 =$

g) $231230 - 46 - 7689 - 313 - 437 - 1287 - 1678 - 1015 - 4213 - 7371 - 1466 =$

h) $454304 - 496 - 1567 - 7676 - 11345 - 137 - 1389 - 89 - 78 - 227 - 2156 - 4 =$

i) $485492 - 458 - 7972 - 278 - 822 - 786 - 7869 - 741 - 7313 - 1235 - 3881 =$

j) $685768 - 7486 - 31532 - 1015 - 3773 - 1312 - 4156 - 13135 - 4387 - 135 =$

k) $654968 - 894 - 4310 - 1567 - 2076 - 6790 - 4657 - 1105 - 489 - 560 - 748 =$

l) $113453 - 431 - 3298 - 1397 - 113 - 7955 - 6746 - 1657 - 13333 - 88 - 799 =$

m) $113858 - 4689 - 7897 - 457 - 46 - 799 - 415 - 1567 - 4686 - 1676 - 667 - 87 =$

n) $579823 - 433 - 7896 - 6761 - 28766 - 2127 - 789 - 876 - 246 - 4376 - 8796 =$

Aufgabe 10: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

a) $645 + 46634 - 4233 + 2453 - 4313 - 946 - 8791 + 2763 - 4838 - 7862 =$

b) $4375 + 7676 - 1272 + 72823 - 3135 - 7891 - 2317 + 13857 + 4312 - 76 =$

c) $7486 + 1374 - 7896 - 4676 - 1646 - 6762 + 4899 + 10546 + 2489 - 46 - 93 =$

d) $97853 - 72879 + 27823 + 287393 + 42946 - 7398 - 78978 - 79125 - 4397 =$

e) $93197 - 4239 + 21139 + 2394 - 7898 + 9197 + 4324 - 7589 - 7888 - 21616 =$

f) $13795 - 729 - 789 + 4378 + 4387 - 7219 - 213 + 785 - 856 + 7686 + 16 - 7489 =$

g) $72988 - 4156 + 7676 - 12300 + 876 - 129 - 7952 - 435 + 4512 + 466 - 7319 =$

h) $74191 - 7573 + 1379 + 4554 + 4684 - 24231 - 219 - 8746 + 21385 + 55603 =$

i) $3493 + 74879 + 1355 - 1637 - 1239 - 29609 - 1307 - 1398 + 6297 - 12397 =$

j) $74931 - 72731 + 43292 - 297 + 139 - 759 - 764 + 4239 - 1397 - 1326 - 1647 =$

k) $64597 - 756 + 42398 - 23988 - 13197 - 53955 - 13987 + 23498 - 76 - 8796 =$

l) $64354 + 4598 + 197 - 789 - 13998 - 29971 + 23799 + 13457 + 5945 + 6791 =$

m) $78927 + 42398 - 12397 + 739 - 7891 + 7925 + 3021 - 1438 - 4931 - 2490 =$

n) $74867 - 43743 + 4567 - 67272 + 45667 + 28676 + 44343 - 89 - 7896 - 72 + 76669 =$

Aufgabe 11: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

a) $3821 + 1347 \cdot 43 =$

b) $4525 - 2070 : 6 =$

c) $8124 + 1347 - 4371 =$

d) $7124 - 2070 + 1392 =$

e) $4284 : 2 + 1347 \cdot 43 =$

f) $8285 : 5 - 5256 : 8 =$

g) $3482 \cdot 3 - 7432 : 4 =$

h) $8285 \cdot 8 : 5 - 5256 + 4361 =$

i) $1288 \cdot 2 \cdot 4 + 5416 : 4 : 2 =$

j) $4265 \cdot 3 - 3236 \cdot 2 + 1454 \cdot 4 =$

k) $822 \cdot 9 \cdot 6 : 3 - 632 \cdot 11 : 2 =$

l) $4265 : 5 + 6438 : 6 + 17848 : 8 =$

Aufgabe 12: *Berechne den Wert des Terms schriftlich.*

a) $1203 + 6799 + 5684 + 2156 + 9852 =$

b) $9982 - 595 - 651 - 3197 - 1637 =$

c) $11 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 =$

d) $1587 + 9613 + 9477 + 2674 + 2987 =$

e) $8745 - 2971 - 841 - 1052 - 681 =$

f) $5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 7 =$

g) $8461 + 5625 + 1098 + 6950 + 8509 =$

h) $7894 - 412 - 753 - 951 - 456 =$

i) $12 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9 =$

Aufgabe 13: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $2 + 6 \cdot 3 - 5 =$

b) $12 - 20 : 5 + 8 \cdot 2 =$

c) $2 \cdot 8 : 4 + 2 - 6 : 2 =$

d) $63 - 4 \cdot 7 - 3 \cdot 3 + 15 =$

e) $12 \cdot 4 - 6 \cdot 5 + 33 \cdot 7 - 43 \cdot 4 =$

f) $10 \cdot 45 - 15 : 5 \cdot 60 + 34 =$

g) $7 + 3 \cdot 17 + 56 \cdot 6 - 123 =$

h) $55 \cdot 48 : 4 : 3 - 12 \cdot 3 =$

i) $54 \cdot 11 - 9 \cdot 47 - 72 : 2 \cdot 3 =$

j) $74 \cdot 3 - 4 \cdot 8 + 32 \cdot 5 =$

k) $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 12 \cdot 5 =$

l) $864 : 8 : 3 + 23 \cdot 7 - 12 \cdot 4 =$

m) $142 \cdot 13 - 24 \cdot 82 : 4 + 91 \cdot 12 =$

n) $1249 \cdot 34 - 2135 : 5 + 235 \cdot 5 =$

Aufgabe 14: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 11 =$

$b)$ $4 \cdot 12 : 3 - 5 \cdot 2 + 3 =$

$c)$ $75 : 5 - 5 + 72 : 8 \cdot 3 =$

$d)$ $10 \cdot 9 - 3 \cdot 2 \cdot 9 =$

$e)$ $6 + 6 \cdot 5 \cdot 9 - 3 \cdot 6 =$

$f)$ $81 : 3 : 3 + 6 \cdot 7 - 5 \cdot 7 =$

$g)$ $55 - 3 \cdot 7 + 32 - 4 \cdot 3 \cdot 2 =$

$h)$ $15 \cdot 4 - 9 \cdot 3 - 4 \cdot 5 : 2 =$

$i)$ $60 : 5 : 6 + 24 \cdot 5 - 7 \cdot 9 =$

$j)$ $11 \cdot 99 - 2 \cdot 6 : 4 \cdot 8 =$

$k)$ $54 : 9 \cdot 3 + 7 \cdot 5 \cdot 3 =$

$l)$ $5 \cdot 5 \cdot 4 : 10 + 9 \cdot 4 : 3 =$

$m)$ $42 - 11 \cdot 3 + 3 \cdot 12 =$

$n)$ $49 \cdot 5 : 7 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 7 =$

Aufgabe 15: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $4731 + 3772 + 9141 + 1156 + 11278 + 3731 + 7542 + 1127 + 9346 =$

$b)$ $156 + 59342 + 3482 + 45642 + 284921 + 6432 + 25 + 27381 + 22833 =$

$c)$ $826265 - 1661 - 5683 - 34667 - 3727 - 8790 - 5204 - 4267 =$

$d)$ $438693 - 2362 - 2677 - 6431 - 6530 - 3256 - 1354 - 7532 - 2637 =$

$e)$ $36377 + 2367 + 2326 - 2362 - 6432 + 3467 - 9032 + 9463 - 7524 - 7345 =$

$f)$ $89349 + 3256 - 8347 + 8939 \cdot 11 - 4578 + 3250 - 6784 \cdot 5 =$

$g)$ $3422 \cdot 312 - 26806 + 6 \cdot 7846 - 92357 + 8356 \cdot 8 - 4362 =$

$h)$ $29857 - 23658 + 26 \cdot 366 - 543 + 23568 - 485 \cdot 38 - 436 + 326 - 2666 - 735 =$

Aufgabe 16: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $82 \cdot 24 - 3528 : 9 \cdot 3 =$

$b)$ $52347 - 45 \cdot 23 - 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 4 =$

$c)$ $541 \cdot 24 : 4 + 72 \cdot 12 - 83 \cdot 4 =$

$d)$ $5670 : 6 : 7 + 23 \cdot 17 - 13 \cdot 11 =$

$e)$ $55 \cdot 67 - 6460 : 6 \cdot 2 =$

$f)$ $14280 : 8 \cdot 2 - 14 \cdot 71 - 44 \cdot 5 =$

$g)$ $40 \cdot 70 \cdot 30 : 1000 - 450 : 10 + 80000 : 10000 =$

$h)$ $75 \cdot 25 - 7 \cdot 34 - 89 + 43 \cdot 21 =$

Aufgabe 17: *Schreibe die Rechnung auf und berechne den Wert des Terms.*

a) Die Summe ist gegeben aus den Zahlen 324 und 579.
b) Die Zahl 3960 bildet den Minuenden und die Zahl 1492 der Subtrahend.
c) Das Produkt aus 23 und 54 wird subtrahiert von 4930.
d) Der Dividend 49565 mit dem Divisor 5 bildet der Quotient, welcher auch ein Summand ist, der mit 1 addiert wird.
e) Vom Bruch mit dem Nenner 250 und dem Zähler 150000 wird das Produkt aus 111 und 3 subtrahiert.
f) Zwei gleiche Summanden, welche jeweils aus einem Produkt bestehen, werden addiert. Dabei sind alle vier Faktoren gleich und bestehen aus der Zahl 10.

Aufgabe 18: *Runde die Zahlen auf die angegebenen Stellen.*

a) 314745 auf volle Hunderter
b) 741854 auf volle Zehntausender
c) 451564 auf volle Hunderttausender
d) 451541 auf volle Tausender
e) 519419 auf volle Zehner
f) 982195 auf volle Zehntausender
g) 786461 auf volle Hunderter
h) 565656 auf volle Hunderttausender
i) 485452 auf volle Hunderter
j) 189891 auf volle Tausender
k) 767433 auf volle Hunderttausender
l) 789241 auf volle Zehntausender
m) 346893 auf volle Zehner
n) 421811 auf volle Tausender
o) 240048 auf volle Hunderter
p) 105730 auf volle Zehner
q) 468705 auf volle Hunderttausender
r) 756130 auf volle Zehntausender
s) 466876 auf volle Tausender
t) 486761 auf volle Hunderter
u) 607807 auf volle Tausender
v) 783789 auf volle Hunderttausender
w) 941204 auf volle Zehntausender
x) 123473 auf volle Tausender
y) 897078 auf volle Zehner
z) 378433 auf volle Hunderter

Aufgabe 19: *Schreibe die Zahl in Worten.*

a) 6564
b) 8746
c) 4367
d) 218054
e) 49926
f) 248979
g) 1278997
h) 2138972
i) 31297
j) 450900075
k) 450975000
l) 7932090187

Aufgabe 20: *Schreibe die Zahl in Ziffern.*

a) Viertausendzweihundertneunundzwanzig
b) Dreihundertvierundvierzigtausendzweihundertelf
c) Sechsundvierzigtausendensiebenhundertachtunddreißig
d) Fünfundfünfzigmillionensiebenhundertsiebenundzwanzig
e) Achthundertfünftausendneunhundertzweiundsiebzig
f) Zweihunderttausendsiebenundachtzig
g) Einhundertsechszehntausendfünfhunderteinundzwanzig
h) Elfmilliardensechshunderttausendneunhundertzwölf
i) Dreimilliardensiebenhundertneunmillionenfünfhundertsechsundneunzigtausendeinhundertvierzig
l) Vierhundertsiebzehnbilliarden

Aufgabe 21: *Berechne die fehlenden Felder.*

a)

+	3423	9384	5839	8074
7524				
9453				
6426				
5896				

b)

+	8746	1289	7513	8508
5318				
2469				
7351				
9793				

Aufgabe 22: *Berechne die fehlenden Felder.*

a)

·	75	82	94	37
55				
97				
37				
43				

b)

·	46	95	49	38
87				
54				
63				
21				

Aufgabe 23: *Berechne die fehlenden Felder.*

a) $\boxed{185} \xrightarrow{\cdot 3} \square \xrightarrow{+482} \square \xrightarrow{-289} \square \xrightarrow{\cdot 6} \square$

b) $\boxed{6726} \xrightarrow{-2544} \square \xrightarrow{:\,2} \square \xrightarrow{-542} \square \xrightarrow{\cdot 7} \square$

c) $\boxed{92} \xrightarrow{\cdot 17} \square \xrightarrow{:\,4} \square \xrightarrow{+1245} \square \xrightarrow{-743} \square$

d) $\boxed{18144} \xrightarrow{:\,8} \square \xrightarrow{:\,6} \square \xrightarrow{\cdot 7} \square \xrightarrow{+3284} \square$

e) $\boxed{4719} \xrightarrow{-2089} \square \xrightarrow{:\,5} \square \xrightarrow{\cdot 11} \square \xrightarrow{-717} \square$

f) $\boxed{258} \xrightarrow{\cdot 19} \square \xrightarrow{:\,6} \square \xrightarrow{\cdot 9} \square \xrightarrow{-6295} \square$

Aufgabe 24: *Berechne die fehlenden Felder.*

a) $\boxed{841} \xrightarrow{\cdot 13} \square \xrightarrow{-7483} \square \xrightarrow{-2137} \square \xrightarrow{\cdot 73} \square$

$\downarrow -4263$

$\square \xleftarrow{\cdot 7} \square \xleftarrow{+4842} \square \xleftarrow{-6249} \square \xleftarrow{\cdot 5} \square$

b) $\boxed{7378} \xrightarrow{-7183} \square \xrightarrow{\cdot 64} \square \xrightarrow{:\,4} \square \xrightarrow{\cdot 7} \square$

$\downarrow +1384$

$\square \xleftarrow{-2843} \square \xleftarrow{:\,2} \square \xleftarrow{\cdot 6} \square \xleftarrow{-487} \square$

c) $\boxed{7169} \xrightarrow{+2431} \square \xrightarrow{:\,5} \square \xrightarrow{-1745} \square \xrightarrow{+8314} \square$

$\downarrow -4263$

$\square \xleftarrow{+2389} \square \xleftarrow{:\,4} \square \xleftarrow{\cdot 22} \square \xleftarrow{-3792} \square$

d) $\boxed{59} \xrightarrow{\cdot 72} \square \xrightarrow{:\,8} \square \xrightarrow{+8181} \square \xrightarrow{:\,9} \square$

$\downarrow +6437$

$\square \xleftarrow{+5289} \square \xleftarrow{:\,9} \square \xleftarrow{\cdot 5} \square \xleftarrow{-6487} \square$

Aufgabe 25: *Runde die Zahlen, wie in der Tabelle angeben.*

Runde auf:	Zehner	Hunderter	Tausender	Zehntausender	Hunderttausender
52893					
159423					
852251					
498825					
515892					
218453					
349979					
379099					
48576					

Aufgabe 26: *Sortiere die Zahlen nach der Größe.*

a) 346 ; 3346 ; 748 ; 456 ; 345 ; 4568 ; 33788 ; 5753 ; 6535 ; 5788

b) 586 ; 4578 ; 5347 ; 3477 ; 7075 ; 2345 ; 46 ; 547 ; 4568 ; 5748 ; 457

c) 769 ; 679 ; 345 ; 5687 ; 456 ; 34 ; 9786 ; 457 ; 78 ; 46 ; 690 ; 511 ; 1818

d) 7116 ; 1582 ; 1510 ; 1110 ; 8812 ; 1561 ; 87661 ; 21084 ; 1844 ; 1598

e) 7311 ; 4894 ; 6456 ; 5048 ; 857661 ; 16877 ; 13004 ; 876041 ; 6749

f) 70 ; 156 ; 576 ; 416 ; 31 ; 354 ; 81108 ; 87661 ; 1561 ; 18769 ; 15131

Aufgabe 27: *Auf einem Straßenschild steht, dass eine Stadt* 127 *km weit vom aktuellen Standpunkt entfernt ist, während eine andere Stadt* 94 *km weit weg sein soll. Die Städte liegen in unterschiedlichen Richtungen, wie weit sind die Städte von einander entfernt?*

Aufgabe 28: *Der Weg zum Schulbus eines Schülers beträgt* 487 *m, welcher dieser täglich zweimal laufen muss. Wie viel Meter legt dieser Schüler in einem Schuljahr mit* 189 *Tagen zurück?*

Aufgabe 29: *In einer Tüte befinden sich immer* 1080 *Schokolinsen, wie viel könnten* 4 *beziehungsweise* 5 *Kinder jeweils bekommen?*

Aufgabe 30: *In einem Land leben* 80619847 *Menschen. Jede Woche werden des durchschnittlich* 3107 *Menschen weniger. Berechne wie viele Menschen nach* 7 *Jahren noch in diesem Land wohnen. (Nimm an, dass ein Jahr insgesamt* 52 *Wochen besitzt.)*

Aufgabe 31: *Auf einem Straßenschild ist verzeichnet, dass in der Fahrtrichtung die Stadt A in* 47 km*, die Stadt B in* 74 km*, die Stadt C in* 213 km *und die Stadt D in* 542 km *befinden. Berechne die Entfernungen zwischen allen Städten.*

Aufgabe 32: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $3 \cdot 8 - 5 =$
b) $11 + 9 \cdot 7 =$
c) $6 \cdot 4 - 14 =$
d) $13 \cdot 21 + 43 =$
e) $34 + 26 \cdot 64 =$
f) $58 \cdot 69 - 345 =$
g) $723 \cdot 458 - 4567 =$
h) $4376 + 477 \cdot 365 =$
i) $8458 \cdot 4578 - 34667 =$
j) $24566 \cdot 3507 + 3250557 =$

Aufgabe 33: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $2 \cdot 7 - 5 \cdot 2 =$
b) $7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 =$
c) $7 \cdot 4 - 5 \cdot 3 =$
d) $34 \cdot 28 + 23 \cdot 86 =$
e) $78 \cdot 58 + 86 \cdot 64 =$
f) $23 \cdot 78 - 23 \cdot 43 =$
g) $464 \cdot 355 - 456 \cdot 233 =$
h) $6747 \cdot 876 + 456 \cdot 7687 =$
i) $5667 \cdot 8939 - 6076 \cdot 3409 =$
j) $571 \cdot 56186 + 4716 \cdot 48013 =$

Aufgabe 34: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $161 : 7 - 4 \cdot 3 =$
b) $7 \cdot 8 + 675 : 5 =$
c) $144 : 4 - 108 : 9 =$
d) $64 \cdot 13 - 2144 : 8 =$
e) $468 : 6 + 86 + 21 \cdot 37 =$
f) $34504 - 2622 : 3 - 765 : 9 =$
g) $146 \cdot 279 - 102123 : 7 =$
h) $179 \cdot 2792 - 547 + 23572 : 4 =$
i) $53928 : 9 - 308 + 32942 : 7 =$
j) $4045 \cdot 10546 \cdot 2 - 4356 \cdot 342 =$

Aufgabe 35: *Bestimme die fehlenden Felder. Hierbei werden zwei benachbarte Felder miteinander addiert und die Summe in dem Feld darüber eingetragen.*

15		
7	8	
2	5	3

7	9	2

	20	
21	17	

171		
96		
	59	

190		
113		69

1093		
628		
		93

	649	
397		147

3004		
1502		
333		

1551	1421	
856		

Aufgabe 36: *Bestimme die fehlenden Felder. Hierbei werden zwei benachbarte Felder miteinander multipliziert und das Produkt in dem Feld darüber eingetragen.*

150		
10	15	
2	5	3

7	8	3

	36	
5	9	

44	77	

27		
3		1

60	180	
	12	

221		
	17	21

1008		
24		18

0		
	890	
		5

Aufgabe 37: *Bestimme die fehlenden Felder. Hierbei werden zwei benachbarte Felder in der untersten Zeile miteinander multipliziert und das Produkt in dem Feld darüber eingetragen. Anschließend werden diese beiden Produkte addiert und die Summe in dem Feld darüber eingetragen.*

25		
10	15	
2	5	3

7	3	5

25		
		5

32		
28		
	4	

120		
66		
11		

24		
6		2

80		
56		
	8	

200		
15		25

0		

Aufgabe 38: *Bestimme die fehlenden Felder. Hierbei werden zwei benachbarte Felder in der untersten Zeile miteinander addiert und die Summe in dem Feld darüber eingetragen. Anschließend werden diese beiden Summen multipliziert und das Produkt in dem Feld darüber eingetragen.*

56		
7	8	
2	5	3

4	6	9

	14	
3		9

270		
18		
7		

144		
	3	

462		
	22	
	17	

27		
	0	

85		
	17	
4		

2	2	

Aufgabe 39: *Berechne den Wert des Terms.* (Lösung mit Rechenweg)

$a)$ $547272 + 266634 =$ $b)$ $618415 + 784521 =$ $c)$ $874641 + 874150 =$
$d)$ $710301 + 525167 =$ $e)$ $537116 + 623418 =$ $f)$ $784165 + 541105 =$

Aufgabe 40: *Berechne den Wert des Terms.* (Lösung mit Rechenweg)

$a)$ $547272 - 266634 =$ $b)$ $618415 - 384521 =$ $c)$ $874641 - 374150 =$
$d)$ $710301 - 525167 =$ $e)$ $537116 - 423418 =$ $f)$ $784165 - 541105 =$

Aufgabe 41: *Berechne den Wert des Terms.* (Lösung mit Rechenweg)

$a)$ $547272 \cdot 6 =$ $b)$ $618415 \cdot 3 =$ $c)$ $874641 \cdot 7 =$
$d)$ $710301 \cdot 9 =$ $e)$ $537116 \cdot 4 =$ $f)$ $784165 \cdot 8 =$

Aufgabe 42: *Berechne den Wert des Terms.* (Lösung mit Rechenweg)

$a)$ $5472 \cdot 4564 =$ $b)$ $6115 \cdot 2566 =$ $c)$ $8441 \cdot 9732 =$
$d)$ $7101 \cdot 4047 =$ $e)$ $5716 \cdot 4464 =$ $f)$ $7865 \cdot 9564 =$

Aufgabe 43: *Berechne den Wert des Terms.* (Lösung mit Rechenweg)

$a)$ $7870518 : 9 =$ $b)$ $2931138 : 6 =$ $c)$ $3779127 : 3 =$
$d)$ $6122074 : 7 =$ $e)$ $2560356 : 4 =$ $f)$ $7200168 : 8 =$

Aufgabe 44: *Runde die Zahlen auf die angegebene Stelle.*

a) $86517 \approx$ auf Hunderter
b) $46355 \approx$ auf Zehner
c) $86874 \approx$ auf Zehntauserndder
d) $46412 \approx$ auf Hunderter
e) $64864 \approx$ auf Tausender
f) $41108 \approx$ auf Zehner
g) $48971 \approx$ auf Hunderter
h) $16789 \approx$ auf Hunderter
i) $12045 \approx$ auf Tausender
j) $79774 \approx$ auf Zehntauserndder
k) $55995 \approx$ auf Zehner
l) $8485 \approx$ auf Zehntauserndder

Aufgabe 45: *Übersetze den Text in eine Rechnung und berechne den Wert des Terms.* (Lösung mit Rechenweg)

a) Der Summand 17 wird mit 89 addiert.
b) Vom Minuenden 47 wird der Subtrahend 19 subtrahiert. Die Differenz wird mit 63 addiert.
c) Ein Produkt wird ein drei Faktoren gebildet, wobei diese 5, 9 und 13 sind.
d) Die Summe aus 55 und 41 soll mit dem Dividenden 8 dividiert werden.
e) Eine Summe besteht aus einem Produkt und einem Quotienten, wobei das Produkt aus den Zahlen 27 und 32 besteht, während der Dividend 132 und der Divisor 4 des anderen Summanden ist.
f) Das gesuchte Produkt besteht aus zwei Summanden, wobei der erste aus den Zahlen 17 und 84 und er zweite Summand aus den Zahlen 77 und 24 gebildet wird.

Aufgabe 46: *Berechne den Wert des Terms.* (Lösung mit Rechenweg)

a) $453 + 61 \cdot 73 =$
b) $943 \cdot 4 - 3567 =$
c) $(432 + 556 : 2) \cdot 3 =$
d) $4 \cdot 8935 : 5 - 436 =$
e) $(345 \cdot 3 - 645 : 3) \cdot (42 - 38) =$
f) $569 - (2464 - 768 : 4) : 4 =$

Aufgabe 47: *Zeige die Gleichheit.* (Lösung mit Rechenweg)

a) $22736 - 5684 \cdot 4 = (25 \cdot 40 + 101) \cdot 6 - 39636 : 6$
b) $5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3 = (((7257600 : 8) : 5) : 6) : 7$
c) $(49 + 32) \cdot 2 \cdot (64 - 23) = 41 \cdot 3 \cdot 6 \cdot (7897 - 986 \cdot 8)$
d) $83485 \cdot 345789 - 345789 \cdot 83485 + 892346 : 7 = 2 \cdot (1267 + 101 \cdot 36) \cdot 13$

Aufgabe 48: *Führe eine Überschlagsrechnung durch.*

a) $3120 \cdot 431 \approx$ *b)* $9175 + 5884 \approx$ *c)* $7541 - 5671 \approx$

d) $8415 : 521 \approx$ *e)* $78484 + 65418 \approx$ *f)* $23181 - 18746 \approx$

g) $68484 : 4117 \approx$ *h)* $51855 \cdot 15151 \approx$ *i)* $58355 \cdot 6841 \approx$

j) $98441 : 5415 \approx$ *k)* $87416 \cdot 17452 \approx$ *l)* $45488 - 34131 \approx$

Aufgabe 49: *Entscheide durch eine Überschlagsrechnung welches Relationszeichen („>“ oder „<“) eingetragen werden muss.*

a) $715 \cdot 518$ ☐ $125414 + 213184$ *b)* $3964363 : 19359$ ☐ $5484 - 2818$

c) $284 \cdot 189$ ☐ $91478 : 19$ *d)* $77484 + 63151$ ☐ $321106 - 189113$

Aufgabe 50: *Bestimme den Wert des Terms.*

a) $5^2 \cdot 3^3 - 4^4 =$ *b)* $7^2 + 3^4 + 5^3 =$ *c)* $4^3 \cdot 8^2 =$

d) $7^3 + 6^4 - 4^5 =$ *e)* $11^3 - 12^2 - 17^2 =$ *f)* $25^3 + 13^2 \cdot 6^4 =$

Aufgabe 51: *Berechne den Wert des Terms und beschreibe danach wie diese Rechnungen vereinfacht ausgeführt werden können.*

a) $3 \cdot 400 =$ *b)* $50 \cdot 90 =$ *c)* $200 \cdot 1100 =$

d) $800 \cdot 7000 =$ *e)* $1200 \cdot 7000 =$ *f)* $80000 \cdot 30000 =$

Aufgabe 52: *Berechne den Wert des Terms und beschreibe danach wie diese Rechnungen vereinfacht ausgeführt werden können.*

a) $400 : 200 =$ *b)* $5000 : 1000 =$ *c)* $270000 : 30000 =$

d) $48000 : 800 =$ *e)* $77000 : 110 =$ *f)* $84000 : 40 =$

g) $7200 : 9 =$ *h)* $48000 : 12 =$ *i)* $32000 : 400 =$

Aufgabe 53: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $45 : 7 + 18 : 7 =$ *b)* $83 : 5 - 48 : 5 =$

c) $37 : 11 + 84 : 11 =$ *d)* $35 : 6 - 17 : 6 =$

e) $543 : 8 + 633 : 8 =$ *f)* $3179 : 9 - 875 : 9 =$

g) $1101 : 4 + 1301 : 4 + 1410 : 4 =$ *h)* $9820 : 7 - 2177 : 7 - 1595 : 7 =$

Aufgabe 54: *Berechne die Werte der Terme und beschreibe die Auffälligkeit.*

a)
$$(14505 : 5) : 3 =$$
$$(14505 : 3) : 5 =$$
$$14505 : (5 \cdot 3) =$$
$$14505 : 15 =$$

b)
$$(19824 : 8) : 7 =$$
$$(19824 : 7) : 8 =$$
$$19824 : (7 \cdot 8) =$$
$$19824 : 56 =$$

c)
$$(136136 : 7) : 4 =$$
$$(14505 : 4) : 7 =$$
$$14505 : (7 \cdot 4) =$$
$$14505 : 28 =$$

d)
$$((15570 : 2) : 3) : 5 =$$
$$((15570 : 2) : 5) : 3 =$$
$$((15570 : 3) : 2) : 5 =$$
$$((15570 : 3) : 5) : 2 =$$
$$((15570 : 5) : 3) : 2 =$$
$$((15570 : 5) : 2) : 3 =$$
$$15570 : (2 \cdot 3 \cdot 5) =$$
$$15570 : 30 =$$

e)
$$(52752 : (7 \cdot 4)) : 3 =$$
$$(52752 : (7 \cdot 3)) : 4 =$$
$$(52752 : (4 \cdot 7)) : 3 =$$
$$(52752 : (4 \cdot 3)) : 7 =$$
$$(52752 : (3 \cdot 4)) : 7 =$$
$$(52752 : (3 \cdot 7)) : 4 =$$
$$52752 : (7 \cdot 3 \cdot 4) =$$
$$52752 : 84 =$$

f)
$$(((907410 : 7) : 5) : 3) : 2 =$$
$$(907410 : (7 \cdot 5)) : (3 \cdot 2) =$$
$$(907410 : (7 \cdot 3)) : (5 \cdot 2) =$$
$$(907410 : (7 \cdot 5 \cdot 2)) : 3 =$$
$$(907410 : (3 \cdot 5 \cdot 2)) : 7 =$$
$$(907410 : 15) : 14 =$$
$$(907410 : 6) : 35 =$$
$$907410 : 210 =$$

Aufgabe 55: *Berechne alle Felder der Tabelle. In den ersten drei Spalten wird den Parametern ein Wert pro Zeile zugelassen. In den darauffolgenden Spalten wird im obersten Feld die geforderte Rechnung angegeben.* (Benötigt Kapitel „Einsetzungverfahren“)

a	b	c	$a+c$	$a \cdot c$	$a+b+c$	$c+a \cdot b$	$c \cdot a - b$	$b \cdot (a+b)$	$c \cdot c$
4	7	3							
3	2	8							
8	9	5							
6	4	9							
9	5	4							
8	4	7							
6	5	12							

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.3) Lösungen zu den Grundrechenarten.

3.3 Teilbarkeiten

Die Untersuchung von Zahlen auf ihre *Teilbarkeit*, lässt den Umgang mit großen Zahlen verbessern. Besonders in der Informatik ist die Zerlegung von Zahlen in ihre *Faktoren* und sogar auf ihre elementarsten *Faktoren*, den *Primzahlen*, von besonderer Bedeutung. Folgende Regeln, um *Teiler* zu ermitteln, existieren:

- *Summen-* und *Differenzregel*: Wenn eine Zahl zwei andere Zahlen *teilt*, dann teilt sie auch die *Summe* bzw. die *Differenz* dieser Zahlen. Beispiel: $720 : 6 + 18 : 6 = 738 : 6$

- *Teilerregel*: Wenn eine Zahl a *Teiler* einer Zahl b ist, dann ist auch jeder *Teiler* von a *Teiler* von b. Beispiel: 4 ist ein *Teiler* von 12 und 12 ein *Teiler* von 720, also ist 4 auch ein *Teiler* von 720.

- Endstellenregeln:
  1. Eine Zahl ist durch 10 *teilbar*, wenn ihre letzte *Ziffer* eine 0 ist. Beispiel: 436360.
  2. Eine Zahl ist durch 5 *teilbar*, wenn ihre letzte *Ziffer* eine 5 oder eine 0 ist. Beispiel: 436360.
  3. Eine Zahl ist durch 2 *teilbar*, wenn ihre letzte *Ziffer* eine gerade *Ziffer* ist. Beispiel: 436360.
  4. Eine Zahl ist durch 4 *teilbar*, wenn ihre letzten beiden *Ziffern* eine durch 4 *teilbare* Zahl darstellen. Beispiel: 436360.
  5. Eine Zahl ist durch 8 *teilbar*, wenn ihre letzten drei *Ziffern* eine durch 8 *teilbare* Zahl darstellen. Beispiel: 436360.

- *Quersummenregeln*:
  1. Eine Zahl ist durch 3 *teilbar*, wenn ihre *Quersumme* durch 3 *teilbar* ist. Beispiel: $36369 \Rightarrow 3 + 6 + 3 + 6 + 9 = 27$, 3 ist ein Teiler von 27 und somit auch 36360.
  2. Eine Zahl ist durch 9 *teilbar*, wenn ihre *Quersumme* durch 9 *teilbar* ist. Beispiel: $36369 \Rightarrow 3 + 6 + 3 + 6 + 9 = 27$, 9 ist ein Teiler von 27 und somit auch 36360.

- *Alternierende Ziffernsumme*: Eine Zahl ist durch 11 *teilbar*, wenn die *alternierende Ziffernsumme* durch 11 *teilbar* ist. Beispiel 5938394: *alternierende Ziffernsumme*: $5 - 9 + 3 - 8 + 3 - 9 + 4 = -11$. Die *negative* 11 ist auch durch 11 *teilbar*, also ist 11 auch ein *Teiler* von 5938394.

- Regel für die Sieben: Wenn die *Differenz* der Zahl ohne die letzte *Ziffer* und das doppelte der letzten Ziffer durch 7 *teilbar* ist, dann ist auch die gesamte Zahl durch 7 *teilbar*. Beispiel: 665875 wird zerlegt in 66587 und 5, verrechnet und das Prozedere anschließend solange wiederholt bis die *Teilbarkeit* durch das Einmaleins zu entweder zu erkennen oder auszuschließen ist.

$$\begin{aligned} 665875 \;\Rightarrow\; 66587 - 2 \cdot 5 &= 66577 \\ 6657 - 2 \cdot 7 &= 6643 \\ 664 - 2 \cdot 3 &= 658 \\ 65 - 2 \cdot 8 &= 49 \\ \Rightarrow\; 7|49 \;&\Rightarrow 7|665875 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Eine besondere Eigenschaft zu den Teilbarkeitsregeln stellt die Zahl 9 dar, wobei die Zahl 9 ist ein Teiler einer beliebigen Zahl z von der die Quersumme der Zahl $Q(z)$ subtrahiert wurde. *Primzahlzerlegung*: Jede Zahl kann so lange zerlegt werden bis sie nur noch durch *Faktoren* aus *Primzahlen* dargestellt wird. Dabei werden alle Regeln angewendet. Beispiel: $1576575 = 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 7$. Hier wird auch deutlich, dass noch wesentlich mehr *Teilbarkeitsregeln* existieren - besonders für *Primzahlen*.

Eine besondere Rolle für die weiteren Regeln spielt die *Quersumme* und die *alternierende Quersummen*. Bei einer *Quersumme* $Q_k(z)$ werden die einzelnen *Ziffern* einer Zahl *aufaddiert*: $z = 987654321 \;\Rightarrow\; Q_1(z) = 9+8+7+6+5+4+3+2+1$. Bei der *alternierenden Quersumme* $AQ_k(z)$ wechseln sich *Additions*- und *Subtraktionsoperatoren* ab.

$$\begin{aligned} z &= 987654321 \\ AQ_1(z) &= 9 - 8 + 7 - 6 + 5 - 4 + 3 - 2 + 1 \\ AQ_2(z) &= 9 - 87 + 65 - 43 + 21 \\ AQ_3(z) &= 987 - 654 + 321 \\ AQ_4(z) &= 9 - 8765 + 4321 \\ AQ_5(z) &= 9876 - 54321 \\ AQ_6(z) &= 987 - 654321 \\ Q_2(z) &= 9 + 87 + 65 + 43 + 21 \\ Q_3(z) &= 987 + 654 + 321 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Dabei gibt die Zahl im *Index* an nach welcher *Ziffernstelle* von hinten der jeweilige *Operator* gesetzt werden muss. So wird bei einer *alternierenden* 3er-*Quersumme* der erste *Operator* nach drei *Ziffern* von hinten gesetzt.

Generell gilt die Notation $3|27$, was „27 ist durch 3 *teilbar*“ beziehungsweise „27 ist ein *Vielfaches* von 3“ oder „3 ist ein *Teiler* von 27“. Umgekehrt gilt $3 \nmid 28$, was „28 ist nicht durch 3 *teilbar*“ bedeutet.

Für ein tief erreichendes Verständnis der Multiplikation sowie Division und somit der Bruchrechnung aufzubauen, ist die Bestimmung vom „kleinsten gemeinsamen Vielfachen“, „größter gemeinsamer Teiler“ und „Teilermengen“ hilfreich:

- Teilermengen: Um die Teilermenge einer Zahl zu bestimmen müssen alle natürlichen Zahlen gefunden werden, durch die die betrachtete Zahl dividiert werden kann. Wenn ein Teiler gefunden wurde, kann durch die Division der dazugehörige Teiler gefunden werden, sodass sich auch die größeren Zahlen ergeben. Zur Veranschaulichung der Notation werden Beispiele gewählt:

$$\begin{aligned} T_{21} &= \{1;3;7;21\} \\ T_{36} &= \{1;2;3;4;9;12;36\} \\ T_{23} &= \{1;23\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

- Kleinstes gemeinsames Vielfach: Das kleinste gemeinsame Vielfach kann verwendet werden, um Brüche auf den gleichen Nenner zu bringen, wovon allerdings hier in diesem Buch abgeraten wird, da auch nach der Verrechnung der Brüche gekürzt werden kann. Zur Notation wieder einige Beispiele:

$$\begin{aligned} kgV(4;5) &= 20 \\ kgV(2;8) &= 8 \\ kgV(6;9) &= 18 \end{aligned} \tag{3.20}$$

- Größter gemeinsamer Teiler: Um Brüche effektiv zu kürzen, kann in mehreren Schritten auf die Teilbarkeitsregeln zurückgegriffen werden oder mit dem größten gemeinsamen Teiler das Kürzen auf einen einzigen Schritt reduziert werden, wobei die Teilbarkeitsregeln in diesem Buch einen höheren Stellenwert besitzen werden. Zur Notation wieder einige Beispiele:

$$\begin{aligned} ggT(45;35) &= 5 \\ ggT(12;48) &= 12 \\ ggT(8;17) &= 1 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Durch Vergleich der Teilermengen oder der Primzahlzerlegung über die Teilbarkeitsregeln, kann der größte gemeinsame Teiler gefunden werden. Wobei auch das sogenannte Euklidische Verfahren verwendet werden kann, welches ein iteratives Divisionsverfahren mit Rest darstellt: Hierbei wird der Divisor durch den Rest geteilt wird bis kein Rest mehr existiert. Der letzte Divisor ist somit der größte gemeinsame Teiler

$$\begin{aligned} ggT(159;789) &\Rightarrow 159 : 789 = 0 \text{ Rest } 159 \Rightarrow ggT(159;789) = ggT(789;159) \\ &\Rightarrow 789 : 159 = 4 \text{ Rest } 153 \Rightarrow ggT(789;159) = ggT(159;153) \\ &\Rightarrow 159 : 153 = 1 \text{ Rest } 6 \Rightarrow ggT(159;153) = ggT(153;6) \\ &\Rightarrow 153 : 6 = 25 \text{ Rest } 3 \Rightarrow ggT(153;6) = ggT(6;3) \\ &\Rightarrow 6 : 3 = 2 \text{ Rest } 0 \Rightarrow ggT(159;789) = 3 \end{aligned} \tag{3.22}$$

3.3.1 Übungsaufgaben zu Teilbarkeiten

Aufgabe 1: *Bestimme die Quersummen der Zahlen.*

$a)$ 20355726	$b)$ 34786396	$c)$ 72650261	$d)$ 32950250
$e)$ 94101501	$f)$ 78258003	$g)$ 14062678	$h)$ 23758627
$i)$ 34620512	$j)$ 28359015	$k)$ 35800135	$l)$ 64838390
$m)$ 23500325	$n)$ 81015806	$o)$ 34789179	$p)$ 75946873

Aufgabe 2: *Bestimme die alternierende Quersummen der Zahlen.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen"!)

$a)$ 20355726	$b)$ 34786396	$c)$ 72650261	$d)$ 32950250
$e)$ 94101501	$f)$ 78258003	$g)$ 14062678	$h)$ 23758627
$i)$ 34620512	$j)$ 28359015	$k)$ 35800135	$l)$ 64838390
$m)$ 23500325	$n)$ 81015806	$o)$ 34789179	$p)$ 75946873

Aufgabe 3: *Bestimme die 2er-, 3er- und 4er-Quersummen beziehungsweise alternierende 2er-, 3er- und 4er-Quersummen der Zahlen.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen"!)

$a)$ 20355726	$b)$ 34786396	$c)$ 72650261	$d)$ 32950250
$e)$ 94101501	$f)$ 78258003	$g)$ 14062678	$h)$ 23758627
$i)$ 34620512	$j)$ 28359015	$k)$ 35800135	$l)$ 64838390
$m)$ 23500325	$n)$ 81015806	$o)$ 34789179	$p)$ 75946873

Aufgabe 4: *Bestimme, ob die Zahl* 2 *ein Teiler der angebenden Zahl ist.*

$a)$ 20355726	$b)$ 34786394	$c)$ 72650261	$d)$ 32950250
$e)$ 94101508	$f)$ 78258003	$g)$ 14062672	$h)$ 23758624
$i)$ 34620512	$j)$ 28359015	$k)$ 35800135	$l)$ 64838390
$m)$ 23500326	$n)$ 81015802	$o)$ 34789179	$p)$ 75946878

Aufgabe 5: *Bestimme, ob die Zahl* 3 *ein Teiler der angebenden Zahl ist.*

$a)$ 20355726	$b)$ 34786396	$c)$ 72650261	$d)$ 32951250
$e)$ 94101501	$f)$ 78258003	$g)$ 14062678	$h)$ 23758627
$i)$ 34620512	$j)$ 28359015	$k)$ 35800135	$l)$ 64838490
$m)$ 23500325	$n)$ 81015806	$o)$ 34789179	$p)$ 75946773

Aufgabe 6: *Bestimme, ob die Zahl* 4 *ein Teiler der angebenden Zahl ist.*

$a)$ 20355716	$b)$ 34786394	$c)$ 72650264	$d)$ 32950280
$e)$ 94101508	$f)$ 78258043	$g)$ 14062672	$h)$ 23758624
$i)$ 34620512	$j)$ 28359015	$k)$ 35800135	$l)$ 64838390
$m)$ 23500326	$n)$ 81015836	$o)$ 34789176	$p)$ 75946878

Aufgabe 7: *Bestimme, ob die Zahl* 5 *ein Teiler der angebenden Zahl ist.*

$a)$ 20355725	$b)$ 34786395	$c)$ 72650260	$d)$ 32950250
$e)$ 94101508	$f)$ 78258005	$g)$ 14062670	$h)$ 23758624
$i)$ 34620510	$j)$ 28359015	$k)$ 35800137	$l)$ 64838390
$m)$ 23500326	$n)$ 81015802	$o)$ 34789175	$p)$ 75946878

Aufgabe 8: *Bestimme, ob die Zahl* 8 *ein Teiler der angebenden Zahl ist.*

$a)$ 20355728	$b)$ 34786096	$c)$ 72650261	$d)$ 32950250
$e)$ 94101464	$f)$ 78258024	$g)$ 14062672	$h)$ 23758624
$i)$ 34620112	$j)$ 28359015	$k)$ 35800135	$l)$ 64838360
$m)$ 23500336	$n)$ 81015840	$o)$ 34789179	$p)$ 75946872

Aufgabe 9: *Bestimme, ob die Zahl* 9 *ein Teiler der angebenden Zahl ist.*

$a)$ 80355726	$b)$ 34786395	$c)$ 72650261	$d)$ 32950350
$e)$ 94101508	$f)$ 78258123	$g)$ 14062672	$h)$ 23758624
$i)$ 55630512	$j)$ 28359015	$k)$ 35820135	$l)$ 64878390
$m)$ 23500326	$n)$ 81035802	$o)$ 34789179	$p)$ 75946878

Aufgabe 10: *Bestimme, ob die Zahl* 10 *ein Teiler der angebenden Zahl ist.*

$a)$ 20355726	$b)$ 34786390	$c)$ 72650261	$d)$ 32950250
$e)$ 94101500	$f)$ 78258000	$g)$ 14062670	$h)$ 23758624
$i)$ 34620510	$j)$ 28359015	$k)$ 35800135	$l)$ 64838390
$m)$ 23500326	$n)$ 81015800	$o)$ 34789179	$p)$ 75946870

Aufgabe 11: *Bestimme, ob die Zahl* 11 *ein Teiler der angebenden Zahl ist.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“!)

$a)$ 20355726	$b)$ 84786394	$c)$ 72650263	$d)$ 32650250
$e)$ 94101502	$f)$ 78758063	$g)$ 17062672	$h)$ 23758624
$i)$ 34520512	$j)$ 28359419	$k)$ 35800135	$l)$ 65838399
$m)$ 23500326	$n)$ 81015802	$o)$ 84989179	$p)$ 75946878

Aufgabe 12: *Bestimme, ob die Zahl* 7 *ein Teiler der angebenden Zahl ist.*

$a)$ 20355727	$b)$ 34786394	$c)$ 72650261	$d)$ 32950250
$e)$ 94101511	$f)$ 78258005	$g)$ 14062672	$h)$ 23758623
$i)$ 34620512	$j)$ 28359016	$k)$ 35800135	$l)$ 64838390
$m)$ 23500323	$n)$ 81015802	$o)$ 34789179	$p)$ 75946878

Aufgabe 13: *Untersuche die angebenden Zahlen nach möglichen Teilern.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“!)

a) 88179840	*b*) 57177414	*c*) 31850496	*d*) 66706983
e) 13716864	*f*) 34012224	*g*) 24603750	*h*) 35153041
i) 35389440	*j*) 16105100	*k*) 52706752	*l*) 20503125
m) 19253619	*n*) 67108864	*o*) 14348907	*p*) 19487171

Aufgabe 14: *Zerlege die angebenden Zahlen in Primzahlen.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“!)

a) 15978655	*b*) 51200000	*c*) 22370117	*d*) 10077696
e) 25194240	*f*) 29160000	*g*) 32672808	*h*) 76236552
i) 33840625	*j*) 41544503	*k*) 33554432	*l*) 72930375
m) 40353607	*n*) 89253125	*o*) 18225207	*p*) 75946878

Aufgabe 15: *Setze das richtige Zeichen ($\mid$ oder $\nmid$) bezüglich der Teilbarkeit ein.*

a) 4 ☐ 36	*b*) 5 ☐ 55	*b*) 7 ☐ 56	*d*) 72 ☐ 8
e) 9 ☐ 63	*f*) 3 ☐ 74	*g*) 14 ☐ 84	*h*) 6 ☐ 86
i) 45 ☐ 9	*j*) 11 ☐ 132	*k*) 56 ☐ 112	*l*) 24 ☐ 156
m) 4 ☐ 92	*n*) 7 ☐ 91	*o*) 23 ☐ 178	*p*) 37 ☐ 333

Aufgabe 16: *Bestimme die Teilermenge.*

a) $T_{11} =$	*b)* $T_{24} =$	*c)* $T_{35} =$
d) $T_{72} =$	*e)* $T_{56} =$	*f)* $T_{37} =$
g) $T_{132} =$	*h)* $T_{930} =$	*i)* $T_{126} =$
j) $T_{1485} =$	*k)* $T_{563} =$	*l)* $T_{674} =$

Aufgabe 17: *Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache.*

a) $kgV(4;7) =$	*b)* $kgV(6;15) =$	*c)* $kgV(5;8) =$
d) $kgV(12;20) =$	*e)* $kgV(9;12) =$	*f)* $kgV(7;13) =$
g) $kgV(14;22) =$	*h)* $kgV(27;42) =$	*i)* $kgV(56;1) =$
j) $kgV(4;83) =$	*k)* $kgV(0;144) =$	*l)* $kgV(639;321) =$

Aufgabe 18: *Bestimme den größten gemeinsamen Teiler.*

a) $ggT(45;9) =$	*b)* $ggT(36;96) =$	*c)* $ggT(56;72) =$
d) $ggT(42;18) =$	*e)* $ggT(56;126) =$	*f)* $ggT(75;100) =$
g) $ggT(165;75) =$	*h)* $ggT(121;209) =$	*i)* $ggT(289;17) =$
j) $ggT(456;735) =$	*k)* $ggT(24;168) =$	*l)* $ggT(115;207) =$

Aufgabe 19: *In einer Tütte befinden sich* 24 *Bonbons, bestimme alle gerechten Verteilungsmöglichkeiten, wenn insgesamt* 5 *Tütten verteilt werden sollen.*

Aufgabe 20: *Aus insgesamt* 24 *kleinen quadratischen Papierflächen sollen verschiedene Rechtecksflächen aus allen Papierquadraten geformt werden. Bestimme alle Anordnungsmöglichkeiten.*

Aufgabe 21: *Aus insgesamt* 45 *kleinen Holzwürfel sollen verschiedene Quader aus allen Holzwürfeln geformt werden. Bestimme alle Anordnungsmöglichkeiten.*

Aufgabe 22: *In der einen Keksdose befinden sich* 12 *Kekse mit Schokostückchen und* 8 *Kekse mit Nussstückchen. Wie viele Keksdosen werden benötigt, wenn diese auf* 24 *Personen so aufgeteilt werden sollen, dass kein Keks übrig bleibt und jeder gleich viele Kekse jeder Art hat?*

Aufgabe 23: *Bei einem Wettrennen benötigt der erste Fahrradfahrer* 8 min *für jede Runde, während der zweite Fahrradfahrer* 6 min *benötigt. Wie viel Zeit muss vergehen, bis der zweite Fahrradfahrer überrundet wird?*

Aufgabe 24: *Bei der Planung von Bahntrassen stehen zwei verschiedene Längen von Schienen* 24 m *und* 18 m *zur Auswahl. Bei die längere Variante pro Schienenstück* 4000 € *kosten würde, während das kürzere Schienenstück einen Preis von* 3100 € *hätte. Entscheide welche Variante günstiger wäre. Bestimme außerdem die Anzahl der jeweiligen Schienenstücke für die kleinste gemeinsame Strecke.*

Aufgabe 25: *Setze das richtige Zeichen ($\mid$ oder $\nmid$) bezüglich der Teilbarkeit ein.*

a) $4 \;\square\; 46464$	*b)* $5 \;\square\; 84345$	*b)* $3 \;\square\; 528436$
d) $10 \;\square\; 354600$	*e)* $6 \;\square\; 776736$	*f)* $9 \;\square\; 764544$
g) $4 \;\square\; 854174$	*h)* $3 \;\square\; 654183$	*i)* $8 \;\square\; 256416$
j) $9 \;\square\; 446168$	*k)* $8 \;\square\; 218548$	*l)* $7 \;\square\; 751544$
m) $12 \;\square\; 887460$	*n)* $15 \;\square\; 6355845$	*o)* $18 \;\square\; 6544844$

Aufgabe 26: *Bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache.*

a) $kgV\,(2;3;4) =$	*b)* $kgV\,(4;8;2) =$	*c)* $kgV\,(9;5;2) =$
d) $kgV\,(7;3;4) =$	*e)* $kgV\,(5;8;2) =$	*f)* $kgV\,(3;2;5) =$
g) $kgV\,(7;5;3) =$	*h)* $kgV\,(11;3;2) =$	*i)* $kgV\,(9;10;15) =$
j) $kgV\,(7;9;3) =$	*k)* $kgV\,(2;5;6) =$	*l)* $kgV\,(6;8;5) =$
m) $kgV\,(7;9;5) =$	*n)* $kgV\,(1;16;4) =$	*o)* $kgV\,(3;6;9) =$

Aufgabe 27: *Bestimme den kleinsten gemeinsamen Teiler.*

$a)\ ggT\,(15;35;75) =$	$b)\ ggT\,(24;32;42) =$	$c)\ ggT\,(56;21;77) =$
$d)\ ggT\,(52;36;16) =$	$e)\ ggT\,(144;48;36) =$	$f)\ ggT\,(63;108;45) =$
$g)\ ggT\,(39;99;48) =$	$h)\ ggT\,(72;24;104) =$	$i)\ ggT\,(45;72;99) =$
$j)\ ggT\,(18;54;120) =$	$k)\ ggT\,(30;55;85) =$	$l)\ ggT\,(48;84;12) =$
$m)\ ggT\,(33;51;81) =$	$n)\ ggT\,(64;128;256) =$	$o)\ ggT\,(60;90;105) =$

Aufgabe 28: *Trage ein, ob die Zahlen in der ersten Spalte ein Teiler oder kein Teiler der Zahlen in der ersten Zeile sind. Benutze die Symbole* $\mid$ *und* $\nmid$.

	426	315	9782	3560	43785	157932
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

Aufgabe 29: *Zerlege die Zahlen in ein Produkt aus Primzahlen.*

$a)\ 28 =$	$b)\ 55 =$	$c)\ 36 =$	$d)\ 72 =$	$e)\ 135 =$
$f)\ 245 =$	$g)\ 64 =$	$h)\ 256 =$	$i)\ 1024 =$	$j)\ 2310 =$

Aufgabe 30: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $kgV(3;4) + kgV(6;5) =$

$b)$ $kgV(16;5) : kgV(5;2) =$

$c)$ $kgV(6;2) \cdot kgV(3;4) =$

$d)$ $kgV(7;5) - kgV(3;8) =$

$e)$ $kgV(8;9) - kgV(16;3) =$

$f)$ $kgV(12;4) \cdot kgV(5;1) =$

$g)$ $kgV(7;11) + kgV(8;6) =$

$h)$ $kgV(72;5) : kgV(6;9) =$

$i)$ $kgV(7;9) - kgV(11;4) =$

$j)$ $kgV(12;16) : kgV(8;6) =$

$k)$ $kgV(15;4) \cdot kgV(10;4) =$

$l)$ $kgV(48;3) + kgV(7;12) =$

Aufgabe 31: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $ggT(24;16) + ggT(42;77) =$

$b)$ $ggT(96;16) - ggT(45;35) =$

$c)$ $ggT(98;38) : ggT(13;19) =$

$d)$ $ggT(44;32) \cdot ggT(42;72) =$

$e)$ $ggT(125;175) - ggT(54;72) =$

$f)$ $ggT(144;96) : ggT(64;24) =$

$g)$ $ggT(21;56) \cdot ggT(90;75) =$

$h)$ $ggT(84;36) - ggT(132;110) =$

$i)$ $ggT(65;39) + ggT(63;84) =$

$j)$ $ggT(36;48) : ggT(96;84) =$

$k)$ $ggT(44;56) \cdot ggT(84;28) =$

$l)$ $ggT(290;170) - ggT(35;85) =$

Aufgabe 32: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $[ggT(68;84) + ggT(75;95)] \cdot kgV(7;2) =$

$b)$ $ggT(121;1331) - ggT(96;20) \cdot kgV(8;3) =$

$c)$ $kgV(8;5) : ggT(49;84) + kgV(9;3) : ggT(56;35) =$

$d)$ $[kgV(9;4) - kgV(6;4)] \cdot ggT(84;144) =$

$e)$ $[kgV(6;8) - ggT(56;88)] \cdot [kgV(3;5) + ggT(23;83)] =$

$f)$ $kgV(6;16) : [ggT(62;38) + kgV(7;8) : ggT(112;196)] =$

Aufgabe 33: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(144;48);\mathrm{ggT}(56;102)) =$

$b)$ $\mathrm{kgV}(\mathrm{ggT}(64;16);\mathrm{ggT}(63;45)) =$

$c)$ $\mathrm{ggT}(\mathrm{kgV}(8;3);\mathrm{kgV}(4;9)) =$

$d)$ $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(135;305);\mathrm{kgV}(3;5)) =$

$e)$ $\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(2;5);\mathrm{ggT}(24;84)) =$

$f)$ $\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(2;3);\mathrm{kgV}(5;8)) =$

$g)$ $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(100;40);\mathrm{ggT}(\mathrm{kgV}(11;5);110)) =$

$h)$ $\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(7;2);4);\mathrm{kgV}(5;\mathrm{kgV}(4;3))) =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.4) Lösungen zu Teilbarkeiten.

3.4 Bruchrechnung

Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt stellen alle Zahlen, die durch einen *Bruch* dargestellt werden, die *Zahlenmenge* der *rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ dar. Mit jeder *Zahlenmenge* sind alle Rechenoperationen zulässig.

Ein *Bruch* setzt sich aus seinem *Nenner*, der definiert in wie viele gleichgroße Teile ein Ganzes unterteilt wird, und den *Zähler*, der beschreibt wie viele Teile vom *Nenner* tatsächlich vorzufinden sind
(Bruch $= \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$). Mittels *Brüchen* kann man die gleiche Zahl auf verschiedene Arten darstellen, so ist $\frac{1}{2}$ das Gleiche wie $\frac{2}{4}$. Wenn der *Nenner* erhöht wird spricht man vom *Erweitern*. Bei einer Verkleinerung des *Nenners* wird vom *Kürzen* gesprochen.
Dabei muss beachtet werden, dass der *Bruchstrich* nichts weiter als ein *Divisionsoperator* darstellt:

$$3 : 4 = \frac{3}{4} \quad . \tag{3.23}$$

Beim *Erweitern* werden *Zähler* und *Nenner* mit der Zahl *multipliziert* mit der man den *Bruch* erweitern möchte. Im folgenden Beispiel wird der *Bruch* im ersten Schritt mit zwei und danach mit vier *erweitert*.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16} \tag{3.24}$$

Beim *Kürzen* werden *Zähler* und *Nenner* durch die Zahl *dividiert* mit der man den *Bruch* *kürzen* möchte. Im folgenden Beispiel wird der *Bruch* im ersten Schritt mit zwei und danach mit acht erweitert.

$$\frac{16}{32} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \tag{3.25}$$

Bei der *Addition* beziehungsweise der *Subtraktion* von *Brüchen* müssen die *Nenner* der beteiligten *Brüche* so *erweitert* oder *gekürzt* werden, dass sie gleich sind. Dann können die *Zähler* verrechnet werden. Um immer einen gemeinsamen *Nenner* zu finden, kann man den ersten *Bruch* mit dem *Nenner* des zweiten *Bruch* und den zweiten *Bruch* mit dem Nenner des ersten *Bruchs* erweitern (wie im Subtraktionsbeispiel gezeigt).

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}+\frac{1}{2}&=\frac{1}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{1+2}{4}=\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4}-\frac{1}{6}&=\frac{3\cdot 6}{4\cdot 6}-\frac{1\cdot 4}{6\cdot 4}=\frac{18}{24}+\frac{4}{24}=\frac{18-4}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}\end{aligned} \tag{3.26}$$

Bei der *Multiplikation* von *Brüchen*, werden die *Nenner* miteinander *multipliziert* und bilden so den neuen *Nenner*. Auch die *Zähler* werden miteinander *multipliziert*.

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 1}{4\cdot 2}=\frac{1}{8} \tag{3.27}$$

Bei der *Division* muss man mit dem *Kehrwert*, also der Vertauschung von *Nenner* und *Zähler* des *Divisors*, *multiplizieren*.

$$\frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=\frac{1\cdot 2}{4\cdot 1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \tag{3.28}$$

Ferner gilt bei Berücksichtigung von *Parametern* oder *Variablen*:

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}&=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n} && \text{Erweitern}\\ \frac{a\cdot n}{b\cdot n}&=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{n}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b} && \text{Kürzen}\\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d}&=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{d\cdot b} && \text{Addition}\\ \frac{a}{b}-\frac{c}{d}&=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}-\frac{c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{d\cdot b} && \text{Subtraktion}\\ \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}&=\frac{a\cdot c}{d\cdot b} && \text{Multiplikation}\\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d}&=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{c\cdot b} && \text{Division}\end{aligned} \tag{3.29}$$

Im den folgenden Abschnitten wird der Malpunkt zwischen einer Zahl und einem *Parameter* beziehungsweise einer *Variablen* oder zwischen *Parametern* beziehungsweise *Variablen* selbst nicht mehr notiert, es sei denn dieser ist zum Verständnis von besonderer Bedeutung. Aus diesem Grund soll auch auf die Schreibweise für *gemischte Brüche* vollständig verzichtet werden, da in dieser Schreibweise $\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}=2+\frac{1}{6}$ das *Additionszeichen* eingespart wird. Sobald das *Multiplikationszeichen* durch eine Konvention im Unterricht fallen gelassen wird, würde es zu Verwirrungen und Missverständnissen kommen, sodass entweder $2\frac{1}{6}=2+\frac{1}{6}$ oder $2\frac{1}{6}=2\cdot\frac{1}{6}$ gilt. Ein *Bruch* der in einen *gemischten Bruch* (*gemischte Zahl*) überführt werden kann wird auch *unechter Bruch* genannt. Dieses *Buch* orientiert sich an der Konvention, welche in der höheren Mathematik verwendet wird. Deswegen sollte auf die Schreibweise von gemischten *Brüchen* vollständig verzichtet werden und ausschließlich nur eine einzige Konvention - die des Weglassens des *Multiplikationsoperators* - verwendet werden.

Da es auch zu sogenannten *Doppelbrüchen* kommen kann, sollte der Umgang hiermit geschult werden. Hierbei werden lediglich die unterschiedlichen Schreibweisen des *Divisionsoperators* ausgenutzt, sodass sich Regeln für die *Doppelbrüche* offenbaren.

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \tag{3.30}$$

Aus dem Beispiel geht hervor, dass der *Nenner* des *Zählerbruchs* b insgesamt in den *Nenner* rutscht, während der *Zähler* des *Nennerbruchs* c im *Nenner* bleibt, wohingegen der *Nenner* des *Nennerbruchs* d in den *Zähler* wandert. Dieses Verhalten lässt sich noch weiter verallgemeinern, wenn *Mehrfachbrüche* betrachtet werden. Hierbei sind die *Klammern* lediglich um zu verdeutlichen, welcher Bruchstrich mehr Gewichtung besitzt. Es ist nicht nötig bei *Doppelbrüchen* mit Klammern zu agieren, allerdings sollte für die Übersicht dennoch manchmal nicht auf Klammern verzichtet werden.

$$\begin{aligned} \frac{\left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}\right]}{\left[\frac{\left(\frac{e}{f}\right)}{\left(\frac{g}{h}\right)}\right]} &= \left[\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}\right] : \left[\frac{\left(\frac{e}{f}\right)}{\left(\frac{g}{h}\right)}\right] = \left[\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right] : \left[\frac{e}{f} : \frac{g}{h}\right] = \left[\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}\right] : \left[\frac{e}{f} \cdot \frac{h}{g}\right] \\ &= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} : \frac{e \cdot h}{f \cdot g} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \cdot \frac{f \cdot g}{e \cdot h} = \frac{a \cdot d \cdot f \cdot g}{b \cdot c \cdot e \cdot h} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Es wird deutlich, dass *Parameter* die in einer geraden Anzahl im *Nenner* vorkommen in der eleganteren Endschreibweise im *Zähler* zu finden sind, während die ungerade Anzahl von *Nennerpositionen* eine Endposition im *Nenner* ergibt. (Beispiele hierzu: h befindet sich im Hauptbruch im *Nenner*, im ersten Nebenbruch im *Nenner* und diesem Bruch auch im *Nenner*, sodass h drei *Nennerpositionen* besitzt und somit auch im *Nenner* bleibt. d befindet sich im Hauptbruch im *Zähler*, anschließend im *Nenner* und dort wiederum im *Nenner*, sodass zwei *Nennerpositionen* gezählt werden können und somit d die Endposition im *Zähler* besitzt.)

Zur *Bruchrechnung* ist anzumerken, dass es nicht möglich ist durch die Zahl Null zu *dividieren*. Diese *Rechenoperation* würde jeder Logik widersprechen und ist damit in der Mathematik nicht vorgesehen. Es existieren Beschreibungen, welche sich damit beschäftigen was in der unmittelbaren Umgebung dieser nicht definierten *Rechenoperation* geschieht und welche im Abschnitt „*Grenzwerte*“ und „*Komplexe Zahlen*“ vorgestellt werden.

3.4.1 Übungsaufgaben zur Bruchrechnung

Aufgabe 1: *Welcher Bruch ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Brüchen ein.*

a) $\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$	b) $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{4}$	c) $\frac{2}{5} \quad \frac{4}{10}$
d) $\frac{3}{8} \quad \frac{1}{2}$	e) $\frac{5}{6} \quad \frac{3}{4}$	f) $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{9}$
g) $\frac{4}{16} \quad \frac{1}{4}$	h) $\frac{2}{5} \quad \frac{7}{15}$	i) $\frac{2}{3} \quad \frac{3}{6}$
j) $\frac{2}{3} \quad \frac{7}{8}$	k) $\frac{6}{7} \quad \frac{3}{4}$	l) $\frac{4}{5} \quad \frac{16}{20}$
m) $\frac{3}{8} \quad \frac{1}{3}$	n) $\frac{5}{9} \quad \frac{3}{7}$	o) $\frac{5}{25} \quad \frac{1}{5}$
p) $\frac{2}{5} \quad \frac{3}{8}$	q) $\frac{3}{2} \quad \frac{5}{3}$	r) $\frac{14}{8} \quad \frac{16}{9}$
s) $\frac{3}{8} \quad \frac{24}{64}$	t) $\frac{81}{9} \quad \frac{36}{4}$	u) $\frac{55}{5} \quad \frac{131}{11}$

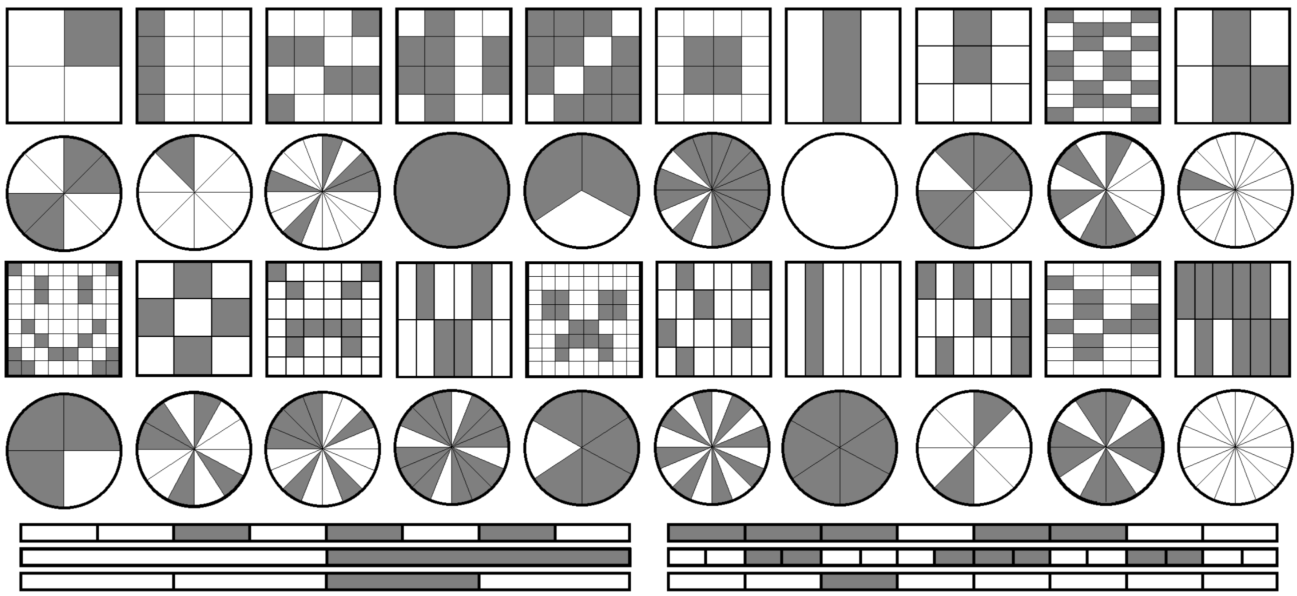
Aufgabe 2: *Kürze die Brüche bis man sie nicht weiter kürzen kann.*

a) $\frac{8}{16} =$	b) $\frac{6}{14} =$	c) $\frac{9}{15} =$
d) $\frac{6}{24} =$	e) $\frac{48}{64} =$	f) $\frac{12}{144} =$
g) $\frac{75}{125} =$	h) $\frac{30}{75} =$	i) $\frac{72}{108} =$
j) $\frac{16}{48} =$	k) $\frac{6}{18} =$	l) $\frac{24}{8} =$
m) $\frac{12}{96} =$	n) $\frac{16}{64} =$	o) $\frac{48}{144} =$
p) $\frac{33}{3} =$	q) $\frac{54}{72} =$	r) $\frac{5000}{10000} =$
s) $\frac{24}{72} =$	t) $\frac{36}{66} =$	u) $\frac{63}{108} =$

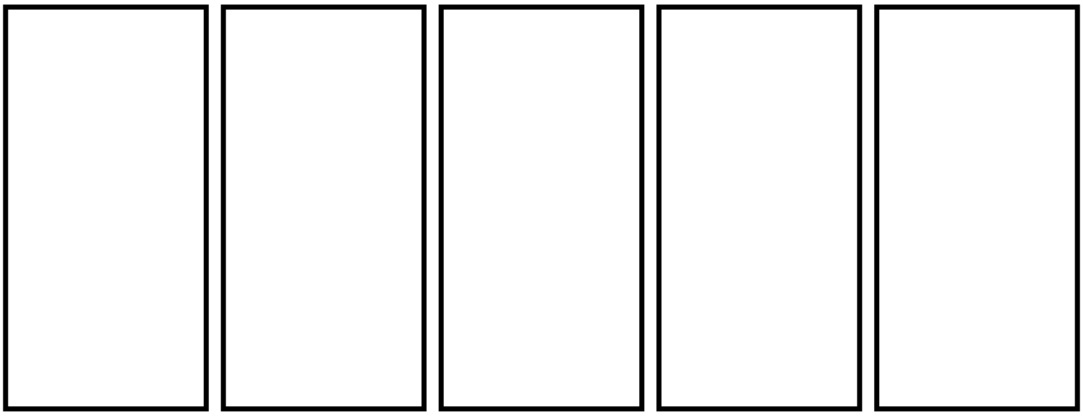
Aufgabe 3: *Erweitere die Brüche mit der angegebenen Zahl.*

a) $\frac{3}{4}$ mit: 9	*b)* $\frac{5}{7}$ mit: 7	*c)* $\frac{1}{12}$ mit: 8
d) $\frac{1}{2}$ mit: 24	*e)* $\frac{7}{8}$ mit: 6	*f)* $\frac{4}{6}$ mit: 11
g) $\frac{5}{7}$ mit: 8	*h)* $\frac{5}{13}$ mit: 9	*i)* $\frac{4}{11}$ mit: 7
j) $\frac{7}{4}$ mit: 9	*k)* $\frac{6}{11}$ mit: 5	*l)* $\frac{3}{12}$ mit: 4
m) $\frac{2}{3}$ mit: 21	*n)* $\frac{7}{8}$ mit: 3	*o)* $\frac{4}{6}$ mit: 13
p) $\frac{3}{9}$ mit: 8	*q)* $\frac{5}{12}$ mit: 6	*r)* $\frac{7}{12}$ mit: 7
s) $\frac{3}{4}$ mit: 17	*t)* $\frac{5}{6}$ mit: 4	*u)* $\frac{13}{6}$ mit: 1000

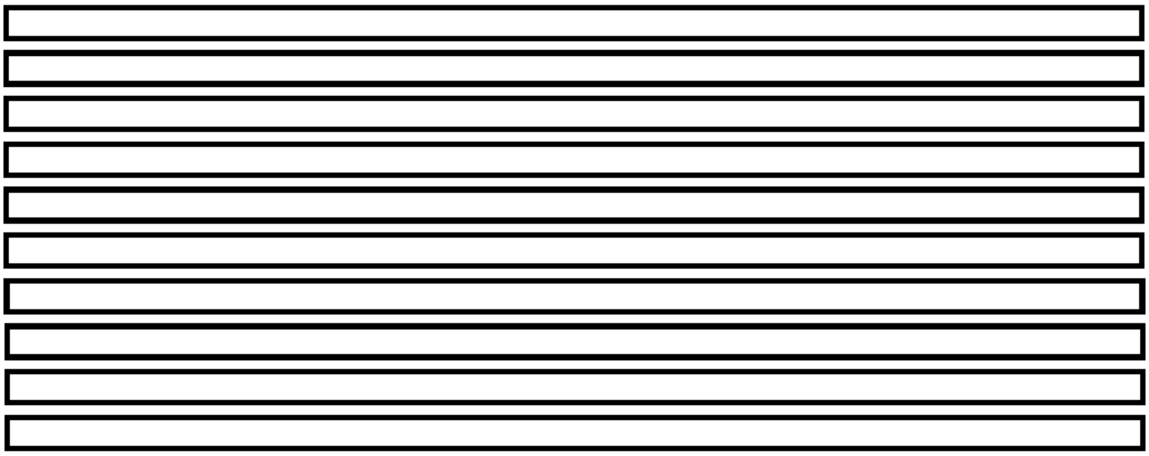
Aufgabe 4: *Bestimme Nenner und Zähler des jeweiligen dargestellten Bruchs. (Es ist der jeweilige graue Anteil gefragt.)*



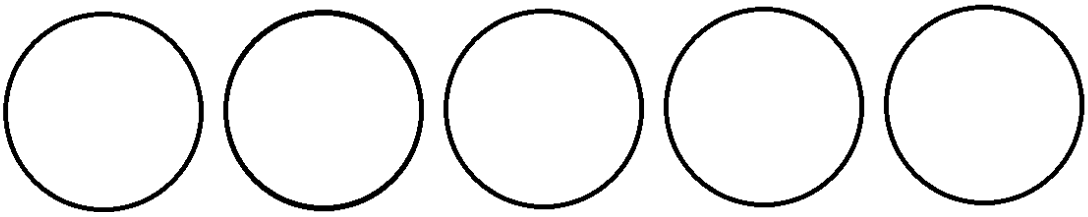
Aufgabe 5: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{7}$ *und* $\frac{16}{16}$



Aufgabe 6: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{9}$ *und* $\frac{3}{7}$



Aufgabe 7: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Kreis:* $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{12}$ *und* $\frac{1}{16}$



Aufgabe 8: *Addiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=$ *b)* $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=$ *c)* $\frac{7}{12}+\frac{4}{12}=$

d) $\frac{25}{9}+\frac{43}{9}=$ *e)* $\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=$ *f)* $\frac{7}{11}+\frac{14}{11}=$

g) $\frac{6}{32}+\frac{5}{32}=$ *h)* $\frac{33}{9}+\frac{29}{9}=$ *i)* $\frac{83}{39}+\frac{23}{39}=$

Aufgabe 9: *Addiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$ *b)* $\frac{3}{7}+\frac{1}{14}=$ *c)* $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=$

d) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=$ *e)* $\frac{5}{16}+\frac{3}{8}=$ *f)* $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=$

g) $\frac{1}{4}+\frac{3}{32}=$ *h)* $\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=$ *i)* $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=$

Aufgabe 10: *Subtrahiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{7}{2}-\frac{4}{2}=$ *b)* $\frac{9}{8}-\frac{4}{8}=$ *c)* $\frac{12}{9}-\frac{5}{9}=$

d) $\frac{31}{5}-\frac{23}{5}=$ *e)* $\frac{6}{17}-\frac{5}{17}=$ *f)* $\frac{8}{13}-\frac{2}{13}=$

g) $\frac{86}{23}-\frac{45}{23}=$ *h)* $\frac{55}{19}-\frac{21}{19}=$ *i)* $\frac{65}{83}-\frac{15}{83}=$

Aufgabe 11: *Subtrahiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=$ *b)* $\frac{3}{7}-\frac{1}{14}=$ *c)* $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}=$

d) $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=$ *e)* $\frac{3}{8}-\frac{5}{16}=$ *f)* $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=$

g) $\frac{1}{4}-\frac{3}{32}=$ *h)* $\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=$ *i)* $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=$

Aufgabe 12: *Addiere beziehungsweise subtrahiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=$ *b)* $\frac{13}{7}-\frac{15}{14}=$ *c)* $\frac{9}{5}+\frac{13}{10}=$

d) $\frac{21}{2}-\frac{31}{8}=$ *e)* $\frac{9}{8}+\frac{19}{16}=$ *f)* $\frac{5}{3}-\frac{11}{9}=$

g) $\frac{7}{4}+\frac{67}{32}=$ *h)* $\frac{13}{5}-\frac{25}{15}=$ *i)* $\frac{13}{3}+\frac{11}{6}=$

j) $\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=$ *k)* $\frac{13}{4}-\frac{9}{6}=$ *l)* $\frac{9}{5}+\frac{3}{4}=$

m) $\frac{21}{4}-\frac{11}{8}=$ *n)* $\frac{3}{8}+\frac{9}{32}=$ *o)* $\frac{4}{3}-\frac{10}{9}=$

p) $\frac{7}{8}-\frac{11}{32}=$ *q)* $\frac{13}{5}-2=$ *r)* $14+\frac{11}{6}=$

s) $\frac{1}{8}+\frac{9}{16}=$ *t)* $\frac{15}{6}-\frac{7}{3}=$ *u)* $\frac{9}{5}-\frac{3}{4}=$

v) $\frac{23}{4}+\frac{17}{8}=$ *w)* $\frac{7}{9}-\frac{11}{18}=$ *x)* $\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}=$

y) $\frac{5}{20}-\frac{1}{1000}=$ *z)* $\frac{13}{15}+6=$

Aufgabe 13: *Multipliziere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$ *b)* $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{14}=$ *c)* $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=$

d) $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=$ *e)* $\frac{5}{16}\cdot\frac{3}{8}=$ *f)* $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}=$

g) $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{32}=$ *h)* $\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{15}=$ *i)* $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=$

j) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{6}=$ *k)* $\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}=$ *l)* $\frac{9}{7}\cdot\frac{10}{11}=$

m) $\frac{2}{7}\cdot\frac{9}{4}=$ *n)* $\frac{2}{12}\cdot\frac{4}{5}=$ *o)* $\frac{2}{9}\cdot\frac{8}{3}=$

p) $\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{13}=$ *q)* $\frac{2}{8}\cdot\frac{8}{20}=$ *r)* $\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}=$

s) $\frac{9}{4}\cdot\frac{2}{5}=$ *t)* $\frac{9}{15}\cdot\frac{7}{5}=$ *u)* $\frac{7}{9}\cdot\frac{9}{4}=$

v) $\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{11}=$ *w)* $\frac{0}{1}\cdot\frac{6}{83}=$ *x)* $\frac{5}{4}\cdot\frac{32}{50}=$

Aufgabe 14: *Dividiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} =$ *b)* $\frac{3}{7} : \frac{1}{14} =$ *c)* $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} =$

d) $\frac{1}{2} : \frac{3}{8} =$ *e)* $\frac{3}{8} : \frac{5}{16} =$ *f)* $\frac{1}{3} : \frac{2}{9} =$

g) $\frac{1}{4} : \frac{3}{32} =$ *h)* $\frac{2}{5} : \frac{2}{15} =$ *i)* $\frac{2}{3} : \frac{1}{6} =$

j) $\frac{2}{9} : \frac{4}{6} =$ *k)* $\frac{6}{5} : \frac{5}{2} =$ *l)* $\frac{9}{7} : \frac{10}{11} =$

m) $\frac{2}{7} : \frac{9}{4} =$ *n)* $\frac{2}{12} : \frac{4}{5} =$ *o)* $\frac{2}{9} : \frac{8}{3} =$

p) $\frac{5}{6} : \frac{6}{13} =$ *q)* $\frac{2}{8} : \frac{8}{20} =$ *r)* $\frac{1}{4} : \frac{5}{2} =$

s) $\frac{9}{4} : \frac{2}{5} =$ *t)* $\frac{9}{15} : \frac{7}{5} =$ *u)* $\frac{7}{9} : \frac{9}{4} =$

v) $\frac{2}{8} : \frac{6}{11} =$ *w)* $\frac{0}{1} : \frac{6}{83} =$ *x)* $\frac{5}{4} : \frac{32}{50} =$

Aufgabe 15: *Multipliziere beziehungsweise dividiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} =$ *b)* $\frac{13}{7} \cdot \frac{15}{14} =$ *c)* $\frac{9}{5} : \frac{13}{10} =$

d) $\frac{21}{2} \cdot \frac{31}{8} =$ *e)* $\frac{9}{8} : \frac{19}{16} =$ *f)* $\frac{5}{3} \cdot \frac{11}{9} =$

g) $\frac{7}{4} : \frac{67}{32} =$ *h)* $\frac{13}{5} : \frac{25}{15} =$ *i)* $\frac{13}{3} \cdot \frac{11}{6} =$

j) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} =$ *k)* $\frac{13}{4} : \frac{9}{6} =$ *l)* $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} =$

m) $\frac{21}{4} \cdot \frac{11}{8} =$ *n)* $\frac{3}{8} : \frac{9}{32} =$ *o)* $\frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} =$

p) $\frac{7}{8} : \frac{11}{32} =$ *q)* $\frac{13}{5} : 2 =$ *r)* $14 \cdot \frac{11}{6} =$

s) $\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{16} =$ *t)* $\frac{15}{6} \cdot \frac{7}{3} =$ *u)* $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} =$

v) $\frac{23}{4} \cdot \frac{17}{8} =$ *w)* $\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{18} =$ *x)* $\frac{1}{10} : \frac{1}{1000} =$

y) $\frac{5}{20} : \frac{1}{1000} =$ *z)* $\frac{13}{15} \cdot 6 =$

Aufgabe 16: *Welcher Bruch liegt genau in der Mitte zwischen den angegebenen Brüche.*

a) $\frac{3}{2}$ und $\frac{7}{2}$
b) $\frac{1}{7}$ und $\frac{5}{7}$
c) $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{5}$
d) $\frac{2}{9}$ und $\frac{1}{2}$
e) $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{12}$
f) $\frac{2}{11}$ und $\frac{5}{6}$
g) $\frac{1}{12}$ und $\frac{3}{4}$
h) $\frac{13}{5}$ und $\frac{5}{17}$
i) $\frac{7}{13}$ und $\frac{8}{9}$
j) $\frac{7}{8}$ und $\frac{2}{5}$
k) $\frac{5}{16}$ und 8
l) $\frac{3}{10}$ und $\frac{5}{9}$
m) $\frac{4}{11}$ und $\frac{5}{7}$
n) $\frac{24}{5}$ und $\frac{23}{10}$
o) $\frac{4}{21}$ und $\frac{8}{29}$

Aufgabe 17: *Addiere beziehungsweise subtrahiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$
b) $\frac{8}{3}-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=$
c) $\frac{11}{2}-\frac{7}{6}+\frac{3}{8}=$
d) $\frac{4}{5}+\frac{7}{3}+\frac{2}{9}=$
e) $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=$
f) $\frac{21}{5}-\frac{8}{7}+\frac{2}{3}=$
g) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=$
h) $\frac{8}{5}-\frac{3}{7}+\frac{3}{8}=$
i) $\frac{8}{7}-\frac{1}{9}+\frac{7}{5}=$
j) $\frac{7}{8}+\frac{4}{3}+\frac{3}{10}=$
k) $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}+\frac{3}{4}=$
l) $\frac{10}{7}-\frac{1}{5}+\frac{5}{9}=$
m) $\frac{14}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=$
n) $\frac{11}{3}-\frac{8}{9}+\frac{7}{10}=$
o) $\frac{9}{2}+\frac{9}{5}+\frac{7}{4}=$
p) $\frac{2}{7}-\frac{1}{9}+\frac{3}{8}=$
q) $\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}=$
r) $\frac{4}{5}+\frac{9}{4}+\frac{3}{7}=$
s) $\frac{8}{3}-\frac{7}{8}+\frac{6}{5}=$
t) $\frac{6}{5}+\frac{11}{3}-2=$
u) $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}+\frac{11}{9}=$
v) $\frac{8}{9}+\frac{3}{2}+5=$
w) $\frac{6}{5}-\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=$
x) $\frac{5}{9}+\frac{13}{4}-3=$
y) $\frac{11}{2}-\frac{7}{4}+\frac{8}{5}=$
z) $\frac{5}{12}+\frac{7}{11}+9=$

Aufgabe 18: *Multipliziere beziehungsweise dividiere die folgenden Brüche.*

a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} =$

b) $\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{4} : \frac{2}{5} =$

c) $\frac{11}{2} \cdot \frac{7}{6} : \frac{3}{8} =$

d) $\frac{4}{5} : \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{9} =$

e) $\frac{1}{4} : \frac{5}{6} : \frac{7}{4} =$

f) $\frac{21}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{2}{3} =$

g) $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} =$

h) $\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{8} =$

i) $\frac{8}{7} \cdot \frac{1}{9} : \frac{7}{5} =$

j) $\frac{7}{8} : \frac{4}{3} : \frac{3}{10} =$

k) $\frac{3}{5} : \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} =$

l) $\frac{10}{7} : \frac{1}{5} : \frac{5}{9} =$

m) $\frac{14}{5} : \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} =$

n) $\frac{11}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{10} =$

o) $\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{7}{4} =$

p) $\frac{2}{7} : \frac{1}{9} : \frac{3}{8} =$

q) $\frac{4}{3} : \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} =$

r) $\frac{4}{5} : \frac{9}{4} : \frac{3}{7} =$

s) $\frac{8}{3} \cdot \frac{7}{8} : \frac{6}{5} =$

t) $\frac{6}{5} : \frac{11}{3} \cdot 2 =$

u) $\frac{12}{5} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{9} =$

v) $\frac{8}{9} : \frac{3}{2} : 5 =$

w) $\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6} =$

x) $\frac{5}{9} : \frac{13}{4} \cdot 3 =$

y) $\frac{11}{2} \cdot \frac{7}{4} : \frac{8}{5} =$

z) $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} : 9 =$

Aufgabe 19: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\frac{3}{2} + \frac{7}{3} - \frac{1}{6} =$

b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{6} : \frac{2}{3} =$

c) $\frac{7}{6} : 2 \cdot \frac{11}{3} - \frac{47}{36} =$

d) $2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{8}{3} =$

e) $6 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{7} : \frac{1}{10} =$

f) $\frac{12}{5} + \frac{7}{3} - \frac{3}{4} - \frac{8}{9} + \frac{3}{10} =$

g) $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{2}{5} =$

h) $\frac{63}{71} \cdot \frac{289}{14} \cdot \frac{71}{33} \cdot \frac{14}{17} \cdot \frac{5}{63} \cdot \frac{33}{289} =$

Aufgabe 20: *Berechne den Wert des Terms.* (Benötigt Abschnitt „Distributivgesetz“)

a) $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) =$

b) $\frac{5}{7} : \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{5}\right) =$

c) $\frac{7}{9} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) =$

d) $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{7}\right) =$

e) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{9} + \frac{4}{5}\right) =$

f) $\frac{7}{8} : \left(\frac{5}{6} + \frac{8}{3}\right) =$

g) $\frac{4}{5} : \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{9}\right) =$

h) $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{6}{7} + \frac{9}{5}\right) =$

Aufgabe 21: *Berechne den Wert des Terms.* (Benötigt Abschnitt „Einsetzungsverfahren“ und Abschnitt „Distributivgesetz“)

a) $\frac{a}{b} =$ mit: $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{3}{4}$

b) $2 \cdot \frac{a}{b} =$ mit: $a = \frac{5}{6}$ und $b = \frac{3}{7}$

c) $\frac{4 \cdot a}{2 \cdot b} =$ mit: $a = \frac{7}{3}$ und $b = \frac{9}{4}$

d) $\frac{a \cdot c}{b + c} =$ mit: $a = \frac{7}{2}$ und $b = \frac{9}{4}$ und $c = \frac{7}{8}$

e) $\frac{a + a \cdot c}{a \cdot b} =$ mit: $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{5}{4}$ und $c = \frac{3}{5}$

f) $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} =$ mit: $b = \frac{11}{8}$ und $c = \frac{5}{9}$

g) $\left(\frac{2 \cdot a}{b} + \frac{a}{c}\right) : \frac{a}{3 \cdot b} =$ mit: $b = \frac{1}{6}$ und $c = \frac{4}{3}$

h) $\frac{6 \cdot a}{b} \cdot \frac{b}{a \cdot c} =$ mit: $c = \frac{1}{12}$

Aufgabe 22: *Forme die Aufgabe zu einem Bruch um.*

a) $\frac{a}{b} \cdot c$ *b)* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ *c)* $\frac{a}{b} : \frac{2 \cdot c}{d}$

d) $\frac{a}{b} + 4$ *e)* $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ *f)* $\frac{a}{b} + \frac{2 \cdot c}{d}$

g) $\frac{a}{b} + 4 : \frac{d}{c}$ *h)* $\frac{a}{b} : \frac{4}{5} - \frac{c}{d} \cdot \frac{2}{3}$ *i)* $\frac{4 \cdot a}{b} + \frac{2 \cdot c}{a \cdot d}$

j) $\frac{a}{b} + \frac{d}{c} + \frac{dc}{b}$ *k)* $\frac{a}{b} : \frac{c}{b} : \frac{c}{d}$ *l)* $\frac{5 \cdot c}{a \cdot b} + \frac{6}{a \cdot d} - \frac{a - d}{3}$

Aufgabe 23: *Kürze im Bruch so viel wie möglich und berechne danach erst den Wert des Terms. (Beachte dabei, dass nur Faktoren gekürzt werden können.)* (Benötigt Abschnitt „Distributivgesetz“)

a) $\frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 5 \cdot 7} =$ *b)* $\frac{12 \cdot 6 \cdot 15}{5 \cdot 4 \cdot 6} =$ *c)* $\frac{63 \cdot 14 \cdot 4}{9 \cdot 7 \cdot 7} =$

d) $\frac{3}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9} =$ *e)* $\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} =$ *f)* $\frac{8}{96} \cdot \frac{112}{4} \cdot \frac{96}{112} =$

g) $\frac{4 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{4 \cdot 11} =$ *h)* $\frac{6 \cdot 8 + 7 \cdot 12}{7 \cdot 4} =$ *i)* $\frac{14 \cdot 6 + 16 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 4} =$

j) $\frac{8}{5} \cdot \frac{9}{2} : \frac{2}{5} =$ *k)* $\frac{7}{4} \cdot \frac{9}{7} : \frac{9}{3} =$ *l)* $\frac{298}{517} \cdot \frac{489}{298} : \frac{489}{517} =$

m) $\frac{a \cdot b \cdot d}{d \cdot e \cdot a} =$ *n)* $\frac{d}{a} \cdot \frac{c}{e} : \frac{e}{a} =$ *o)* $\frac{8 \cdot a \cdot b + 4 \cdot a \cdot b}{a \cdot 4 \cdot c} =$

Aufgabe 24: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\frac{13 - 5 \cdot 2 + 36 : 3 + 9 \cdot 5}{5} =$ *b)* $\frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 33 : 11}{4 \cdot 3 - 72 : 9 + 3 \cdot 6} =$

c) $\frac{6 \cdot 8 : 4 + 2 - 16 : 2}{89 - 4 \cdot 7 - 4 \cdot 3 + 35} =$ *d)* $\frac{52 - 95 : 5 + 11 \cdot 5}{156 - 8 \cdot 2 \cdot 4 - 108 : 9 : 2} =$

e) $\frac{66 \cdot 5 - 19 \cdot 4 + 111 \cdot 6 \cdot 7}{5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 - 77} =$ *f)* $\frac{21 + 80 \cdot 2 + 16 \cdot 3 - 56}{2835 : 5 - 14 \cdot 11 : 2} =$

Aufgabe 25: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{8} =$ *b)* $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{7}{2} =$

c) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} =$ *d)* $\frac{35}{6} : \frac{7}{3} - \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{5} =$

e) $\frac{7}{3} : \frac{7}{9} + \frac{12}{13} : \frac{5}{8} =$ *f)* $\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{2}{3} : \frac{4}{5} + \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{11} =$

Aufgabe 26: *Bilde den Kehrwert.*

a) $\frac{1}{3}$ *b)* $\frac{5}{4}$ *c)* $\frac{3}{8}$ *d)* $\frac{2}{9}$

e) $\frac{6}{7}$ *f)* $\frac{5}{3}$ *g)* $\frac{13}{5}$ *h)* $\frac{9}{4}$

i) $\frac{7}{10}$ *j)* $\frac{16}{9}$ *k)* $\frac{17}{8}$ *l)* $\frac{1}{20}$

l) $\frac{5}{1000}$ *m)* $\frac{23}{83}$ *n)* $\frac{66}{73}$ *o)* $\frac{96}{1}$

Aufgabe 27: *Gegeben sind vier Zahlen, welche insgesamt zwei Brüche bilden, und ein Operator. Ordne diese einmal so an, dass der Wert des Terms dieser Rechnung maximal und einmal minimal wird.* (Benötigt „Negative Zahlen“)

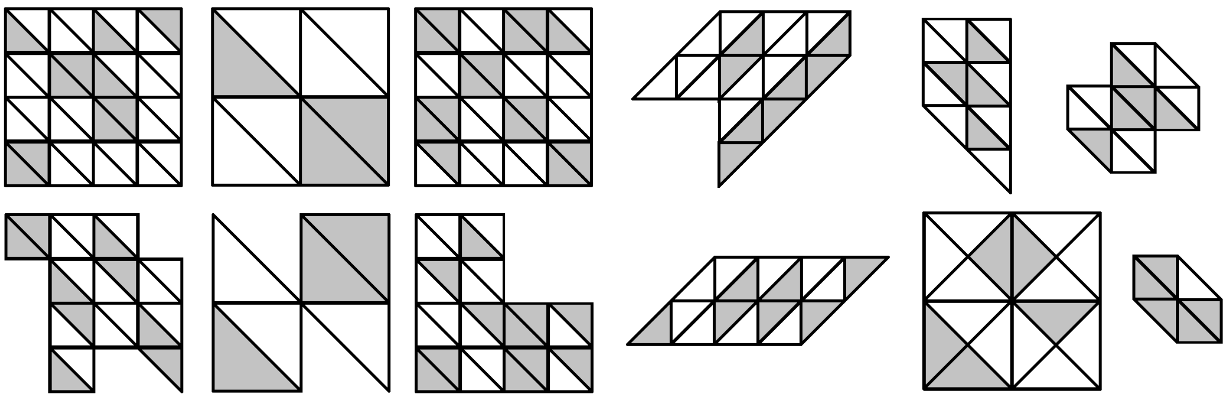
a) $2 \, ; \, 3 \, ; \, 4 \, ; \, 5 \, ; \, +$ *b)* $6 \, ; \, 1 \, ; \, 2 \, ; \, 4 \, ; \, +$

c) $4 \, ; \, 7 \, ; \, 2 \, ; \, 1 \, ; \, -$ *d)* $3 \, ; \, 3 \, ; \, 6 \, ; \, 2 \, ; \, -$

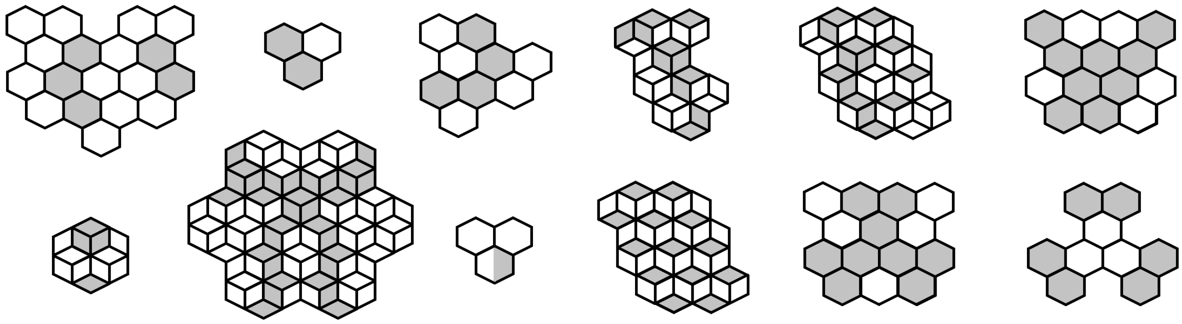
e) $5 \, ; \, 3 \, ; \, 8 \, ; \, 9 \, ; \, \cdot$ *f)* $2 \, ; \, 1 \, ; \, 8 \, ; \, 5 \, ; \, \cdot$

g) $6 \, ; \, 5 \, ; \, 7 \, ; \, 3 \, ; \, :$ *h)* $7 \, ; \, 10 \, ; \, 5 \, ; \, 2 \, ; \, :$

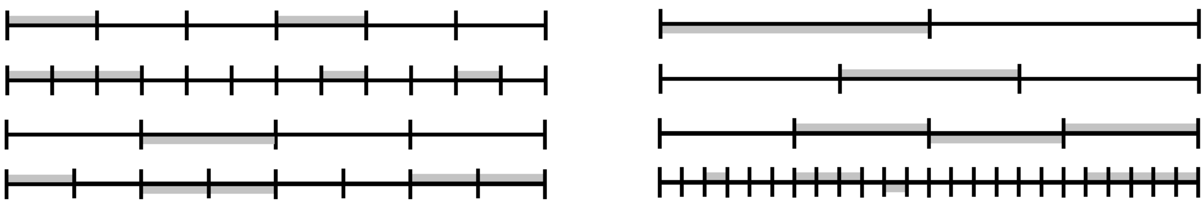
Aufgabe 28: *Bestimme Nenner und Zähler des jeweiligen dargestellten Bruchs. (Es ist der jeweilige graue Anteil gefragt.)*



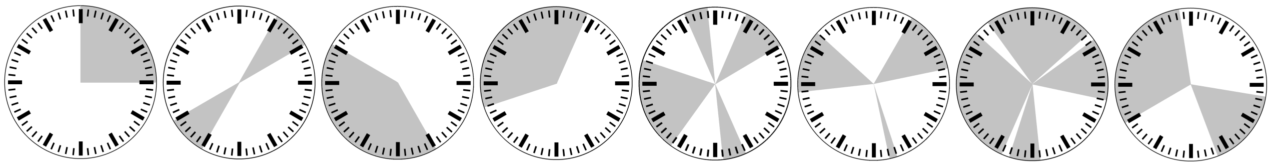
Aufgabe 29: *Bestimme Nenner und Zähler des jeweiligen dargestellten Bruchs. (Es ist der jeweilige graue Anteil gefragt.)*



Aufgabe 30: *Bestimme Nenner und Zähler des jeweiligen dargestellten Bruchs auf dem Zahlenstrahl. (Es ist der jeweilige graue Anteil gefragt.)*



Aufgabe 31: *Bestimme Nenner und Zähler des jeweiligen dargestellten Bruchs. Kürze. (Es ist der jeweilige graue Anteil gefragt.)*



Aufgabe 32: *Vereinfache die Doppelbrüche zu einem Bruch und berechne den Wert des Terms.*

a) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)} =$ *b)* $\dfrac{\left(\dfrac{1}{5}\right)}{2} =$ *c)* $\dfrac{\left(\dfrac{1}{7}\right)}{\left(\dfrac{1}{3}\right)} =$

d) $\dfrac{\left(\dfrac{4}{1}\right)}{\left(\dfrac{5}{6}\right)} =$ *e)* $\dfrac{\left(\dfrac{9}{5}\right)}{\left(\dfrac{3}{8}\right)} =$ *f)* $\dfrac{\left(\dfrac{5}{11}\right)}{\left(\dfrac{7}{6}\right)} =$

g) $\dfrac{\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}\right)}{\left(\dfrac{3}{7}\right)} =$ *h)* $\dfrac{\left(\dfrac{6}{7}\right)}{\left(\dfrac{5}{4}+\dfrac{8}{5}\right)} =$ *i)* $\dfrac{\left(\dfrac{7}{4}+\dfrac{11}{3}\right)}{\left(\dfrac{5}{7}+\dfrac{5}{12}\right)} =$

j) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{10}-\dfrac{4}{17}\right)}{\left(\dfrac{15}{3}-\dfrac{25}{7}\right)} =$ *k)* $\dfrac{\left(\dfrac{4}{7}+2\right)}{\left(\dfrac{6}{5}-1+\dfrac{7}{11}\right)} =$ *l)* $\dfrac{\left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{16}{13}\right)}{\left(\dfrac{8}{7}+\dfrac{17}{10}-\dfrac{1}{6}\right)} =$

Aufgabe 33: *Vereinfache die Doppelbrüche zu einem Bruch.* (Benötigt Abschnitt „Distributivgesetz“)

a) $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{1}{c}\right)} =$ *b)* $\dfrac{\left(\dfrac{g}{h}\right)}{\left(\dfrac{u}{v}\right)} =$ *c)* $\dfrac{\left(\dfrac{z}{x\cdot c}\right)}{\left(\dfrac{n\cdot e}{k}\right)} =$

a) $\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)}{\left(\dfrac{k}{l}\right)} =$ *b)* $\dfrac{\left(\dfrac{g}{h}\right)}{\left(\dfrac{u}{v}:\dfrac{c}{d}\right)} =$ *c)* $\dfrac{\left(\dfrac{z}{x\cdot c}\right)}{\left(\dfrac{n}{k}-\dfrac{c}{d}\right)} =$

Aufgabe 34: *Vereinfache die Mehrfachbrüche zu einem Bruch und berechne den Wert des Terms.*

a) $$\frac{\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)}\right]}{4}$$

b) $$\frac{8}{\left[\frac{\left(\frac{2}{5}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}\right]}$$

c) $$\frac{\left[\frac{2}{3}\right]}{\left[\frac{\left(\frac{9}{7}\right)}{6}\right]}$$

d) $$\frac{\left[\frac{\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)}\right]}{\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{7}{8}\right)}\right]}$$

e) $$\frac{\left[\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{7}\right)}\right]}{\left[\frac{\left(\frac{8}{3}\right)}{\left(\frac{8}{9}\right)}\right]}$$

f) $$\frac{\left[\frac{\left(\frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)}\right]}{\left[\frac{\left(\frac{9}{8}\right)}{\left(\frac{11}{3}+\frac{3}{5}\right)}\right]}$$

g) $$\frac{\left[\frac{\left(\frac{2}{\left[\frac{4}{5}\right]}\right)}{\left(\frac{\left[\frac{14}{2}\right]}{\left[\frac{5}{6}\right]}\right)}\right]}{\left[\frac{\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)}\right]}$$

h) $$\frac{\left[\frac{\left(\frac{12}{\left[\frac{3}{2}\right]}\right)}{\left(\frac{3}{\left[\frac{2}{1}\right]}\right)}\right]}{\left[\frac{\left(\frac{\left[\frac{15}{4}\right]}{\left[\frac{6}{7}\right]}\right)}{\left(\frac{\left[\frac{3}{16}\right]}{\left[\frac{6}{7}\right]}\right)}\right]}$$

Aufgabe 35: *Vereinfache die Mehrfachbrüche zu einem Bruch.* (Benötigt Abschnitt „Distributivgesetz“)

a) $\dfrac{\left[\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{d}\right)}\right]}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{e}{f}\right)}{\left(\dfrac{g}{h}\right)}\right]}$ b) $\dfrac{\left[\dfrac{\left(\dfrac{g}{h}\right)}{\left(\dfrac{e}{f}\cdot\dfrac{k}{l}\right)}\right]}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{c}{d}\right)}{\left(\dfrac{a}{b}\right)}\right]}$ c) $\dfrac{\left[\dfrac{\left(\dfrac{z}{y}\right)}{\left(\dfrac{x}{w}\right)}\right]}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{v}{u}:\dfrac{s}{t}\right)}{\left(\dfrac{r}{q}\right)}\right]}$

d) $\dfrac{\left[\dfrac{\left(\dfrac{z}{y}\right)}{\left(\dfrac{x}{w}\right)}\right]}{\left[\dfrac{p}{u}\right]}\cdot\dfrac{\left[\dfrac{g}{h}\right]}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{b}{n}\right)}{\left(\dfrac{m}{c}\right)}\right]}$ e) $\dfrac{\left[\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{z}{d}\right)}\right]}{\left[\dfrac{p}{u}\right]}:\dfrac{\left[\dfrac{g}{h}\right]}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{b}{n}\right)}{\left(\dfrac{m}{c}\right)}\right]}$ f) $\dfrac{\left[\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right)}{\left(\dfrac{e}{f}\right)}\right]}{\left[\dfrac{\left(\dfrac{g}{h}-\dfrac{k}{l}\right)}{\left(\dfrac{m}{n}\right)}\right]}$

Aufgabe 36: *Erweitere alle Brüche auf den angegebenen Nenner.*

a) $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{1}{8}$; $\dfrac{7}{10}$; $\dfrac{7}{5}$; $\dfrac{17}{8}$ auf: $\dfrac{\quad}{40}$

b) $\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{5}{12}$; $\dfrac{7}{6}$; $\dfrac{4}{5}$; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{4}{15}$ auf: $\dfrac{\quad}{60}$

c) $\dfrac{8}{7}$; $\dfrac{8}{3}$; $\dfrac{13}{21}$; $\dfrac{5}{6}$; $\dfrac{11}{7}$; $\dfrac{3}{14}$ auf: $\dfrac{\quad}{42}$

d) $\dfrac{7}{4}$; $\dfrac{7}{12}$; $\dfrac{5}{18}$; $\dfrac{7}{6}$; $\dfrac{13}{8}$; $\dfrac{11}{18}$ auf: $\dfrac{\quad}{144}$

e) $\dfrac{9}{2}$; $\dfrac{3}{11}$; $\dfrac{1}{4}$; $\dfrac{7}{12}$; $\dfrac{17}{11}$; $\dfrac{23}{4}$ auf: $\dfrac{\quad}{132}$

f) $\dfrac{6}{125}$; $\dfrac{7}{50}$; $\dfrac{7}{8}$; $\dfrac{74}{25}$; $\dfrac{43}{40}$; $\dfrac{13}{10}$ auf: $\dfrac{\quad}{1000}$

Aufgabe 37: *Erweitere die beiden Brüche auf ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches.*

a) $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$ *b)* $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{7}$ *c)* $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{10}$

d) $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{15}$ *e)* $\frac{2}{3}$; $\frac{9}{16}$ *f)* $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{9}$

g) $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{15}$ *h)* $\frac{11}{14}$; $\frac{5}{4}$ *i)* $\frac{41}{8}$; $\frac{5}{28}$

j) $\frac{6}{25}$; $\frac{3}{4}$ *k)* $\frac{31}{9}$; $\frac{4}{21}$ *l)* $\frac{5}{33}$; 7

Aufgabe 38: *Insgesamt* 840 *Schüler besuchen eine Schule. Davon kommen* $\frac{7}{15}$ *mit dem Bus,* $\frac{1}{12}$ *zu Fuß,* $\frac{1}{4}$ *mit dem Fahrrad,* $\frac{3}{20}$ *mit dem Zug und der Rest wird von ihren Eltern zur Schule gebracht. Wie viele Schüler in absoluten Zahlen kommen jeweils zur Schule und wie groß ist der Bruchanteil der Schüler, die von ihren Eltern gebracht werden?*

Aufgabe 39: *Eine* $\frac{3}{4}$*-Liter-Flasche ist zu* $\frac{4}{5}$ *gefüllt. Wie viele* $200ml$*-Gläser können damit gefüllt werden?*

Aufgabe 40: *Eine* $\frac{7}{4}$*-Liter-Flasche ist zu* $\frac{1}{4}$ *gefüllt. Da darin enthaltene Flüssigkeit soll in eine* $\frac{5}{4}$*-Liter-Flasche umgefüllt werden. Zu welchen Bruchteil ist diese Flasche anschließend gefüllt?*

Aufgabe 41: *Zwei Fässer mit einem Volumen von* 25 *und* 80 *Litern sind zusammen zu* $\frac{11}{16}$ *gefüllt. Durch Pumpen kann die Flüssigkeit von dem einem Fass zum anderen befördert werden. Gib an, ob das kleine Fass benötigt wird um die Flüssigkeit zu lagern. Gib gegebenenfalls auch an zu welchem Bruchteil das große Fass anschließend gefüllt wäre.*

Aufgabe 42: *Wenn eine volle* $\frac{7}{10}$*-Liter-Flasche in eine* $\frac{3}{4}$*-Liter-Flasche umgefüllt würde, zu welchem Bruchanteil wäre dann diese Flasche gefüllt?*

Aufgabe 43: *Berechne die Gesamtmenge der Zutaten für die angegebenen Rezepte für jeweils 6 Personen? (Nimm zur Vereinfachung an, dass die Dichte der Stoffe* $1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}$ *entspricht, also:* $1\,\mathrm{l} \mathrel{\hat{=}} 1\,\mathrm{kg}$).

Pizza	Pfannkuchen	Marmorkuchen
für 4 Personen	*für 5 Personen*	*für 8 Personen*
$\frac{1}{2}$ kg Mehl	$\frac{1}{2}$ kg Mehl	$\frac{7}{25}$ kg Mehl
$\frac{1}{3}$ l Wasser	$\frac{1}{8}$ l Mineralwasser	$\frac{3}{25}$ l Milch
$\frac{2}{5}$ l Tomatensoße	$\frac{1}{2}$ l Milch	$\frac{4}{25}$ kg Zucker
$\frac{1}{10}$ kg Salami	$\frac{1}{4}$ kg Zucker	$\frac{1}{25}$ kg Kakao
150 g Käse	20 g Salz	8 Eier (je 60 g)
20 g Salz		
6 g Hefe		

Aufgabe 44: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{7} =$ *b)* $\frac{6}{5} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{7}{9} =$

c) $\frac{8}{13} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{13}{4} =$ *d)* $\frac{9}{8} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{15} =$

e) $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{8}{14} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{5}{12} =$ *f)* $\frac{7}{3} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{3} =$

g) $\frac{2}{9} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{7}{4} =$ *h)* $\frac{11}{4} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{5} =$

i) $\frac{6}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{20}{9} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{18}{5} =$ *j)* $\frac{5}{12} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} =$

k) $\frac{6}{7} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{5}{6} =$ *l)* $\frac{10}{18} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{21} =$

Aufgabe 45: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\frac{9}{4} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{7} : \frac{3}{4} =$

b) $\frac{4}{3} \cdot \frac{9}{15} : \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{7} =$

c) $\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} : \frac{3}{56} : \frac{14}{9} =$

d) $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} : \frac{8}{3} \cdot \frac{10}{7} =$

e) $\frac{6}{8} \cdot \frac{1}{5} : \frac{13}{5} \cdot \frac{13}{9} : \frac{9}{8} =$

f) $\frac{8}{7} : \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{7} \cdot \frac{25}{12} \cdot \frac{14}{5} =$

g) $\frac{11}{3} \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{12} : \frac{22}{9} =$

h) $\frac{4}{7} : \frac{9}{5} \cdot \frac{63}{9} : \frac{14}{5} \cdot \frac{6}{10} =$

i) $\frac{3}{10} : \frac{6}{7} : \frac{20}{8} \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{25}{8} \cdot \frac{4}{7} =$

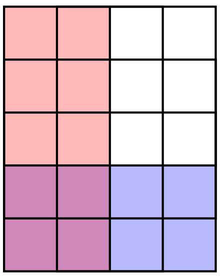
j) $\frac{5}{3} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{6}{11} : \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{5} : \frac{33}{8} =$

k) $\frac{9}{14} : \frac{12}{7} \cdot \frac{42}{25} : \frac{2}{9} \cdot \frac{8}{3} : \frac{4}{5} =$

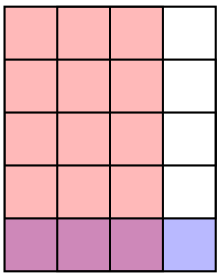
l) $\frac{20}{9} : \frac{7}{18} : \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{8} : \frac{36}{7} : \frac{16}{3} =$

Aufgabe 46: *Berechne von allen Teilflächen den Flächeninhalt. Die Gesamtfläche eines Rechtecks beträgt* $20cm^2$.

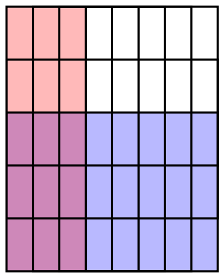
a)



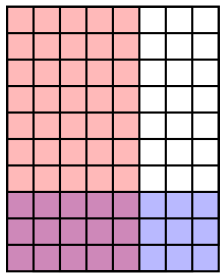
b)



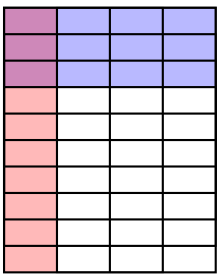
c)



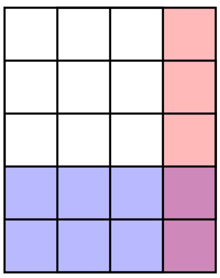
d)



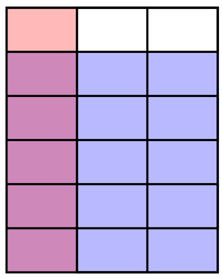
e)



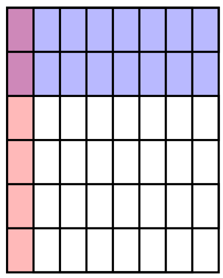
f)



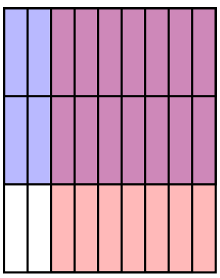
g)



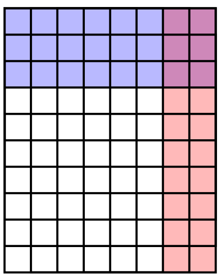
h)



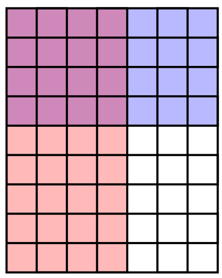
i)



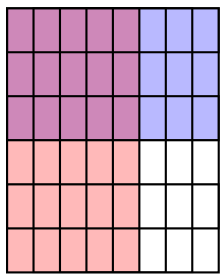
j)



k)



l)



Aufgabe 47: *Auf einer Fläche von* $100km^2$ *steht ein dichter Wald, wovon* $\frac{2}{5}$ *Buchen sind. Von allen Bäumen sind* $\frac{1}{8}$ *erkrankt. Die erkrankten Bäume müssen gefällt werden, um ein Ausbreiten der Krankheit zu verhindern. Anschließend sollen wieder genauso wie viele Buchen nachgepflanzt werden wie zuvor gefällt wurden. Berechne wie viel Fläche insgesamt mit neuen Buchen bepflanzt werden müssen.*

Aufgabe 48: *Ein rechteckiges Feld von* $63ha$ *Größe wurde so unterteilt, dass in der Länge ein Zaun nach* $\frac{4}{7}$ *und in der Breit nach* $\frac{4}{9}$ *der ehemaligen Feldgrenzen gezogen. Berechne die Größe der unterteilten neuen Felder.*

Aufgabe 49: *Bei einen Haus sollen Innenwände auf einer noch nicht ausgebauten Etage gezogen werden. Dabei ist zu beachten, dass kein Zimmer einen Flächeninhalt unter* $17m^2$ *sein soll. Die Etage hat einen rechteckig Grundriss mit einem Flächeninhalt von* $120m^2$*. Die Wände sollen in der Länge nach* $\frac{2}{5}$ *und in der Breite nach* $\frac{1}{3}$ *gezogen werden. Berechne, ob alle Zimmer groß genug sind.*

Aufgabe 50: *Berechne den Wert des Terms und kürze wenn möglich.*

a) $(2:3)\cdot(7:8)\cdot(48:21) =$

b) $(5:4)\cdot(8:3):(5:6) =$

c) $(7:9):(3:5)\cdot(9:14) =$

d) $(3:8)\cdot(13:5):(26:4) =$

e) $(9:7):(5:6):(3:7) =$

f) $(1:10)\cdot(5:3)\cdot(6:7) =$

g) $(7:6):(9:4):(5:6) =$

h) $(11:14):(27:28):(55:6) =$

Aufgabe 51: *Sortiere die Brüche nach Größe. Beginne mit dem kleinsten Bruch und verwende die Vergleichsoperatoren* $<$, $>$ *und* $=$.

a) $\frac{1}{4}\,;\ \frac{5}{8}\,;\ \frac{7}{16}\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \frac{3}{4}\,;\ \frac{3}{16}$

b) $\frac{4}{5}\,;\ \frac{5}{6}\,;\ \frac{17}{30}\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \frac{7}{10}\,;\ \frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{4}\,;\ \frac{4}{5}\,;\ \frac{7}{8}\,;\ \frac{9}{16}\,;\ \frac{21}{25}\,;\ \frac{42}{50}$

d) $\frac{3}{5}\,;\ \frac{30}{45}\,;\ \frac{11}{15}\,;\ \frac{2}{3}\,;\ \frac{12}{20}\,;\ \frac{7}{9}$

e) $\frac{7}{6}\,;\ \frac{6}{5}\,;\ \frac{5}{3}\,;\ \frac{13}{10}\,;\ \frac{17}{15}\,;\ \frac{12}{11}$

f) $\frac{3}{16}\,;\ \frac{1}{8}\,;\ \frac{1}{5}\,;\ \frac{1}{12}\,;\ \frac{4}{32}\,;\ \frac{1}{4}$

Aufgabe 52: *Bestimme die fehlende Zahl, sodass die Gleichung eine wahre Aussage widerspiegelt und trage diese ein.*

a) $\frac{2}{3} = \frac{\square}{9}$	*b)* $\frac{4}{5} = \frac{\square}{35}$	*c)* $\frac{\square}{9} = \frac{42}{54}$	*d)* $\frac{\square}{5} = \frac{72}{40}$
e) $\frac{6}{7} = \frac{\square}{63}$	*f)* $\frac{\square}{7} = \frac{8}{56}$	*g)* $\frac{81}{\square} = \frac{9}{5}$	*h)* $\frac{3}{4} = \frac{24}{\square}$
i) $\frac{55}{\square} = \frac{11}{6}$	*j)* $\frac{3}{\square} = \frac{39}{13}$	*k)* $\frac{5}{8} = \frac{\square}{24}$	*l)* $\frac{\square}{84} = \frac{5}{7}$
m) $\frac{36}{\square} = \frac{6}{11}$	*n)* $\frac{45}{99} = \frac{5}{\square}$	*o)* $\frac{4}{\square} = \frac{96}{144}$	*p)* $\frac{0}{3} = \frac{\square}{1337}$

Aufgabe 53: *Schreibe die gemischte Zahl als unechten Bruch.*

a) $1\frac{1}{2} =$	*b)* $3\frac{1}{4} =$	*c)* $2\frac{2}{5} =$	*d)* $6\frac{7}{8} =$
e) $3\frac{4}{7} =$	*f)* $8\frac{2}{9} =$	*g)* $4\frac{6}{7} =$	*h)* $2\frac{3}{4} =$
i) $7\frac{7}{8} =$	*j)* $3\frac{11}{12} =$	*k)* $4\frac{9}{14} =$	*l)* $6\frac{7}{11} =$
m) $12\frac{3}{8} =$	*n)* $45\frac{2}{15} =$	*o)* $73\frac{41}{83} =$	*p)* $0\frac{573}{991} =$

Aufgabe 54: *Schreibe den unechten Bruch als gemischte Zahl.*

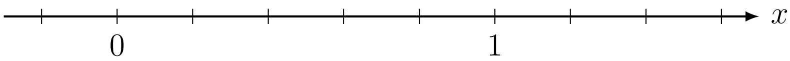
a) $\frac{5}{4} =$	*b)* $\frac{7}{6} =$	*c)* $\frac{9}{5} =$	*d)* $\frac{12}{10} =$
e) $\frac{35}{6} =$	*f)* $\frac{44}{9} =$	*g)* $\frac{52}{5} =$	*h)* $\frac{11}{3} =$
i) $\frac{73}{8} =$	*j)* $\frac{65}{4} =$	*k)* $\frac{82}{11} =$	*l)* $\frac{74}{13} =$
m) $\frac{93}{4} =$	*n)* $\frac{425}{15} =$	*o)* $\frac{291}{16} =$	*p)* $\frac{2455}{48} =$

Aufgabe 55: *Berechne den Anteil.*

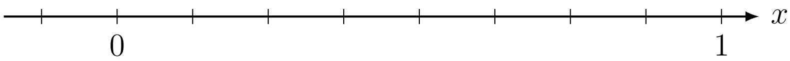
a) $\frac{1}{2}$ von: 38 kg	*b)* $\frac{3}{4}$ von: 96 cm
c) $\frac{5}{6}$ von: 54 min	*d)* $\frac{3}{8}$ von: 168 s
e) $\frac{4}{5}$ von: 3675 g	*f)* $\frac{8}{9}$ von: 81729 m^2
g) $\frac{7}{10}$ von: 6560 l	*h)* $\frac{17}{20}$ von: 14880 cm^3

Aufgabe 56: *Trage auf dem Zahlenstrahl die gegebenen Brüche ein.*(Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“)

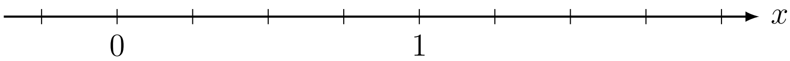
a) $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{8}{10}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{6}{5}$



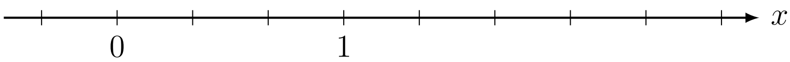
b) $\frac{7}{8}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{7}{14}$; $\frac{0}{13}$



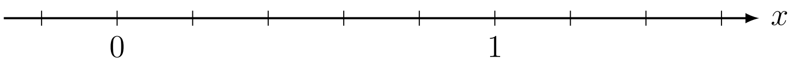
c) $\frac{3}{4}$; $\frac{11}{8}$; 2 ; $\frac{24}{16}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{125}{100}$



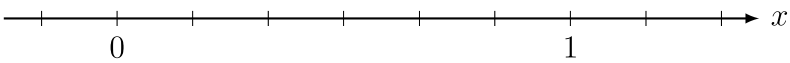
d) $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{42}{21}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{1}{12}$



e) $\frac{3}{4}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{20}$; $1\frac{1}{5}$; $1\frac{1}{2}$



f) $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{55}{60}$; $1\frac{1}{3}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{5}{24}$



Aufgabe 57: *Berechne die Werte der Terme und beschreibe die Auffälligkeit.*

a)

$4 : 4 =$

$4 : 2 =$

$4 : 1 =$

$4 : \frac{1}{2} =$

$4 : \frac{1}{4} =$

$4 : \frac{1}{8} =$

$4 : \frac{1}{16} =$

b)

$24 : 8 =$

$24 : 4 =$

$24 : 2 =$

$24 : 1 =$

$24 : \frac{1}{2} =$

$24 : \frac{1}{4} =$

$24 : \frac{1}{8} =$

c)

$9 : \frac{1}{9} =$

$9 : \frac{1}{3} =$

$9 : 1 =$

$9 : 3 =$

$9 : 9 =$

$9 : 27 =$

$9 : 81 =$

Aufgabe 58: *Berechne die Werte der Terme und beschreibe die Auffälligkeit.*

a)

$4 \cdot 4 =$

$4 \cdot 2 =$

$4 \cdot 1 =$

$4 \cdot \frac{1}{2} =$

$4 \cdot \frac{1}{4} =$

$4 \cdot \frac{1}{8} =$

$4 \cdot \frac{1}{16} =$

b)

$24 \cdot 8 =$

$24 \cdot 4 =$

$24 \cdot 2 =$

$24 \cdot 1 =$

$24 \cdot \frac{1}{2} =$

$24 \cdot \frac{1}{4} =$

$24 \cdot \frac{1}{8} =$

c)

$9 \cdot \frac{1}{9} =$

$9 \cdot \frac{1}{3} =$

$9 \cdot 1 =$

$9 \cdot 3 =$

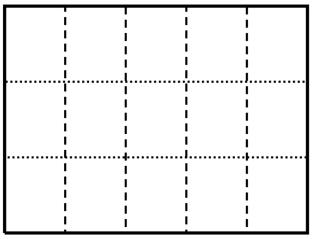
$9 \cdot 9 =$

$9 \cdot 27 =$

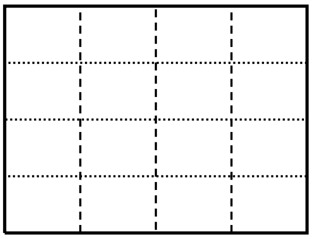
$9 \cdot 81 =$

Aufgabe 59: *Beantworte die Fragen zu jeder Darstellung.*

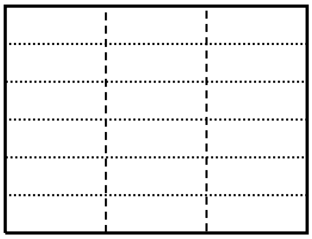
$I)$



$II)$



$III)$



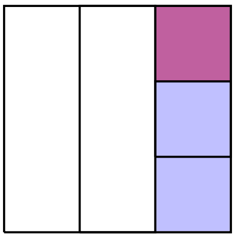
$a)$ Das jeweilige Rechteck wird durch die gestrichelten Linien in wie viele Teile geteilt?

$b)$ Das jeweilige Rechteck wird durch die gepunkteten Linien in wie viele Teile geteilt?

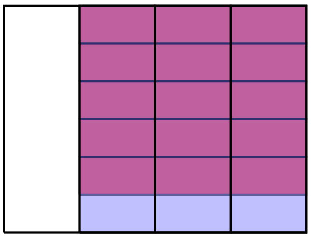
$c)$ Das jeweilige Rechteck wird durch die gestrichelten und die gepunkteten Linien in wie viele Teile geteilt?

Aufgabe 60: *Beantworte die Fragen zu jeder Darstellung.*

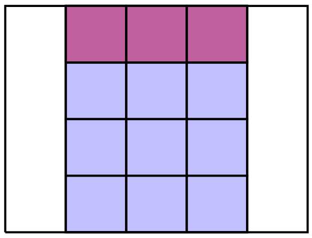
$I)$



$II)$



$III)$



$a)$ Wie viele Anteile des jeweiligen Rechteck sind farbig markiert?

$b)$ Wie viele Anteile der farbigen Markierung sind bläulich markiert?

$c)$ Wie viele Anteile jeweiligen Rechteck sind bläulich markiert?

Weitere Bruchrechnungsübungen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden: leichteres Niveau, mittleres Niveau oder schwereres Niveau

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.5) Lösungen zur Bruchrechnen.

3.5 Dezimalzahlen

Um Brüche in *Dezimalzahlen* umzuwandeln bedarf es der schriftlichen *Division* oder eines guten Zahlengefühls. Anhand eines Beispiels soll ersteres verdeutlicht werden.

$$\begin{array}{rl}
\frac{2}{7} = & 2 : 7 = 0,285... \\
& -0 \\
\hline
& 20 \\
& -14 \\
\hline
& 60 \\
& -\ \ 56 \\
\hline
& 40 \\
& -\ \ \ 35 \\
\hline
& \vdots
\end{array} \tag{3.32}$$

An Gleichung (3.32) ist zu erkennen, wie jeder *Bruch* in eine *Dezimalzahl* umgewandelt werden kann. Dabei wird bei der schriftlichen Divisionsrechnung nach jeder *Subtraktion* eine Nachkommastellennull nach unten gezogen, sodass die Rechnung fortgesetzt werden kann bis kein *Rest* mehr existiert, eine *Periodizität* wie bei $\frac{1}{3} = 0,3333333333... = 0,\bar{3}$ festgestellt wird oder eine genauere *Dezimalzahl* nicht mehr erforderlich ist. Da im Allgemeinen bekannt ist, dass $\frac{3}{3} = 1$ ist, soll hier an dieser Stelle des Buchs folgende Festlegung zur *Periodizität* gelten: $3 \cdot 0,\bar{3} = 0,\bar{9} := 1$. Diese Festlegung kann auch bewiesen werden, was allerdings hier den Rahmen des Buches sprengen würde.

Die maximale Periodenlänge ist gegeben durch den Nenner des Bruches a, welcher zur Dezimalbruchdarstellung gehört. Dabei hat die maximal mögliche Periodenlänge (Anzahl der Ziffern bevor sich die Reihenfolge der Zahlen wiederholt) $a - 1$ Ziffern lang. Hierbei muss beachtet werden, dass die Periodenlänge auch kleiner als die maximale Periodenlänge sein kann.

Um Brüche in eine Dezimaldarstellung zu bringen besteht auch die Möglichkeit den Bruch so zu Erweitern, dass dieser eine Zehnerpotenz bildet $(10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ ...)$, um anschließend nur das Komma im Zähler an die richtige Stelle zu setzen. Dabei geben die Nullen im Nenner an, wie Nachkommastellen existieren.

$$\frac{49}{20} = \frac{49 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{245}{100} = 2,45 \tag{3.33}$$

Im Allgemeinen sollte auf eine Umwandlung in *Dezimalzahlen* verzichtet werden, da die *Darstellung* durch einen *Bruch* meistens, das weitere Vorgehen vereinfacht. Die *Darstellung* einer

Zahl als *Bruch* ist dabei eine Schreibweise, welche eine Rechnung fordert aber sie nicht ausführt. So kann zum Beispiel durch das Erhalten von *Bruchdarstellungen* folgende Rechnung leichter durchgeführt werden als in der *Dezimalzahlendarstellung*, welche im direkten Vergleich darunter zu finden ist. (Bei dieser Rechnung werden Klammern verwendet, deren Bedeutung genaustens im Abschnitt „Klammersetzung" besprochen werden. Für diese Rechnung gilt, dass die Rechnung in der Klammer zu erst ausgeführt werden soll.)

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{3}{5}=\left(\frac{2\cdot 2}{3\cdot 2}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{3}{5}=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{\cancel{5}\cdot 3}{6\cdot\cancel{5}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\\&(0,\bar{6}+0,1\bar{6})\cdot 0,6=0,8\bar{3}\cdot 0,6=0,5\end{aligned}\tag{3.34}$$

Die Gleichung (3.34) zeigt, dass die Rechnung mit den *Brüchen* zwar länger erscheint, aber vollständig im Kopf durchgeführt werden kann. Während die Rechnungen mit den *Dezimalzahlen* vielen nur mit Taschenrechner gelingen und dabei noch die Problematik der *Periodizität* bei der Eingabe in den Taschenrechner besteht, sodass als Ergebnis $0,499999999$ auf dem Taschenrechnerdisplay angezeigt wird. Dieses Ergebnis wäre nicht richtig und durch das *Runden* des Ergebnisses bekommt der Schüler oftmals den Eindruck, dass solche Rechnungen nicht ohne Taschenrechner schaffbar seien. Aus diesem Grund lohnt es sich besonders bei Divisionsaufgaben die Dezimalzahlen in Brüche zu überführen.

Viele Dezimalzahlen lassen sich als Brüche darstellen, hierbei wird der Stellenwert der einzeln Ziffern mit der Ziffer multipliziert und anschließend die einzelnen Brüche aufaddiert.

$$0,2573=0\cdot\frac{1}{1}+2\cdot\frac{1}{10}+5\cdot\frac{1}{100}+7\cdot\frac{1}{1000}+3\cdot\frac{1}{10000}=\frac{2573}{10000}\tag{3.35}$$

Wobei deutlich wird, dass der Stellenwert der letzten Ziffer entscheiden für den resultierenden Nenner ist. Anschließend sollte stets geguckt werden ob das Kürzen der Brüche möglich ist.

Periodizitäten lassen sich auch als Bruch darstellen, hierbei wird der Darstellungswechsel zwischen Neunteln und dessen Dezimalzahldarstellung betrachtet:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{9}=0,\bar{1}\quad\frac{2}{9}=0,\bar{2}\quad\frac{3}{9}=0,\bar{3}\quad\frac{4}{9}=0,\bar{4}\quad\frac{5}{9}=0,\bar{5}\quad\frac{6}{9}=0,\bar{6}\\&\frac{7}{9}=0,\bar{7}\quad\frac{8}{9}=0,\bar{8}\quad\frac{9}{9}=0,\bar{9}=1\quad\frac{10}{9}=1,\bar{1}\quad\frac{11}{9}=1,\bar{2}\quad\frac{12}{9}=1,\bar{3}\end{aligned}\tag{3.36}$$

Somit kann für Periodizitäten mit mehreren Ziffern auch die Beteiligung von Neunteln geschlussfolgert werden:

$$\frac{12}{99}=0,\overline{12}\qquad\frac{54}{99}=0,\overline{54}\qquad\frac{120}{99}=1,\overline{19}\qquad\frac{125}{999}=0,\overline{125}\tag{3.37}$$

Wobei es Verschiebungen durch die Komination mit Zehnteln kommen kann:

$$\frac{7}{90} = 0,0\overline{7} \qquad \frac{10}{90} = 0,\overline{1} \qquad \frac{11}{90} = 0,1\overline{2} \qquad \frac{19}{90} = 0,2\overline{1} \tag{3.38}$$

Dezimalzahlen, die nicht als Bruch dargestellt werden können sind irrationale Zahlen (Zahlen die nicht durch einen Bruch dargestellt werden können). Beispiele hierfür sind:

$$\begin{aligned} &a)\ \ 0,101001000100001000000... \\ &b)\ \ 0,123456789101112131415... \\ &c)\ \ \pi = 3,14159265358979323... \\ &d)\ \ e = 2,71828182845904523536... \end{aligned} \tag{3.39}$$

Die Rechnung mit Dezimalzahlen verhält sich ähnlich wie mit Natürlichen Zahlen, wobei im Wesentlichen die Position des Kommas beachtet werden muss.

- Addition und Subtraktion: Bei der schriftlichen Addition sowie der Subtraktion müssen die Kommata untereinander stehen. Im folgenden Beispiel $13,37 + 42,6587$ werden zum ersten Summanden zwei weitere Nachkommastellen in blau hinzugefügt $13,37 = 13,37\color{blue}{00}$, um mehr Übersicht zu gewährleisten.

$$\begin{array}{r} 13,37\color{blue}{00} \\ +42,6587 \\ \color{red}{1,1} \\ \hline 56,0287 \end{array} \tag{3.40}$$

- Multiplikation: Bei der Multiplikation von Dezimalzahlen bietet es sich ein Darstellungswechsel in die Bruchdarstellung an, da so die normale schriftliche Multiplikation durch geführt werden kann.

$$2,34 \cdot 0,7 = \frac{234}{100} \cdot \frac{7}{10} = \frac{234 \cdot 7}{100 \cdot 10} = \frac{1638}{1000} = 1,638 \tag{3.41}$$

  Hieraus wird auch die folgende Regel ersichtlich: „Die Anzahl der Nachkommastellen aller Faktoren ergibt die Anzahl der Nachkommastellen des Werts des Produkts.“

- Division: Bei der Division von Dezimalzahlen bietet es sich ein Darstellungswechsel in die Bruchdarstellung an, da so die normale schriftliche Division durch geführt werden kann.

$$3,234 : 0,6 = \frac{3234}{1000} : \frac{6}{10} = \frac{3234}{1000} \cdot \frac{10}{6} = \frac{3234}{100} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{100} \cdot \frac{3234}{6} = 32,34 : 6 = 5,39 \tag{3.42}$$

> Wobei auch wieder eine Regel ersichtlich wird: „Die Kommata dürfen im Divisor und Dividenden gleichmäßig verschoben werden. Um eine schriftliche Division durch zu führen ist es ratsam kein Komma im Dividenden zu besitzen.“

Dabei unterliegt das Prinzip *Runden* klaren Regeln. So gilt, wenn die Stelle hinter der *gerundet* werden soll größer als vier ist, dann wird aufgerundet. Beim Aufrunden wird die *Ziffer* an der gerundet wird um eins erhöht. Andernfalls wird abgerundet und die *Ziffer* bleibt unangetastet.

$$\begin{aligned} 0,485 &\approx 0,49 \qquad \text{aufrunden} \\ 0,322 &\approx 0,32 \qquad \text{abrunden} \end{aligned} \tag{3.43}$$

Das Prinzip des *Rundens* ist wichtig, da bei vielen Rechnungen im Ergebnis viele Nachkommastellen auftreten. Aus diesem Grund gilt stillschweigend die Konvention, dass immer auf zwei Nachkommastellen gerundet wird, außer es ist anders angegeben.

Dieses Verfahren zur Umwandlung von *Brüchen* in *Dezimalzahlen* ist in erster Linie nützlich um *Prozentwerte* auszurechnen, was detaillierter im Abschnitt „Prozentrechnung“ beschrieben wird. Es ist ratsam für jeden Schüler, wenn jede mögliche Rechnung mit *Brüchen* bewältigt wird, da die *Bruchrechnung* mit zunehmenden Umfang der Mathematik an Bedeutung gewinnt. Aus diesem Grund befindet sich am Anhang dieses Buches eine Auflistung einiger besonders oft vorkommenden *Brüche* und ihrer *Dezimalszahldarstellung* (18.8). Wichtig zu erwähnen bleibt, dass nicht jede *Dezimalzahl* als eine *Bruchzahl* dargestellt werden kann.

3.5.1 Übungsaufgaben zu Dezimalzahlen

Aufgabe 1: *Wandle folgende Brüche in Dezimalzahlen um.*

a) $\frac{1}{2} =$	*b)* $\frac{1}{3} =$	*c)* $\frac{1}{5} =$
d) $\frac{1}{8} =$	*e)* $\frac{1}{4} =$	*f)* $\frac{1}{16} =$
g) $\frac{3}{4} =$	*h)* $\frac{4}{5} =$	*i)* $\frac{2}{3} =$
j) $\frac{6}{7} =$	*k)* $\frac{1}{12} =$	*l)* $\frac{19}{5} =$
m) $\frac{5}{9} =$	*n)* $\frac{11}{6} =$	*o)* $\frac{5}{3} =$
p) $\frac{43}{5} =$	*q)* $\frac{55}{2} =$	*r)* $\frac{17}{8} =$
s) $\frac{67}{7} =$	*t)* $\frac{81}{3} =$	*u)* $\frac{55}{7} =$
v) $\frac{1}{10} =$	*w)* $\frac{1}{100} =$	*x)* $\frac{1}{1000} =$

Aufgabe 2: *Berechne folgende Aufgaben.*

a) $4 \cdot 0,1 =$	*b)* $1 + 0,75 =$	*c)* $9 \cdot 1,001 =$
d) $2,125 - 1 =$	*e)* $6,\bar{6} + 3,\bar{3} =$	*f)* $1 + 0,0004 =$
g) $3,003 : 3 =$	*h)* $100 \cdot 1,001 =$	*i)* $1000 \cdot 0,001 =$
j) $5,\bar{5} : 5 =$	*k)* $5 \cdot 0,1 + 0,\bar{3} =$	*l)* $14 + 0,\bar{7} =$
m) $4 \cdot 0,9 =$	*n)* $8 - 0,15 =$	*o)* $4 \cdot 2,212 =$
p) $9,853 - 6 =$	*q)* $1,5 + 8,7 =$	*r)* $2 + 1,6974 =$
s) $2,195 : 5 =$	*t)* $125 \cdot 0,005 =$	*u)* $0,1 \cdot 0,1 =$
v) $16,24\bar{8} : 8 =$	*w)* $11 \cdot 0,01 + 1,\bar{1} =$	*x)* $46 + 8,\bar{5} =$

Aufgabe 3: *Runde die Zahlen auf zwei Nachkommastellen.*

a) $0,562 \approx$	*b)* $0,337 \approx$	*c)* $0,753 \approx$	*d)* $12,2567 \approx$
e) $7,419 \approx$	*f)* $2,456 \approx$	*g)* $9,783 \approx$	*h)* $37,3783 \approx$
i) $5,505 \approx$	*j)* $4,782 \approx$	*k)* $0,228 \approx$	*l)* $25,7342 \approx$
m) $0,111 \approx$	*n)* $4,776 \approx$	*o)* $5,387 \approx$	*p)* $78,0152 \approx$
q) $1,002 \approx$	*r)* $1,273 \approx$	*s)* $4,324 \approx$	*t)* $11,0144 \approx$
u) $2,572 \approx$	*v)* $0,004 \approx$	*w)* $0,786 \approx$	*x)* $35,7855 \approx$

Aufgabe 4: *Berechne die Gesamtpreise der Bestellungen.*

a) 2 Eistee, 1 Pizza, 1 Salat und 1 Eisbecher

b) 1 Kaffee, 1 Limonade, 1 Gemüseauflauf, 1 Grillkäse und 1 Tiramisu

c) 1 Kaffee, 1 Eistee, 1 Steak, 1 Bratkartoffeln und 1 Eisbecher

d) 2 Limonade, 1 Frikassee, 1 Reis und 1 Eisbecher

e) 2 Kaffee, 1 Lasagne, 1 Suppe und 1 Götterspeise

f) 1 Kaffee, 1 Eistee, 1 Frikassee, 1 Reis und 1 Tiramisu

g) 1 Eistee, 1 Pizza, 1 Eisbecher und 1 Tiramisu

h) 1 Limonade, 1 Eistee, 1 Lasagne, 1 Salat und 1 Eisbecher

Menü

Getränke	
0,4l Eistee	1,95€
Kaffee	2,40€
0,4l Limonade	1,69€
Vorspeisen	
Suppe	3,99€
Grillkäse	3,49€
Salat	2,69€
Hauptgericht	
Lasagne	6,95€
Pizza	7,95€
Steak	11,95€
Gemüseauflauf	6,45€
Frikassee	8,45€
Beilagen	
Bratkartoffeln	2,95€
Reis	2,45€
Stärkeklöße	3,45€
Desert	
Eisbecher	3,95€
Tiramisu	4,95€
Götterspeise	2,45€

i) 2 Kaffee, 1 Gemüseauflauf, 1 Salat und 1 Tiramisu

$j)$ 2 Limonade, 3 Stärkeklöße und 1 Götterspeise

Aufgabe 5: *Welche Zahl liegt genau zwischen den angegebenen Zahlen?*

$a)$ 3 und 1 $b)$ 1 und 0
$c)$ 5 und 8 $d)$ $0,1$ und $0,2$
$e)$ 0 und $0,3$ $f)$ $0,05$ und $0,01$
$g)$ $4,3$ und $1,2$ $h)$ $0,0004$ und $0,0034$
$i)$ $2,4$ und $34,2$ $j)$ $84,21$ und $5,35$
$k)$ $7,8$ und $7,8$ $l)$ $98,1461$ und $477,254$

Aufgabe 6: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $0,5+1,2=$ $b)$ $1,4+6,7=$ $c)$ $4,9+3,5=$
$d)$ $11,4+6,8=$ $e)$ $6,6+8,7=$ $f)$ $3,2+9,9=$
$g)$ $5,4+8,2=$ $h)$ $14,6+18,7=$ $i)$ $0,53+4,24=$
$j)$ $7,34+5,72=$ $k)$ $41,93+73,52=$ $l)$ $1,44+5,87=$
$m)$ $6,524+5,842=$ $n)$ $5,426+3,332=$ $o)$ $7,452+8,134=$

Aufgabe 7: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $2,5-1,2=$ $b)$ $9,4-6,7=$ $c)$ $4,9-3,5=$
$d)$ $11,4-6,8=$ $e)$ $9,6-8,7=$ $f)$ $13,2-9,9=$
$g)$ $15,4-8,2=$ $h)$ $14,6-11,7=$ $i)$ $6,53-4,24=$
$j)$ $7,34-5,72=$ $k)$ $141,93-73,52=$ $l)$ $8,44-5,87=$
$m)$ $6,524-5,842=$ $n)$ $5,426-3,332=$ $o)$ $9,452-8,134=$

Aufgabe 8: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $2,5 \cdot 1,2 =$ $b)$ $9,4 \cdot 6,7 =$ $c)$ $4,9 \cdot 3,5 =$

$d)$ $11,4 \cdot 6,8 =$ $e)$ $9,6 \cdot 8,7 =$ $f)$ $13,2 \cdot 9,9 =$

$g)$ $15,4 \cdot 8,2 =$ $h)$ $14,6 \cdot 11,7 =$ $i)$ $6,53 \cdot 4,24 =$

$j)$ $7,34 \cdot 5,72 =$ $k)$ $141,93 \cdot 73,52 =$ $l)$ $8,44 \cdot 5,87 =$

$m)$ $6,524 \cdot 5,842 =$ $n)$ $5,426 \cdot 3,332 =$ $o)$ $9,452 \cdot 8,134 =$

Aufgabe 9: *Berechne den Wert des Terms.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“)

$a)$ $-2,5 - 1,2 =$ $b)$ $-9,4 + 6,7 =$ $c)$ $1,9 - 3,5 =$

$d)$ $11,4 - 16,8 =$ $e)$ $-9,6 + 8,7 =$ $f)$ $-13,2 - 9,9 =$

$g)$ $-15,4 + 8,2 =$ $h)$ $-14,6 + 11,7 =$ $i)$ $-6,53 + 4,24 =$

$j)$ $2,34 - 5,72 =$ $k)$ $-141,93 - 73,52 =$ $l)$ $-8,44 + 5,87 =$

$m)$ $-6,524 - 5,842 =$ $n)$ $0,426 - 3,332 =$ $o)$ $4,452 - 8,134 =$

Aufgabe 10: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $0,3 + 0,5 \cdot 3 - 0,6 =$ $b)$ $3,5 - 1,2 \cdot 2,4 : 2 + 6,7 =$

$c)$ $3,4 \cdot 5,4 + 0,2 \cdot 20 - 5,4 =$ $d)$ $8,8 : 2,2 - 1,1 + 5,4 \cdot 3,1 =$

$e)$ $0,5 \cdot 7,8 - 3 \cdot 1,5 + 9,2 \cdot 3,4 =$ $f)$ $4,1 \cdot 2,4 \cdot 5 - 2,5 \cdot 8 \cdot 2,3 =$

$g)$ $7,3 \cdot 1,2 - 5,5 + 4,2 : 0,5 + 8,3 \cdot 1,3 =$ $h)$ $12,5 \cdot 3,4 : 0,1 + 66,4 - 32,7 \cdot 0,8 =$

Aufgabe 11: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $1,34 + 9,42 + 4,82 + 8,23 =$ $b)$ $42,24 + 1,74 + 25,72 + 37,31 =$

$c)$ $5,25 + 7,35 + 14,56 + 88,53 =$ $d)$ $63,34 + 2,52 + 26,26 + 8,87 =$

$e)$ $7,32 + 1,45 + 0,51 + 0,093 =$ $f)$ $0,525 + 0,178 + 0,952 + 0,227 =$

$g)$ $25,561 + 95,156 + 32,681 + 44,679 =$ $h)$ $12,45 + 0,2456 + 3,184 + 9,48134 =$

Aufgabe 12: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $53,34-13,52-3,72-18,2=$

$b)$ $14,4-0,52-4,32-1,23=$

$c)$ $7,6-0,65-0,93-1,32=$

$d)$ $75,34-5,6-7,21-19,12=$

$e)$ $45,8-4,54-12,3-23,95=$

$f)$ $129,33-53,32-12,45-18,48=$

$g)$ $4,345-0,892-0,345-2,567=$

$h)$ $19,3-0,414-11,4263-0,3245=$

Aufgabe 13: *Berechne den Wert des Terms.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“)

$a)$ $4,34-9,82+1,82-6,73=$

$b)$ $5,43+8,54-11,44+5,42=$

$c)$ $9,41+1,45+0,06-13,89=$

$d)$ $-7,156+3,256+0,561+5,814=$

$e)$ $-0,892+2,567-12,45+53,32=$

$f)$ $-4,346-0,255-0,814-9,419=$

$g)$ $-41,94+5,392-0,2576-18,15=$

$h)$ $-84,601-0,0536+0,104+714,4=$

Aufgabe 14: *Bilde den Kehrwert.*

$a)$ 4	$b)$ 9	$c)$ $0,2$	$d)$ $0,75$
$e)$ $0,01$	$f)$ 20	$g)$ $0,\bar{6}$	$h)$ $0,9$
$i)$ $0,45$	$j)$ $0,3$	$k)$ 12	$l)$ $1,5$
$l)$ $0,53$	$m)$ $2,83$	$n)$ $0,235$	$o)$ $0,924$

Aufgabe 15: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

$a)$ $\frac{2}{3}$ $\quad$ $0,65$	$b)$ $0,\bar{5}$ $\quad$ $\frac{5}{9}$	$c)$ $\frac{3}{4}$ $\quad$ $0,755$
$d)$ $\frac{5}{8}$ $\quad$ $0,67$	$e)$ $2,35$ $\quad$ $\frac{46}{20}$	$f)$ $1,2$ $\quad$ $\frac{17}{15}$
$g)$ $0,225$ $\quad$ $\frac{1}{4}$	$h)$ $\frac{72}{1000}$ $\quad$ $0,07$	$i)$ $\frac{9}{5}$ $\quad$ $1,77$

Aufgabe 16: *Wandel den Bruch in einen Dezimalzahl um.*

a) $\frac{43}{20} =$	*b)* $\frac{17}{50} =$	*c)* $\frac{83}{250} =$	*d)* $\frac{33}{40} =$
e) $\frac{19}{25} =$	*f)* $\frac{77}{20} =$	*g)* $\frac{143}{80} =$	*h)* $\frac{383}{125} =$
i) $\frac{2457}{2000} =$	*j)* $\frac{787}{500} =$	*k)* $\frac{54681}{1250} =$	*l)* $\frac{41681}{400} =$
m) $\frac{5664}{125} =$	*n)* $\frac{8647}{2000} =$	*o)* $\frac{8463}{25000} =$	*p)* $\frac{6841}{12500} =$
q) $\frac{23}{625} =$	*r)* $\frac{1013}{3125} =$	*s)* $\frac{709}{15625} =$	*t)* $\frac{977}{78125} =$

Aufgabe 17: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $0,45 : 0,18 =$	*b)* $0,64 : 0,016 =$	*c)* $1,35 : 0,15 =$
c) $2,88 : 0,012 =$	*d)* $0,64 : 3,2 =$	*e)* $3,06 : 0,45 =$
f) $1,75 : 0,28 =$	*g)* $39 : 0,048 =$	*h)* $1,54 : 2,2 =$
i) $1,56 : 0,6 =$	*j)* $0,225 : 0,12 =$	*k)* $2,89 : 0,68 =$
l) $1,95 : 0,26 =$	*m)* $0,45 : 1,44 =$	*n)* $0,196 : 0,28 =$

Aufgabe 18: *Ein Thermometer zeigte eine minimale Temperatur von* $7,3\,°\mathrm{C}$ *und eine maximale Temperatur von* $22,1\,°\mathrm{C}$ *an. Berechne die Temperaturdifferenz.*

Aufgabe 19: *In der Nacht zeigt ein Thermometer zeigte eine Temperatur von* $-2,7\,°\mathrm{C}$ *an, zwölf Stunden später zeigt dieses* $4,3\,°\mathrm{C}$ *an. Berechne die Temperaturdifferenz.*

Aufgabe 20: *Da in anderen Staaten oftmals auch andere Währungen verwendet werden müssen diese ineinander umgetauscht werden. Auf einer Tafel steht als aktueller Kurs, dass* 1€ *zur Zeit etwa* 1,17$. *Wie viel Dollar entsprechen* 27,95€*?*

Aufgabe 21: *Ein Produkt in einem Online-Shop kann mit verschiedenen Währungen bezahlt werden. Dabei entsprechen* 1€ *zu der aktuellen Zeit etwa* 0,85£. *Das gewünschte Produkt kostet* 199€ *beziehungsweise* 169 £*, unter welcher Währung lohnt sich der Kauf mehr?*

Aufgabe 22: *In einer Packung befinden sich* 8 *Batterien und kosten* 4,49€*, wie viel würde dann eine Batterie in dieser Packung kosten?*

Aufgabe 23: *Der Preis eines Produktes soll um* $\frac{1}{8}$ *reduziert werden, welches zuvor* 64,95 € *kostete. Berechne den neuen Preis.*

Aufgabe 24: *Auf einem Kontoauszug ist vermerkt, dass es ein Guthaben von* 134,50 € *gibt. Wie viel Guthaben ist nach* 4 *Jahren noch auf dem Konto, wenn jeden Monat eine Kontoführungsgebühr von* 2,90 € *erhoben werden.*

Aufgabe 25: *Nach* 16 *Löffeln Salz zeigt die Waage* 136,48 g *an. Wie viel Gramm Salz war durchschnittlich auf einem Löffel?*

Aufgabe 26: *Eine Strecke von* 124,8 km *wurde in* 2,4 *Stunden zurückgelegt. Berechne die Geschwindigkeit*

Aufgabe 27: *Gib eine Zahl an, die nicht der rationalen Zahlen* $\mathbb{Q}$ *zu zuordnen ist.*

Aufgabe 28: *Berechne die Werte der Terme und beschreibe die Auffälligkeit.*

a)
$250 : 50 =$
$25 : 5 =$
$2,5 : 0,5 =$
$0,25 : 0,05 =$
$0,025 : 0,005 =$

b)
$480 : 8 =$
$48 : 0,8 =$
$4,8 : 0,08 =$
$0,48 : 0,008 =$
$0,048 : 0,0008 =$

c)
$5,4 : 9 =$
$0,54 : 0,9 =$
$0,054 : 0,09 =$
$0,0054 : 0,009 =$
$0,00054 : 0,0009 =$

d)
$35 : 7 =$
$35 : 0,7 =$
$35 : 0,07 =$
$35 : 70 =$
$35 : 700 =$
$35 : 7000 =$

e)
$480 : 6 =$
$48 : 6 =$
$4,8 : 6 =$
$0,48 : 6 =$
$0,048 : 6 =$
$0,0048 : 6 =$

f)
$36 : 4 =$
$36 : 0,4 =$
$3,6 : 0,4 =$
$0,36 : 0,4 =$
$0,36 : 0,04 =$
$0,036 : 0,04 =$

Aufgabe 29: *Berechne die Werte der Terme und beschreibe die Auffälligkeit.*

$a)$	$3 \cdot 5 =$ $3 \cdot 0,5 =$ $3 \cdot 0,05 =$ $3 \cdot 0,005 =$ $3 \cdot 0,0005 =$ $3 \cdot 0,00005 =$	$b)$	$8 \cdot 7 =$ $0,8 \cdot 7 =$ $0,08 \cdot 7 =$ $0,008 \cdot 7 =$ $0,0008 \cdot 7 =$ $0,00008 \cdot 7 =$	$c)$	$12 \cdot 4 =$ $1,2 \cdot 4 =$ $1,2 \cdot 0,4 =$ $0,12 \cdot 0,4 =$ $0,12 \cdot 0,04 =$ $0,012 \cdot 0,004 =$
$d)$	$0,1 \cdot 2 =$ $0,1 \cdot 0,2 \cdot 3 =$ $0,1 \cdot 0,2 \cdot 3 \cdot 4 =$ $0,1 \cdot 0,2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$	$e)$	$0,1 \cdot 0,02 =$ $0,1 \cdot 0,02 \cdot 3 =$ $0,01 \cdot 0,02 \cdot 3 \cdot 4 =$ $0,01 \cdot 0,02 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,5 =$	$f)$	$0,1 \cdot 0,2 =$ $0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 =$ $0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 =$ $0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 =$

Weitere Dezimalrechnungsübungen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden: leichteres Niveau, mittleres Niveau oder schwereres Niveau

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.6) Lösungen zu Dezimalzahlen.

3.6 Parameter

Parameter sind Platzhalter hinter denen sich jede mögliche *Zahl* verbergen kann. Jeder *Parameter* gehört einer *Zahlenmenge* an und kann somit jede beliebige *Zahl* aus dieser *Menge* darstellen. Das bedeutet, dass Rechnungen mit *Parametern* für alle möglichen *Zahlen* Gültigkeit besitzen. Ein *Parameter* wird mit einem Buchstaben gekennzeichnet. Somit kann die Abkürzung der *Addition*, also die *Multiplikation*, wie folgt dargestellt:

$$a + a = 2 \cdot a \quad . \tag{3.44}$$

Die Gleichung (3.44) für jede *Zahl* für a Gültigkeit. Ebenso kann auch die *Subtraktion* einer *Zahl* von sich selbst mit *Parametern* dargestellt werden:

$$a - a = 0 \quad . \tag{3.45}$$

Besitzt ein *Parameter* einen Namen wie a, dann unterscheidet dieser sich von einem anderen *Parameter* b. Beide *Parameter* können nicht zusammengefasst werden und auch ihr Name a und b wechseln. In bestimmten Fällen, kann es vorkommen, dass *Parameter* nach ihrer Bestimmung den gleichen Wert haben können.
Beim Rechnen mit *Parametern* (oder später auch *Variablen*) ist es wichtig zu beachten, dass nur gleiche *Produkte* von *Parametern* zusammengefasst werden können. Dazu einige Beispiele:

$$\begin{aligned} 4a + 3a + 5b + 6b &= 7a + 11b \quad , \\ 4ab + 3a + 5ab + 6b &= 3a + 9ab + 6b \quad , \\ 3aa + 5ab - aa + 2b - 3ab + 4b &= 2aa + 2ab + 6b \quad . \end{aligned} \tag{3.46}$$

Bei diesem Zusammenfassen von *Termen* müssen die vorgestellten Regeln beachtet werden. *Terme* sind dabei Teile von *Gleichungen* auf einer Seite eines *Äquivalenzzeichens*.

3.6.1 Übungsaufgaben zu Parametern

Aufgabe 1: *Vereinfache so viel wie möglich.*

$a)$ $3x + 5a - 3a + 2x =$

$b)$ $6k - 7u + 11k + 14u - 2k =$

$c)$ $4y + 8x + 3x - 7x + 15y =$

$d)$ $69g - 5p + 16p - 7g + 11g =$

$e)$ $3a + 3b + 19a - 2b + 7b =$

$f)$ $13a + 53b - 32b - 11b + 8a =$

$g)$ $5b - 7h + 3d + 18h - 4b + 12d =$

$h)$ $12x + 8y + 23z - 5y + 13z - 9x =$

Aufgabe 2: *Fasse soviel wie möglich zusammen.*

$a)$ $6a + 5d - 3a =$

$b)$ $14y + 8x - 10y - 3x =$

$c)$ $7g - 14h - 4g - 5h =$

$d)$ $82a + 66b - 49a - 38b =$

$e)$ $3z - 7g + 19g + 6z =$

$f)$ $8a - 5f + a - 4f =$

$g)$ $99k - 43h + 37h - 25k =$

$h)$ $82u + 13l - 44l - 77u =$

$i)$ $-4z + 3r - 8r - 3z =$

$j)$ $33y - 28x + 19y + 43x - 27y =$

$k)$ $16c - 4c + 72d + 17c - 13d =$

$l)$ $25p + 8o - 9o - 22p + 5o =$

$m)$ $5v - 9q - 3v + 8v - 2v =$

$n)$ $13e - 5w + 4e + 19w - 7e =$

$o)$ $72a + 33s - 19a - 56d + 5s - 44d =$

$p)$ $34f + 5g - 7h + 11g + 17h - 15f =$

$q)$ $5a + 7b - 3a - 2b + 6a + 11a + 7b - 2a =$

$r)$ $9c - 4c - 6a - 12a + 36a + 6c + a - 2c + 15c =$

$s)$ $75z - 14t - 7t - 33z + 54t + 16c - 12z - 4c =$

$t)$ $-11x + 71y + 33x + 45z - 13y + 18x - 29z - 13y =$

$u)$ $a + b + a + b + c + b + a + b - c - a + b + c - a - b - a =$

$v)$ $55d - 33s + d + 65s - 32a + 13z - 21d + 77a - z =$

Aufgabe 3: *Vereinfache so viel wie möglich.*

a) $\frac{3}{5}p+\frac{6}{7}e-\frac{1}{5}p+\frac{2}{7}e=$

b) $\frac{8}{9}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}y=$

c) $\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b-\frac{1}{2}b+\frac{2}{5}a=$

d) $\frac{4}{5}r+\frac{2}{3}w-\frac{1}{2}r-\frac{5}{9}w=$

e) $\frac{5}{2}f-\frac{1}{4}f+\frac{8u}{3}-\frac{5u}{6}=$

f) $\frac{10}{3}n+\frac{4}{5}m+\frac{p}{11}-\frac{m}{2}-\frac{7}{9}n=$

g) $\frac{5}{4}v+\frac{9}{5}m+\frac{3}{10}m-\frac{1}{2}v+\frac{3}{4}v=$

h) $\frac{9}{5}c+\frac{7}{2}d+\frac{4}{3}c+\frac{1}{4}s+\frac{2}{7}s-\frac{9}{10}d=$

Aufgabe 4: *Vereinfache so viel wie möglich.*

a) $0,8x+6g-1,2g+1,9x=$

b) $4,5v+2,2v+6,7t-1,8t-0,3t=$

c) $6,5y+3,3z+12,4z-3,1y=$

d) $11,3h+19,9h+5,4g-1,9g-0,5h=$

e) $0,03f+0,002t-0,004f+t=$

f) $x+5,5y+9,11x-4,95y=$

g) $0,82d+z+9,3d-0,25z+4,1p+0,006p=$

h) $7,5k+9,1l-2,3k+8,1k-1,03l-0,55k=$

Aufgabe 5: *Vereinfache so viel wie möglich.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“)

a) $-4x+8y-11x-15y=$

b) $2,2f-6,3f+9,1a-4,2g=$

c) $\frac{1}{2}d+0,3g-\frac{5}{4}g-2d=$

d) $5t-\frac{13}{4}z+3,34t+4z=$

e) $-25u-12,37a+\frac{13}{4}u-0,4u+\frac{7}{2}a=$

f) $5,6z+\frac{56}{8}y-3x-12,3y-12z+9x+\frac{1}{4}z=$

g) $\frac{3}{8}d-0,4g+0,05d-\frac{3}{4}d+g=$

h) $2t+\frac{3}{5}z-\frac{17}{4}t+2,2x-0,3y+\frac{3}{4}x-0,1z+0,8y-\frac{y}{2}=$

Aufgabe 6: *Vereinfache so viel wie möglich.* (Benötigt Abschnitt „Negative Zahlen“, „Prozentrechnung“ und „Distributivgesetz“)

a) $3(a+2s)-2(3s+4a)=$

b) $4\left(k-0,4h+\dfrac{g}{2}\right)+1,9h=$

c) $5(0,2t-1,1u)-4t+3,7u=$

d) $0,5(0,4z-3t)-(t-2z)-\dfrac{3}{4}=$

e) $-(3e+0,2s)-\left(\dfrac{4}{5}s-1,25e\right)=$

f) $d(3-f)+4fd-6,2(d+0,5f)=$

g) $\dfrac{3}{2}\left(6b+\dfrac{3}{10}a\right)+0,2\,(a-b)\,2=$

h) $40\%a-6b+\dfrac{9}{4}a-1,1\,(a+5b-3a)=$

Weitere Übungen zu Termen und Parametern zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.7) Lösungen zu Parametern.

3.7 Einsetzungsverfahren

Das *Einsetzungsverfahren* wird oftmals mit Gleichungssystemen in Verbindung gebracht, allerdings ist das dahinter liegende Prinzip von fundamentalerer Bedeutung für den Umgang mit mathematischem und naturwissenschaftlichem Wissen. Bei diesem Verfahren wird entweder für einen *Parameter*, einer *Variable* oder einen *Term* eine Zahl oder einem weiterführender *Term* eingesetzt, sodass es generell zu einer Vereinfachung, einer Beispielrechnung oder der Reduzierung von unbekannten Größen kommt. Dabei ist ein *Parameter* ein Platzhalter für eine Zahl (oftmals werden a, b, c, d als *Parameter* verwendet), während die *Variable* der Platzhalter für eine veränderliche Zahl (oftmals werden x, y, z als *Variable* verwendet) ist und ein *Term* ein ganzer Abschnitt einer Rechenanweisung (zum Beispiel $5 \cdot x \cdot a$ wäre ein Term).

Als Beispiel für das Einsetzen von Zahlen soll das *Erweitern* bei der Bruchrechnung aus Gleichung (3.29) dienen. Hierbei soll gelten, dass für a der Wert 2, für b der Wert 3 und für den *Erweiterungsparameter* n die Zahl 4 eingesetzt werden soll.

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{mit: } a = 2 \\ \Rightarrow & \frac{2}{b} = \frac{2}{b} \cdot 1 = \frac{2}{b} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{b \cdot n} \quad \text{mit: } b = 3 \\ \Rightarrow & \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{n} = \frac{2 \cdot n}{3 \cdot n} \quad \text{mit: } n = 4 \\ \Rightarrow & \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} \end{aligned} \tag{3.47}$$

Wie bereits oben schon erwähnt wurde, ist dieses Verfahren auch mit *Termen* möglich.

$$\begin{aligned} a + b &= c \qquad \text{mit: } a = d - e + f \\ \Rightarrow d - e + f + b &= c \qquad \text{mit: } c = e - f - d \\ \Rightarrow d - e + f + b &= e - f - d \end{aligned} \tag{3.48}$$

Generell sollte beim *Einsetzen* von Ausdrücken der einzusetzende *Term* in *Klammern* geschrieben werden, da es sonst unter anderem zu *Vorzeichenfehler* oder Ähnlichem kommen kann. Hierzu einige Beispiele:

$$\begin{aligned} a - b \qquad & \text{mit: } b = d + e \;\Rightarrow\; \text{richtig: } a - (d + e) = a - d - e \text{ ; falsch: } a - d + e \\ a^2 \qquad & \text{mit: } a = -b \;\Rightarrow\; \text{richtig: } (-b)^2 = b^2 \text{ ; falsch: } -b^2 \end{aligned} \tag{3.49}$$

Folglich sollten alle Einsetzungen mit *Klammern* unternommen werden und nach dem *Einsetzen* auf die Notwendigkeit der *Klammern* geschaut werden. Hierdurch entsteht schnell ein Gefühl, wann die *Klammern* unabdingbar werden.

3.7.1 Übungsaufgaben zu Einsetzungsverfahren

Aufgabe 1: *Setze in die Gleichungen $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$ ein und berechne den Wert des Terms.*

a) $a + b - c =$	*b)* $3 \cdot a - 4 \cdot b + c =$
c) $c \cdot b - b \cdot a =$	*d)* $a \cdot b - b \cdot a =$
e) $4 \cdot a \cdot b + 2 \cdot c \cdot c - 3 \cdot b \cdot c =$	*f)* $2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c =$
g) $a \cdot b \cdot c =$	*h)* $4 \cdot \frac{a}{b} + \frac{c}{a} =$

Aufgabe 2: *Setze in die Gleichungen ein und berechne den Wert des Terms.*

a) $a \cdot a =$	mit: $a = 9$
b) $4 + c \cdot d =$	mit: $c = 2$ und $d = 4$
c) $2 \cdot a \cdot b + 8 =$	mit: $a = 3$ und $b = 7$
d) $7 \cdot a + 4 \cdot b - 3 \cdot c =$	mit: $a = 2$ und $b = 5$ und $c = 3$
e) $a \cdot b \cdot c \cdot d =$	mit: $a = \frac{1}{4}$ und $b = 4$ und $c = 3$ und $d = 9$
f) $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h =$	mit: $G = 27$ und $h = 9$
g) $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t =$	mit: $a = \frac{1}{4}$ und $t = 6$
h) $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t + v \cdot t =$	mit: $a = 9,81$ und $v = 5$ und $t = 4$

Aufgabe 3: *Setze in die Gleichungen ein.* (Benötigt Abschnitt „Distributivgesetz“)

a) $a \cdot 3 =$	mit: $a = 2 \cdot d$
b) $c \cdot d =$	mit: $c = a + b$ und $d = 2$
c) $a + 4 =$	mit: $a = d \cdot c + 4 \cdot t$
d) $A =$	mit: $A = a \cdot b$ und $b = 3$ und $a = 8$
e) $H - F =$	mit: $F = a - b$ und $H = a + b$ und $b = 2$
f) $\frac{f}{g} =$	mit: $f = 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$ und $g = 2 \cdot a \cdot a \cdot d \cdot d$
g) $\xi \cdot \upsilon + \vartheta =$	mit: $\xi = a$ und $\upsilon = b$ und $\vartheta = \wp$
h) $\mathit{\Delta} + \Box + \diamond =$	mit: $\mathit{\Delta} = \nabla - \mathit{\Xi}$ und $\Box = \mathit{\Xi} + \mathit{\Phi}$ und $\diamond = \zeta - \nabla - \mathit{\Phi}$

Aufgabe 4: *Berechne alle freien Zellen der Tabelle. Die Rechenvorschriften sind jeweils in der ersten Spalte gegeben.*

	1	2	3	4	5	6	7
a	3	6	$0,25$	$3,1$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{3}$
b	4	2	$1,75$	$4,5$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{4}$
$c = a \cdot b$							
$d = \frac{a}{b}$							
$e = c \cdot d$							
$f = e + 2 \cdot a$							

Weitere Bruchrechnungsübungen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden: leichteres Niveau, mittleres Niveau oder schwereres Niveau

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.8) Lösungen zum Einsetzungsverfahren.

3.8 Prozentrechnung

Die *Prozentrechnung* ist von besonderer Bedeutung in der heutigen Gesellschaft, dabei versteckt sich hinter ihr nur der Bruch $\frac{1}{100}$. Denn pro cent bedeutet übersetzt nicht viel mehr als pro hundert. Aus diesem Bruch heraus hat sich historisch dann das *Prozentzeichen* % entwickelt. Der rechnerische Umgang ist durch das Ersetzen von % durch $\frac{1}{100}$ gegeben. Während für Promille sich ebenfalls ein abkürzendes Zeichen entwickelt hat: $1‰ = \frac{1}{1000}$.

$$4\% = 4 \cdot \frac{1}{100} = \frac{4}{100} = 0,04 \tag{3.50}$$

Auch andere Rechnungen sind auf diesen Fakt reduzierbar: Sei ein Kapital von 1000 € mit einem Zinssatz von 4% pro Jahr angelegt, wie hoch wären die Zinsen nach einem Jahr? Diese Frage kann leicht dargestellt werden als:

$$1000\,€ \cdot 4\% = 1000\,€ \cdot 4 \cdot \frac{1}{100} = 4000\,€ \cdot \frac{1}{100} = \frac{4000\,€}{100} = 40\,€ \quad , \tag{3.51}$$

wobei genauere Ausführungen zu dieser Art von Rechnungen weiter unten im Kapitel „Ökonomische Anwendungen“ folgen werden.

Der *Dreisatz* zur Frage „Wie viel sind 4% von 300?“ gestaltet sich als:

$$\begin{aligned} 300 \text{ entsprechen: } & 100\% \\ 3 \text{ entsprechen: } & 1\% \\ 12 \text{ entsprechen: } & 4\% \end{aligned} \tag{3.52}$$

Allerdings ist der *Dreisatz* durch das Wissen, dass $\% = \frac{1}{100}$ ist, wie folgt verkürzt durchzuführen:

$$300 \cdot 4\% = \frac{4 \cdot 300}{100} = \frac{1200}{100} = 12 \quad , \tag{3.53}$$

wobei in Gleichung (3.53) die Zwischenschritte weggelassen werden könnten, da $\frac{300}{100}$ und $3 \cdot 4$ nicht von besonderer Schwierigkeit sind.
Ein anderer Aspekt bei der *Prozentrechnung* ist die *Normierung*. Die *Normierung* beschreibt die Rechnung wie viel ein *Prozent* darstellen. Sei zum Beispiel eine *Menge* von 250000 gegeben, dann kann jede *Teilmenge* (zum Beispiel 46972) mit dem *Kehrwert* der *Menge multipliziert* und somit *normiert* werden.

$$\frac{1}{250000} \cdot 46972 = 18,7888\% \quad , \tag{3.54}$$

Somit entspricht die *Teilmenge* insgesamt $18,7888\%$ der *Gesamtmenge*. Es gibt verschiedene Formen der *Normierung* neben der *Normierung* auf 100%, welche in diesem Abschnitt vorgestellt wurde.
Da des öfteren nach bestimmten Vokabeln gefragt wird, sollen diese noch am Ende vorgestellt werden:

$$W = p\,[\%]\,G = \frac{p}{100}G \quad , \tag{3.55}$$

wobei G der *Grundwert*, W der *Prozentwert*, p der *Prozentfuß* oder *Prozentzahl* und $p[\%]$ der *Prozentsatz* ist. (Beispiel: Der *Prozentsatz* muss in *Prozent* angegeben werden $p[\%] = 5\%$, während hier die *Prozentzahl* durch $p = 5$ gegeben ist, sodass $p[\%] = \frac{p}{100}$ gilt.)

Füllt man diese Gleichung mit einer Bedeutung bezüglich Geldanlagen werden oftmals andere Platzhalter und Namen verwendet, während das mathematische Vorgehen unverändert bleibt:

$$\begin{aligned} W &= G\frac{p}{100} \quad , \\ Z &= K\frac{p}{100} \quad , \end{aligned} \tag{3.56}$$

wobei Z für Zinsen und K für das Kapital steht. Anhang von Geldanlagen kann schnell verdeutlicht werden, wie dramatisch sich ein stetiges relatives Wachstum auswirkt, denn ein Wachstum um einen festen relativen Wert wird auch exponentielles Wachstum genannt. Hier soll ein Beispiel dienen: Ein Kapital von $K_0 = 5000\,€$ soll für 4 Jahre zu einem Jahreszinssatz von $p\,[\%] = 10\%$ angelegt werden. Das bedeutet, dass nach jedem Jahr ein neues Grundkapital betrachtet werden muss, da die Zinsen addiert werden:

$$\begin{aligned} Z_1 &= K_0\frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad K_1 = K_0 + Z_1 \quad , \\ Z_2 &= K_1\frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad K_2 = K_1 + Z_2 \quad , \\ Z_3 &= K_2\frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad K_3 = K_2 + Z_3 \quad , \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.57}$$

Im Beispiel ergibt sich daraus:

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 5000\,€\frac{10}{100} = 500\,€ \quad\Rightarrow\quad K_1 = K_0 + Z_1 = 5500\,€ \;\; , \\
Z_2 &= 5500\,€\frac{10}{100} = 550\,€ \quad\Rightarrow\quad K_2 = K_1 + Z_2 = 6050\,€ \;\; , \\
Z_3 &= 6050\,€\frac{10}{100} = 605\,€ \quad\Rightarrow\quad K_3 = K_2 + Z_3 = 6655\,€ \;\; , \\
Z_4 &= 6655\,€\frac{10}{100} = 665,5\,€ \quad\Rightarrow\quad K_4 = K_3 + Z_4 = 7320,5\,€ \;\; ,
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Dies kann auch komprimiert als Gleichung dargestellt werden,:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + Z_1 \;\; , \\
K_1 &= K_0 + K_0\frac{p}{100} \;\; , \\
K_1 &= K_0 \underbrace{\left(1 + \frac{p}{100}\right)}_{=q} \;\; ,
\end{aligned}
\tag{3.59}
$$

wobei q der Wachstumsfaktor ist. Aus der verkürzten Darstellung eines Jahres, kann eine Gleichung für n Jahre entwickelt werden, hierfür wird zunächst eine Kapitalentwicklung über 3 Jahre betrachtet:

$$
\begin{aligned}
K_3 &= K_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) \qquad \text{mit: } K_2 = K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) \;\; , \\
K_3 &= K_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) \qquad \text{mit: } K_1 = K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) \;\; , \\
K_3 &= K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) \qquad \text{mit: } a \cdot a = a^2 \;\; , \\
K_3 &= K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3 \;\; , \\
\Rightarrow\quad K_n &= K_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \;\; ,
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Allerdings werden bei Vertragskündigung nicht immer volle Jahre verrechnet, sodass die n Jahre auf Monate, Wochen oder Tage umgerechnet werden müssen. Hierbei ist zu beachten, dass Banken (und in der Wirtschaft) nur mit 360 statt $\approx 365,249$ Tagen pro Jahr rechnet wird. In der Finanzwelt werden auch monatlich oder täglich Zinsen berechnet, sodass sich die

Gleichung, die für Jahre gilt, für den Zinssatz p noch angepasst werden muss.

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \qquad \text{Jahreszinsen} \enspace , \\ K_n &= K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12}\right)^n \qquad \text{Monatszinsen} \enspace , \\ K_n &= K_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{t}{360}\right)^n \qquad \text{Tageszinsen} \enspace , \end{aligned} \tag{3.61}$$

wobei m für die Anzahl der Monate und t für die Anzahl der Tage stehen.

3.8.1 Übungsaufgaben zu Prozentrechnung

Aufgabe 1: *Wandele folgende Zahlen in Prozentdarstellungen um.*

$a)$ $0,01 =$	$b)$ $100 =$	$c)$ $0,5 =$
$d)$ $0,125 =$	$e)$ $0,0024 =$	$f)$ $289 =$
$g)$ $0,9315 =$	$h)$ $0,0341 =$	$i)$ $0,891 =$
$j)$ $0,54 =$	$k)$ $354 =$	$l)$ $0,976342 =$
$m)$ $0,354 =$	$n)$ $1,1229 =$	$o)$ $245,287 =$
$p)$ $5,1006 =$	$q)$ $0,0005 =$	$r)$ $1,154578 =$
$s)$ $0,999 =$	$t)$ $3,1204 =$	$u)$ $0,0487 =$
$v)$ $3,9552 =$	$w)$ $0,5755 =$	$x)$ $0,000004 =$

Aufgabe 2: *Wandele folgende Prozentdarstellungen in Dezimalzahlen um.*

$a)$ $1\% =$	$b)$ $100\% =$	$c)$ $54\% =$
$d)$ $1626\% =$	$e)$ $2,374\% =$	$f)$ $2,01\% =$
$g)$ $99\% =$	$h)$ $5\% =$	$i)$ $81,063\% =$
$j)$ $8\% =$	$k)$ $0,4\% =$	$l)$ $30\% =$
$m)$ $0,06\% =$	$n)$ $11,89\% =$	$o)$ $0,9\% =$
$p)$ $12\% =$	$q)$ $0\% =$	$r)$ $587,3\% =$
$s)$ $4\% =$	$t)$ $909\% =$	$u)$ $11\% =$
$v)$ $9786\% =$	$w)$ $8,457\% =$	$x)$ $5,64\% =$

Aufgabe 3: *Wandele folgende Brüche in eine Dezimalzahl um und schreibe sie dann als Prozentdarstellungen auf. Bei dieser Aufgabe brauchen nur drei Nachkommastellen beachtet werden.*

$a)\ \frac{1}{4} =$	$b)\ \frac{1}{3} =$	$c)\ \frac{5}{6} =$
$d)\ \frac{9}{14} =$	$e)\ \frac{8}{25} =$	$f)\ \frac{1}{8} =$
$g)\ \frac{7}{9} =$	$h)\ \frac{9}{4} =$	$i)\ \frac{43}{83} =$
$j)\ \frac{8}{3} =$	$k)\ \frac{7}{2} =$	$l)\ \frac{1}{97} =$
$m)\ \frac{5}{66} =$	$n)\ \frac{1}{351} =$	$o)\ \frac{4}{25} =$
$p)\ \frac{1}{7} =$	$q)\ \frac{9}{8} =$	$r)\ \frac{21}{250} =$
$s)\ \frac{3}{71} =$	$t)\ \frac{5}{83} =$	$u)\ \frac{16}{354} =$
$v)\ \frac{1}{1} =$	$w)\ \frac{0}{4} =$	$x)\ \frac{75}{976} =$

Aufgabe 4: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)\ 700 \cdot 1\% =$	$b)\ 45 \cdot 100\% =$	$c)\ 200 \cdot 4\% =$
$d)\ 80 \cdot 25\% =$	$e)\ 1500 \cdot 2\% =$	$f)\ 50000 \cdot 3\% =$
$g)\ 9000 \cdot 99\% =$	$h)\ 3141 \cdot 0,1\% =$	$i)\ 120 \cdot 5\% =$
$j)\ 6453 \cdot 8\% =$	$k)\ 972 \cdot 245\% =$	$l)\ 5707 \cdot 2\% =$
$m)\ 2040 \cdot 54\% =$	$n)\ 2786 \cdot 9\% =$	$o)\ 6872 \cdot 78\% =$
$p)\ 7827 \cdot 44,68\% =$	$q)\ 1837 \cdot 0,827\% =$	$r)\ 3287 \cdot 0,37\% =$
$s)\ 79,94 \cdot 45\% =$	$t)\ 3248,69 \cdot 7,34\% =$	$u)\ 2304,56 \cdot 0,003\% =$
$v)\ 287,784 \cdot 92,75\% =$	$w)\ 954,557 \cdot 3,786\% =$	$x)\ 245,57 \cdot 78,57\% =$

Aufgabe 5: *Berechne den Wert des Terms.*

a) 4% von 1000 € sind:

b) 2% von 5550 € sind:

c) 10% von 862434 € sind:

d) 19% von 299 € sind:

e) 12% von 1200 € sind:

f) 11% von 65300 € sind:

Aufgabe 6: *Berechne den Wert des Terms.*

a) 4%Jahreszins auf 2000 € ergeben nach einem Jahr:

b) 11%Jahreszins auf 7500 € ergeben nach einem Jahr:

c) 3%Jahreszins auf 4500 € ergeben nach einem Jahr:

d) $2,5$%Jahreszins auf 13480 € ergeben nach einem Jahr:

e) $1,9$%Jahreszins auf 14567 € ergeben nach einem Jahr:

f) $2,15$%Jahreszins auf 18346 € ergeben nach einem Jahr:

g) $3,75$%Jahreszins auf 20500 € ergeben nach einem Jahr:

h) $2,275$%Jahreszins auf 84344 € ergeben nach einem Jahr:

i) $4,015$%Jahreszins auf 48346 € ergeben nach einem Jahr:

j) $2,34$%Jahreszins auf 32567 € ergeben nach einem Jahr:

k) $2,7325$%Jahreszins auf 93872 € ergeben nach einem Jahr:

l) $0,05$%Jahreszins auf 25268 € ergeben nach einem Jahr:

Aufgabe 7: *Berechne die Geldsumme nach der angegebenen Zeit und dem angegebenen Prozentsatz.*

a) 2500 € zu 7% Zinsen pro Jahr über 2 Jahre.

b) 6000 € zu 3% Zinsen pro Jahr über 4 Jahre.

c) 4500 € zu $2,125\%$ Zinsen pro Jahr über 5 Jahre.

d) 15200 € zu 2% Zinsen pro Jahr über 2 Jahre.

e) 22400 € zu 6% Zinsen pro Jahr über 6 Jahre.

f) 91200 € zu $1,45\%$ Zinsen pro Jahr über 10 Jahre.

g) 123500 € zu $3,35\%$ Zinsen pro Jahr über 7 Jahre.

h) 95200 € zu $9,15\%$ Zinsen pro Jahr über 5 Jahre.

g) 40500 € zu $2,12\%$ Zinsen pro Jahr über 3 Jahre.

h) 8240600 € zu $7,985\%$ Zinsen pro Jahr über 12 Jahre.

Aufgabe 8: *Berechne die Geldsumme nach der angegebenen Zeit und dem angegebenen Prozentsatz.*

a) 5000 € zu 4% Zinsen pro Jahr über $2,5$ Jahre.

b) 8000 € zu 2% Zinsen pro Jahr über $4,25$ Jahre.

c) 12500 € zu $2,25\%$ Zinsen pro Jahr über $5,75$ Jahre.

d) 32300 € zu 3% Zinsen pro Jahr über $1,5$ Jahre.

e) 26800 € zu 7% Zinsen pro Jahr über $0,25$ Jahre.

f) 9500 € zu $2,85\%$ Zinsen pro Jahr über 180 Tage.

g) 44600 € zu $5,45\%$ Zinsen pro Jahr über 950 Tage.

h) 54841 € zu $13,05\%$ Zinsen pro Jahr über 5 Tage.

i) 29812 € zu $9,71\%$ Zinsen pro Jahr über $2,348$ Jahre.

j) 78820 € zu $4,354\%$ Zinsen pro Jahr über $6,7293$ Jahre.

k) 125030 € zu $0,75\%$ Zinsen pro Monat über $32,68$ Monate.

l) 270900 € zu $1,25\%$ Zinsen pro Monat über $4,21$ Jahre.

Aufgabe 9: *Um wie viel Prozent hat sich die Geldsumme verändert? (Beachte das Vorzeichen der Veränderung.)*

a) 1000 € $\longrightarrow$ 1200 €	*b*) 3000 € $\longrightarrow$ 3300 €	*c*) 540 € $\longrightarrow$ 480 €
d) 1500 € $\longrightarrow$ 1700 €	*e*) 4750 € $\longrightarrow$ 4400 €	*f*) 140 € $\longrightarrow$ 250 €
g) 325 € $\longrightarrow$ 380 €	*h*) 175 € $\longrightarrow$ 145 €	*i*) 765 € $\longrightarrow$ 34 €
j) 1457 € $\longrightarrow$ 2451 €	*k*) 5 € $\longrightarrow$ 13 €	*l*) 25,23 € $\longrightarrow$ 42,65 €
m) 699 € $\longrightarrow$ 599 €	*n*) 5,99 € $\longrightarrow$ 9,99 €	*o*) 14,50 € $\longrightarrow$ 12,50 €

Aufgabe 10: *Bestimme den prozentualen Anteil an der jeweiligen Menge. (Nutze die Normierung.) Und zeichne ein Tortendiagramm.*

a)	150	125	110	90	50	20	15
Anteil in %							

b)	600	450	225	75	45	20	5
Anteil in %							

c)	2560	1870	1500	1235	950	375	110
Anteil in %							

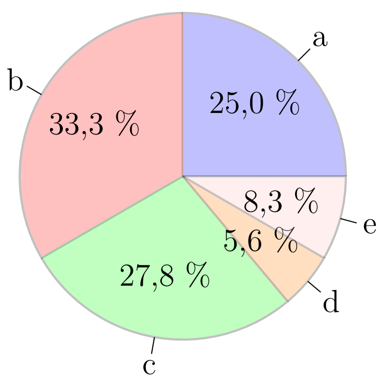
d)	11050	8600	4620	2200	950	290	180
Anteil in %							

e)	23300	17200	12400	9700	4500	2600	1200
Anteil in %							

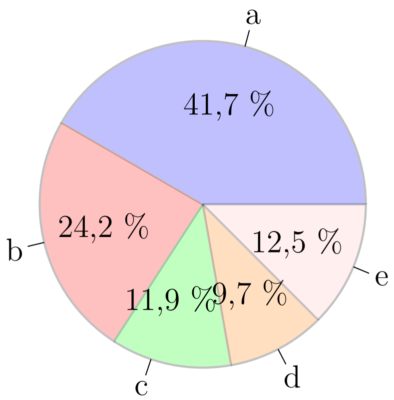
f)	67376	34525	15170	9542	7346	3456	2637
Anteil in %							

Aufgabe 11: *Bei Befragungen wurden jeweils insgesamt N Menschen interviewt. Bestimme die Anzahl der Menschen, die die jeweiligen Antworten gaben aus den Tortendiagrammen.*

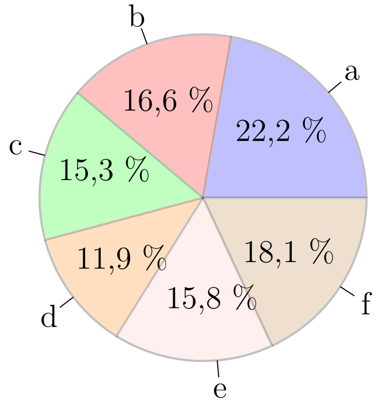
$a)$ $N = 25000$



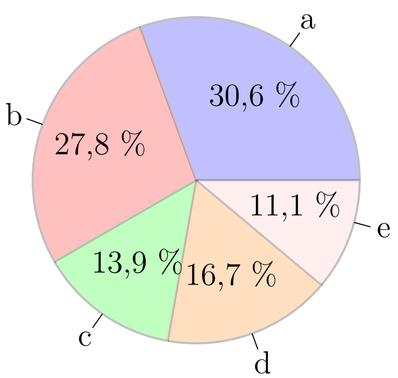
$b)$ $N = 33000$



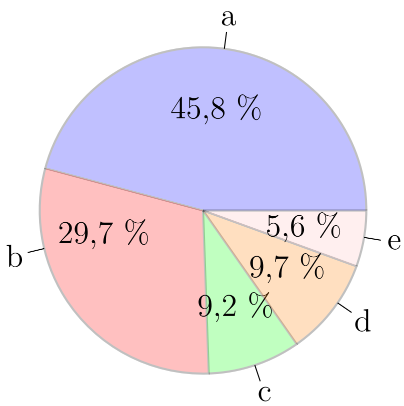
$c)$ $N = 12500$



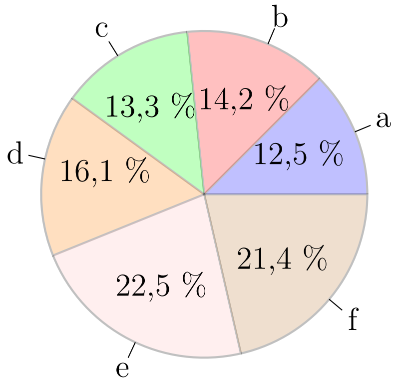
$d)$ $N = 11500$



$e)$ $N = 95000$



$f)$ $N = 55000$



Aufgabe 12: *Berechne über Dreisatz die fehlenden Felder, wobei P für den Prozentanteil und R für den Realanteil steht.*

	a) P	R	
	100 %	300 €	
: 100			: 100
·13			·13

	b) P	R	
	100 %	600 €	
: 100			: 100
·20			·20

	c) P	R	
	100 %	850 €	
	1 %	8,5 €	
·26			·26

	d) P	R	
	150 %	1200 €	
: 150			: 150
·60			·60

	e) P	R	
	125 %	5000 €	
: 125			: 125
·75			·75

	f) P	R	
	80 %	1600 €	
	1 %		
·15			·15

	g) P	R	
	75 %	3000 €	
			·40

	h) P	R	
	3000 ‰	7200 €	
·5			

	i) P	R	
	14 %	7700 €	
	100 %		

Aufgabe 13: *Löse die Aufgabe über Dreisatz.*

$a)$ 10% von 500 €	$b)$ 12% von 3600 € $=$
$c)$ 25% von 6500 €	$d)$ 66% von 9363 € $=$
$e)$ 40% von 25000 €	$f)$ 5% von 120 € $=$
$g)$ 23% von 4700 €	$h)$ 3% von 8565 € $=$
$i)$ 56% von 2667 €	$j)$ 86% von 25780 € $=$
$k)$ 130% von 400 €	$l)$ 560% von 8240 € $=$
$m)$ 7% von 34677 €	$n)$ 250% von 4400 € $=$
$o)$ $22,3\%$ von 14000 €	$p)$ $44,5\%$ von 8240 € $=$
$q)$ $175,2\%$ von 30000 €	$r)$ $66,66\%$ von 133332 € $=$
$s)$ $1,2\%$ von 506 €	$t)$ 1490% von 4400 € $=$
$u)$ 3463% von 346372 €	$v)$ 4567% von 9 € $=$

Aufgabe 14: *Löse die Aufgabe über Dreisatz.*

$a)$ $5‰$ von 7000 €	$b)$ $25‰$ von 9500 € $=$
$c)$ $19‰$ von 2450 €	$d)$ $82‰$ von 12200 € $=$
$e)$ $52‰$ von 25000 €	$f)$ $175‰$ von 1557 € $=$
$g)$ $17,6‰$ von 4700 €	$h)$ $236,8‰$ von 8565 € $=$

Aufgabe 15: *Löse die Aufgabe über Dreisatz.*

$a)$ Wenn 6000 € insgesamt 120% entsprechen, wie viel entsprechen dann 25%?
$b)$ Wenn 5500 € insgesamt 70% entsprechen, wie viel entsprechen dann 5%?
$c)$ Wenn 1650 € insgesamt 66% entsprechen, wie viel entsprechen dann 10%?
$d)$ Wenn 34890 € insgesamt 150% entsprechen, wie viel entsprechen dann 80%?
$e)$ Wenn 46730 € insgesamt 225% entsprechen, wie viel entsprechen dann 37%?
$f)$ Wenn 1337 € insgesamt 180% entsprechen, wie viel entsprechen dann 100%?
$g)$ Wenn 835050 € insgesamt 50% entsprechen, wie viel entsprechen dann 133%?
$h)$ Wenn 93520 € insgesamt 11% entsprechen, wie viel entsprechen dann 200%?
$i)$ Wenn 23680 € insgesamt 93% entsprechen, wie viel entsprechen dann 46%?
$j)$ Wenn 91410 € insgesamt 174% entsprechen, wie viel entsprechen dann 182%?

Aufgabe 16: *Bilde den Kehrwert.*

a) 6%	*b)* 583%	*c)* 52%	*d)* 84%
e) 44%	*f)* 954%	*g)* $0,5\%$	*h)* 149%
i) 106%	*j)* $0,7\%$	*k)* 9%	*l)* $2004,5\%$
l) $33,3\%$	*m)* $6,2\%$	*n)* $10,6\%$	*o)* $708,32\%$

Aufgabe 17: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

a) 33% $\quad$ $0,3$	*b)* $0,25$ $\quad$ 21%	*c)* 78% $\quad$ $0,77$
d) $6,74$ $\quad$ 690%	*e)* $0,45$ $\quad$ 45%	*f)* $0,285$ $\quad$ $29,2\%$
g) $934,67\%$ $\quad$ $9,3467$	*h)* $11,2\%$ $\quad$ $0,012$	*i)* $0,83$ $\quad$ 85%

Aufgabe 18: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

a) $\frac{1}{3}$ $\quad$ 30%	*b)* 120% $\quad$ $\frac{5}{4}$	*c)* $\frac{3}{8}$ $\quad$ $37,5\%$
d) $\frac{5}{6}$ $\quad$ $83,2\%$	*e)* $1,5\%$ $\quad$ $\frac{3}{200}$	*f)* $0,4\%$ $\quad$ $\frac{1}{25}$
g) 90% $\quad$ $\frac{8}{9}$	*h)* $\frac{7}{16}$ $\quad$ $48,75\%$	*i)* $\frac{35}{9}$ $\quad$ 392%

Aufgabe 19: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

a) $\frac{1}{2}$ $\quad 0,4$	*b)* $\frac{1}{4}$ $\quad 22\%$	*c)* 85% $\quad 0,88$
d) $\frac{7}{8}$ $\quad 90\%$	*e)* $0,62$ $\quad 62\%$	*f)* $\frac{1}{6}$ $\quad 15\%$
g) 123% $\quad 1,25$	*h)* $13,5\%$ $\quad \frac{3}{20}$	*i)* $1,74$ $\quad \frac{7}{4}$
j) $0,6$ $\quad \frac{3}{5}$	*k)* $2,5$ $\quad \frac{22}{9}$	*l)* 240% $\quad \frac{12}{5}$
m) $14,2\%$ $\quad \frac{1}{7}$	*n)* $6,4358$ $\quad 648,32\%$	*o)* $\frac{3}{100}$ $\quad 0,3\%$

Aufgabe 20: *Eine Person legt ein Kapital von* 5000 € *für einen Zins von* $p = 1,2\%$ *bei einer Bank an. Diese Zinsen werden jedes Jahr auf seinem Konto gutgeschrieben. Wie viel Zinsen bekommt die Person in den nächsten 10 Jahren und wie viel Geld besitzt diese Person dann insgesamt? Erstelle dazu eine Tabelle, um den gutgeschriebenen Geldwert jedes Jahres zu bestimmen und summiere diese Werte auf. Versuche anschließend die Rechnung über eine Potenzgleichung zu verkürzen. (Zinsen werden jedes Jahr neu aus dem vorliegenden Gesamtkapital berechnet!)*

Aufgabe 21: *Bestimme die fehlenden Felder der Tabelle.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
W		50	150		9000	300	4800
G	2000		75000	450		24000	4000
$p\,[\%]$	5	8		$4,4$	$0,8$		

Aufgabe 22: *Bestimme die fehlenden Felder der Tabelle.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
K_0	500	3000			8000	
K_1			9030	2550	8196	
Z_1		33	30			80
$p\,[\%]$	2					3
q				$1,02$		

Aufgabe 23: *Beantworte alle Fragen.*

a) Wie viel sind 40% von 100?
Wie viel sind 40% von 40?
Wie viel sind 40% von 40% von 100?

b) Wie viel sind 20% von 100?
Wie viel sind 50% von 20?
Wie viel sind 20% von 50% von 100?

c) Wie viel sind 80% von 100%?
Wie viel sind 50% von 80%?
Wie viel sind 25% von 40%?
Wie viel sind 80% von 50% von 25% von 100%?

Aufgabe 24: *Beantworte die Fragen und beschreib die Auffälligkeit.*

a) Wie viel sind 10% von 50?
Wie viel sind 50% von 10?

b) Wie viel sind 17% von 100?
Wie viel sind 100% von 17?

c) Wie viel sind 8% von 25?
Wie viel sind 25% von 8?

d) Wie viel sind 7% von 800?
Wie viel sind 800% von 7?

e) Wie viel sind 150% von 400?
Wie viel sind 400% von 150?

f) Wie viel sind 36% von $33,\bar{3}$?
Wie viel sind $33,\bar{3}$% von 36?

Aufgabe 25: *Berechne die gesamte Downloaddauer.*

Downloading... vergangene Zeit: 3 min

a) 

Downloading... vergangene Zeit: 4 min

b) 

Downloading... verbleibende Zeit: 5 min

c) 

Aufgabe 26: *Berechne die gesamte Downloaddatenmenge.*

Downloading... bereits runtergeladen: $6,5\,\text{GB}$

a) 

Downloading... noch 800 MB runter zu laden

b) 

Aufgabe 27: *Bei einem Patch müssen vor einem Spielstart Daten heruntergeladen werden. Dabei brauchen nicht immer alle Spiele die komplette Datenmenge bis das Spiel spielbar wird. Das Spiel ist spielbar, wenn der orangene Balken ausgefüllt ist.*

a) *Berechne die Downloaddauer.*

b) *Berechne wann das Spiel spielbar ist.*

c) *Berechne wie viel Prozent bis zur Spielbarkeit des Spiels schon herunter geladen wurden.*

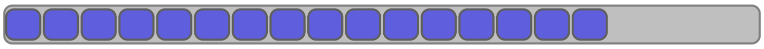
Downloading... vergangene Zeit: 6 min

Aufgabe 28: *Vergleiche die beiden Downloadbalken und berechne, wie viel Zeit der untere Downloadbalken mehr benötigt. Gib außerdem an, um wie viel Prozent der obere Balken länger sein müsste, damit dieser genau so lang wäre.*

Downloading... vergangene Zeit: 6 min

Aufgabe 29: *Berechne wie viel Zeit einer der Kästen symbolisiert. Beschreibe deinen Rechenweg.*

Downloading... verbleibende Zeit: 7 min



Aufgabe 30: *Berechne wie viel Zeit ein Prozent des Downloadbalken entsprechen. Beschreibe deinen Rechenweg.*

Downloading... vergangene Zeit: 20 min

Aufgabe 31: *Gib die Zahlen in der Prozentdarstellung an.*

a) $0,06 =$ *b*) $0,96 =$ *c*) $0,7 =$

d) $\frac{1}{4} =$ *e*) $\frac{17}{20} =$ *f*) $\frac{3}{5} =$

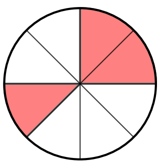
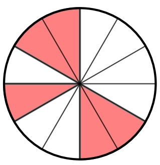
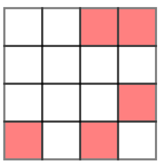
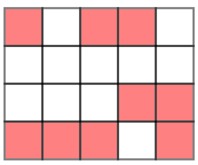
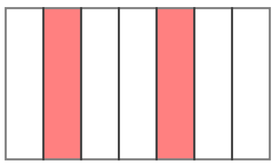
g) $0,6541 =$ *h*) $7 =$ *i*) $\frac{11}{9} =$

Aufgabe 32: *Gib die Zahlen in der gekürzten Bruch- und Dezimalzahldarstellung an.*

a) $30\% =$ *b*) $6,25\% =$

c) $44,\bar{4}\% =$ *d*) $125\% =$

Aufgabe 33: *Gib den dargestellten roten Anteil vom Ganzen in der Prozentdarstellung an.*

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 

Aufgabe 34: *Beantworte die Fragen und beschreibe die Auffälligkeit.*

a) Wie viel sind 10% von 50?
Wie viel sind 50% von 10?

b) Wie viel sind 17% von 100?
Wie viel sind 100% von 17?

c) Wie viel sind 8% von 25?
Wie viel sind 25% von 8?

d) Wie viel sind 7% von 800?
Wie viel sind 800% von 7?

Aufgabe 35: *Beantworte die Fragen und beschreibe die Auffälligkeit.*

a) Wie viel sind $\frac{1}{2}$ von 100?
Wie viel sind $\frac{1}{2}$ von 50?
Wie viel sind $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 100?

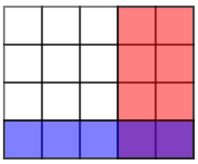
b) Wie viel sind 30% von 100?
Wie viel sind 50% von 30?
Wie viel sind 30% von 50% von 100?

c) Wie viel sind 75% von 100%?
Wie viel sind $66,\bar{6}$% von 75%?
Wie viel sind 20% von 50%?
Wie viel sind 75% von $66,\bar{6}$% von 20% von 100%?

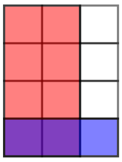
Aufgabe 36: *Fülle die Lücken im Lückentext so aus, dass die beiden Aussagen zusammen stimmen.*

a) Ein ganzer Kreis hat 360°, somit hat ein Sechstel Kreis .
b) 180° bei einem Kreis entsprechen 50% vom Kreis. entsprechen 1% von einem Kreis.
c) 2000 € entsprechen 100%, dann entsprechen 1%.
d) Wenn 400 m als 20% verstanden werden, dann sind als 100% zu verstehen.

Aufgabe 37: *Fülle die Lücken im Lückentext so aus, dass die Aussage auf die Skizze zu trifft.*

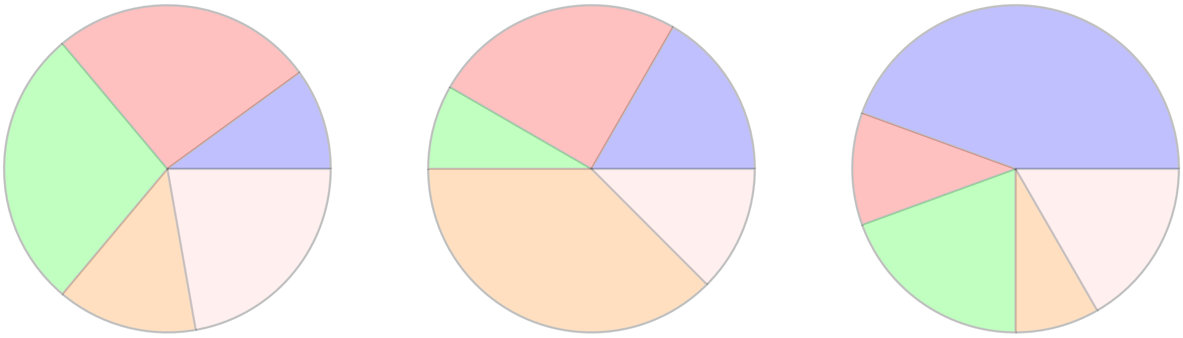
a) 

40% vom Rechteck sind markiert. 25% vom Rechteck sind markiert. vom Rechteck sind rot und blau markiert.

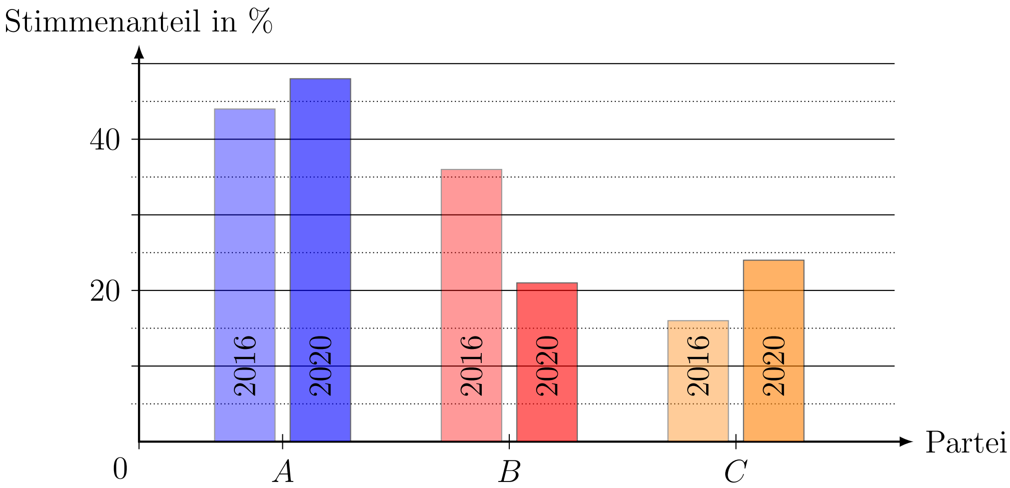
b) 

25% vom Rechteck sind [blank] markiert. $66,\bar{6}\%$ vom Rechteck sind [blank] markiert. [blank] von den blau markierten sind auch rot markiert, also sind [blank] vom Rechteck rot und blau markiert.

Aufgabe 38: *Bei einer Umfrage gaben 16,7% der Personen die Antwort G, 8,3% die Antwort K, 37,5% die Antwort F, 25% die Antwort B und 9,7% die Antwort N an. Gib an, welches Kreisdiagramm den Sachzusammenhang richtig darstellt und begründe, warum die anderen beiden Optionen nicht richtig sein können.*



Aufgabe 39: *Lies die Behauptungen zum Diagramm zur Darstellung einer Wahl im Vergleich zur letzten Wahl und kreuze wahr, falsch oder nicht bestimmbar an. Begründe deine Wahl.*



Behauptung	Wahr	Falsch	Nicht bestimmbar
2016 hat die Partei B mehr als doppelt so viele Stimmen wie die Partei C bekommen.			
Die Partei A bekam 2020 mehr Stimmen als 2016.			
2020 hat die Partei A weniger Stimmen als die Parteien B und C zusammen bekommen.			
Die Wahlen scheinen den Zahlen nach gültig zu sein.			

Aufgabe 40: *Man kann jeden Prozentwert oder Grundwert leicht berechnen, wenn man weiß, wie viel ein Prozent entsprechen. Zeige dies anhand der dargestellten Tabelle und schreibe an die Pfeile, welche Rechnung du durchgeführt hast.*

a)

Prozent %	Euro €
100%	400 €
1%	€
22%	€

b)

Prozent %	Euro €
100%	700 €
%	€
15%	€

Aufgabe 41: *Man kann jeden relativen Anteil leicht berechnen, wenn man weiß, wie viel Prozent dem Prozentwert von* 1 *entsprechen. Zeige dies anhand der dargestellten Tabelle und schreibe an die Pfeile, welche Rechnung du durchgeführt hast.*

a)

Prozent %	Euro €
100%	25 €
%	1 €
%	$6,25$ €

b)

Prozent %	Euro €
100%	80 €
%	€
%	200 €

Aufgabe 42: *Berechne mit dem Dreisatz den gesuchten Prozentwert.*

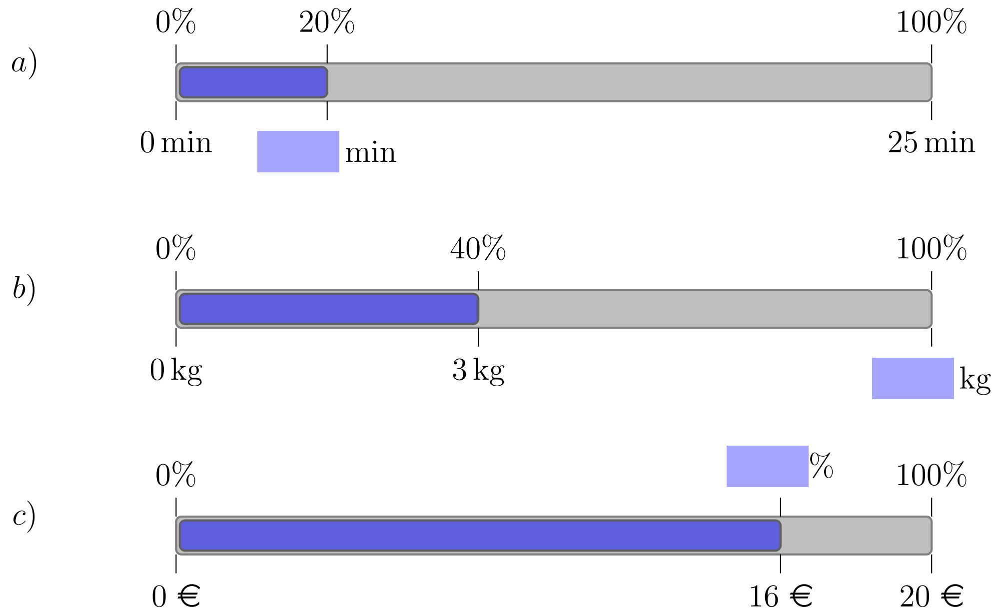
a) Wie viel sind 45% von 250 kg?

b) Wie viel sind 13% von 600 m^2?

c) Wie viel sind 123% von 110 min?

d) Wie viel sind 8% von 5 ℓ?

Aufgabe 43: *Der Downloadbalken ist auch ein Fortschrittsbalken. Jedem relativen Prozentwert kann ein Anteil einer Größe zugeordnet werden. Hierbei ergeben sich im Wesentlichen drei verschiedene Aufgabentypen. Berechne die Werte der freien Felder.*



Aufgabe 44: *Berechne mit dem Dreisatz den relativen Anteil.*

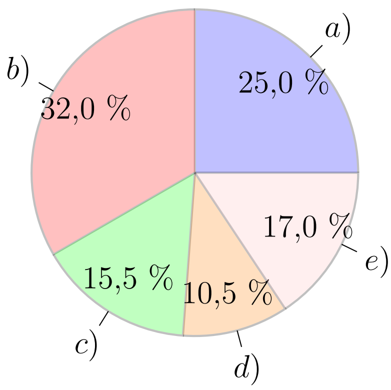
a) Wie viel sind 500 € von 8000 €?

b) Wie viel sind 40 kg von 150 kg?

c) Wie viel sind 70 min von 45 min?

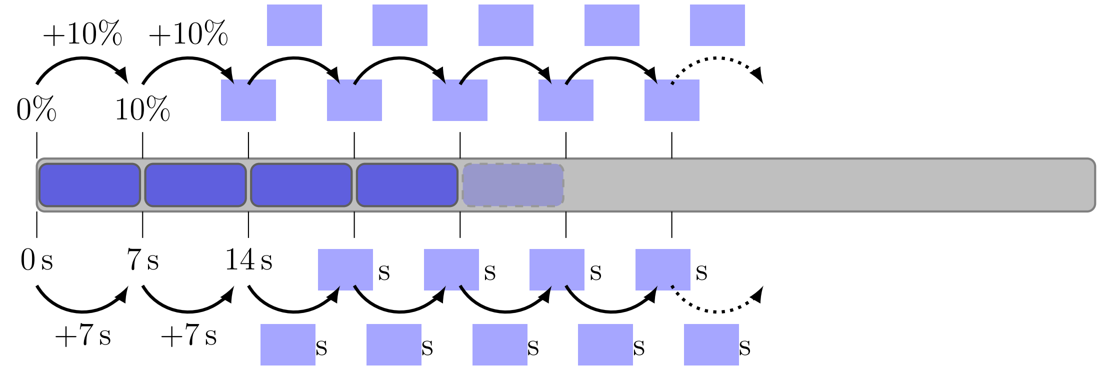
d) Wie viel sind $50\,\mathrm{m}^2$ von $450\,\mathrm{m}^2$?

Aufgabe 45: *Bei einer Umfrage standen fünf Antworten zur Auswahl und es wurden* 12000 *Menschen befragt. Die Antwortenverteilung wurden in einem Kreisdiagramm dargestellt. Berechne, wie viele Menschen die jeweilige Antwort wählten.*

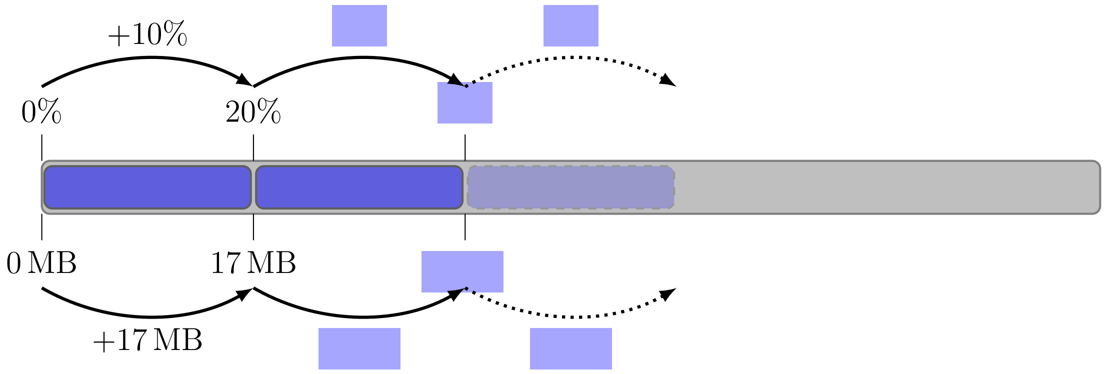


Aufgabe 46: *Setze das Muster fort bis du die 100% erreicht oder beim nächsten Schritt überschreiten würdest. Fülle dabei die Kästchen aus.*

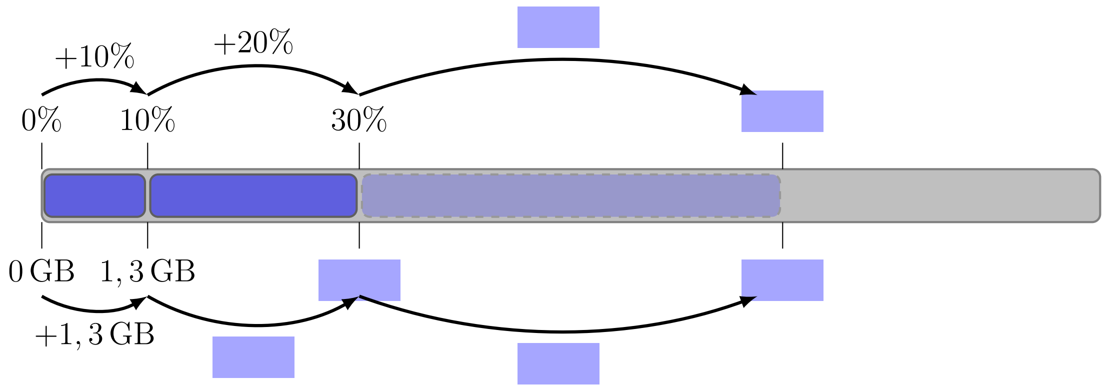
a)



b)



c)



Aufgabe 47: *Führe die Aufzählungen so lange fort, bis du die* 100% *erreicht oder überschritten hast.*

a) 10% sind 2 h; 20% sind zwei mal 2 h, also 4 h; 30% sind drei mal 2 h, also 6 h; ...

b) 20% sind 3 MB; 40% sind zwei mal 3 MB, also 6 MB; ...

c) 25% sind 80 m; 50% sind zwei ...

d) 2, 5% sind 6 ℓ; 5% sind zwei mal 2, 5 ℓ, also 5 ℓ; 10% sind zwei mal 5 ℓ, also 10 ℓ; ...

Aufgabe 48: Fülle die Lücken und beschreibe die Auffälligkeit.

a)
10% von 500 sind ___.
20% von 500 sind ___.
30% von 500 sind ___.

b)
20% von 200 sind ___.
40% von 200 sind ___.
60% von 200 sind ___.

c)
5% von 80 sind ___.
10% von 80 sind ___.
20% von 80 sind ___.
40% von 80 sind ___.
80% von 80 sind ___.

d)
2% von 1200 sind ___.
10% von 1200 sind ___.
30% von 1200 sind ___.
60% von 1200 sind ___.
120% von 1200 sind ___.

Aufgabe 49: *Ein Produkt soll* 20% *weniger kosten und kostete zuvor* 75 €. *Jimmi sagt, dass man zuerst ausrechnen sollte, wie viel* 20% *entsprechen und den Prozentwert vom Grundwert abziehen soll. Daraufhin antwortet Helena, dass man auch einfach gleich* 80% *vom Grundwert berechnen könnte. Zeige, dass beide recht haben, indem du beide Rechnungen im Dreisatz durchführst.*

%	€
100%	75 €
20%	

%	€
100%	75 €
80%	

Aufgabe 50: *Ein Kleidungsstück wird dafür beworben, dass der Preis um mehr als* 15% *gesenkt wurde. Auf dem Preisschild wurde der alte Preis von* 39 € *durchgestrichen und ein neuer von* 33 € *drüber geklebt. Überprüfe die Aussage der Werbung.*

Aufgabe 51: *Ein Auto wurde im Preis um* 22% *reduziert und kostet nun* 12900 €. *Berechne, wie viel das Auto vor der Preissenkung gekostet hat.*

Aufgabe 52: *Ein durchschnittlicher Haushalt in der Bundesrepublik Deutschland gibt* 32,6% *fürs Wohnen an sich,* 14,6% *für Verkehr,* 14,3% *für Nahrungsmittel,* 11,4% *für Freizeit und* 27,1% *für Sonstiges aus. Stelle die Ausgaben des durchschnittlichen Haushaltes als Kreisdiagramm dar.*

Aufgabe 53: *Die Miete einer Wohnung soll nach einer Sanierung um* 11% *erhöht werden. Die Miete betrug zuvor* 550 €. *Berechne den neuen Mietpreis.*

Aufgabe 54: *Ein Sammelgegenstand ist im Preis über ein Jahr von* 24 € *auf* 62 € *angestiegen. Berechne um wie viel Prozent der Preis gestiegen ist.*

Aufgabe 55: *Eine Uhr ist mit einem Nettopreis von* 74,79 € *ausgeschildert. In einem Verkaufsgespräch ließ sich der Händler um* 10% *herunter handeln. Anschließend muss der neue Bruttopreis berechnet werden, welcher sich ergibt, indem beim neuen Nettopreis nochmals* 19% *aufgeschlagen wird. Berechne wie viel Geld der Kunde für die Uhr ausgeben muss. Hierbei handelt es sich um einen Rabatt-Preisnachlass.*

Aufgabe 56: *Eine Uhr ist mit einem Nettopreis von* 74,79 € *ausgeschildert, auf den noch* 19% *Steuern erhoben werden. In dem Verkaufsgespräch wurde vereinbart, dass der Käufer* 10% *der bezahlten Geldmenge zurück bekäme, wenn er es schafft die Uhr nach dem Kauf innerhalb einer Frist bezahlen zu können. Berechne, wie viel Geld der Kunde für die Uhr ausgeben muss, wenn dieser den verhandelten Preisnachlass bekommt. Hierbei handelt es sich um einen Skonto-Preisnachlass.*

Aufgabe 57: *Berechne wie groß der Skonto-Prozentsatz bei Aufgabe 57 sein müsste, damit der Kunde den gleichen Endpreis wie in Aufgabe 56 hätte.*

Aufgabe 58: *Ein Kapital von* 5600 € *wurde zu einem Zinssatz von* 2% *pro Jahr für ein Jahr angelegt. Berechne die gutgeschriebenen Zinsen.*

Aufgabe 59: *Ein Sparer hat* 8,50 € *Zinsen nach einem Jahr für sein Kapital von* 8200 € *ausgezahlt bekommen. Berechne den Zinssatz.*

Aufgabe 60: *Nach einem Jahr zu einem Jahreszinssatz von* 1,3% *wurden* 45 € *ausgezahlt. Berechne, wie viel Kapital angelegt wurde.*

Aufgabe 61: *Auf einem Kontoauszug steht nach einem Jahr* 7550 €. *Der Sparer erinnert sich, dass er das Geld zu einem Zinssatz von* 0,9% *angelegt hat. Berechne wie viel Kapital der Sparer angelegt hat.*

Aufgabe 62: *Ein Kapital von* 7500 € *wurde zu einem Zinssatz von* 1,5% *pro Jahr für ein Jahr angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge. Anschließend soll das gesamte Geld um ein* *weiteres Jahr zu den gleichen Bedingungen angelegt werden. Berechne den Kontostand nach dem weiteren Jahr.*

Aufgabe 63: *Lies dir die Aufgaben 64 bis 69 durch und kreuze in der Tabelle an, was gesucht wird.*

Gesucht wird:	Grundwert G bzw. Kapital K	Prozentwert W bzw. Zinsen Z	Prozentsatz $p[\%]$ bzw. Zinssatz $p[\%]$
Aufgabe 64			
Aufgabe 65			
Aufgabe 66			
Aufgabe 67			
Aufgabe 68			
Aufgabe 69			

Aufgabe 64: *Im Jahr* 2019 *wurden in der Bundesrepublik Deutschland* $356,8$ *Milliarden Euro vom Bund ausgegeben. Dabei entfielen* $12,0\%$ *auf die Verteidigung. Berechne, wie viel Geld der Bund für die Verteidigung ausgegeben hat.*

Aufgabe 65: *Im Jahr* 2019 *sind in der Bundesrepublik Deutschland* 3059 *Menschen bei einen Autounfall gestorben, während es im Jahr* 2018 *noch* 3275 *Todesopfer waren. Berechne den relativen Rückgang der Verkehrstoten.*

Aufgabe 66: *Ein beliebtes Computerspiel wurde im Jahr* 2010 *von* $12,7$ *Millionen Menschen gespielt. Heute spielen das Spiel noch* $5,5$ *Millionen Menschen. Berechne den heutigen Anteil in Bezug zum Jahr* 2010.

Aufgabe 67: *Nach einer Preissenkung von* 35% *kostet ein Bildschirm nur noch* $168,99$ €*. Berechne den Preis vor der Preissenkung.*

Aufgabe 68: *Ein Sparer legt* 4500 € *zu einem Zinssatz von* $1,7\%$ *pro Jahr für ein Jahr an. Berechne den Geldzuwachs.*

Aufgabe 69: *Ein Sparer hat bei einem Zinssatz von* $1,2\%$ *pro Jahr nach einem Jahr* 148 € *gutgeschrieben bekommen. Berechne wie viel Geld der Sparer nach dem Jahr auf dem Konto hat.*

Aufgabe 70: *Ein Küchengerät hat einen Nettopreis von* $1176,29$ €*. Auf diesen Preis werden noch* 19% *Steuern erhoben. Ein Kunde, der dieses Gerät gekauft hat, packt es zu Hause aus und stellt einen optischen Verarbeitungsfehler am Gerät fest. Als der Kunde den Händler konfrontiert, gibt der Händler dem Kunden* 200 € *zurück. Berechne, wie viel Prozent Skonto der Kunde bekommen hat.*

Aufgabe 71: *Ein Laptop hat einen Nettopreis von* $755,46$ €*. Ein Kunde handelt den Nettopreis auf* 700 € *runter. Auf den zu zahlenden Preis werden noch* 19% *Steuern erhoben. Berechne, wie viel Prozent Rabatt der Kunde bekommen hat und wie viel er am Ende zahlen muss.*

Aufgabe 72: *Ein Kapital von* 8000 € *wurde zu einem Zinssatz von* $1,3\%$ *für ein Jahr angelegt.*

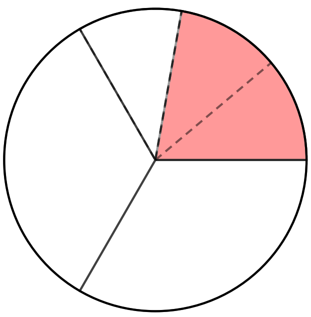
a) *Berechne, wie viel Geld nach diesem Jahr auf dem Konto ist.*

b) *Das gesamte Geld aus dem ersten Jahr wird nochmals angelegt. Berechne, wie viel Geld nach dem zweiten Jahr auf dem Konto ist.*

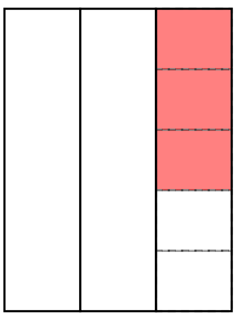
c) *Das gesamte Geld aus dem zweiten Jahr wird nochmals angelegt. Berechne, wie viel Geld nach dem dritten Jahr auf dem Konto ist.*

Aufgabe 73: *Berechne die markierten Anteile und gib die Anteile in der Prozentdarstellung an.*

a)



b)



Aufgabe 74: *Bei einer Umfrage wurde vergessen, wie viele Teilnehmer es gab und die Daten sind nicht mehr auffindbar. Allerdings sind noch Teile der Auswertung vorhanden.*

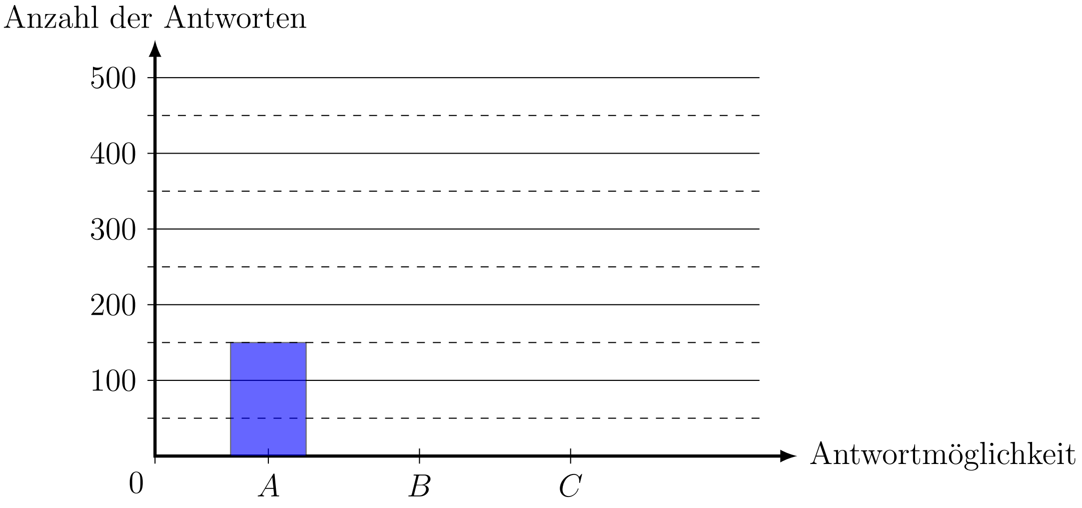
a) *In der Auswertung stand, dass die Antwort B insgesamt 220% mehr Stimmen bekommen hat als die Antwort A. Berechne die Stimmenanzahl von B.*

b) *Auch ist bekannt, dass die Antwort C nur $66,\bar{6}\%$ der Stimmen von Antwort B bekommen hat. Berechne die Stimmenanzahl von C.*

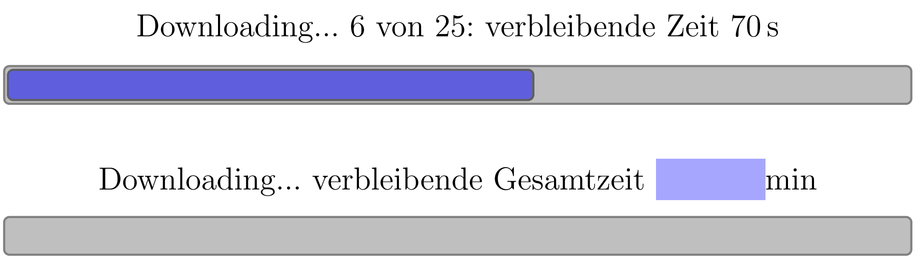
c) *Zeichne die Säule für die Antwortmöglichkeit B und C in das Diagramm ein.*

d) *Zeichne ein Kreisdiagramm, das die prozentuale Verteilung der Stimmen angibt.*

e) *Berechne, wie viele Stimmen in Prozent die Antwort C mehr als die Antwort A bekommen hat.*



Aufgabe 75: *Bei einem Downloadpaket werden 25 Dateien gleicher Größe runtergeladen. Dabei zeigt der obere Balken an, wie weit der Fortschritt bei der aktuellen Datei ist, während der untere Balken den Fortschritt des gesamten Downloads angibt. Berechne wie lange der gesamte Download noch dauert und zeichne den aktuellen Fortschritt des gesamten Downloads an. Gib hierzu auch die passenden Werte an.*



Aufgabe 76: *Auf einem Parkplatz befinden sich 450 Autos, wenn dieser zu 63% belegt ist. Berechne, wie viele Autos auf dem Parkplatz stehen, wenn dieser zu 24% belegt ist.*

Aufgabe 77: *Bei einer immer wiederkehrenden Umfrage geben Unternehmen ihre Zufriedenheit mit der aktuellen wirtschaftlichen Situation an. Je höher die Punkte sind, desto zufriedener sind die Befragten. Bei der ersten Umfrage wurden* 3102*, bei der zweiten Umfrage* 3690*, bei der dritten Umfrage* 2990*, bei der vierten Umfrage* 3452 *und bei der fünften Umfrage* 3710 *Punkte erreicht. Bei der Auswertung werden die Werte jeder Umfrage mit der vorherigen verglichen. Zeichne die relativen Veränderungen in ein Säulendiagramm.*

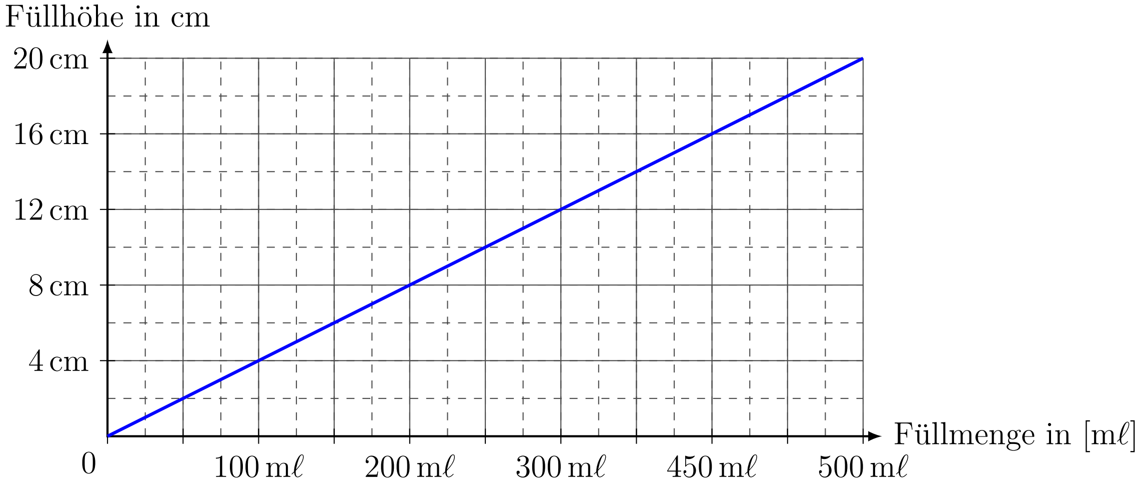
Aufgabe 78: *Um die Wichtigkeit einer Straße zu untersuchen werden täglich die Autos gezählt, die auf dieser Straße fahren. Hierbei wurden am Montag* 1920*, am Dienstag* 1720*, am Mittwoch* 2255*, am Donnerstag* 2175*, am Freitag* 1856*, am Samstag* 1450 *und am Sonntag* 923 *Autos gezählt. Zeichne ein Säulendiagramm für die Nutzungsdifferenzen bezüglich des Durchschnittswertes, indem du die Zahlen auf den Durchschnitt normierst (Bei einer Normierung bekommt ein Wert die* 100% *zugeschrieben, was in diesem Fall der Grundwert ist).*

Aufgabe 79: *Bei einem Rechteck wurden die Seiten um* 75% *vergrößert. Gib an, wie sich der Flächeninhalt und der Umfang verändern.*

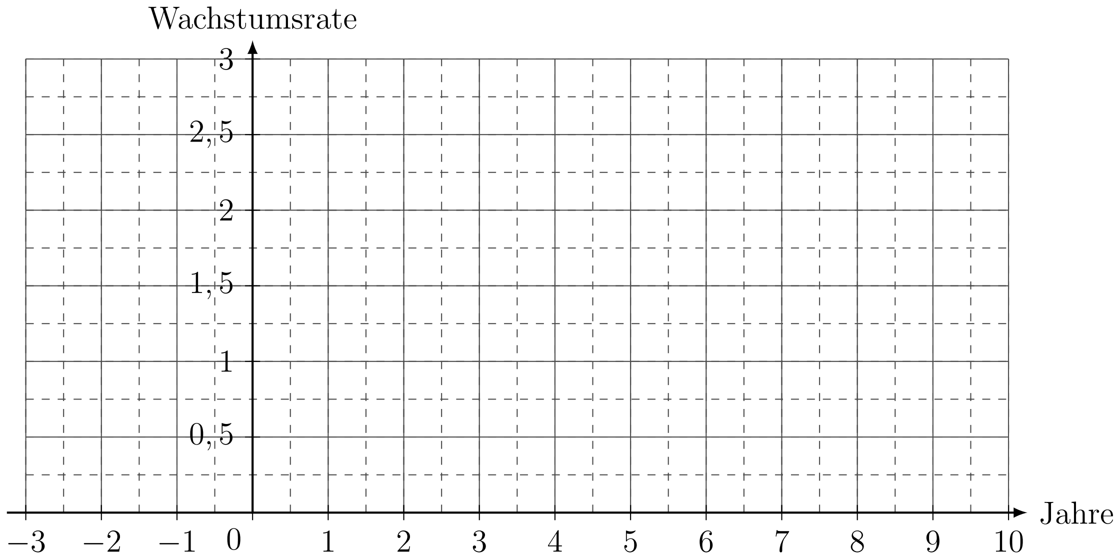
Aufgabe 80: *Wenn ein Würfel um* 100% *vergrößert wird, dann verdoppeln sich seine Kantenlängen. Gib an, wie sich der Oberflächeninhalt und das Volumen unter dieser Vergrößerung verhalten. Gib anschließend an, wie sich der Oberflächeninhalt und der Volumen unter einer Vergrößerung von* 40% *verhalten.*

Aufgabe 81: *Ein Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von* $240\,cm^2$ *und wird zerschnitten, sodass noch* 44% *der einen Seitenlänge und* 79% *der anderen Seitenlänge vorhanden sind. Berechne den Flächeninhalt des übrigbleibenden Rechtecks.*

Aufgabe 82: *Der gegebene Graph zeigt auf der Abszisse die Füllmenge eines zylinderförmigen Glases an, während die Ordinate die Füllhöhe darstellt. Das Glas ist* 20 cm *hoch. Berechne, wie viel Prozent das Glas pro* 50 mℓ *gefüllt wird.*



Aufgabe 83: *Jedes Jahr wächst ein Wert um* 10%*. Berechne wie sich das Wachstum jedes Jahr immer weiter fortsetzt. Berechne dies für die nächsten* 10 *Jahre und die vergangenen* 3 *Jahre, wenn der Startwert bei* 100% *liegt. Trage die Werte in das Koordinatensystem an und verbinde die Punkte sinnvoll.*



Aufgabe 84: *Ein Kapital von* 6000 € *wurde für einen Jahreszinssatz von* $1,5\%$ *über* 6 *Jahre angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge.*

Aufgabe 85: *Ein Kapital von* 7500 € *wurde für einen Jahreszinssatz von* $1,2\%$ *über* 9 *Jahre angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge.*

Aufgabe 86: *Ein Kapital von* 5000 € *wurde für* 5 *Jahre angelegt. Nach einem Jahr betrug der Kontostand* 5062 €*. Berechne die resultierende Geldmenge.*

Aufgabe 87: *Ein Kapital von* 12000 € *wurde für* 30 *Monate zu einen Jahreszinssatz von* $0,75\%$ *angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge.*

Aufgabe 88: *Ein Kapital von* 3500 € *wurde für* 2 *Jahre zu einen Monatszinssatz von* $0,15\%$ *angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge.*

Aufgabe 89: *Bei der Inflation wird das Geld immer weniger wert. Dabei verliert das Geld im Schnitt* 2% *Wert pro Jahr. Berechne, wie viel Prozent Wertverlust beim Geld nach* 25 *Jahren entstanden ist.*

Aufgabe 90: *Die Wirtschaft wächst in der Bundesrepublik Deutschland jedes Jahr im Schnitt um* $1,6\%$*. Berechne, wie viel prozentuales Wachstum mit diesen Zahlen nach* 30 *Jahren im Vergleich zu heute erreicht wurde.*

Aufgabe 91: *Beim Wirtschaftswachstum wird immer wieder vom vergangenen Jahr ausgegangen. Sei der Startwert* 100 *und das jährliche Wachstum sei mit* $1,9\%$ *gegeben. Bestimme durch systematisches Probieren, wann das jährliche absolute Wachstum den Wert von* 100 *überschreitet.*

Aufgabe 92: *Bei der Inflation wird das Geld immer weniger wert. Dabei verliert das Geld im Schnitt* 2% *Wert pro Jahr. Ein Staat hat sich* 750 *Milliarden Euro Schulden aufgeladen. Bestimme durch systematisches Probieren, wann die* 750 *Milliarden Euro zwei Drittel ihres Wertes verloren haben.*

Aufgabe 93: *Angenommen die Staatsschulden eines Staates sollen in relativen Zahlen gleichbleiben und der betrachtete Staat hat* 2500 *Milliarden Euro Schulden. Berechne wie viele neue Schulden müsste der Staat im ersten, im zweiten, im dritten und im vierten Jahr aufnehmen, um die Inflation auszugleichen, welche* 2% *beträgt.*

Aufgabe 94: *Ein Staat hat über* 25 *Jahre ein Wirtschaftswachstum von* 2% *und nach dieser Zeit einen Wirtschaftseinbruch von* 10%*. Bestimme durch systematisches Probieren, wie viele Jahre dieser Wirtschaftseinbruch den Staat zurückwirft, wenn die Wirtschaft nach dem Einbruch wieder mit* 2% *wächst.*

Aufgabe 95: *Durch das Wahlstatistikgesetz von* 1999 *darf in einem Wahlkreis mit* 1500 *Einwohnern jeder Stimmzettel der Wähler markiert werden, sodass die Bundes- oder Landesregierung erfährt, wie die verscheidenen Menschen abgestimmt haben. In einem solchen Wahlkreis können zwei Wahllokale sein, sodass nur ein Wahllokal betrachtet wird. Bei der letzten Bundestagswahl gab es eine Wahlbeteiligung von* 75%*. Die Stimmzettel werden nach männlich und weiblich sortiert, wobei in dieser Aufgabe zur Vereinfachung angenommen wird, dass gleich viele Männer wie Frauen zur Wahl gehen. Die Stimmzettel sind nach Alter markiert, sodass die gesamte Bevölkerung des Wahlkreises in sechs gleichgroße Gruppen aufgeteilt wurde. Nun werden je Stunde die markierten Stimmzettel ausgewertet. Berechne wie viele Menschen pro Gruppe, pro Stunde, pro biologischem Geschlecht in einem Wahllokal abstimmen, wenn davon ausgegangen wird, dass der Wahltag zehn Stunden hat und in jeder Stunde gleich viele Menschen pro Gruppe und biologischem Geschlecht wählen.*

Aufgabe 96: *Bei Tarifverhandlungen im Jahr* 2018 *haben sich Arbeitgeber und die Gewerkschaftsvorsitzenden darauf geeinigt, dass die Beschäftigten im ersten Jahr eine Lohnerhöhung von* $3,5\%$*, im zweiten Jahr* $3,1\%$ *und im letzten Jahr* $1,1\%$ *bekommen. Die Beschäftigten bekommen in der einen Lohnstufe* 1800 € *pro Monat. Bei einem Interview sagte eine Journalistin, dass sich die Beschäftigten über eine Lohnerhöhung von mehr als* 7% *freuen können. Zeige, dass die Journalistin unrecht hat, indem du die Teilaufgaben löst.*
a) Berechne, wie viel Geld die Beschäftigten ohne Lohnerhöhung in den drei Jahren bekommen würden.
b) Berechne, wie viel Geld die Beschäftigten mit der Lohnerhöhung im ersten Jahr bekommen würden.
c) Berechne, wie viel Geld die Beschäftigten mit der Lohnerhöhung im zweiten Jahr bekommen würden.
d) Berechne, wie viel Geld die Beschäftigten mit der Lohnerhöhung im dritten Jahr bekommen würden.
e) Berechne, wie viel Geld in Prozent die Beschäftigten nun wirklich mit der Lohnerhöhung über die aufaddierten drei Jahre mehr bekommen würden.

Weitere Übungen zur Prozentrechnung zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.8) Lösungen zur Prozentrechnung.

3.9 Negative Zahlen

Die negativen Zahlen erweitern die *Zahlenmenge* der *Natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ [1] zu den *Ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, indem die *Subtraktion* mit der *Addition* vereinheitlicht wird. Dabei gehört der *Subtraktionsoperator* nun als Vorzeichen zu der Zahl dazu.

$$2 - 1 = 2 + (-1) = -1 + 2 \tag{3.62}$$

Wie die Gleichung (3.62) zeigt, bleibt das Vorzeichen immer bei der jeweiligen Zahl. Dabei gilt, dass das positive Vorzeichen + nicht oftmals nicht mitgeschrieben wird. Wichtig ist dabei, dass Zahlen mit negativem Vorzeichen immer in *Klammern* gesetzt werden, sodass niemals zwei *Grundrechenoperatoren* direkt hinter einander stehen. Als Folge dieser Schreibweise verschwindet die *Subtraktion* nahezu vollständig, da *Parameter* auch negative *Werte* annehmen kann.

$$a - b = a + (-b) = -b + a \tag{3.63}$$

Die Gleichung (3.63) kann neu formuliert werden, indem der Parameter b mit dem *Vorzeichen* neudefiniert wird: $-b := c$, sodass folgende Gleichung daraus entsteht:

$$a - b = a + (-b) = a + c = c + a \quad . \tag{3.64}$$

Aber nicht nur bei der *Addition* sondern auch bei der *Multiplikation* spielt das *Vorzeichen* eine besondere Rolle. Bei der *Multiplikation* wird deutlich wie das *Vorzeichen* im Detail mathematisch zu verstehen ist:

$$-3 \cdot 2 = 2 \cdot (-3) = 2 \cdot (-1) \cdot 3 \quad . \tag{3.65}$$

Wie die Gleichung (3.65) zeigt, ist das *Vorzeichen* durch die *Multiplikation* der Zahl -1. Folglich wurde die *Zahlenmenge* der *Natürlichen Zahlen* lediglich um eine Zahl, der -1, zu den *Ganzen Zahlen Z* erweitert. Dabei dreht die *Multiplikation* der -1 das *Vorzeichen* der Zahl um, sodass die doppelte *Multiplikation* das Vorzeichen erhält. Somit ergibt sich die umgangssprachliche Regel: „Minus mal Minus ergibt Plus!“.

$$(-1) \cdot (-1) = 1 \tag{3.66}$$

Diese Regel kann durch mehrere Konzepte motiviert werden:

[1] $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

- durch das Permanenzprinzip:

$$\begin{aligned}(-1)\cdot(2) &= -2\\ (-1)\cdot(1) &= -1\\ (-1)\cdot(0) &= 0\\ (-1)\cdot(-1) &= 1\\ (-1)\cdot(-2) &= 2\end{aligned}\tag{3.67}$$

- über das Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}0 &= -2\cdot 0\\ 0 &= -2\cdot(3+(-3))\\ 0 &= -2\cdot 3+(-2)\cdot(-3)\\ 0 &= -6+6\end{aligned}\tag{3.68}$$

- über die Bruchrechnung:

$$\begin{aligned}(-4)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) &= (-4)\cdot\left(\frac{3}{-5}\right)\\ &= \left(\frac{-4}{1}\right)\cdot\left(\frac{3}{-5}\right)\\ &= \frac{\cancel{-}12}{\cancel{-}5}\\ &= \frac{12}{5}\end{aligned}\tag{3.69}$$

Oftmals bereitet das Einsetzen von negativen Zahlen in Gleichungen mit höheren Potenzen Probleme. Aus diesem Grund wird hier explizit darauf hingewiesen, dass das negative Vorzeichen einer Zahl als die Multiplikation mit (-1) verstanden werden kann. Somit muss beim Einsetzen in eine Gleichung die gesamte Zahl eingeklammert werden, da es ansonsten den Wert des Terms verändern würde.

$$-a^2 = (-1)\cdot a^2 \neq (-a)^2 = (-1)^2\cdot a^2 = a^2 \tag{3.70}$$

Die Bedeutung der Einführung der *negativen Zahlen* wird im nächsten Abschnitt durch die Besprechung des *Kommutativ*- und *Assoziativgesetzes* detaillierter ausgeführt.

3.9.1 Übungsaufgaben zu den negativen Zahlen

Aufgabe 1: *Berechne alle Felder der Tabelle.*

	$+6$	-6	$+5$	-5	$+9$	-9	$+14$	-14
$+6$	$+6+6=12$	$+6-6=0$						
-6	$-6+6=0$	$-6-6=-12$						
$+5$	$+5+6=11$							
-5								
$+9$								
-9								
$+14$								
-14								

Aufgabe 2: *Berechne alle Felder der Tabelle.*

	-30	$+21$	-59	-16	-84	$+67$	-13	$+13$
$+18$								
-24								
$+43$								
-62								
$+23$								
-52								
$+4$								

Aufgabe 3: *Berechne den Wert des Terms der Additionsaufgabe.*

$a)\ 6-11=$	$b)\ -4-15=$	$c)\ 15-53=$
$d)\ -16-13=$	$e)\ -40+14=$	$f)\ -64+22=$
$g)\ 33-44=$	$h)\ -18-25=$	$i)\ -43+82=$
$j)\ -23-41=$	$k)\ -61+73=$	$l)\ 88-92=$
$m)\ 10-19=$	$n)\ -24-54=$	$o)\ 45-76=$
$p)\ -57-29=$	$q)\ -12+31=$	$r)\ -43+56=$
$s)\ -55-23=$	$t)\ 56-91=$	$u)\ 23-56=$
$v)\ -47-12=$	$w)\ -47-(-46)=$	$x)\ -(-23)-64=$
$y)\ -(-32)+(-(-4))=$	$z)\ -(-12)-(-(-24))=$	

Aufgabe 4: *Berechne den Wert des Terms der Additionsaufgabe.*

$a)\ -2+4=$	$b)\ -12+25=$	$c)\ -34+62=$
$d)\ -52+49=$	$e)\ -77+53=$	$f)\ -145+86=$
$g)\ -75-24=$	$h)\ -38-52=$	$i)\ -367-572=$
$j)\ -\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=$	$k)\ -\frac{5}{6}+\frac{2}{3}=$	$l)\ -\frac{1}{4}+\frac{7}{8}=$
$m)\ -\frac{4}{7}+\frac{6}{5}=$	$n)\ -\frac{3}{8}+\frac{5}{7}=$	$o)\ -\frac{4}{9}+\frac{8}{5}=$
$p)\ -\frac{8}{3}-\frac{9}{4}=$	$q)\ -\frac{5}{6}-\frac{8}{9}=$	$r)\ -\frac{4}{7}-\frac{11}{3}=$

Aufgabe 5: *Berechne den Wert des Terms der Multiplikationsaufgabe.*

a) $-7 \cdot 8 =$ *b)* $-11 \cdot 12 =$ *c)* $-24 \cdot 5 =$

d) $4 \cdot (-9) =$ *e)* $17 \cdot (-4) =$ *f)* $72 \cdot (-3) =$

g) $-5 \cdot (-7) =$ *h)* $-9 \cdot (-8) =$ *i)* $-13 \cdot (-13) =$

j) $-\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} =$ *k)* $-\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} =$ *l)* $-\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} =$

m) $\frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) =$ *n)* $\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) =$ *o)* $\frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{9}{7}\right) =$

p) $-\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{4}{7}\right) =$ *q)* $-\frac{8}{5} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right) =$ *r)* $-\frac{4}{11} \cdot \left(-\frac{12}{5}\right) =$

s) $-\frac{6}{7} : \frac{5}{6} =$ *t)* $-\frac{3}{5} : \frac{2}{9} =$ *u)* $\frac{7}{8} : \left(-\frac{11}{3}\right) =$

v) $\frac{15}{4} : \left(-\frac{7}{15}\right) =$ *w)* $-\frac{11}{7} : \left(-\frac{4}{3}\right) =$ *x)* $-\frac{5}{13} : \left(-\frac{10}{9}\right) =$

Aufgabe 6: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} =$ *b)* $\frac{-3}{4} \cdot \frac{5}{6} =$ *c)* $\frac{-2}{3} \cdot \frac{-4}{5} =$

d) $\frac{-1}{2} \cdot \frac{4}{-3} =$ *e)* $-\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) =$ *f)* $-\frac{6}{7} \cdot \frac{2}{-9} =$

g) $\frac{-8}{9} \cdot \frac{-5}{6} =$ *h)* $-\frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{-4}{-3}\right) =$ *i)* $-\frac{7}{7} \cdot \frac{8}{-5} =$

Aufgabe 7: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} =$ *b)* $\frac{-3}{4} : \frac{5}{6} =$ *c)* $\frac{-2}{3} : \frac{-4}{5} =$

d) $\frac{-1}{2} : \frac{4}{-3} =$ *e)* $-\frac{1}{6} : \left(-\frac{2}{5}\right) =$ *f)* $-\frac{6}{7} : \frac{2}{-9} =$

g) $\frac{-8}{9} : \frac{-5}{6} =$ *h)* $-\frac{3}{7} : \left(-\frac{-4}{-3}\right) =$ *i)* $-\frac{7}{7} : \frac{8}{-5} =$

Aufgabe 8: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=$ *b)* $\frac{-3}{4}-\frac{5}{6}=$ *c)* $\frac{-2}{3}+\frac{-4}{5}=$

d) $\frac{-1}{2}-\frac{4}{-3}=$ *e)* $-\frac{1}{6}+\left(-\frac{2}{5}\right)=$ *f)* $-\frac{6}{7}+\frac{2}{-9}=$

g) $\frac{-8}{9}-\frac{-5}{6}=$ *h)* $-\frac{3}{7}-\left(-\frac{-4}{-3}\right)=$ *i)* $-\frac{7}{7}-\frac{8}{-5}=$

j) $\frac{-2}{5}-\frac{6}{7}=$ *k)* $\frac{-1}{4}+\frac{4}{-7}=$ *l)* $\frac{7}{3}+\frac{-15}{2}=$

m) $\frac{-4}{3}-\frac{7}{-5}=$ *n)* $-\frac{5}{7}-\left(-\frac{11}{5}\right)=$ *o)* $-\frac{3}{10}+\frac{5}{-9}=$

p) $\frac{-5}{4}-\frac{-7}{-5}=$ *q)* $-\frac{10}{12}-\left(-\frac{-3}{-8}\right)=$ *r)* $-\frac{7}{10}-\frac{3}{-8}=$

Aufgabe 9: *Setze in die Gleichungen die angegebenen Zahlen ein und berechne den Wert des Terms.*

a) $a+b=$ mit: $a=-5$ und $b=-9$

b) $3\cdot a+b=$ mit: $a=-2$ und $b=-3$

c) $a-b=$ mit: $a=-7$ und $b=-11$

d) $4\cdot a-6\cdot b=$ mit: $a=-4$ und $b=-10$

e) $8\cdot a\cdot b=$ mit: $a=-2$ und $b=-3$

f) $a\cdot b-b\cdot c=$ mit: $a=-5$ und $b=-4$ und $c=-2$

g) $a+b=$ mit: $a=-\frac{2}{3}$ und $b=-\frac{3}{4}$

h) $-2\cdot a-b=$ mit: $a=-\frac{6}{7}$ und $b=-\frac{4}{5}$

i) $9\cdot a\cdot b=$ mit: $a=-\frac{9}{5}$ und $b=-\frac{5}{11}$

j) $-2\cdot a:b=$ mit: $a=-\frac{2}{5}$ und $b=-\frac{7}{8}$

k) $\frac{1}{3}\cdot a:b+\frac{3}{2}\cdot c=$ mit: $a=-\frac{3}{5}$, $b=-\frac{7}{6}$ und $c=-\frac{4}{9}$

l) $a\cdot b:c-b:a=$ mit: $a=-\frac{7}{4}$, $b=-\frac{3}{10}$ und $c=-\frac{5}{8}$

Aufgabe 10: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $-4+8-13-41+53-29-43+71-12+66-44-79+38+23=$

$b)$ $-4\cdot 5+4\cdot(-3)-15:(-3)+6\cdot(-4):(-2)=$

$c)$ $-6\cdot(-8)-4\cdot 2\cdot(-8)+88:(-11)-43+85-62=$

$d)$ $-3(-2\cdot 7+3\cdot(-2))-45:(-9):(-5)\cdot(-13)+33-71=$

$e)$ $4\cdot(-8)\cdot 4:(-2)-55+3\cdot(-8)-4(4-9\cdot 2)=$

$f)$ $12:(-6)\cdot(-5)-3(-2-7\cdot 4)+(-3)\cdot(-2)\cdot(-4):(-6)\cdot(-3)-63-58+92=$

$g)$ $-(-(-3))\cdot(-(-2)\cdot(-(-(-4))))-(-(-(-(-12))))=$

$h)$ $-(-4)\cdot(-(-(-3))\cdot(-(-(-(-(-5)))))):(-(-(-6)))-(-(-(-15)))=$

Aufgabe 11: *Schreibe zu jeder Teilaufgabe den Term der Berechnung auf und beantworte die Frage.*

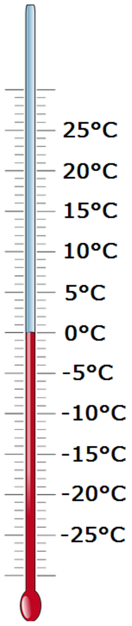
$i)$ Das Thermometer zeigt $7°C$ an und die Temperatur soll um $11°C$ fallen. Wie viel Grad Celsius zeigt das Thermometer nach der Veränderung an?

$j)$ Das Thermometer zeigt $-3°C$ an und die Temperatur soll um $-7°C$ steigen. Wie viel Grad Celsius zeigt das Thermometer nach der Veränderung an?

$k)$ Das Thermometer zeigt $-9°C$ an und die Temperatur soll um $-11°C$ fallen. Wie viel Grad Celsius zeigt das Thermometer nach der Veränderung an?

$l)$ Das Thermometer zeigt $-18°C$ an und die Temperatur soll um $-11°C$ steigen. Wie viel Grad Celsius zeigt das Thermometer nach der Veränderung an?

Aufgabe 12: *Schreibe zu jeder Teilaufgabe den Term der Berechnung auf und beantworte die Frage.*



a) Am Morgen zeigte das Thermometer $-7°C$ an, während es am Nachmittag $-1°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

b) Am Nachmittag zeigte das Thermometer $3°C$ an, während es in der Nacht $-8°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gefallen?

c) Am Morgen zeigte das Thermometer $-5°C$ an, während es am Nachmittag $7°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

d) Am Nachmittag zeigte das Thermometer $-6°C$ an, während es in der Nacht $-17°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

e) Am Morgen zeigte das Thermometer $-14°C$ an, während es am Nachmittag $2°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

f) Am Nachmittag zeigte das Thermometer $6°C$ an, während es in der Nacht $-11°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

g) Am Nachmittag zeigte das Thermometer $4°C$ an, während es in der Nacht $-8°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gefallen?

h) Am Morgen zeigte das Thermometer $-6°C$ an, während es am Nachmittag $4°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gefallen?

Weitere Übungsaufgaben zu den negativen Zahlen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden: leichteres Niveau, mittleres Niveau oder schwereres Niveau

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.9) Lösungen zu den negativen Zahlen.

3.10 Assoziativ und Kommutativ

Das *Assoziativ-* und das *Kommutativgesetz* helfen beim Rechnen den Überblick selbst über sehr komplex wirkende Sachverhalte zu behalten und sollten deswegen bekannt sein. In diesem Abschnitt werden diese beiden Gesetz und ihre Auswirkungen auf die Mathematik besprochen. Auch wird nochmals motiviert, warum es lohnend sein kann mit *Brüchen* und negativen Zahlen zu arbeiten.

3.10.1 Kommutator

Das *Kommutativgesetz* besagt, dass die Vertauschung von Zahlen, *Parametern* oder *Variablen* bei einer Rechenoperation keinen Einfluss auf den Wert des Terms hat. Zur Überprüfung des *Kommutativgesetzes* dient der *Kommutator*, welcher folgende definierte Rechenanweisung ist:

$$[a, b] = a \cdot b - b \cdot a \tag{3.71}$$

Ist der *Kommutator* gleich Null, so gilt, dass $a \cdot b = b \cdot a$ ist. Wenn man nun Zahlen für die *Parameter* a und b einsetzt, so ist die Gültigkeit des *Kommutativgesetzes* intuitiv zu erkennen:

$$[2, 3] = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0 \tag{3.72}$$

Der allgemeine *Kommutator* ist für die *Multiplikation* definiert - wenn nun das *Kommutativgesetz* zum Beispiel für die *Addition* überprüft werden soll, wird am Komma des *Kommutator* gekennzeichnet welcher *Operator* untersucht wird.

$$\begin{aligned} [a,_+ b] &= a + b - b + a \\ [2,_+ 3] &= 2 + 3 - 3 + 2 = 5 - 5 = 0 \end{aligned} \tag{3.73}$$

Es wird deutlich, dass ohne die Einführung der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung und somit die Verallgemeinerung von *Addition* mit *Subtraktion* sowie der *Multiplikation* mit der *Division*, dass *Kommutativgesetz* nicht für die *Subtraktion* und *Division* gelten würde.

$$\begin{aligned} [a,_- b] &= a - b - b - a \neq 0 \\ [2,_- 3] &= 2 - 3 - 3 - 2 \neq 0 \\ [a,_: b] &= a : b - b : a \neq 0 \\ [2,_: 3] &= 2 : 3 - 3 : 2 \neq 0 \end{aligned} \tag{3.74}$$

Durch die Einführung *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ und der Bruchrechnung verändert sich Gleichung (3.74) zu:

$$\begin{aligned}
[a,_+ -b] &= (a + (-b)) - (-b + a) = 0 \\
[3,_+ -2] &= (3 + (-2)) - (-2 + 3) = 1 - 1 = 0 \\
\left[a, \frac{1}{b}\right] &= a \cdot \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \cdot a = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} = 0 \\
\left[2, \frac{1}{3}\right] &= 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Die besondere Bedeutung und die Konsequenzen des *Kommutators* werden im Kapitel „Differentiation und Integration“ weiter ausgeführt. Während die Klammern im nächsten Unterabschnitt genaustens erklärt werden

3.10.2 Assoziativgesetz

Das *Assoziativgesetz* besagt, dass die Reihenfolge bei einer Rechnung keine Relevanz besitzen darf. So macht es zum Beispiel keinen Unterschied bei der *Addition* oder *Multiplikation* von drei Zahlen, welche zuerst verrechnet werden.

$$\begin{aligned}
a + b + c &= (a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c) \\
a \cdot b \cdot c &= (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Die Reihenfolge in Gleichung 3.76 wird beschrieben durch die Klammern, welche angeben welche Rechnung zu erst vollzogen werden soll. Das jeweils letzte Gleichheitszeichen konnte nur durch die Vertauschung der geschriebenen Reihenfolge der *Parameter* a, b und c, also dem *Kommutativgesetz*, geschrieben werden. Erneut zeigt sich, dass die Verallgemeinerung von *Addition* mit *Subtraktion* sowie *Multiplikation* mit *Division* seine Vorteile hat, denn die *Rechenoperatoren* der *Subtraktion* und der *Division* sind nicht *assoziativ*:

$$\begin{aligned}
(a - b) - c &\neq a - (b - c) \\
(a : b) : c &\neq a : (b : c)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Allerdings gilt durch die Einführung der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ und des Bruchrechnens, dass der *Subtraktionsoperator* umgeschrieben werden kann in $- = +(-1)$ sowie der *Divisionsoperator* mit nur seltenen Ausnahmen aus dem mathematischen Gebrauch verschwindet.

3.10.3 Übungsaufgaben zum Kommutativ- und Assoziativgesetz

Aufgabe 1: *Schreibe alle Variationen der Terme durch die Verwendung des Kommutativgesetzes auf.*

$a)\ a+b=$	$b)\ a+b+c=$	$c)\ z-d=$
$d)\ d-a-s=$	$e)\ a+b\cdot c=$	$f)\ z\cdot d\cdot g=$
$g)\ d\cdot a-s=$	$h)\ a\cdot d+b\cdot c=$	$i)\ a\cdot d-b\cdot c=$
$j)\ d:a+s=$	$k)\ a:d+b:c=$	$l)\ z:d-u\cdot g=$

Aufgabe 2: *Schreibe alle Variationen der Terme durch die Verwendung des Assoziativgesetzes (ohne Kommutativgesetz) auf.*

$a)\ a+b+c=$	$b)\ a\cdot b\cdot c=$	$c)\ a+b+c+d=$
$d)\ a+b\cdot r+c\cdot d=$	$e)\ a\cdot b\cdot u+d\cdot c\cdot g=$	$f)\ a\cdot b\cdot c\cdot d=$
$g)\ a-b+c-d=$	$h)\ a\cdot b:d\cdot c\cdot g=$	$i)\ a\cdot b+b:c\cdot d-g=$

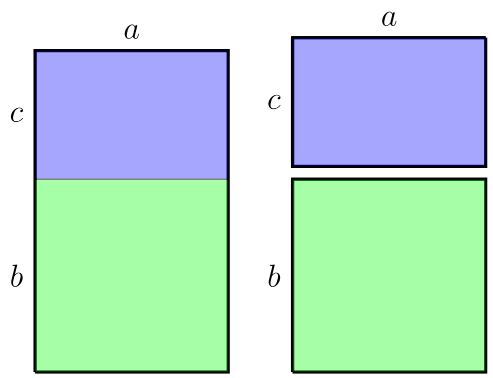
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.10) Lösungen zum Kommutativ- und Assoziativgesetz.

3.11 Distributivgesetz

Wenn eine Rechnung mehr als nur einen *Rechenoperator* beinhaltet, dann lohnt es sich *Klammern* zu verwenden, um den Überblick zu behalten oder auf bestimmte Sachverhalte aufmerksam zu machen. Im engeren Sinne ist die Rechnung mit *Klammern* auf die *Multiplikation* reduzierbar. Dabei wirkt der außenstehende *Faktor* auf jeden *Summanden* innerhalb der Klammer:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$16 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16 \tag{3.78}$$

Das Beispiel aus Gleichung (3.78) zeigt, wie der *Faktor* auf die *Summanden* innerhalb der *Klammern* wirkt und somit der gleiche *Wert des Terms* produziert, wie die *Multiplikation* des *Faktors* mit der *Summe* der *Klammer*. Dieses Verfahren mit der *Klammersetzung* wird *Distributivgesetz* genannt. Das *Distributivgesetz* kann anhand eines zusammengesetzten *Rechtecks* aus anderen *Rechtecken* visualisiert werden.



Wobei der *Flächeninhalt* des gesamten *Rechtecks* einmal direkt über $A = a(b + c)$ oder über die *Addition* der beiden kleineren *Rechtecke* $A = A_1 + A_2 = ab + ac$ berechnet werden kann.

Bei der Verrechnung von *Subtraktionsoperatoren* mit einer *Klammer* gilt, dass das vorgestellte Minus lediglich eine verkürzte Schreibweise von $(-1)\cdot$ ist:

$$-(b + c) = (-1) \cdot (b + c) = (-1) \cdot b + (-1) \cdot c = -b - c \tag{3.79}$$

Auch *Terme* von *Summen* können miteinander *multipliziert* werden:

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d \tag{3.80}$$

In Gleichung (3.80) wirken zu erst die *Summanden* der ersten Klammer auf die zweite *Klammer*, sodass dann die zweite *Klammer* wie in Gleichung (3.78) *ausmultipliziert* werden kann. Es wird auch ersichtlich, dass die Schreibweise mit den *Klammern* wesentlich kürzer ist. Das *Ausmultiplizieren* ist trotz der verkürzten *Klammerschreibweise* oftmals von Vorteil.

Die *Klammersetzung* ist nicht nur ein Bestandteil einer verkürzten Schreibweise, sondern auch von fundamentaler Bedeutung bei komplexeren *Einsetzungsverfahren*. So sei zum Beispiel $a = g + h$ und soll in die folgende Gleichung eingesetzt werden.

$$a \cdot d = (g + h) \cdot d = g \cdot d + h \cdot d \tag{3.81}$$

Wie Gleichung (3.81) zeigt, sollte bei einer Ersetzung der eingesetzte *Term* am besten prophylaktisch umklammert werden, um Fehler zu vermeiden. Erst nach einer Reflektion der Gleichung sollten dann die *Klammern*, wenn möglich, fallen gelassen werden.

Allerdings sollte auch die *Umkehrung* des *Ausmultiplizierens*, das *Ausklammern*, beherrscht werden, da es oftmals die Übersicht verbessert, wie in diesem Beispiel:

$$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + a \cdot f + g = a \cdot (b + c + d + e + f) + g \tag{3.82}$$

Die Gleichung (3.82) zeigt, dass der *Faktor* a, welcher sich in vielen *Summanden* befindet, *ausgeklammert* wurde um die Übersicht zu verbessern. Generell gilt, dass man gleiche *Vorfaktoren* bei *Summen ausklammern* kann.

3.11.1 Übungsaufgaben zum Distributivgesetz

Aufgabe 1: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)\ \frac{1}{2}(9+7) =$ $\quad b)\ \frac{25+65}{10} =$

$c)\ 4(3+2) =$ $\quad d)\ \frac{16+48}{2} =$

$e)\ \frac{1}{4}(144-92) =$ $\quad f)\ \frac{3}{5}\cdot\frac{13-5}{4} =$

$g)\ 5,5\,(1,5+6,25) =$ $\quad h)\ \frac{6,3-5-0,3}{20} : \frac{2}{5} =$

$i)\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right) =$ $\quad j)\ \frac{77-47}{3}\cdot\frac{3+5}{24} =$

$k)\ 4(3+2)-2(1+3) =$ $\quad l)\ \frac{12-8+14}{2}\cdot\left(3+\frac{9}{2}\right) =$

Aufgabe 2: *Multipliziere die Klammer aus.*

$a)\ 2(a+7) =$ $\quad b)\ 4(b+c) =$

$c)\ 7(4+v) =$ $\quad d)\ d(b-c) =$

$e)\ 6(ab-cd) =$ $\quad f)\ mo(ep-ewe) =$

$g)\ ha(llo-i) =$ $\quad h)\ te(st+e) =$

$i)\ Tag\,(Stunde-Minute) =$ $\quad j)\ (4b+7c)\,5 =$

$k)\ 2(2a-3c)\,4 =$ $\quad l)\ \xi\,(\Psi-\Phi) =$

$m)\ 4\diamond(3\hbar-6\Gamma) =$ $\quad n)\ 2\tau\,(5\sigma+3\rho)\,3\lambda =$

Aufgabe 3: *Multipliziere die Klammern aus.*

$a)\ 4(a+b) =$ $\quad b)\ c(a-5b) =$

$c)\ \frac{2}{5}(9a-5) =$ $\quad d)\ (a+b)(a+b) =$

$e)\ \frac{2}{5}\left(\frac{a}{b}-\frac{5c}{d}\right) =$ $\quad f)\ (a-b)(a-b) =$

$g)\ (a+b)(c+d) =$ $\quad h)\ (a-b)(a+b) =$

$i)\ \frac{a+b}{c} =$ $\quad j)\ \frac{(a+b)(a-b)}{a-b}(a+b) =$

Aufgabe 4: *Multipliziere die Klammern aus.*

a) $3\,(a+2) =$

b) $5\,(3a-5) =$

c) $d\,(3a-4b) =$

d) $4a\,(2d-8u) =$

e) $-2\,(4a+3de) =$

f) $-2a\,(7d-3b) =$

g) $(a+2)\,(b+1) =$

h) $(a+2b)\,(3+c) =$

i) $(2a+3c)\,(1-x) =$

j) $(2a-2b)\,(2c-2d) =$

k) $(lo-rof)\,(l-lo) =$

l) $(ah-n)\,(a-e) =$

m) $(6-2x)\,(3d-2e) =$

n) $(g-l)\,(ame+odd) =$

o) $(2s+4o)\,(-3a+4c) =$

p) $(10-f)\,(8+2e) =$

q) $-(9-a)\,(4+d) =$

r) $-(a+e)\,(d-f) =$

s) $-(4d+3s)\,(2f-5) =$

t) $-(5x+3)\,(6y-3z) =$

u) $a\,(8ge-ze)\,(h+4r) =$

v) $b\,(4a-2d)\,(5-3x) =$

w) $-2\,(rt-wer)\,(los+4gt) =$

x) $-3\,(2d-5)\,(-4+p) =$

y) $(a+b)\,(c+d)\,(e+f) =$

z) $(a-b)\,(c-d)\,(e-f) =$

Aufgabe 5: *Klammere so viel wie möglich aus.*

a) $2a+2b =$

b) $ab-ad =$

c) $abe+aef =$

d) $3ag-6a =$

e) $2ab+2bc-2bd =$

f) $2a-4b+8d =$

g) $ab+ac+ad+ae-af =$

h) $5\varDelta\nabla-\varDelta\diamond\nabla =$

i) $\varDelta\varPhi\varGamma+\varPhi\nabla\varDelta =$

j) $\alpha\beta+\alpha\beta\chi =$

k) $\varTheta\varSigma\varXi-\varXi\varPi\varSigma+\varTheta\varXi\varPhi =$

l) $2\varOmega\varSigma-4\varSigma\varPi+6\varLambda\varSigma =$

Aufgabe 6: *Klammere so viel wie möglich aus.*

a) $9a + 9b =$

b) $2a + 6 - 8b =$

c) $ab - acd + aa =$

d) $2ab + 4ab + 8ab =$

e) $\frac{5a}{bc} + \frac{25}{bc} =$

f) $abcdefghijkl - bcdefghijk =$

h) $\frac{2a + 13ab}{7} =$

i) $\frac{3cd - 6bd}{a - ba} =$

j) $\frac{\Box\nabla - 3\nabla\Box}{4 - \diamond} =$

k) $\frac{\hbar\mu\sigma - \hbar\lambda\mu}{\theta\rho + \psi\theta} =$

l) $\frac{4\Pi\Sigma\Theta + 8\delta\Lambda\Sigma}{5\Gamma\Delta - \Gamma} =$

m) $\frac{15asdfgh - 5hfsa}{3\tau\zeta\xi\psi - 9\nu\tau\zeta} =$

Aufgabe 7: *Löse die Klammern auf.*

a) $(x-2)(x+4) =$

b) $(x+9)(x+3) =$

c) $(3+x)(x-5)(x-2) =$

d) $(x-4)(x+6)(x-7) =$

e) $(x-12)(x+12)(x-2)(x-2) =$

f) $(x+1)(x+1)(x-2)(x+2) =$

g) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) =$

h) $(x-3)(x+4)(x+7)(x-8) =$

i) $(-x+a)(x+b)(x-c)(x+d) =$

j) $(x-a)(-x+b)(x+a)(x-c)(x-c)(x+2d) =$

Aufgabe 8: *Multipliziere die Klammern aus und vereinfache.*

a) $-a(b-d)(e+p) =$

b) $(5t - 7z)(4x - 9y) =$

c) $-(2a - 3d)(3g - h) + (4d - a)(4h - 6g) =$

d) $-5((5a - r)(2g + 3k)) + (2d - 3a)(-4k - 3g) =$

e) $3((2a - 3b)(cd + 5e)) + ((2e - 3cd)(-4a + 2b)) \cdot (-2) =$

f) $-(2a - 3b)(4c + 5d)(6e - 7f) =$

Aufgabe 9: *Multipliziere die Klammern aus und vereinfache.*

a) $-4a(8c-d)=$

b) $-5b(-2g-4)=$

c) $-3(-5g+8k)=$

d) $2p(-3e-4r)=$

e) $-11v(-11n+12m)=$

f) $-9x(-4y+3z)\cdot(-2k)=$

Aufgabe 10: *Multipliziere die Klammern aus und vereinfache.*

a) $(-a-3b)(-2c-d)=$

b) $(4-3b)(-2c+7)=$

c) $(-t+6z)(5g-8k)=$

d) $(-5h-7l)(-3e+4r)=$

e) $(-4a-2gtb)(ethc-sg)=$

f) $-(5k+4b)(-2a-6ab)=$

Aufgabe 11: *Ergänze die fehlenden Zahlen damit die Gleichung stimmt.*

a) $x^2+4x+\square=(x+2)^2$

b) $x^2-6x+\square=(x-3)^2$

c) $x^2-2x+1=\left(x-\square\right)^2$

d) $x^2+8x+16=\left(x+\square\right)^2$

e) $x^2+10x+\square=\left(x+\square\right)^2$

f) $x^2+6x+\square=\left(x+\square\right)^2$

g) $x^2-5x+\square=\left(x-\square\right)^2$

h) $x^2+3x+\square=\left(x+\square\right)^2$

i) $x^2-\square x+9=(x-3)^2$

j) $x^2-\square x+4=(x-2)^2$

k) $x^2-\square x+\square=(x-1)^2$

l) $x^2+\square x+\square=(x+7)^2$

m) $x^2+\square x+25=\left(x+\square\right)^2$

n) $x^2-\square x+81=\left(x-\square\right)^2$

o) $x^2-\square x+49=\left(x-\square\right)^2$

p) $x^2+\square x+144=\left(x+\square\right)^2$

Aufgabe 12: *Ergänze die fehlenden Zahlen damit die Gleichung stimmt.*

a) $x^2 + 2x + 3 + \boxed{} - \boxed{} = (x+1)^2 + 2$

b) $x^2 - 6x + 7 + \boxed{} - \boxed{} = (x-3)^2 - 2$

c) $x^2 - 4x - 3 + \boxed{} - \boxed{} = (x-2)^2 - \boxed{}$

d) $x^2 + 8x + 12 + \boxed{} - \boxed{} = (x+4)^2 - \boxed{}$

e) $x^2 + 5x + \boxed{} + 6,25 - 6,25 = \left(x + \boxed{}\right)^2 - 4$

f) $x^2 - 2x - \boxed{} + 1 - 1 = \left(x - \boxed{}\right)^2 - 34$

g) $x^2 + x - 2 + \boxed{} - \boxed{} = \left(x + \boxed{}\right)^2 - \boxed{}$

h) $x^2 + 3x + 5 + \boxed{} - \boxed{} = \left(x + \boxed{}\right)^2 + \boxed{}$

i) $x^2 - \boxed{}x + 3 + \boxed{} - \boxed{} = (x-6)^2 - \boxed{}$

j) $x^2 + \boxed{}x - 7 + \boxed{} - \boxed{} = (x+11)^2 - \boxed{}$

k) $x^2 + \boxed{}x - 13 + 25 - 25 = \left(x + \boxed{}\right)^2 - \boxed{}$

l) $x^2 + \boxed{}x + 6 + 16 - 16 = \left(x + \boxed{}\right)^2 - \boxed{}$

m) $x^2 + \boxed{}x + 4 + \boxed{} - \boxed{} = \left(x + \boxed{}\right)^2 - 5$

n) $x^2 - \boxed{}x + 30 + \boxed{} - \boxed{} = \left(x - \boxed{}\right)^2 - 6$

Aufgabe 13: *Ergänze die fehlenden Seite der binomischen Gleichungen und die fehlenden Zahlen.*

a) $x^2 - 2x + 5 + 1 - 1 =$

b) $x^2 + 4x - 2 + 4 - 4 =$

c) $x^2 - 12x - 3 + 36 - 36 =$

d) $x^2 - 8x + 14 + 16 - 16 =$

e) $x^2 - 4x - 7 + \boxed{} - \boxed{} =$

f) $x^2 + 14x + 5 + \boxed{} - \boxed{} =$

g) $x^2 + 3x - 1 + \boxed{} - \boxed{} =$

h) $x^2 - 5x - 8 + \boxed{} - \boxed{} =$

i) $x^2 - x + 4 + \boxed{} - \boxed{} =$

j) $x^2 - 1,5x - 1 + \boxed{} - \boxed{} =$

Aufgabe 14: *Löse die Klammern auf und fasse zusammen.*

a) $(x+4)^2 =$

b) $(x-2)^2 =$

c) $(x+7)(x-7) =$

d) $(x+5)^2 + 4 =$

e) $(x-2)(x+2) - 5 =$

f) $(x-1)^2 - 3 =$

g) $(x+2,5)^2 + 2 =$

h) $(x-6)^2 - 2,75 =$

i) $(x+2)(x-2) + 5,5 =$

j) $(x-1,5)(x+1,5) - 2,1 =$

k) $2(x+3)^2 - 8,3 =$

l) $3(x-0,5)^2 + 5,1 =$

m) $1,25(x-1,5)^2 - 9,75 =$

n) $-0,5(x+3,4)^2 + 11,1 =$

o) $0,3(x-2,25)(x+2,25) + 0,4 =$

p) $-0,15(x+1,7)(x-1,7) - 2,31 =$

Aufgabe 15: *Ergänze so wenig wie möglich Klammern, so dass die Gleichung stimmt.*

a) $3 \cdot 5 + 2 = 21$

b) $4 + 5 \cdot 6 + 3 = 57$

c) $4 + 5 \cdot 6 + 3 = 49$

d) $4 + 5 \cdot 6 + 3 = 81$

e) $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 56$

f) $2 \cdot 4 + 8 \cdot 5 - 7 \cdot 9 = 57$

g) $4 \cdot 3 + 7 + 4 + 9 \cdot 5 = 160$

h) $7 + 3 \cdot 29 + 11 - 3 \cdot 7 = 190$

i) $8 - 7 \cdot 13 - 4 \cdot 3 \cdot 55 - 9 \cdot 6 = 1$

j) $5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 5 = 545$

Aufgabe 16: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $(3+15) \cdot 7 =$

b) $3 \cdot (72-48) =$

c) $5 \cdot (33+56) =$

d) $(68-35) \cdot 15 =$

e) $(24+68) \cdot 658 =$

f) $(11+57-29) \cdot 2706 =$

g) $371 \cdot (859+962) =$

h) $(6385-625-2199) \cdot 3614 =$

Aufgabe 17: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $(31-15):4=$

$b)$ $(81-32):7=$

$c)$ $(37+35):8=$

$d)$ $(83-49+36):10=$

$e)$ $(32119+9587):6=$

$f)$ $(42935-25874):3=$

$g)$ $(5634008+69521+224789):9=$

$h)$ $(1419001-650809):24=$

Aufgabe 18: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $(4+34)\cdot(75-29)=$

$b)$ $(48-33)\cdot(95+47)=$

$c)$ $(99+639):(453-447)=$

$d)$ $(5405-2480)\cdot(1506+487)=$

$e)$ $(148847+32584):(7805-7796)=$

$f)$ $(6741+2842)\cdot(30014-25809)=$

$g)$ $(1318040-987402):(5489-5478)=$

$h)$ $(1553833-325011):(11306-11257)=$

Aufgabe 19: *Zeige die Gleichheit.* (keine Lösung!)

$a)$ $53+86=86+53$

$b)$ $58\cdot 92=92\cdot 58$

$c)$ $345+547+534=547+534+345$

$d)$ $12\cdot 94\cdot 34=34\cdot 94\cdot 12$

$e)$ $34\cdot 57+456=456+57\cdot 34$

$f)$ $85\cdot 53+43\cdot 69+124=69\cdot 43+124+53\cdot 85$

Aufgabe 20: *Zeige die Gleichheit.* (keine Lösung!)

a) $(13+64)+35 = 13+(64+35)$

b) $5 \cdot 7 \cdot 9 = 5 \cdot (7 \cdot 9)$

c) $(435+233)+812 = 233+(812+435)$

d) $(435+739)+(537+628) = 435+(739+537)+628$

e) $(49 \cdot 33 \cdot 75) - (84 \cdot 21) = 49 \cdot 33 \cdot 75 - 84 \cdot 21$

f) $(11 \cdot 25 \cdot 9) : 3 = (25 \cdot 11) \cdot (9 : 3)$

Aufgabe 21: *Zeige die Gleichheit.* (keine Lösung!)

a) $(84-32) \cdot 5 = 84 \cdot 5 - 32 \cdot 5$

b) $55 : 5 + 90 : 5 = (55+90) : 5$

c) $64 : 4 \cdot 8 + 72 : 4 \cdot 8 = (64+72) \cdot (8 : 4)$

d) $(4+5) \cdot (6+7) = 4 \cdot (6+7) + 5 \cdot (6+7)$

e) $4 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 4 \cdot (6+7) + 5 \cdot (6+7)$

f) $(17-8) \cdot (9 \cdot 4) = ((17-8) \cdot 9) \cdot 4 =$

Aufgabe 22: *Klammere so viel wie möglich aus der Summe beziehungsweise Differenz aus. Berechne nicht den Wert des Terms.*

a) $4 \cdot 6 + 4 \cdot 7 =$

b) $7 \cdot 5 - 4 \cdot 7 =$

c) $3 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 5 =$

d) $4 \cdot 12 + 4 \cdot 3 - 9 \cdot 4 =$

e) $3 \cdot 7 \cdot 4 + 5 \cdot 3 \cdot 7 =$

f) $9 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 6 - 6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 8 =$

g) $22 \cdot 7 - 11 \cdot 4 =$

h) $14 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 73 + 73 \cdot 44 \cdot 13 \cdot 9 + 8 \cdot 13 \cdot 45 \cdot 73 =$

Aufgabe 23: *Klammere so viel wie möglich aus der Summe beziehungsweise Differenz aus. Berechne nicht den Wert des Terms.*

$a)$ $24 + 18 =$

$b)$ $81 - 63 =$

$c)$ $144 + 36 + 96 =$

$d)$ $55 - 22 + 77 =$

$e)$ $27 + 39 - 21 =$

$f)$ $11600 - 2300 + 1700 =$

$g)$ $81 - 54 + 108 - 9 =$

$h)$ $90 - 45 + 72 - 36 =$

Aufgabe 24: *Zeige die Gleichheit.* (keine Lösung!)

$a)$ $458 \cdot 92 = 337088 : 8$

$b)$ $10119168 : 4 = 3904 \cdot 648$

$c)$ $2309 - 45 \cdot 39 = 87 \cdot 31 - 2153$

$d)$ $2568 : 3 + 67 = 245 + 309 + 369$

$e)$ $5485 : 5 - 7488 : 9 = 5 \cdot 59 - 30$

$f)$ $4 \cdot (18 + 37) = 22 \cdot 8 + 44$

$g)$ $237 \cdot 8 - 24 \cdot 71 + 553 = 5528 : 8 + 54$

$h)$ $(989 + 887) : 7 = 4 \cdot 83 - 64$

$i)$ $57 \cdot 92 + 54 \cdot (83 \cdot 22) = (54 \cdot 83) \cdot 22 + 92 \cdot 57$

$j)$ $7 \cdot (34 \cdot 5 - 32) = 2 \cdot 161 \cdot 3$

$k)$ $72 \cdot (82 - 35) \cdot 33 = (72 \cdot 33) \cdot 82 - (35 \cdot 72) \cdot 33$

$l)$ $(4 + 5 \cdot (7 + 9)) \cdot 3 = 21 \cdot 12$

Aufgabe 25: *Zeige, ob die Gleichung eine wahre oder falsche Aussage widerspiegelt.*

$a)$ $41 \cdot (832 + 356) = 340963 : 7 - 7$

$b)$ $(1258 - 1229) \cdot (5698 - 5598) = 4 \cdot (258 + 467)$

$c)$ $(16888 - 8093) : 5 = 11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4$

$d)$ $10056 : 4 - 1687 : 7 = 173 + 4 \cdot 525$

$e)$ $9709 - 56 \cdot (1497 - 1339) = (28009 + 26171) : 63$

$f)$ $((2356 - 1082) : 11 + 2576) : 4 = ((113064 : 8) : 7) : 3$

Aufgabe 26: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $11 \cdot (74 + 18 \cdot (3445 - 3399)) =$

b) $9 \cdot ((5847 + 1244) : 7 + 2987) =$

c) $(835 - (394 + 2348) : 6) : 9 =$

d) $5 \cdot (7 \cdot 9 + (4 \cdot 5 - 17)) =$

e) $734 + 14 \cdot (65 - 3 \cdot (259 - 4 \cdot 64)) : 7 =$

f) $2 \cdot (763 + (3456 : 2 - 1239) \cdot (235 + 79 \cdot 5)) - 594078 =$

Aufgabe 27: *Bei einer Verkehrszählung konnte ein Durchschnitt von* 7237 *Autos pro Tag von Montag bis Freitag gemessen werden. Am Wochenende sind* 3269 *Autos im Schnitt weniger gezählt wurden. Berechne die Anzahl der Autos pro Woche.*

Aufgabe 28: *In einer Stadt wohnen* 430523 *Einwohner jeden Monat kommen* 396 *neue Einwohner dazu. Wie viele Einwohner hat die Stadt nach* 4 *Jahren?*

Aufgabe 29: *Auf einem Tagesgeldkonto befinden sich* 340850 €*. Wie viel Geld befindet sich auf dem Konto nach* 174 *Tagen, wenn durchschnittlich* 9 € *hinzu kommen.*

Aufgabe 30: *In einem Schwimmbecken kann insgesamt* 264000 l *fassen. Es befinden sich schon* 24500 l *im Becken. Um das Becken zu befüllen werden Pumpen mit einer Leistung von* 20 l *pro Minute verwendet. Berechne nach wie viel Minuten das Becken voll ist.*

Aufgabe 31: *Ein LKW wiegt rund* 3700 kg *und wird mit Sand beladen. Dabei hat eine Schaufelladung Sand eines kleinen Baggers rund* 50 kg*. Die Zufahrtsstraße ist nur für Fahrzeuge bis zu* 11000 kg *zugelassen. Berechne wie viele Sand maximal auf dem LKW geladen werden dürfen.*

Aufgabe 32: *Zeige die Gleichheit.*

a) $(54745 - 734 \cdot 67) \cdot 38 + 42366 = 323753 - (23 \cdot 347 \cdot 3 + 433 \cdot 53 \cdot 2)$

b) $((3495 + 7693) \cdot (8793 - 7834)) : 7 = 1231 \cdot 443 + 6627 \cdot 149$

c) $(18 \cdot (937 + 69 \cdot (55 - 36))) : 4 = ((((3186540 \cdot 4) : 9) : 7) : 7) : 5$

d) $7859 + 4256 \cdot 708 + 698 \cdot 207 - 1238 \cdot 589 = 3 \cdot (73571 \cdot 13 - 38 \cdot 3797)$

Aufgabe 33: *Berechne den Wert des Terms.* (Lösungen: 527, 14500, 250738, 2322, 3334127, 370440 und 8222369.)

$a)$ $47 \cdot (484616 - 873 \cdot 527) - 902877 =$

$b)$ $(2589 + 255 \cdot 89 - 134 \cdot 67 + 56 \cdot 82) : 9 =$

$c)$ $(8489 \cdot 23466 - 28793) : (780962 - 17749 \cdot 44) =$

$d)$ $(12567 \cdot 6749 - 173 \cdot (43 + 82 \cdot (324 + 102 \cdot 37))) : 8 =$

$e)$ $46 \cdot (786746 - 456 \cdot 123) - 25387899 =$

$f)$ $(15364 + 466 \cdot 78 - 109 \cdot 121 + 79 \cdot 63) : 4 =$

$g)$ $[([(4480842240 : 7) : 4] : 9) : 6] : 8 =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.11) Lösungen zum Distributivgesetz.

3.12 Potenzen

Wie schon zuvor wurden viele Rechenmethoden und neue Eigenschaften eingeführt, um die Übersicht oder Handhabung von rechnerischen Ausdrücken zu vereinfachen. Aus dem selben Grund wird die Potenz eingeführt, welche als verkürzte Schreibweise der wiederholten *Multiplikation* einer Zahl dient.

$$\begin{aligned} a \cdot a &= a^2 \\ a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a &= a^5 \\ 2^6 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Für *Potenzen* gelten Rechenregeln, welche schnell erklärt werden können, wenn der abkürzende Charakter wie in Gleichung (3.83) verinnerlicht wurde. Im Folgenden soll eine Regel gezeigt und dann begründet werden, dass diese gilt (außer die Regel ist intuitiv).

$$\begin{aligned} a^2 \cdot a^3 &= a^{2+3} = a^5 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \\ \Rightarrow a^3 : a^2 &= a^{3-2} = a^1 = a \end{aligned} \tag{3.84}$$

Aus der Bedingung, dass $\frac{a}{a} = 1$ sein muss und mit der Regel aus Gleichung (3.84) ergibt sich daraus, dass $a^1 \cdot \frac{1}{a} = a^0 = 1$ sein muss. Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-1} &= \frac{1}{a} \end{aligned} \tag{3.85}$$

Des Weiteren kann aus Gleichung (3.84) abgleitet werden, dass Rechnungen mit *Potenzen* nicht *assoziativ* sind:

$$\begin{aligned} a^3 \cdot a^3 &= \left(a^3\right)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6 \\ a^{\left(3^2\right)} &= a^{3 \cdot 3} = a^9 \end{aligned} \tag{3.86}$$

Außerdem lässt sich aus Gleichung (3.84) mit Gleichung (3.86) ersehen, dass

$$\begin{aligned} (a^2)^{\frac{1}{2}} &= a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a \\ \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} &:= \sqrt{a} \end{aligned} \tag{3.87}$$

gilt, wobei $\sqrt{a}$ die *Wurzel* von a genannt wird. Die *Wurzel* habt die Potenz ^{2} auf, wie in Gleichung (3.87) zu sehen ist.

Somit gelten zusammengefasst folgende Regeln für die Potenzrechnung:

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\ a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \\ a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\ (a^n)^m &\neq a^{(n^m)} \end{aligned} \tag{3.88}$$

Abschließend ist noch zu erwähnen, dass bei dem Ausdruck a^n es sich bei a um die *Basis* und bei n um den *Exponenten* handelt.

3.12.1 Wurzeln

Wurzeln sind die Umkehroperationen zum *Potenzieren*. Somit steht hinter der sogenannten Quadratwurzel der Zahl z ($\sqrt{z}$) die Frage: „Welche Zahl ergibt mit sich selbst multipliziert die Zahl z?“ Hierzu lohnt es sich einige Zahlen zum Quadrat (zum Beispiel: $8^2 = 64$) zu kennen, um direkt ein Wert einer *Wurzel* zu erkennen. Da es nicht nur die Quadratwurzel der Zahl z ($\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$) gibt, sondern auch noch höhere Werte des *Nenners* im *Exponenten*, lohnt es sich stets die jeweilige Wurzel als *Potenz* zu schreiben.

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= z^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{z} \\ \sqrt[4]{z} &= z^{\frac{1}{4}} \end{aligned} \tag{3.89}$$

Es gibt ein schriftliches Verfahren eine *Wurzel* zu ziehen, allerdings bedarf es einer aufwendigeren Erklärung, welche in einer späteren Version dieses Buches folgen wird, da die Schüler heutzutage oftmals bei der Einführung der *Wurzel* mit dem Taschenrechner arbeiten, wird vorerst das schriftliche Wurzelziehverfahren ausgespart und kann im Anhang unter dem Link (18.6) nachgelesen werden.

Außerdem bleibt anzumerken, dass *Wurzeln* aus negativen Zahlen erst im Kapitel „Komplexe Zahlen“ eingeführt werden. Bis zu diesem Zeitpunkt sind Berechnungen von *Wurzeln* aus negativen Zahlen nicht vorgesehen. Folglich sind Rechnungen in denen *Wurzeln* aus negativen Zahlen vorkommen ein Hinweis darauf, dass Rechenfehler aufgetreten sind.

3.12.2 10er Potenzen

Von allen *Potenzen* haben 2er *Potenzen* 2^n in der Informatik und die 10er *Potenzen* 10^n eine besonders wichtige Funktion inne. Grade in der Physik werden besonders große Größen mit besonders kleinen verrechnet. Die daraus resultierenden Werte sollen dann wieder in einer Größe angegeben werden, die dem Menschen zur Vorstellung genügen. Deswegen werden viele Größen mit Hilfe der 10er *Potenzen* umgerechnet. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 \\ 10^{-3} &= \frac{1}{1000} = 0,001 \end{aligned} \tag{3.90}$$

Jede Einheit ist meistens mit einer sprachlichen Abkürzung verbunden, so steht bei 1cm das „centi" für $\frac{1}{100} = 10^{-2}$. Eine Tabelle mit der Auflistung vieler dieser Abkürzungen und ihre Bedeutung als 10er *Potenz* befinden sich im Anhang (18.4).
Während für alle Einheiten k für Kilo also Tausend steht, steht dies sprachlich bei der Einheit Byte B auch für Tausend. Allerdings versteckt sich hier durch den Fakt, dass Computer nur die 0 (Nein) und die 1 (Ja) kennen, eine andere Zahl:

$$\begin{aligned} 10^3\,\mathrm{m} &= 1\,\mathrm{km} \\ 10^6\,\mathrm{m} &= 1\,\mathrm{Mm} \\ 2^{10}\,\mathrm{B} &= 1\,\mathrm{kB} = 1024\,\mathrm{B} \\ 2^{20}\,\mathrm{B} &= 1\,\mathrm{MB} = 1048576\,\mathrm{B} \end{aligned} \tag{3.91}$$

Bei der Einheitenumrechnung ist das Verständnis von 10er *Potenz* von elementarer Bedeutung, da

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{dm} &= 10\,\mathrm{cm} = 10^1\,\mathrm{cm} \\ 1\,\mathrm{dm}^2 &= 1\,\mathrm{dm}\cdot 1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{cm}\cdot 10\,\mathrm{cm} = 100\,\mathrm{cm}^2 = 10^2\,\mathrm{cm}^2 \\ 1\,\mathrm{dm}^3 &= 1\,\mathrm{dm}\cdot 1\,\mathrm{dm}\cdot 1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{cm}\cdot 10\,\mathrm{cm}\cdot 10\,\mathrm{cm} = 1000\,\mathrm{cm}^3 = 10^3\,\mathrm{cm}^3 := 1\,\mathrm{l} \end{aligned} \tag{3.92}$$

gilt. Dahinter verstecken sich sprachliche Abkürzungen, die mit *potenziert* werden $100\,\mathrm{cm}^2 = 100(\,\mathrm{cm})^2 = 100\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{m}^2 = 10^2\frac{1}{10^2}\,\mathrm{m}^2 = 1\,\mathrm{m}^2$. Die Schreibweise für $1\,\mathrm{cm}^2$ ist wieder nichts weiter als eine Konvention zur Abkürzung für $1(\,\mathrm{cm})^2$. Wie Gleichung (3.92) gibt der *Exponent* der Einheit an, mit welcher Zahl die Anzahl der Null der Standardumrechnung multipliziert wird:

$$
\begin{aligned}
1\,\mathrm{km} &= 1000\,\mathrm{m} = 10^3\,\mathrm{m} \\
1\,\mathrm{km}^2 &= \left(10^3\,\mathrm{m}\right)^2 = \left(10^3\right)^2\ \mathrm{m}^2 = 10^{3\cdot 2}\,\mathrm{m}^2 = 1000000 m^2 = 10^6\,\mathrm{m}^2 \\
1\,\mathrm{km}^3 &= \left(10^3\,\mathrm{m}\right)^3 = \left(10^3\right)^3\ \mathrm{m}^3 = 10^{3\cdot 6}\,\mathrm{m}^3 = 1000000000 m^3 = 10^9\,\mathrm{m}^3
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

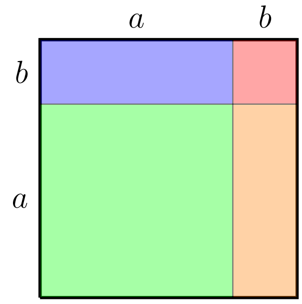
Der Koeffizient einer 10er-Potenz, wie bei $3,24 \cdot 10^5$ wird auch Mantisse genannt.

3.12.3 Binomischer Lehrsatz

Mit Hilfe der *Potenzen* können auch die *Summen potenziert* werden:

$$
\begin{aligned}
(x+d)\cdot(x+d) = (x+d)^2 &= x^2 + x\cdot d + d\cdot x + d^2 = x^2 + 2\cdot d\cdot x + d^2 \\
(x-d)\cdot(x-d) = (x-d)^2 &= x^2 - x\cdot d - d\cdot x + d^2 = x^2 - 2\cdot d\cdot x + d^2 \\
(x+d)\cdot(x-d) &= x^2 + x\cdot d - d\cdot x + d^2 = x^2 - d^2
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

Die beiden Gleichungen aus Gleichung (3.94) werden *Binomische Gleichungen* genannt, welche aus dem *Binomischen Lehrsatz* als spezielle Form kommen, und werden in der Beschreibung der Natur immer wieder vorgefunden und nicht zu Letzt deswegen im Mathematik und naturwissenschaftlichen Unterricht in Klausur- und Übungsaufgaben verwendet. Die *Binomische Gleichungen* können anhand eines Quadrats, welches in vier Flächen unterteilt wurde, visualisieren.



Generell kann man diese *Binomischen Formeln* noch für jede *Potenz* verallgemeinern, dazu dient das sogenannt *Pascal'sche Dreieck*, welches die *Vorfaktoren* wiedergibt.

$(x+d)^0$	1
$(x+d)^1$	$x+d$
$(x+d)^2$	$x^2+2\cdot d\cdot x+d^2$
$(x+d)^3$	$x^3+3\cdot d\cdot x^2+3\cdot d^2\cdot x+d^3$
$(x+d)^4$	$x^4+4\cdot d\cdot x^3+6\cdot d^2\cdot x^2+4\cdot d^3\cdot x+d^4$
$(x+d)^5$	$x^5+5\cdot d\cdot x^4+10\cdot d^2\cdot x^3+10\cdot d^3\cdot x^2+5\cdot d^4\cdot x+d^5$

Dabei pflanzen sich die *Vorfaktoren* (sogenannte *Koeffizienten*) so weiter fort in dem die benachbarten *aufaddiert* werden. Die *Potenzen* des ersten *Parameters* oder *Variable* startet stets mit der höchsten Zahl und nimmt bei jedem weiteren *Summanden* ab, während die *Potenz* des zweiten *Parameters* zunimmt. Die *Vorfaktoren*, welche sich im *Pascal'schen Dreieck* befinden, werden im Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ durch die sogenannten *Binomialkoeffizienten* erneut auftauchen und nochmals erläutert. Weitere Koeffizienten aus dem Pascal'schen Dreieck können im Anhang (18.3) gefunden werden.

3.12.4 Übungsaufgaben zu Potenzen

Aufgabe 1: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $2^3 =$	*b)* $3^4 =$	*c)* $2^6 =$
d) $2^{-1} =$	*e)* $10^3 =$	*f)* $8^3 =$
g) $4^{-3} =$	*h)* $10^{-6} =$	*i)* $\left(\frac{1}{6}\right)^2 =$
j) $\left(5^3\right)^2 =$	*k)* $4^{\left(3^2\right)} =$	*l)* $2^6 \cdot 2^2 =$
m) $\left(2^3 + 2^3\right)^3 =$	*n)* $\left(10^2\right)^{-1} =$	*o)* $\left(\left(2^6\right)^{-1}\right)^{-1} =$
p) $\left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$	*q)* $\left(3,141^{\frac{1}{2,718}}\right)^{2,718} =$	*r)* $\left(\frac{1}{5^{-1}}\right)^3 =$

Aufgabe 2: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$	*b)* $\left(\frac{7}{8}\right)^2 =$	*c)* $\left(\frac{11}{17}\right)^2 =$
d) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$	*e)* $\left(\frac{124}{217}\right)^{-1} =$	*f)* $\left(\frac{9}{7}\right)^{-2} =$
g) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} =$	*h)* $\left(\frac{144}{169}\right)^{\frac{1}{2}} =$	*i)* $\left(\frac{83}{87}\right)^{-1} =$
j) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-2} =$	*k)* $\left(\frac{36}{64}\right)^{\frac{1}{2}} =$	*l)* $\left(\frac{225}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} =$
m) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3} =$	*n)* $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} =$	*o)* $\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} =$

Aufgabe 3: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\sqrt{16} =$	b) $\sqrt{81} =$	c) $\sqrt[3]{8} =$
d) $\sqrt[3]{27} =$	e) $\sqrt{144} =$	f) $\sqrt[5]{100000} =$
g) $\sqrt{289} =$	h) $\sqrt[4]{81} =$	i) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}} =$
j) $\sqrt{a^{8^{\frac{1}{4}}}} =$	k) $\sqrt[10]{1024} =$	l) $\sqrt[7]{\sqrt[4]{\sqrt[9]{\sqrt[13]{\lambda^{33}}}}}^{\,2} =$

Aufgabe 4: *Rechne die Einheiten um.*

a) $3\,\mathrm{dm} = \qquad \mathrm{cm}$	b) $4\,\mathrm{m} = \qquad \mathrm{cm}$
c) $7\,\mathrm{cm} = \qquad \mathrm{mm}$	d) $500\,\mathrm{cm} = \qquad \mathrm{dm}$
e) $25\,\mathrm{km} = \qquad \mathrm{m}$	f) $8000000\,\mathrm{cm} = \qquad \mathrm{km}$
g) $2\,\mathrm{dm}^2 = \qquad \mathrm{cm}^2$	h) $14\,\mathrm{m}^2 = \qquad \mathrm{cm}^2$
i) $9\,\mathrm{cm}^2 = \qquad \mathrm{mm}^2$	j) $2500\,\mathrm{cm}^2 = \qquad \mathrm{dm}^2$
k) $65\,\mathrm{km}^2 = \qquad \mathrm{m}^2$	l) $7500000\,\mathrm{cm}^2 = \qquad \mathrm{m}^2$
m) $6\,\mathrm{dm}^3 = \qquad \mathrm{cm}^3$	n) $7\,\mathrm{m}^3 = \qquad \mathrm{cm}^3$
o) $12\,\mathrm{cm}^3 = \qquad \mathrm{mm}^3$	p) $3000\,\mathrm{cm}^3 = \qquad \mathrm{dm}^3$
q) $253\,\mathrm{km}^3 = \qquad \mathrm{m}^3$	r) $5000000\,\mathrm{cm}^3 = \qquad \mathrm{dm}^3$
s) $46\,\mathrm{dm}^2 = \qquad \mathrm{cm}^2$	t) $75\,\mathrm{m} = \qquad \mathrm{cm}$
u) $34\,\mathrm{cm}^3 = \qquad \mathrm{mm}^3$	v) $8900\,\mathrm{cm} = \qquad \mathrm{dm}$
w) $63\,\mathrm{km}^2 = \qquad \mathrm{m}^2$	x) $74000000\,\mathrm{cm}^3 = \qquad \mathrm{dm}^3$

Aufgabe 5: *Rechne in die angegebene Einheit um.*

a) $1\,\mathrm{m}^2 = \qquad \mathrm{cm}^2$	b) $2,718\,\mathrm{km} = \qquad \mathrm{mm}$	c) $1\,\mathrm{mm}^3 = \qquad \mathrm{dm}^3$
d) $3\,\mathrm{m}^3 = \qquad \mathrm{dm}^3$	e) $0,5\,\mathrm{cm}^2 = \qquad \mathrm{m}^2$	f) $13,3\,\mathrm{cm}^3 = \qquad \mathrm{m}^3$
g) $10^3\,\mathrm{km}^2 = \qquad \mathrm{dm}^2$	h) $1,234\,\mathrm{dm} = \qquad \mathrm{mm}$	i) $\frac{15}{4}\,\mu\mathrm{m}^2 = \qquad \mathrm{mm}^2$
j) $\frac{1}{3}\,\mathrm{Mm}^3 = \qquad \mathrm{km}^3$	k) $0,01\,\mathrm{km}^2 = \qquad \mathrm{cm}^2$	l) $125\,\mathrm{mm}^5 = \qquad \mathrm{cm}^5$
m) $6,\bar{6}\,\mathrm{m}^4 = \qquad \mathrm{cm}^4$	n) $0,025\,\mathrm{km}^7 = \qquad \mathrm{mm}^7$	o) $3,141\,\mathrm{Tm}^2 = \qquad \mathrm{nm}^2$

Aufgabe 6: *Rechne in die Klammer aus.*

a) $(a+4)^2 =$

b) $\left(a-\sqrt{2}\right)^2 =$

c) $\left(\sqrt{2}a+2\right)^4 =$

d) $\left(3a+\frac{2}{3}\right)^3 =$

e) $(a-b)^4 =$

f) $(a+b+c)^2 =$

g) $(a+b+c+d)^2 =$

h) $(a+b+c+d+e)^2 =$

i) $(a+b)^6 =$

j) $(a-c)^8 =$

k) $(\hbar+\ell)^{-3} =$

l) $(\Box-\nabla)^{-5} =$

m) $(ab+cd)^{-3} =$

n) $(\kappa-\gamma+\eta\epsilon)^{-2} =$

Aufgabe 7: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $5^2 =$

b) $-5^2 =$

c) $(-5)^2 =$

d) $6^2 =$

e) $-6^2 =$

f) $(-6)^2 =$

g) $4^3 =$

h) $-4^3 =$

i) $(-4)^3 =$

j) $3^4 =$

k) $-3^4 =$

l) $(-3)^4 =$

m) $2^5 =$

n) $-2^5 =$

o) $(-2)^5 =$

p) $13^0 =$

q) $-17^0 =$

r) $(-11)^0 =$

Aufgabe 8: *Schreibe die Zahlen mit* 10*er-Potenzen auf. Runde dabei auf zwei Nachkommastellen.*

a) $30000 =$

b) $8540000 =$

c) $72672164 =$

d) $47543526 =$

e) $583834622 =$

f) $12467853 =$

g) $0{,}000001 =$

h) $0{,}0000352 =$

i) $0{,}0000000000647 =$

j) $0{,}000956 =$

k) $91245235 =$

l) $0{,}000000007312 =$

m) $0{,}007852 =$

n) $456246235674 =$

o) $91394{,}334 =$

Aufgabe 9: *Berechne die resultierende Zehnerpotenz.*

a) $10^4 \cdot 10^7 =$

b) $\frac{10^5}{10^8} \cdot 10^2 =$

c) $\frac{10^{23} \cdot 10^{55}}{10^{16}} =$

d) $\frac{10^{19} \cdot 10^{-14}}{10^{11}} \cdot 10^4 =$

e) $\frac{10^{17} \cdot 10^{-6}}{10^{11} \cdot 10^{13}} =$

f) $\frac{10^{23} \cdot 10^{-6}}{10^{19} \cdot 10^{-32}} =$

g) $\frac{10^4 \cdot 10^9}{10^{-21} \cdot \frac{10^{-7}}{10^{30}}} =$

h) $\frac{\frac{10^{-2}}{10^4} \cdot 10^9}{10^{19} \cdot \frac{10^{13}}{(10^{-5})^{-3}}} =$

i) $\frac{10^0}{10^{-12} \cdot \frac{10^9}{10^{-4}}} : \frac{10^8}{10^{16}} =$

j) $\frac{\frac{10^7}{10^{-1}} \cdot 10^5}{10^{-7} \cdot \frac{10^{-9}}{10^6}} : \frac{10^{21}}{10^{-13}} =$

k) $\left(\left(\frac{10^{-6} \cdot 10^5}{10^2}\right)^3\right)^{-2} : \frac{10^5}{10^{-16}} =$

l) $\frac{\left(\frac{10^3}{10^6} \cdot 10^{-9}\right)^{-6}}{10^{-12} \cdot \left(\frac{10^4}{10^{-7}}\right)^3} : \left(\frac{10^{41}}{(10^{33})^{-2}}\right)^{-3} =$

Aufgabe 10: *Bestimme die Anzahl der Teiler zum Wert des Terms.*

a) $2^4 =$ *b)* $3^5 =$ *c)* $7^3 =$

c) $2 \cdot 3 =$ *d)* $2^2 \cdot 3^2 =$ *e)* $2^5 \cdot 3^2 =$

f) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 =$ *g)* $2 \cdot 3^4 \cdot 5^4 =$ *h)* $7^7 \cdot 3^6 \cdot 11^8 =$

Aufgabe 11: *Bestimme die kleinste natürliche Zahl, die k Teiler besitzt, wovon n der Teiler Primzahlen sind.*

a) $k = 3 \quad \wedge \quad n = 1$ *b)* $k = 7 \quad \wedge \quad n = 1$ *c)* $k = 6 \quad \wedge \quad n = 2$

d) $k = 8 \quad \wedge \quad n = 3$ *e)* $k = 32 \quad \wedge \quad n = 5$ *f)* $k = 56 \quad \wedge \quad n = 4$

g) $k = 16 \quad \wedge \quad n = 2$ *h)* $k = 96 \quad \wedge \quad n = 6$ *i)* $k = 144 \quad \wedge \quad n = 5$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.12) Lösungen zu Potenzen.

3.13 Logarithmen

Da die *Potenzen* eingeführt wurden, sollte auch eine Rechenvorschrift eingeführt werden um den *Exponenten* zu bestimmen. Diese wird *Logarithmus* genannt, welche folgende Frage in mathematischer Art und Weise stellt: „Die *Basis* und der *Wert* des *Terms* seien bekannt, welchen *Wert* muss der *Exponent* haben?“

$$a^c = b \Leftrightarrow c = \log_a b \tag{3.95}$$

Gelesen wird $\log_a c$ als „der *Logarithmus* von b zur Basis a“. Wie für die *Potenzen* gelten auch für die *Logarithmen* Regeln, welche sich aus den *Potenzgesetzen* ableiten lassen.

$$\begin{aligned} a^{n+m} = a^n \cdot a^m \Leftrightarrow \log_a(n \cdot m) &= \log_a n + \log_a m \\ \Rightarrow \log_a \frac{n}{m} &= \log_a n - \log_a m \\ \log_a n^m &= m \cdot \log_a n \\ a^{\log_a n} &= n \\ \log_a n &= \frac{\log_b a}{\log_b n} \\ \log_a a &= 1 \\ \log_a 1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.96}$$

Dabei werden folgende Abkürzungen für bestimme *Werte* der *Basis* verwendet:

$$\begin{aligned} \log_{10} n &= \lg n \\ \log_2 n &= \mathrm{lb}\ n \\ \log_e n &= \ln n \quad , \end{aligned} \tag{3.97}$$

wobei $e = 2,718281...$ die *Euler'sche Zahl* ist, deren Bedeutung im Kapitel der *Funktionen* im Abschnitt der *Exponentialfunktionen* und bei der *Differentiation* noch gerecht wird.

3.13.1 Übungsaufgaben zu Logarithmen

Aufgabe 1: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $\log_2 16 =$	*b*) $\lg 1000 =$	*c*) $\log_8 64 =$
d) $\text{lb } 512 =$	*e*) $\ln e^9 =$	*f*) $\log_5 125 =$
g) $\log_{25} 125 =$	*h*) $\lg\left(11 \cdot 10^6\right) =$	*i*) $\log_{17} 1 =$
j) $\log_3 81 =$	*k*) $\log_4 64 =$	*l*) $\log_{15} 225 =$

Aufgabe 2: *Wandle den Logarithmus in Logarithmen mit der angegebenen Basis um.*

a) $\log_5 7 =$	mit der Basis: 3	*b*) $\log_8 251 =$	mit der Basis: 10
c) $\log_8 512 =$	mit der Basis: 2	*d*) $\log_3 39 =$	mit der Basis: 5
e) $\lg 24 =$	mit der Basis: 22	*f*) $\lg\left(3 \cdot 10^8\right) =$	mit der Basis: $\frac{1}{2}$
g) $\text{lb}1 =$	mit der Basis: $\frac{5}{7}$	*h*) $\ln \pi =$	mit der Basis: $\sqrt{2}$
i) $\lg 9000 =$	mit der Basis: e	*j*) $\text{lb}64 =$	mit der Basis: e

Aufgabe 3: *Wandle den Logarithmus so um, dass* $\ln x$ *isoliert steht.*
(Beispiel: $\ln \frac{x^2}{a} = 2\ln x - \ln a$*.)*

a) $\ln x^3 =$	*b*) $\ln 7x =$
c) $\ln \dfrac{4x}{5} =$	*d*) $\ln \dfrac{2}{x} =$
e) $\ln 4x^4 =$	*f*) $\ln \dfrac{2x^{-1}}{3} =$
g) $\lg ax =$	*h*) $\log_3 5x^4 =$
i) $\log_5 \dfrac{4x^6}{5} =$	*j*) $\log_a \dfrac{bx^c}{d} =$
k) $\log_7 \left(\dfrac{5}{3x}\right)^3 =$	*l*) $\log_a \left(\dfrac{b}{dx^c}\right)^r =$

Aufgabe 4: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $7^{\log_7(7)} =$	$b)$ $4^{\log_4\left(\frac{1}{4}\right)} =$	$c)$ $8^{\log_8 \sqrt[5]{8}} =$
$d)$ $5^{\log_5\left(2^7\right)} =$	$e)$ $6^{\log_6(289)} =$	$f)$ $3^{\log_3 \sqrt[6]{7}} =$
$g)$ $11^{\log_1 1\left(\frac{1}{11^4}\right)} =$	$h)$ $\pi^{\log_\pi e} =$	$i)$ $a^{\log_a c}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.13) Lösungen zu Logarithmen.

3.14 Äquivalenzumformung

Die *Äquivalenzumformung* stellt die Basis für den Erkenntniserwerb und steht als selbstverständliches Vorwissen aller Schüler im Zentrum des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Letztendlich versteckt sich hinter diesem Wort nur die Bedingung, dass auf beiden Seiten des *Äquivalenzzeichens* „=“ immer die gleichen *Operationen* durchgeführt werden müssen. Dabei wird hinter dem *Kommandostrich* „|“ hinter der umzuformenden Gleichung die nachfolgende *Operation* angegeben.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \qquad |+2 \\ \Rightarrow 2 &= 2 \end{aligned} \tag{3.98}$$

Die Gleichung (3.98) zeigt, wie auf beiden Seiten des *Äquivalenzzeichen* die Zwei *addiert* wurde. Dabei steht der Pfeil $\Rightarrow$ für „daraus folgt“, und ist nicht zwingend erforderlich bei einer *Äquivalenzumformung*.

$$\begin{aligned} 8 &= 8 \qquad |-2 \\ 6 &= 6 \qquad |\cdot 3 \\ 18 &= 18 \qquad |: 2 \\ 9 &= 9 \end{aligned} \tag{3.99}$$

Die Gleichung (3.99) zeigt, wie im ersten Schritt auf beiden Seiten des *Äquivalenzzeichen* die Zwei *subtrahiert* wurde. Im zweiten Schritt werden beide Seiten mit drei *multipliziert* und im dritten Schritt durch zwei *dividiert*. In diesen beiden Beispielen sind die vier Grundrechenarten gezeigt, was nicht bedeutet, dass andere Rechenoperationen ausgeschlossen sind.

Äquivalenzumformungen dienen dazu um Gleichung umzustellen und so unbekannte *Parameter* zu bestimmen. *Parameter* sind Platzhalter für *Zahlen* und werden in der Regel mit Buchstaben am Anfang des Alphabets beschrieben. Wenn keine genaue Beschreibung für die *Parameter* angegeben sind, gilt $a, b, ... \in \mathbb{R}$. Im folgenden Beispiel soll nach x aufgelöst werden.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{a}{d} \cdot x + b - c \qquad |+c \\ c &= \frac{a}{d} \cdot x \qquad |-b \\ c - b &= \frac{a}{d} \cdot x \qquad |\cdot d \\ d \cdot (c-b) &= a \cdot x \qquad |: a \\ \frac{d \cdot (c-b)}{a} &= x \end{aligned} \tag{3.100}$$

Jede *Rechenoperation*, die die Richtigkeit der Gleichung nicht verändert ist zulässig! Die *Addition* der 0 und die *Multiplikation* der 1 sind solche *Operationen*. Dabei ist 0 das so genannte *neutrale Element* der *Addition* und 1 das *neutrale Element* der *Multiplikation*.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4} = \frac{4}{8} \qquad & \text{Multiplikation der 1} \\ 4 = 4 + 0 = 4 + 6 - 6 = 10 - 6 \qquad & \text{Addition der 0} \end{aligned} \tag{3.101}$$

Die Beispiele aus Gleichung (3.101) zeigen, dass die *Multiplikation* des *neutralen Elements* mit dem *Erweitern* von *Brüchen* unmittelbar in Verbindung steht.
Um Ergebnisse der *Äquivalenzumformung* zu überprüfen, kann bei der Probe das berechnete Ergebnis in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden. Wenn die Gleichung rechnerisch gezeigt werden kann, ist der ermittelte *Variablenwert* ein richtiges Ergebnis.
Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x - 2 &= 5x + 4 \quad |+2 \\ 3x &= 5x + 6 \quad |-5x \\ -2x &= 6 \quad |: (-2) \\ x &= -3 \\ \Rightarrow\ 3 \cdot (-3) - 2 &= 5 \cdot (-3) + 4 \\ -9 - 2 &= -15 + 4 \\ -11 &= -11 \end{aligned} \tag{3.102}$$

3.14.1 Übungsaufgaben zur Äquivalenzumformung

Aufgabe 1: *Löse alle nach x auf.*

$a)\ 2x = 4$	$b)\ 5x = 5$	$c)\ 3x = -9$
$d)\ 2x = 1$	$e)\ 6x = -3$	$f)\ 10x = 2$
$g)\ 14 = 7x$	$h)\ -5 = 25x$	$i)\ 16x = -4$
$j)\ -2x = -4$	$k)\ -6x = 48$	$l)\ -9x = 3$
$m)\ \frac{x}{2} = 3$	$n)\ \frac{x}{7} = 2$	$o)\ \frac{x}{9} = -2$
$p)\ \frac{1}{5}x = -4$	$q)\ \frac{x}{6} = \frac{1}{2}$	$r)\ -\frac{1}{7}x = -\frac{1}{5}$
$s)\ 2x = 4,2$	$t)\ -6x = 7,2$	$u)\ -5x = -8,5$
$v)\ \frac{1}{2}x = 4,3$	$w)\ -\frac{1}{3}x = 7,4$	$x)\ 6,9 = \frac{x}{6}$

Aufgabe 2: *Löse alle nach x auf.*

$a)\ \frac{3x}{2} = 1$	$b)\ \frac{4}{3}x = 7$	$c)\ \frac{7x}{9} = -6$
$d)\ -\frac{7x}{6} = 5$	$e)\ -\frac{9}{2}x = -4$	$f)\ -\frac{2x}{11} = 8$
$g)\ \frac{6x}{13} = \frac{1}{5}$	$h)\ -\frac{7}{8}x = \frac{1}{20}$	$i)\ \frac{15x}{4} = -\frac{8}{9}$
$j)\ 1,6 = \frac{2}{3}x$	$k)\ -\frac{7}{5}x = -0,04$	$l)\ -17,41 = x\frac{5}{6}$
$m)\ \frac{2x}{7} = -\frac{3}{4}$	$n)\ \frac{5}{6}x = \frac{7}{8}$	$o)\ \frac{9x}{2} = -\frac{8}{7}$
$p)\ -\frac{6x}{5} = \frac{1}{2}$	$q)\ -\frac{3}{8}x = -\frac{12}{7}$	$r)\ -\frac{8x}{5} = \frac{4}{9}$
$s)\ \frac{3x}{11} = \frac{5}{4}$	$t)\ -\frac{8}{3}x = \frac{1}{10}$	$u)\ \frac{3x}{4} = -\frac{6}{7}$
$v)\ 0,05 = \frac{7}{2}x$	$w)\ -\frac{8}{3}x = -1,12$	$x)\ 5,6 = x\frac{3}{7}$

Aufgabe 3: *Löse alle nach x auf.*

$a)$ $x-2=0$ $b)$ $x-9=0$ $c)$ $x+4=5$

$d)$ $x+1=3$ $e)$ $x-15=7$ $f)$ $x+8=17$

$g)$ $x-7=-3$ $h)$ $x-2=-6$ $i)$ $x+8=3$

$j)$ $x+11=-4$ $k)$ $x+7=0$ $l)$ $x+13=-29$

$m)$ $x-\frac{2}{3}=0$ $n)$ $x-\frac{3}{4}=0$ $o)$ $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$p)$ $x+\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$ $q)$ $x-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$ $r)$ $x+\frac{5}{4}=\frac{17}{8}$

$s)$ $x-2,6=1,2$ $t)$ $x+1,4=-0,3$ $u)$ $x+5,7=-0,03$

$v)$ $x+9,2=\frac{4}{5}$ $w)$ $x-\frac{5}{2}=1,78$ $x)$ $x+3,41=-2,718$

Aufgabe 4: *Löse alle nach x auf.*

$a)$ $2x-4=0$ $b)$ $2x-4=6$ $c)$ $3x+9=27$

$d)$ $-4x+4=-24$ $e)$ $8x-72=16$ $f)$ $-4x-12=16$

$g)$ $9x-27=-18$ $h)$ $14x-42=28$ $i)$ $5x+35=175$

$j)$ $-11x+131=55$ $k)$ $-6x+36=-120$ $l)$ $7x+77=-777$

Aufgabe 5: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

$a)\ 3 \cdot x + 4 = 0$	$b)\ 2 \cdot x - 9 = 0$
$c)\ 9 \cdot x + 55 = 0$	$d)\ 5 \cdot x - 25 = 0$
$e)\ 3 \cdot x + 9 = 6$	$f)\ x - 66 = 9$
$g)\ 4 \cdot x + 4 = 11$	$h)\ 9 \cdot x - 5 = 4$
$i)\ 32 \cdot x + 3 = 5$	$j)\ 1 \cdot x + 91 = 44 + x \cdot 23$
$k)\ 7 \cdot x + 14 = -3 \cdot x$	$l)\ 98 \cdot x + 15 = 8 \cdot x + 10$
$m)\ \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} = -\frac{3}{5} \cdot x$	$n)\ \frac{7}{3} \cdot x + \frac{11}{6} = -3 \cdot x + \frac{1}{4}$
$o)\ \frac{8}{9} \cdot x - \sqrt{2} = \sqrt{3} \cdot x$	$p)\ e \cdot x + \pi = -\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{e}$

Aufgabe 6: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

$a)\ 3x + 4x - 4 + 9 = 5x$

$b)\ 6x - 11x + 7 = 34 + 22 - 15x + 4 + 8x$

$c)\ 4x + 9a - 3x + 11 = 14 - 8a + 7x$

$d)\ 3(x + 4x - 3) = -\frac{1}{4}(4x + 2 + 12x - 44)$

$e)\ 18x - 2(4x - 6) + 5x(5 + 11) = -14 + 5x - 8x$

$f)\ 4(3x - 5a + 8) = 32 - 16a + 8x$

$g)\ (x + 3)(a - 5) = 4a + 9x - 7 + 3x$

$h)\ (2x - 1)(5a + 1) - (3 - x)(2 - 4a) = 34 + 22 - 15x + 4 + 8x - 8a + 7x$

$i)\ (x + 3)(a - 5) - (4x + 2 + 12x - 44) = 4x + 9a - 3x + 11 + 14 - 8a + 7x$

$j)\ (3 - x)(2 - 4a)(-4 + b) = 13$

$k)\ 2x + 7x - 4 + 9 - 34 + 22 - 15x + 4 + 8x - 8a + 7x = 5x - (4x + 2 + 12x - 44) + 4x + 9a$

$l)\ 6x + 4x - 4(x + 3)(a - 5) + 9 = 8x - \frac{1}{4}(4x + 12 + 24x - 88)$

Aufgabe 7: *Löse folgende Gleichungen nach x auf.*

a) $-16x^2 + 64 = 0$

b) $\sqrt{2x-6} - 144 = 0$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 17 = 0$

d) $\ln 5x = 2$

e) $\ln \dfrac{13}{x} = \sqrt{2}$

f) $\dfrac{16}{81}x^4 - \sqrt{25} = \log_9 1$

g) $\left(x^4 x^5 x^{\frac{1}{9}}\right)^2 = 49$

h) $e^{2x-6} = 2$

Aufgabe 8: *Vereinfache maximal.*

a) $x^2 + 4x + 4 - 3x^2 + 5x =$

b) $24 - 3x^2 + 13 + 10x + 9x^2 =$

c) $x^2 + 10x + 25 - 2x^2 + 4x + 2 =$

d) $x^2 - x + 4 + 6x^2 - 36x + 54 - x^2 + 4x =$

e) $-4 + x^2 + 6x - 5 - 3x^2 + 9x - 24 - 36x + 54 - x^2 =$

f) $-\dfrac{1}{2}x^2 - 3x - \dfrac{9}{2} - x^2 - 7x - 12 + 5x^2 - 25x - \dfrac{1}{4} =$

g) $(x+2)(x-3) + x^2 - 4x =$

h) $(2x+3)(7x-3) - (4x+5)(1-x) =$

i) $(4x+7)(5x-1) + (2x-7)(6-2x) - 3x(4x+6) =$

j) $0,5x^2 + \dfrac{9}{5}x + 16,5 - 2,25x^2 + \dfrac{5}{4}x - 14 =$

k) $\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{4}x\right)x - \dfrac{1}{6}x^2 + \dfrac{13}{4}x =$

l) $\left(\dfrac{5}{4} - \dfrac{2}{5}x\right)\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{7}{8}\right) - x^2 + 3x + 17 =$

Aufgabe 9: *Löse nach x auf.*

a) $4x^2 = 16$ *b)* $3x^2 - 5 = 7$

c) $\sqrt{3x-2} = 2$ *d)* $5x^4 - 5 = 120$

e) $\sqrt[3]{4x-6} = \frac{3}{2}$ *f)* $\sqrt{x^5-2} - 3,5 = -\frac{1}{2}$

g) $x^{\frac{4}{5}} - 5 = -3$ *h)* $\frac{x^{\frac{2}{3}}}{5} - 6 = 2$

Aufgabe 10: *Löse nach x auf.*

a) $e^x - 4 = 0$ *b)* $e^{2x+3} = 9$

c) $5e^x - 8 = 0$ *d)* $2e^{-x+1} = 3$

e) $5^x = 6$ *f)* $4^{2x} = 3$

g) $2^{3x-6} = 5$ *h)* $10^{-x+4} = 25$

i) $33^{0,5x-2} = 10$ *j)* $1,1^{1,1x+1,1} = 11$

k) $4e^{3x} - 4 = 2e^{3x} + 10$ *l)* $-3e^{-x+1} - 8 = 12e^{-x+1} - 33$

m) $0,5e^{0,2x-5} + 18 = 1,2e^{0,2x-5} + 5$ *n)* $-2 \cdot 2^{-x+1} + 4 = 3 \cdot 2^{-x+1} - 22$

o) $2e^{x-2} = 2^{x-2}$ *p)* $5^{-0,4x+1,7} = 7^{-0,4x+1,7}$

q) $9^{1,45x} = 7^{1,45x}$ *r)* $\pi^{\sqrt{2}x+\ln 2} = 2^{\sqrt{2}x+\ln 2}$

Aufgabe 11: *Löse nach x auf.*

a) $\ln(x) + 3 = 0$ *b)* $\ln(x+1) = 4$

c) $\ln(2x) - 7 = 0$ *d)* $\ln(0,5x) - 1 = 4$

e) $\log_3(x+5) = \frac{1}{2}$ *f)* $\log_5\left(\frac{3}{4}x + 2\right) - 5 = 2$

g) $3\ln(1,5x - 0,1) = -\frac{4}{5}$ *h)* $4\lg(2x) = -2$

i) $0,2\log_2(x+3) = 3,2$ *j)* $3\log_7(4,5x) = 11,1$

k) $\ln\left(x^2\right) - 2 = 1,75$ *l)* $3\ln\left(2x^2\right) = -0,05$

m) $3\log_4\left(x^5\right) + \frac{4}{5} = \frac{3}{2}$ *n)* $-2,3\log_{13}\left(0,03x^4\right) - 5 = 3,7$

o) $\ln(x+3) = \ln(2x+6,2)$ *p)* $5 + \ln(1,25x+1) = \ln(2,2x+0,4)$

Aufgabe 12: *Löse nach x auf.*

a) $e^{2x} - 4 = 0$

b) $54 = 87 \cdot e^{-3x}$

c) $2\ln(5x) - 5 = 0$

d) $2^{0,5x+3} = 9$

e) $7\log_5(1,2x+3) - 2 = 0$

f) $(10^x + 10^x)^9 = 25$

g) $3e^{-7x+2} = 0,3e^{2x-6}$

h) $8\left(8^{2x} + 8^{2x}\right) = \ln(5)$

Aufgabe 13: *Fasse die Terme zusammen und löse anschließend nach x auf.*

a) $2x - 3 = 8$

b) $4x + 5 + x = 6$

c) $0 = 3 - x + 13 - 8x - 4x$

d) $3x + 4 = x + 8$

e) $-4x - 7 = -7x$

f) $3x - 4 + 2x = x - 2$

g) $-x + 1 + 3x = 9 + x$

h) $6x - 2 = -3x + 6$

i) $2x - 6 + 2x = 11$

j) $4x + 7 = 3x - 1$

k) $4x + 9 = 2x - 4$

l) $6 - 8x = -4x + 2$

m) $23x - 3 = 91 - 41x$

n) $55x - 23 = 34 + 32x$

o) $7x - 34x + 4 = 42 - 3x$

p) $13 - 4x + 1 = 3x + 14x$

q) $76x - 22 = 32 + 11x$

r) $82 - 23x = x + x25 - 4$

s) $58 - 40x = x + 65 - 34x$

t) $85x - 14x = 25x - 66$

u) $15 - 34x = 235x + 45 - 436x$

v) $255 - 672x + 45 = 25 - 345x$

w) $59x - 37 + 26x = 266$

x) $x346 = x626 - 263 - x1455$

y) $2345x - 3227 = x826 - 326 + 662x$

z) $2562x + x955 = x325 + 256$

Aufgabe 14: *Fasse die Terme zusammen und löse anschließend nach x auf.*

a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}-2=6$

b) $\frac{3x}{4}-3=\frac{x}{8}+4$

c) $\frac{x}{3}+\frac{2}{3}=\frac{x}{6}-\frac{1}{9}$

d) $\frac{x}{5}-\frac{4}{5}=\frac{3}{4}+\frac{x}{4}$

e) $\frac{2x}{5}+\frac{3}{2}=\frac{1}{4}+\frac{x}{10}$

f) $\frac{1}{2}x+\frac{6}{5}=-\frac{7}{4}x-\frac{9}{2}$

g) $\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}x$

h) $\frac{3}{8}x-\frac{7}{8}=\frac{5}{4}x+\frac{3}{16}-\frac{1}{4}$

i) $\frac{5}{4}x-7-\frac{1}{8}x=\frac{5}{6}+\frac{3x}{8}$

j) $\frac{7}{5}-\frac{3x}{10}=\frac{2}{5}x+\frac{x}{20}-\frac{7}{10}$

k) $\frac{2}{3}-\frac{5}{9}=\frac{5x}{6}+\frac{1}{3}x+\frac{5}{12}x$

l) $\frac{5}{7}x+\frac{3}{13}=\frac{x}{5}-\frac{9}{11}$

m) $\frac{7}{4}x+\frac{4}{3}=\frac{5}{6}x+\frac{1}{8}$

n) $\frac{8}{9}x-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}x=-\frac{1}{3}x+\frac{3}{2}$

o) $\frac{3}{2}x-\frac{13}{4}x=\frac{4}{5}-\frac{7x}{2}-\frac{8}{3}$

p) $\frac{9}{4}-\frac{18}{3}x=\frac{15}{6}x+\frac{1}{2}+\frac{11}{8}$

q) $\frac{11}{9}-\frac{x}{7}=\frac{3}{10}x-\frac{5}{3}+\frac{1}{70}x$

r) $\frac{4}{5}x-\frac{7}{2}+\frac{7x}{6}-\frac{9}{5}=0$

s) $\frac{4}{3}+\frac{7x}{5}-\frac{13}{4}x+\frac{7}{8}=\frac{5}{6}$

t) $\frac{1}{10}=\frac{x}{20}+\frac{3}{5}-\frac{4x}{10}+\frac{3}{15}$

Aufgabe 15: *Löse nach x auf.*

a) $2(x-2)=4$

b) $3(x+5)=27$

c) $-(x+4)=-5$

d) $5(2x-3)=15$

e) $-134{,}275(5x-13)=0$

f) $7(3-5x)=\frac{2}{7}$

g) $\frac{x-3}{5}=2$

h) $\frac{9-2x}{2}=2{,}25$

i) $0=\frac{3(4-2x)}{8{,}322}$

j) $5\frac{x-1}{2}-7=0$

k) $4\frac{5-3x}{8}=12$

l) $\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{4}\right)x=10$

m) $\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\left(5-\frac{x}{2}\right)$

n) $\left(2+\frac{4}{5}\right)(2-x)=0$

Aufgabe 16: *Berechne die fehlende Größe.*

a) $F = ma$	mit: $a = 2$ und $F = 30$
b) $T = mgh$	mit: $m = 8$; $g = 10$ und $T = 480$
c) $U - T = \frac{1}{2}v$	mit: $v = 5$ und $U = 7$
d) $G\frac{Mm}{r} = F$	mit: $F = 50$; $r = 8$; $m = 2$ und $G = 0,1$
e) $r = 2x + 2y + z$	mit: $r = 12$; $x = 0,4$ und $z = 1,5$
f) $\frac{V}{A} - a = a + V$	mit: $V = 36$ und $A = 7$
g) $pV = \frac{3}{2}kNT$	mit: $N = 100$; $k = 5$; $p = 30$ und $V = 20$ mit:
h) $0 = \frac{1}{2}dr - dsa$	mit: $d = 3$; $s = 5$ und $a = 2$
i) $8ab - c = cb + b$	mit: $b = 3$ und $c = 0,75$
j) $G\frac{Mm}{r} = F$	mit: $F = 120$; $M = 4,5$; $m = 9,5$ und $G = 1,2$
k) $mn + po = mz$	mit: $m = 2$; $p = 1,5$ $z = 3$ und $n = \frac{5}{4}$
l) $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$	mit: $A = 0,2$; $B = 0,5$ und $C = 6$
m) $mn + po = mz - pq$	mit: $m = 0,01$; $p = 8$ $z = 4,2$; $n = 12$ und $q = \frac{3}{8}$
n) $1 = \frac{1}{2}dr - dsa$	mit: $r = 2,5$; $s = \frac{1}{4}$ und $a = \frac{7}{8}$
o) $0 = \frac{1}{2}dr - dsa$	mit: $r = 2,5$; $s = \frac{1}{4}$ und $a = \frac{7}{8}$

Aufgabe 17: *Löse nach x auf.*

a) $a + b + x = c$	*b)* $ax - c = d$
c) $gtx - hf = zt$	*d)* $a(x - b) = d$
e) $\frac{a}{b} = \frac{x}{d}$	*f)* $\frac{a}{x} = \frac{d}{k}$
g) $\frac{b-d}{p-q}x = 1$	*h)* $\frac{a+d-x}{t} = z + s$
i) $\frac{ax-d}{f+u} = \frac{2}{r}$	*j)* $\frac{r-tx}{a+d} = g$
k) $-a\frac{d-x}{t} + d = e$	*l)* $w(p - sx) = t + q$

Aufgabe 18: *Stelle die Gleichungen nach jedem Parameter um und notiere die resultierende Gleichung.*

a) $ad = bc$

b) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

c) $a + d = b + c$

d) $\frac{a}{b} = d - c$

e) $ab + c = \frac{d}{e}$

f) $\frac{a+b}{c} = d - e$

g) $a(b - c) = \frac{d}{e}$

h) $\frac{a}{b-d} + c = e - gh$

i) $ab + ac = \frac{d-e}{f}$

j) $ab - \frac{c}{d} = ae + \frac{ce}{d}$

Aufgabe 19: *Für vier Personen werden bei einem Mittagessen* $250g$ *Mehl benötigt, wie viele Personen könnten bei diesem Essen bedient werden, wenn* $4,2kg$ *Mehl verwendet werden? Stelle zunächst die Verhältnisgleichung auf.*

Aufgabe 20: *Löse alle nach* x *auf.*

a) $-x = 4$

b) $-x = 8$

c) $-x = -5$

d) $-2x = 32$

e) $-6x = -48$

f) $4x = -8$

g) $-33 = -3x$

h) $-1 = 13x$

i) $-18x = -9$

j) $-5x = 7$

k) $7x = -33$

l) $-21x = 7$

m) $\frac{x}{4} = -3$

n) $\frac{x}{9} = -2$

o) $-\frac{x}{3} = -4$

p) $\frac{1}{5}x = -6$

q) $-\frac{x}{2} = \frac{4}{5}$

r) $\frac{1}{4}x = -\frac{12}{5}$

s) $-2x = 6,4$

t) $-3x = -4,5$

u) $-0,5x = 1,5$

v) $\frac{1}{-2}x = 3,7$

w) $\frac{-1}{2}x = 17,4$

x) $-1,7 = \frac{x}{10}$

Aufgabe 21: *Löse nach x auf.*

a) $\frac{4}{x} = \frac{7}{8}$ b) $\frac{3}{x} = \frac{6}{5}$ c) $\frac{11}{x} = \frac{9}{7}$

d) $\frac{5}{2x} = \frac{1}{6}$ e) $\frac{8}{3x} = \frac{4}{9}$ f) $\frac{9}{8x} = \frac{3}{10}$

g) $\frac{4}{x+2} = \frac{9}{10}$ h) $\frac{2}{x-5} = \frac{3}{7}$ i) $\frac{5}{x-9} = \frac{5}{6}$

j) $\frac{10}{2x-5} = \frac{7}{3}$ k) $\frac{5}{3x-2} = \frac{7}{4}$ l) $\frac{7}{8x+6} = \frac{5}{3}$

m) $\frac{5}{2x+6} = 8$ n) $\frac{9}{4x+2} = 11$ o) $\frac{1}{6x-1} = 5$

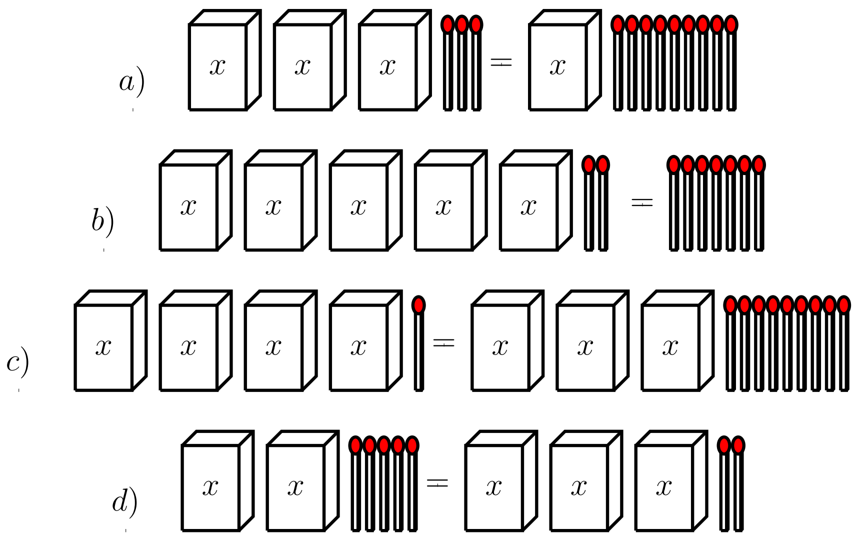
p) $\frac{6}{3-4x} = \frac{8}{3}$ q) $-\frac{3}{2+7x} = \frac{7}{2}$ r) $\frac{10}{12-x} = \frac{4}{7}$

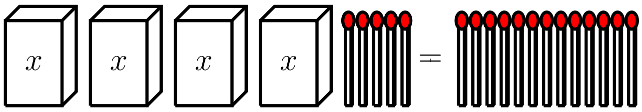
s) $\frac{7}{1-2x} = \frac{3}{3x+7}$ t) $\frac{2}{9+4x} = \frac{8}{1-9x}$ u) $\frac{3}{5-3x} = \frac{7}{7x-11}$

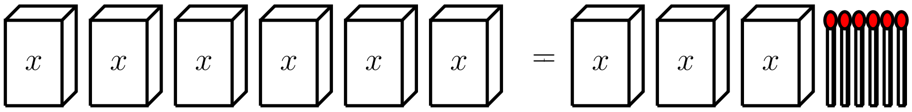
Aufgabe 22: *Finde durch Äquivalenzumformung die geheime Botschaft.*

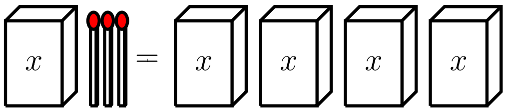
a) $y = \frac{1}{r^2} \ln\left(\frac{x}{m} - as\right)$

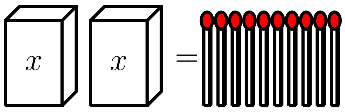
Aufgabe 23: *In jeder Schachtel mit der Aufschrift x befinden sich gleich viele Streichhölzer. Auf jeder Seite des Gleichheitszeichen befindet sich die selbe Anzahl an Streichhölzern. Bestimme bei allen drei Streichholzschachtelgleichungen wie viele Streichhölzer sich in einer Schachtel befinden.*

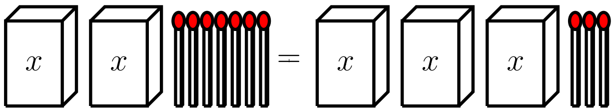


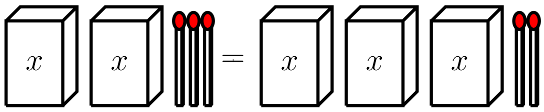
e) 

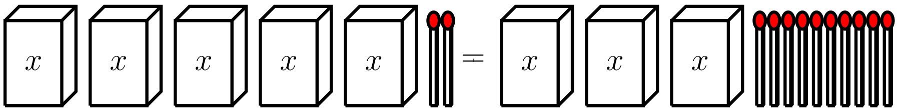
f) 

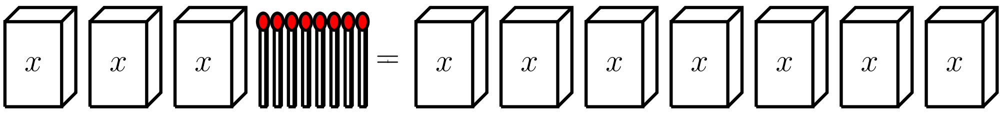
g) 

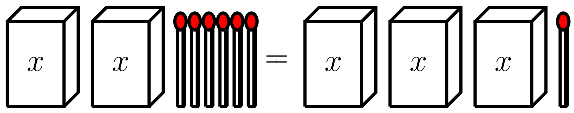
h) 

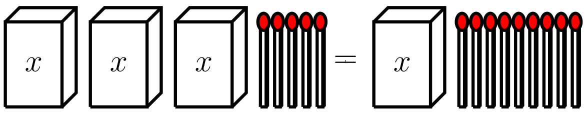
i) 

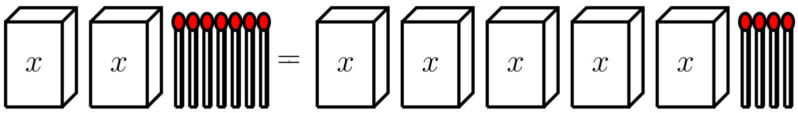
j) 

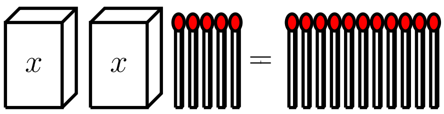
k) 

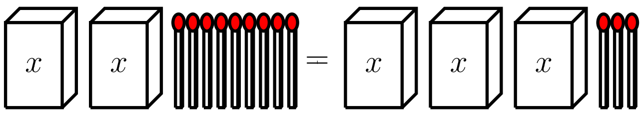
l) 

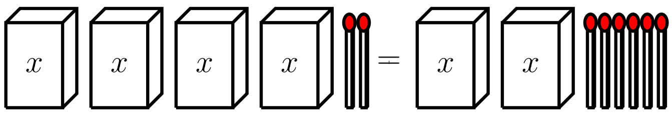
m) 

n) 

o) 

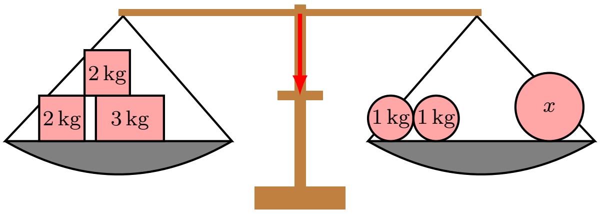
p) 

q) 

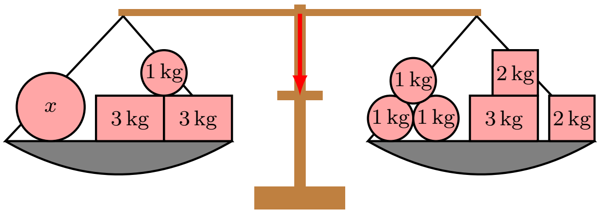
r) 

Aufgabe 24: *Schreibe die, durch die Balkenwaagen dargestellten, Gleichungen auf und bestimme den Wert der unbekannten Masse x durch Äquivalenzumformungen Schritt für Schritt.*

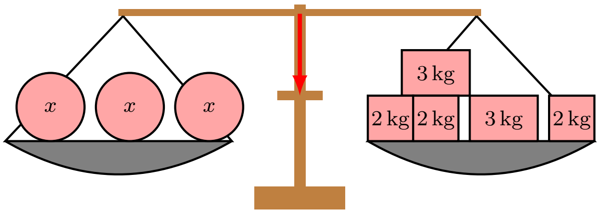
a)



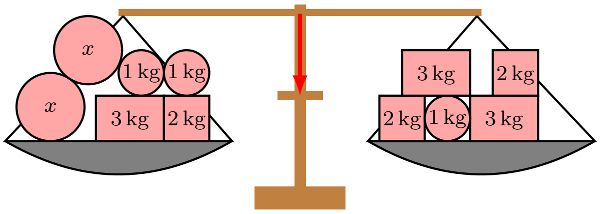
b)



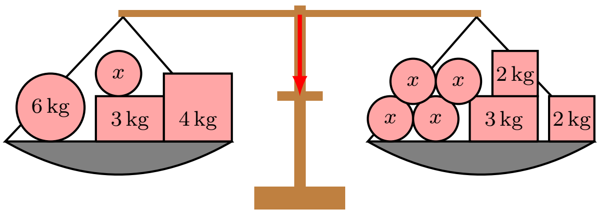
c)



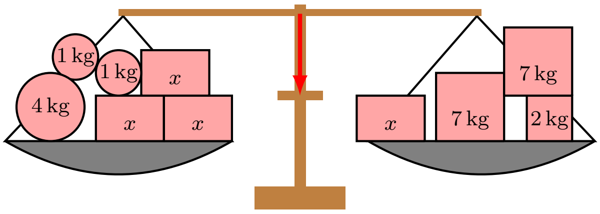
d)



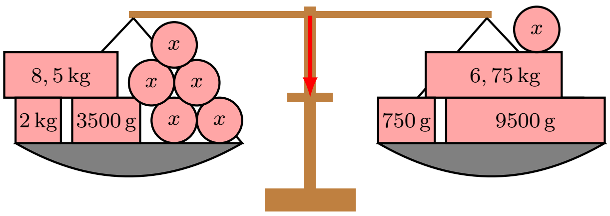
e)



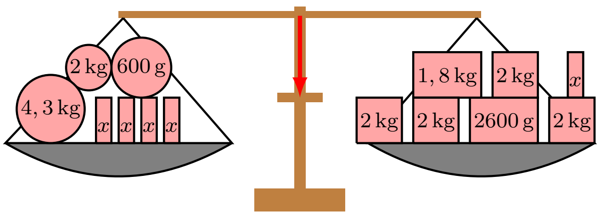
f)



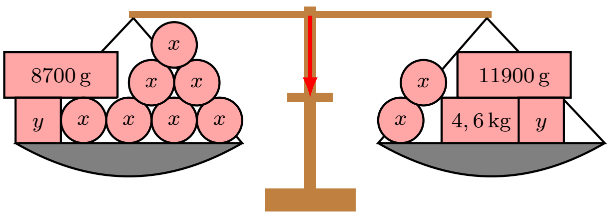
g)



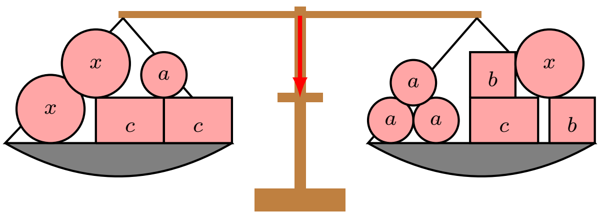
h)



i)



j)



Aufgabe 25: *Vervollständige die Tabelle.*

a	b	c	$a+2\cdot b$	$a\cdot b\cdot c$	$a+b\cdot\square$	$\left(3\cdot\square-b\right)\cdot 2$	$2\cdot c\square 5\cdot b\square 3\cdot a$
2	6	3					33
3	4				27		
7		5	13				9
	8	11		440		50	58
9	2	13					
12			24		60		
			39	2002	193	50	76

Aufgabe 26: *Vervollständige die Tabelle.*

a	b	c	$\frac{a}{b}+\frac{2}{3}$	$a:\frac{b}{c}$	$\frac{c}{a}-\frac{\square}{9}$	$\frac{a}{c}\square\frac{c}{b}$	$\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$
4	6	3			$\frac{19}{36}$	$\frac{11}{6}$	
	4	8	$\frac{7}{6}$			$\frac{9}{4}$	
6	3			10	$\frac{11}{18}$		
10		9			$\frac{61}{90}$	$\frac{161}{72}$	$\frac{1043}{270}$
		11	$\frac{31}{6}$	$\frac{99}{2}$	1		
	6		2	$\frac{16}{3}$			
			$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{67}{63}$	$\frac{179}{126}$	$\frac{929}{189}$

Aufgabe 27: *Vervollständige die Tabelle.*

a	b	c	$a-2\cdot b$	$b^3-c\cdot a$	$a\cdot b \,\square\, c$	$\dfrac{\left(\square\cdot c+2\cdot b\right)}{4}$	$a\cdot\square-c\cdot\frac{5}{4}$
4	9	3			12		
2		8	-6		1	18	-2
	3	5	0	-3	$\frac{18}{5}$	$\frac{23}{2}$	$\frac{47}{4}$
10	8				$\frac{80}{9}$		
9		15	1	-71		32	
-8	6		-20	248			-53
			11	-71	$-\frac{14}{9}$	17	$-\frac{101}{4}$

Aufgabe 28: *Vervollständige die Tabelle.*

a	b	c	$(a-b)\cdot c$	$\left(c-b+\square\right)^2$	$(2\cdot c+3)\cdot a$	$\dfrac{a^2\cdot b\,\square\, c}{12}$	$\left(\square-b+2\cdot a\right)\cdot c$
-4	7	3		64		28	-36
3	-2			169	57	-12	88
	9	5		4		15	-10
-6	-4	9	-18			-108	
9	-5	11	154		225		286
8	4	4		64		$\frac{256}{3}$	
			9	100	120	336	54

Aufgabe 29: *Löse die Gleichung in korrekter Schreibweise nach x auf.* (Mit Beispiellösung!)

a) $4x + 4 + 7x = 26$

b) $14 + 7x + 6 = 5 + 8x + 4x$

c) $4 + 6x + 11 + 6x = 7x + 6 + x$

d) $13 + 5x + 9x + 3 = 23 + 9x - 4x + 11$

e) $9x + 4r + 6 - 4x + 11 = 7x + 2 + 6r + 4 - 2r$

f) $5z + 26x + z + 7 - 3z + 5x = 16 + 3z + 7x + 15 + 6x$

Aufgabe 30: *Löse die Gleichung in korrekter Schreibweise nach dem unbekannten Parameter auf und setze die anderen Parameterwerte in die Gleichung ein.* (Mit Beispiellösung!)

a) $2a + b = c$ mit: $b = 4a \ \wedge \ c = 24$

b) $x + 6y = y + 9z$ mit: $y = 4 \ \wedge \ x = 4z$

c) $11k + 2r = 5t + c$ mit: $r = 6 \ \wedge \ t = 6 \ \wedge \ c = 4k$

d) $5n + 3m + 9s = n \cdot m + a$ mit: $n = 3 \ \wedge \ m = 6 \ \wedge \ a = 17s$

Aufgabe 31: *Löse die Gleichung in korrekter Schreibweise nach x auf.* (Mit Beispiellösung!)

a) $ax - b = 0$ *b)* $\frac{rx}{s} - \frac{z}{u} = 0$

Aufgabe 32: *Löse die Gleichung in korrekter Schreibweise nach dem unbekannten Parameter auf und setze die anderen Parameterwerte in die Gleichung ein.* (Mit Beispiellösung!)

a) $r + t = u + v$ mit: $r = 2 + u \ \wedge \ t = 7 + 6u \ \wedge \ v = 19 + 2u$

b) $5(c + 6) + 5t = 4(r + n)$ mit: $n = 4t + 3 \ \wedge \ r = 2t + 2 \ \wedge \ c = 5t + 3$

Weitere Äquivalenzumformungsaufgaben der linearen Gleichungen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden: leichteres Niveau, mittleres Niveau oder schwereres Niveau

Weitere Übungen zur Äquivalenzumformung mit Potenzen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Weitere Übungen zur Äquivalenzumformung mit Funktionen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.14) Lösungen zur Äquivalenzumformung.

3.15 Quadratische Ergänzung

Das Ziel bei einer *quadratischen Ergänzung* ist es, eine Gleichung so umzuformen, dass man die *binomischen Formeln* ausnutzen kann um die *Potenz* der Unbekannten zu reduzieren. Als erklärendes Beispiel soll diese allgemeine *Gleichung*, welche auch allgemeines *Polynom* zweiter *Ordnung* oder *quadratische Gleichung* genannt wird, dienen (Auf die Eigenschaften von *Polynome* und explizit *quadratische Termen* wird im Kapitel „*Funktionen*" genauer eingegangen.):

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{3.103}$$

Diese Form erinnert an die so genannte erste *binomische Formel* $(x + d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$. Aus diesem Grund wird der *Vorfaktor* (*Koeffizient*) a des quadratischen *Terms* ax^2 über *Äquivalenzumformung* entfernt.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \qquad |: a \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Durch direktes gegenüberstellen der *Terme* können bestimmte Bedingungen an die *Vorfaktoren* geknüpft werden, sodass die künstliche Generierung einer *Binomischen Formel* möglich wird, dies wird *Koeffizientenvergleich* genannt. Generell wird der *Koeffizientenvergleich* immer angewendet, wenn eine Gleichheit von *Vorfaktoren* zu einer erheblichen Vereinfachung eines Problems dienen könnte.

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + 2dx + d^2 &= 0 \end{aligned} \tag{3.105}$$

Durch den *Koeffizientenvergleich* der rot markierten *Vorfaktoren*, kann folgende Bedingung aufgestellt werden: $\frac{b}{a} = 2d$) und so der *Parameter* d als $\frac{b}{2a}$ bestimmt werden. Da die zu lösende Gleichung noch kein d^2 beherbergt, muss dieses durch eine *Addition* hinzugefügt werden. Anschließend werden alle Terme die nicht zu einer *Binomischen Formel* gehören auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 && \Big| + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 && \Big| - \frac{c}{a} \\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \end{aligned} \tag{3.106}$$

Nach genauerer Betrachtung ist festzustellen, dass auf der linken Seite des Gleichheitszeichen die erste *binomische Formel* vorzufinden ist. Nach der Ersetzung fällt auf, dass die quadratische *Potenz* und die lineare *Potenz* in der *Variablen* x verschmolzen sind. Um nun nach der *Variable* restlos aufzulösen, muss auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die *Wurzel* gezogen werden, da dies die *Umkehrfunktion* zum Quadrieren ist. Dabei ist zu beachten, dass es eine negative und eine positive Lösung gibt, da zum Beispiel $2^2 = (-2)^2$ ist.

$$\begin{aligned} \underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \\ x_{1,2} + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} && \Big| - \frac{b}{2a} \\ x_{1,2} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \end{aligned} \tag{3.107}$$

Nach einer Umbenennung der *Parameter* $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ erkennt man, dass die so genannte *p-q-Formel* hergeleitet wurde, welche sich lediglich durch die Umbenennung der *Parameter* von der sogenannten *Mitternachtsformel* aus Gleichung (3.107) unterscheidet:

$$\begin{aligned} & x^2 + px + q = 0 \\ & \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \end{aligned} \tag{3.108}$$

Um Zeit in bestimmten Klausur- oder Unterrichtssituationen zu sparen empfiehlt es sich die *p-q-Formel* aus Gleichung (3.108) zu verwenden, dennoch sollte von ihrer Benutzung abgeraten werden, denn in der höheren Mathematik (siehe Kapitel „Differentiation und Integration“) sind viele Aufgaben nur noch mittels der *quadratischen Ergänzung* effektiv zu lösen.

Die Zahl unten recht von zum Beispiel x_1 wird *Index* genannt. Ein *Index* hat keine genauere mathematische Funktion, allerdings kann darüber eine zusätzliche Information mitgegeben werden. So bedeutet $x_{1,2}$, dass zwei spezielle *Werte* für x vorliegen, die die *Gleichung* lösen würden. Oftmals wird auch x_0 vorgefunden und steht für einen speziellen konstanten *Wert*. Folglich gibt der *Index* nur genauer an welche Bedeutung genau dieser *Wert* der *Variable* oder des *Parameters* besitzt.

Wenn bei einer Gleichung in offensichtliches *Produkt* mit einer *quadratischen Gleichung* vorliegt, lohnt es sich diese auszuklammern

$$\begin{aligned} &ax^3 + bx^2 + cx = 0 \\ \Rightarrow &x \cdot \left(ax^2 + bx + c\right) = 0 \ , \end{aligned} \tag{3.109}$$

sodass das die *Faktoren* des *Produkts* separiert betrachtet werden können, denn es gilt nach wie vor: Wenn einer der *Faktoren* gleich Null ist, dann ist das gesamte *Produkt* gleich Null.

$$\begin{aligned} &\underbrace{x}_{\stackrel{!}{=}0} \cdot \underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\stackrel{!}{=}0} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \Rightarrow &ax^2 + bx + c = 0 \end{aligned} \tag{3.110}$$

Ab diesem Zeitpunkt kann die restliche Gleichung mit der *quadratischen Ergänzung* gelöst werden. Das *Ausklammerungsverfahren* funktioniert nicht nur bei höheren *Polynomen*, sondern immer, wenn aus allen Bestandteilen der Gleichung *ausgeklammert* werden kann. So ist es möglich bei einigen Gleichungen die Lösungen direkt abzulesen.

$$x^2 - 6x = x(x - 6) \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 6 \tag{3.111}$$

Aus diesem Grund lohnt es sich nicht immer Klammern aus zu *multiplizieren*.

3.15.1 Übungsaufgaben zur quadratischen Ergänzung

Aufgabe 1: *Löse folgende Gleichungen nach x mit Hilfe der p-q-Formel auf.*

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

b) $4x^2 - 16x + 16 = 0$

c) $3x^2 + 24x - 3 = 0$

d) $5x^2 - 20x = 50$

e) $2x^2 - 20x = 6 - 10x$

f) $7x = 8 - 3x^2$

g) $3x^2 - 6x = 0$

h) $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} = 0$

i) $\frac{1}{2}x^2 - 5x = 7 - \frac{5}{2}x$

j) $\frac{3}{4}x = 6 - \frac{4}{3}x^2$

k) $\frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{3}x = \frac{2}{5} - \frac{8}{3}x$

l) $\frac{11}{4}x = \frac{8}{3} - \frac{3}{4}x^2$

m) $\frac{9}{2}x^2 - \frac{11}{4}x = \frac{13}{4} - \frac{11}{8}x$

n) $\frac{1}{3}x + \frac{3}{18}x^2 = \frac{5}{6} - \frac{8}{9}x^2$

o) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x = \sqrt{17}$

p) $\pi x + ex^2 = \ln 2 - \frac{1}{2}x^2$

Aufgabe 2: *Löse folgende Gleichungen nach x mit Hilfe der quadratischen Ergänzung auf.*

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$

b) $x^2 - 16x + 64 = 0$

c) $x^2 + 10x + 25 = 0$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

e) $2x^2 + 4x + 2 = 0$

f) $6x^2 - 36x + 54 = 0$

g) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

h) $-\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} = 0$

i) $x^2 + 6x - 5 = 0$

j) $x^2 - 7x - 12 = 0$

k) $3x^2 + 9x - 24 = 0$

l) $5x^2 - 25x - \frac{1}{4} = 0$

m) $-2x^2 + 8x + 3 = 0$

n) $4x^2 - 6x - 16 = 0$

o) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{5}{6} = 0$

p) $-\frac{8}{5}x^2 + \frac{5}{7}x + \frac{1}{4} = 0$

q) $-4x + 3 = 2x^2$

r) $-x^2 + 5 = 4x$

s) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{11}{6} = 2x$

t) $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x = -\frac{5}{2}$

u) $-3x + 5 = 6x^2 - 4$

v) $-4x^2 + 20 = 4x - 13$

w) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{9}{15} = 4x - 3x^2$

x) $-\frac{2}{7}x^2 + \frac{3}{14}x - 4 = x^2 - 2x + 3$

Aufgabe 3: *Stelle die Gleichungen nach jedem Parameter um und notiere die resultierende Gleichung.*

a) $a^2 + b^2 = d - c$

b) $a^2d^2 = \frac{c}{d}$

c) $ar^2 - br + c = 0$

d) $a^2r^2 = arb + b^2$

e) $ae^b = c$

f) $sa^2 - e^b = 0$

g) $\cos(w) - r^3 = e^d$

h) $\sin(wt - \phi) = e^{(-zy)}$

i) $1 = \frac{\sin(r - t)}{\cos(e^{ab-c})}$

j) $\frac{\sqrt[4]{a^2 + d}}{e^c} = b^2 - b$

k) $\log_a(b \arccos(c)) = e^{\sqrt[n]{d}}$

l) $a \sin(r)^2 - e^b a^2 = e^{2b} \sin(r)$

Weitere Übungen zur quadratischen Ergänzung zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.15) Lösungen zur quadratischen Ergänzung.

3.16 Substitution

Bei jeder Rechnung ist es dem Rechnenden freigestellt Abkürzungen einzuführen. Dieser Prozess wird *Substitution* genannt. Im folgenden Beispiel wird die *Summe* innerhalb der Klammer *substituiert*:

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \qquad \text{mit: } y := x+a \\ &= y^2 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Dabei ist es wichtig zu beachten, dass bei der *Substitution* ersetzten *Variablen* vollständig eliminiert werden.

$$\begin{aligned} &(x+a)^2 \cdot x \qquad \text{mit: } y := x+a \;\Rightarrow\; x = y-a \\ &= y^2 \cdot (y-a) = y^3 - a \cdot y^2 \end{aligned} \tag{3.113}$$

Jede *Substitution* ist zulässig. Wichtig wird dieser Prozess besonders wenn komplexere Aufgaben dadurch wesentlich vereinfacht werden können. Aus diesem Grund wird im Kapitel „*Differentiation* und *Integration*“ nochmal besonders auf die *Substitution* eingegangen.

3.16.1 Übungsaufgaben zur Substitution

Aufgabe 1: *Schreibe die Gleichung mit der angegebenen Substitution auf.*

a) $\left(x^2+x+1\right)^3=8$	mit: $y=x^2+x+1$
b) $(a+4x)^{\frac{1}{2}}=6b-c$	mit: $y^2=4x+a$
c) $(18x-4ab)^2=c$	mit: $\sqrt{y}=18x-4ab$
d) $2^{2a-c}=32$	mit: $b=2a-c$
e) $x=4a$	mit: $y=x+4a$
f) $x^2+8x+16=0$	mit: $(y+4)^2=x^2+8x+16$
g) $(3a+2x)(2x-3a)=0$	mit: $y=2x+3a$
h) $\ln\left(x^2+4x\right)=2$	mit: $y=x^2+4x$

Aufgabe 2: *Finde die Substitution heraus und schreibe sie auf.*

a) $x^3+4x^2-x-8=0$	$\Rightarrow y-8=0$
b) $\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=0$	$\Rightarrow y-\frac{1}{y}=0$
c) $\frac{x^2}{ab}+\frac{5}{ab}-3=0$	$\Rightarrow dx^2+5d-3=0$
d) $\frac{ax^2+bx-c}{5}=0$	$\Rightarrow \frac{y}{5a}=0$
e) $ax+bx+cx+xd+xe-f=0$	$\Rightarrow gx-f=0$
f) $x^2+4x-8=0$	$\Rightarrow \left(\frac{y}{4}+2\right)^2=0$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.16) Lösungen zur Substitution.

3.17 Gleichungssysteme

Nicht jede *Gleichung* besitzt nur eine *Unbekannte*, sondern oftmals mehrere. Mit der richtigen Anzahl von *Randbedingungen* an diese Gleichung können alle Unbekannten mittels eines *Gleichungssystem* bestimmt werden. Sei ein allgemeines Gleichungssystem mit zwei Unbekannten als Beispiel gegeben:

$$\begin{aligned} I. \qquad & 4a = b - 2 \\ II. \qquad & 2b = 12a + 8 \end{aligned} \tag{3.114}$$

Das *Gleichungssystem* besteht dabei aus zwei *Gleichungen* mit ihren Bezeichnung ($I.$ oder $II.$) vor sich hertragen, welche zur besseren Übersicht dienen. Nun kann durch die *Äquivalenzumformung* eine der *Gleichungen* umgestellt werden und dann mittels des *Einsetzungsverfahrens* in die andere *Gleichung* eingesetzt werden. Dabei werden die Rechenschritte mit einem horizontalen Strich abgetrennt.

$$\begin{array}{rlll} I. & 4a & = b - 2 & \\ II. & 2b & = 12a + 8 & |: 2 \\ \hline I. & 4a & = b - 2 & \\ II. & b & = 6a + 4 & |II. \text{ in } I. \\ \hline II. \text{ in } I. & 4a & = (6a + 4) - 2 & \\ II. \text{ in } I. & 4a & = 6a + 2 & |-6a \\ II. \text{ in } I. & -2a & = 2 & |: (-2) \\ II. \text{ in } I. & a & = -1 & |: (-2) \end{array} \tag{3.115}$$

Nachdem eine *Unbekannte* bestimmt wurde, kann diese in die umgestellte Form der zweiten *Gleichung* eingesetzt werden, sodass auch die andere *Unbekannte* ausgerechnet werden kann.

$$\begin{aligned} II. \qquad & b = 6a + 4 \qquad | \text{ mit } a = -1 \\ II. \qquad & b = 6 \cdot (-1) + 4 \\ II. \qquad & b = -2 \end{aligned} \tag{3.116}$$

Dies ist ein allgemeiner Weg um *Gleichungssysteme* zu lösen und gilt nicht nur für *Gleichungssysteme* mit zwei *Gleichungen* sondern für beliebig viele. Dabei muss immer beachtet werden, dass die Anzahl der *Gleichungen* mit der Anzahl der *Unbekannten* übereinstimmt, da das *Gleichungssystem* ansonsten *unterbestimmt* (zu wenige Informationen) oder *überbestimmt* (zu viele Informationen) ist. Letzteres ermöglicht es dem Rechnenden sich auf die trivialeren Informationen zu beschränken.

3.17.1 Übungsaufgaben zu Gleichungssysteme

Aufgabe 1: *Berechne die Unbekannten.*

$a)$	$I.$	$a = 3b + 9$	und	$II.$	$0 = 5b - a - 6$
$b)$	$I.$	$5a - 0,5 = b$	und	$II.$	$3a + 3b = 8$
$c)$	$I.$	$ab = 24$	und	$II.$	$2a + 2b = 20$
$d)$	$I.$	$2a = 8b - 6$	und	$II.$	$5b = 10a + 35$
$e)$	$I.$	$0 = 8b - 2 + 5a$	und	$II.$	$\frac{1}{2}b = \frac{1}{4}a - \frac{3}{4}$
$f)$	$I.$	$-a = 3b + 7$	und	$II.$	$2b + 3a = -4$
$g)$	$I.$	$-5a = -\sqrt{2}b + 11,25$	und	$II.$	$-3a + 4b = 0$
$h)$	$I.$	$\frac{9}{4} - \frac{5}{2}b = 2a$	und	$II.$	$0 = 4,5a - 2,3b - 7,6$
$i)$	$I.$	$4ab = 40$	und	$II.$	$\frac{a+b}{4} = \frac{28}{16}$
$j)$	$I.$	$0,7a - 0,1b + 1,3 = 0$	und	$II.$	$5(2a - b) = 24$
$k)$	$I.$	$64 = a^2b^2$	und	$II.$	$16a^2 = 81b^2$
$l)$	$I.$	$\frac{4}{3}a + 7 = 3,4b + 1,2$	und	$II.$	$\frac{4}{5}a = 2a - 6b + 5$
$m)$	$I.$	$\frac{1}{6}a - \frac{5}{9}b = 24$	und	$II.$	$0 = -3a - b + \frac{3}{8}$
$n)$	$I.$	$\sqrt{5}a - \frac{3b}{5} = 2b - 7a + 4$	und	$II.$	$3b = \frac{9}{2}a + 22b - 1$
$o)$	$I.$	$3b - 9a = \frac{1}{7}b + \frac{10}{9}$	und	$II.$	$0 = -4a + 144$
$p)$	$I.$	$3ab - 5b = 6$	und	$II.$	$7b - 2a = \frac{3}{2}ab$

Aufgabe 2: *Berechne die Unbekannten.*

a) $I.$ $a = 5c - 3b + 2$ und $II.$ $3b = a - 4b + 2$

und $III.$ $3a - 5c = 4b - 8$

b) $I.$ $-4a + 2,5c = 0,5b + 3$ und $II.$ $5c = a - b - c + 3$

und $III.$ $5b - 4a = -3c + 4$

c) $I.$ $0 = 3c + 8a - 4c - 5$ und $II.$ $4a = b - 10c$

und $III.$ $5b + 3a + c - 7 = 0$

d) $I.$ $\frac{4}{3}a + 7 = 3,4b + 1,2c$ und $II.$ $\frac{4}{5}c = 2a - 6b + 5$

und $III.$ $\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}c = \frac{3}{4} + \frac{4}{5}b$

e) $I.$ $\frac{1}{6}a + 1 - \frac{5}{9}b = 24c$ und $II.$ $8 = -3a - b + \frac{3}{8}c$

und $III.$ $7ac = 8b - 6$

Aufgabe 3: *Berechne die Unbekannten.*

a) $I.$ $a = 2b + 4c - 2d + 1$ und $II.$ $b = 4d - 2a + 5c - 2$

und $III.$ $c = 3b - d + 4a - 3$ und $IV.$ $d = 7a - 4b + 10c + 6$

b) $I.$ $a + b + c + d = 24$ und $II.$ $\frac{7}{2}a + b = 10 - 2d + \frac{1}{3}c$

und $III.$ $12a - 4d = 14c + 5$ und $IV.$ $2d + 6c = 4$

c) $I.$ $a = b + c$ und $II.$ $4b = -c + 3d$

und $III.$ $ad - 2c = 8$ und $IV.$ $1,2c + 1,6d - 4,4a = 3 - 0,8b$

d) $I.$ $4a - 6b = 8c$ und $II.$ $\frac{1}{2}c + \frac{4b}{5} = 3 - 7d$

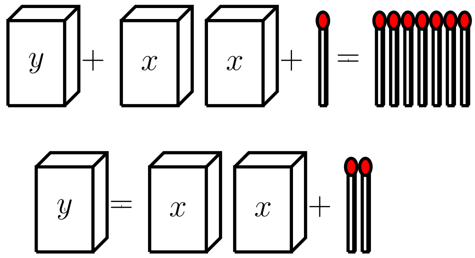
und $III.$ $0 = a + 2b + 3c + 4d$ und $IV.$ $\frac{3}{4}d - c + 2a = 5 - 1,3b$

e) $I.$ $\frac{1}{4}a - 5b = 0$ und $II.$ $7b + 4 = 11d$

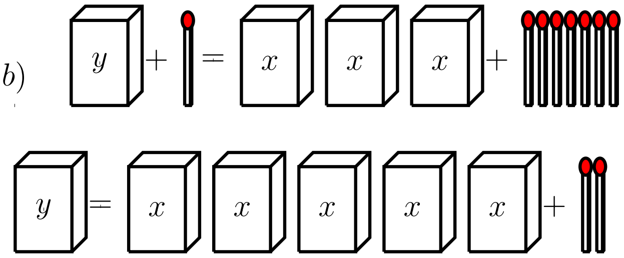
und $III.$ $6b - a = 1,5d$ und $IV.$ $2c - \frac{3}{10}d = \frac{2}{5} - b$

Aufgabe 4: *In jeder Schachtel mit der Aufschrift x befinden sich gleich viele Streichhölzer, gleiches gilt für die y-Schachteln und z-Schachteln. Auf jeder Seite des Gleichheitszeichen befindet sich die gleiche Anzahl an Streichhölzern. Bestimme bei allen Gleichungssystemen wie viele Streichhölzer sich in den einzelnen x-, y- und z-Schachteln befinden.*

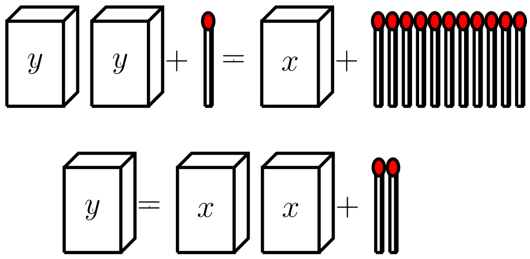
a)



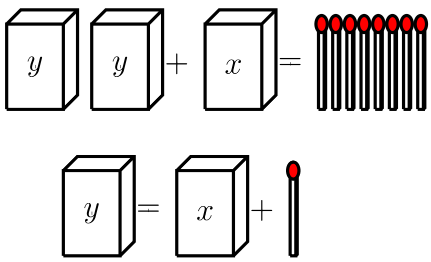
b)



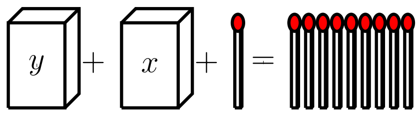
c)

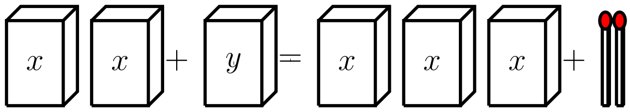


d)

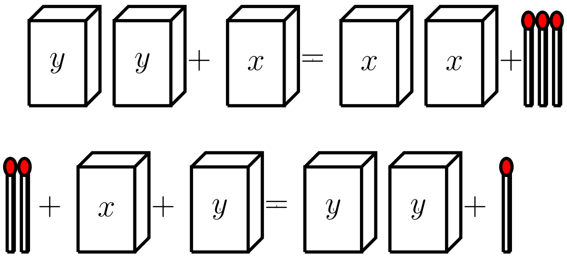


e)

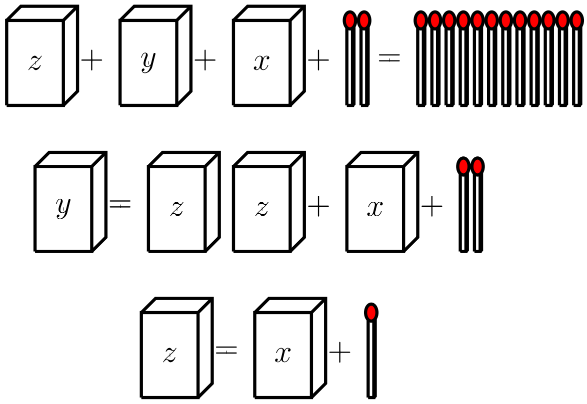




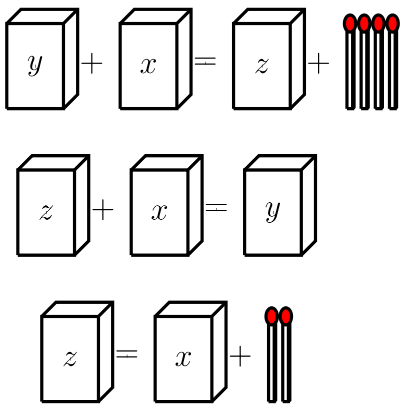
f)



g)



h)



Aufgabe 5: *Löse das lineare Gleichungssystem. (Bestimme die Werte von x und y, sodass beide Gleichungen gleichzeitig eine wahre Aussage widerspiegeln.)* (Mit Musterlösung!)

$a)$ $2x + 2 = y \;\wedge\; 6 = 4y - x$

$b)$ $4x = \frac{y}{2} + 3 \;\wedge\; 6y = 3x - 4$

$c)$ $4x + 6y = 9 \;\wedge\; 7 = y - 3x$

$d)$ $7a = 2 - 4b \;\wedge\; 6b - 2a = 5$

Aufgabe 6: *Löse das lineare Gleichungssystem.* (Mit Musterlösung!)

$5x + 3y + 8z = 9 \quad \wedge \quad 7 = z - 4x - 2y \quad \wedge \quad 0 = 5z + 3y - 6$

Aufgabe 7: *Löse die Gleichungssysteme.*

a) $x + 4 = y + 12 \quad \wedge \quad x = 4y + 5$

b) $y = 9x - 7 \quad \wedge \quad y - x = 6x - 3$

c) $s + 2 = r - 5 \quad \wedge \quad r = 7s - 8$

d) $a = 7c + 9 \quad \wedge \quad 6c - a = 5 - 2c$

e) $3k + 8 = 7z - 4 \quad \wedge \quad z + 6k = 4k - 5$

f) $2x + 4 = 3y - 5 \quad \wedge \quad x + y = 4y + 5x - 5$

Aufgabe 8: *Löse die Gleichungssysteme.*

a) $r + z = z + 12 \quad \wedge \quad r = z + 5$

b) $p = q + 7 \quad \wedge \quad p - 5 = q + 3p$

c) $3r - 6 = 5n + 2 \quad \wedge \quad r + n + 6 = 0$

d) $5k - 3y = 0 \quad \wedge \quad 3k - 5 = 7y + 3$

e) $2h + 4g = 8g - 6 \quad \wedge \quad 5h + 4g = 9$

f) $\frac{4}{3}x - \frac{3}{5}y = 0 \quad \wedge \quad 4x - 5y - 4 = 0$

g) $y = 5x - 4 \quad \wedge \quad 5 - 3x = z \quad \wedge \quad 6 = x + y + z$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.17) Lösungen zu Gleichungssysteme.

3.18 Ungleichungen

Ungleichungen beschreiben meistens Sachverhalte, bei denen vor allem die Grenzen entscheidend sind. So gibt es insgesamt vier Bedingungen:

$$\begin{aligned} x &> y \qquad x \text{ größer als } y \ , \\ x &\geq y \qquad x \text{ größer gleich } y \ , \\ x &\leq y \qquad x \text{ kleiner gleich } y \ , \\ x &< y \qquad x \text{ kleiner als } y \ . \end{aligned} \tag{3.117}$$

Im Umgang mit *Ungleichungen* gelten nahe zu die gleichen Regeln wie bei *Gleichungen*, so muss bei der *Äquivalenzumformung* lediglich beim *Vorzeichenwechsel* auch die Richtung der Bedingung umgedreht werden, da die Aussage ansonsten falsch werden würde:

$$\begin{aligned} x &> a \qquad |\cdot(-1) \\ \Rightarrow -x &< -a \end{aligned} \tag{3.118}$$

Dies kann erkannt werden, wenn die Multiplikation $\cdot(-1)$ durch mehrere Schritte der Strichrechnung ersetzt:

$$\begin{aligned} x &> a \qquad |-x \\ 0 &> a - x \qquad |-a \\ -a &> -x \qquad \text{mit: Drehe die Ungleichung um.} \\ \Rightarrow -x &< -a \qquad , \end{aligned} \tag{3.119}$$

wobei bei dieser Veranschaulichung die Gleichheit der Ausdrücke $x > a$ und $a < x$.

Da die Lösung bei *Ungleichungen* nicht eine einzige Zahl, sondern ein *Zahlenintervall* ist, muss dieses *Intervall* angegeben werden. Dabei kann dies als *Lösungsmenge* wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x &\geq 2 \\ \Rightarrow \mathbb{L} &= \{x \in \mathbb{R} \,|x \geq 2\} \end{aligned} \tag{3.120}$$

Die Darstellung der Lösung als *Intervall* kann im Abschnitt „*Intervalle*“ nachgeschlagen werden.

3.18.1 Übungsaufgaben zu Ungleichungen

Aufgabe 1: *Gib die Lösungsmenge korrekt an.*

$a)\ x < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$b)\ x > 4$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$c)\ x \geq 5$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$d)\ x \leq 7$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$e)\ x < -4$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f)\ x \geq -\frac{3}{4}$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$g)\ x > 5,7$	$\forall x \in \mathbb{Q}$	$h)\ x \leq \frac{5}{6}$	$\forall x \in \mathbb{Q}$	$i)\ x < -\frac{8}{7}$	$\forall x \in \mathbb{Q}$
$j)\ x \leq 1$	$\forall x \in \mathbb{N}$	$k)\ x \geq 0$	$\forall x \in \mathbb{N}$	$l)\ x < 0$	$\forall x \in \mathbb{N}$

Aufgabe 2: *Löse die Ungleichung nach x auf und gib die Lösungsmenge korrekt an.*

$a)\ 3x - 4 < 5$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$b)\ 9 > 3 + 7x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$c)\ 2x - 5 \geq 5x + 3$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$d)\ -2x + 5 \leq 7x + 4$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$e)\ 13 - 4x < -11$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$f)\ 4x - 9 \geq -\frac{3}{4}x + 5$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$g)\ 6x + 4 > 5,7 - 2x$	$\forall x \in \mathbb{Q}$	$h)\ -\frac{3}{4}x - 9 \leq \frac{5}{6}$	$\forall x \in \mathbb{Q}$
$i)\ 6 - 8x < -\frac{8}{7}$	$\forall x \in \mathbb{Q}$	$j)\ \frac{1}{2} - 5x \leq 6 - \frac{2}{5}x$	$\forall x \in \mathbb{R}$
$k)\ 2x - \frac{7}{4} + \frac{4}{5}x \geq -\frac{1}{3}$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$l)\ 0,3x - 6,2 \leq 0,75x + 1,8$	$\forall x \in \mathbb{R}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.18) Lösungen zu Ungleichungen.

3.19 Fakultäten und Binominalkoeffizienten

Einige Abkürzungen werden oft bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie bei Reihendarstellungen verwendet. Zu diesen zählen *Fakultäten* und *Binominalkoeffizienten*. So kann zum Beispiel die Rechnung

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \tag{3.121}$$

abgekürzt werden, durch den sogenannten *Fakultätsoperator* !:

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \\ \Rightarrow n! &= n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \end{aligned} \tag{3.122}$$

Dabei ist die *Fakultät* so definiert, dass $0! := 1$ gilt. Da oftmals *Fakultäten* in *Brüchen* vorkommen, sollte das *Kürzen* sowie andere Rechenregeln von *Fakultäten* bekannt sein. Außerdem unterliegt der *Fakultätsoperator* nicht dem *Distributiv-*, *Assoziativ-* und *Kommutativgesetz*, da er ausschließlich nach links wirkt und auch nur auf den Wert einer Klammer, die links von ihm steht.

$$\begin{aligned} &\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ &(ab)! \neq a!b! \\ &(a+b)! \neq a! + b! \\ &6 \cdot 5! = 6! \Rightarrow (n+1) \cdot n! = n! \cdot (n+1) = (n+1)! \\ &\frac{8!}{8} = 7! \Rightarrow \frac{n!}{n} = (n-1)! \end{aligned} \tag{3.123}$$

Einige Konstellationen mit der *Fakultät* kommen besonders häufig vor. Die am häufigsten vorkommende Anordnung von *Fakultäten* wird *Binomialkoeffizient* genannt und ist definiert durch:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.124}$$

Generell sollte der Umgang mit neuen Abkürzungen, die neu eingeführt wurden, geübt werden, da in der Mathematik noch viele weitere Abkürzungen warten. So werden zum Beispiel im Kapitel „*Reihen*“ weitere oft vorkommende Abkürzungen eingeführt.

3.19.1 Übungsaufgaben zu Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Aufgabe 1: *Berechne den Wert des Terms.*

a) $5!$ *b)* $3!$ *c)* $\dfrac{7!}{5!}$

d) $\dfrac{3!}{4!} \cdot 0!$ *e)* $\dfrac{4!b!}{b!}$ *f)* $4! \cdot 3! \cdot 2!$

Aufgabe 2: *Berechne den Wert des Terms und vergleiche die ausgerechneten Binomialkoeffizienten mit dem Pascal'schen Dreieck.*

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 289 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: *Drücke die Terme durch Fakultäten aus.*

a) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ *b)* $11 \cdot 10 \cdot 9$ *c)* $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{22 \cdot 21 \cdot 20}$

d) $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$ *e)* $11 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 23$ *f)* $\dfrac{6 \cdot 66 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 67 \cdot 5 \cdot 65}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 10}$

Aufgabe 4: *Beweise folgende Identitäten.*

a) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq k$

b) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq k$

c) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n}{k} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \qquad \forall n, k \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \geq k$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.19) Lösungen zu Fakultäten und Binomialkoeffizienten.

3.20 Zahlensysteme

Neben der verschiedenen Schreibweisen der Zahlen in den jeweiligen Sprachen existieren auch noch verschiedene Zahlensysteme. Besonders in der Informatik werden neben dem *Dezimalsystem* (10er-System) auch das *Dualsystem* (2er-System), *Oktalsystem* (8er-System) und das *Hexadezimalsystem* (16er-System) verwendet. In diesem Abschnitt werden die Systeme und die oftmals benutzen römischen Zahlen vorgestellt.

3.20.1 Römische Zahlen

Da die römischen Zahlen immer wieder mal im Alltag vorkommen, ist in der folgenden Tabelle eine Übersetzung der Symbole gegeben, sodass römische Zahlen in die lateinischen üblichen Zahlen übersetzt werden können:

römische Zahl	lateinische Zahl	römische Zahl	lateinische Zahl
I	1	XI	11
II	2	XII	12
III	3	XIII	13
IV	4	XIV	14
V	5	XV	15
VI	6	XVI	16
VII	7	XVII	17
VIII	8	XVIII	18
IX	9	XIX	19
X	10	XX	20
L	50	C	100
D	500	M	1000
DXLVI	549	MDLXXIII	1573

Da die Zahlen über 1000 nur selten benutzt wurden bürgerten sich verschiedene Schreibweisen ein. So zum Beispiel die Apostrophus-Schreibweise, bei der aus der Zeichenreihenfolge IↃ = D entstand. Diese Konstruktion setzte sich fort, sodass folgende Symbole entstanden:
Bei der Vinculum-Schreibweise wurde lediglich ein Strich über die Zahl gesetzt, was eine Multiplikation mit 1000 entsprach $\bar{\mathrm{I}} = \mathrm{M}$, sodass die Anzahl der Striche darüber entscheidend war. Auch die anderen Schreibweisen beschäftigten sich mit der Multiplikation mit 1000, allerdings boten die lateinische Zahlenzeichen eine wesentlich einfachere Schreibweise, was dazu führte das sich auch diese durchsetzten.

römische Zahl	lateinische Zahl
Iↄ = D	500
ↀ	1000
ↁ	5000
ↂ	10000
ↇ	50000
ↈ	100000

3.20.2 Dualsystem

Das *Dualsystem* besteht aus den Zahlen 1 und 0, also „Ja“ und „Nein“. Aus diesem System, dem System der *binäre* Zahlen, ergibt sich eine gesamte algebraische Kategorie, die sogenannte Bool'sche Algebra. Auf diesem Zahlensystem beruht die gesamte Informatik, da es technisch aufgrund der Transistoren entweder ein Signal weitergeleitet wird oder eben nicht.
Um Zahlen aus diesem System in das *Dezimalsystem* umzurechnen, kann eine Gleichung verwendet werden, welche hier anhand eines Beispiels illustriert ist:

$$\begin{aligned} [1101]_2 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= [13]_{10} \quad . \end{aligned} \tag{3.125}$$

Um vom Dezimalsystem in das *Dualsystem* zu wechseln, benötigt es der Division, wobei der *Rest* den jeweiligen Zahleneintrag darstellt, während mit dem *Quotienten* weiter gerechnet wird, bis der Quotient Null wird.

$$\begin{aligned} 41 : 2 &= 20 \ \text{ Rest: } 1 \\ 20 : 2 &= 10 \ \text{ Rest: } 0 \\ 10 : 2 &= 5 \ \text{ Rest: } 0 \\ 5 : 2 &= 2 \ \text{ Rest: } 1 \\ 2 : 2 &= 1 \ \text{ Rest: } 0 \\ 1 : 2 &= 0 \ \text{ Rest: } 1 \\ \Rightarrow [41]_{10} &= [101001]_2 \end{aligned} \tag{3.126}$$

Bei anderen *Zahlensystemen* muss bei dieser Rechnung der *Divisor* durch die jeweilige *Zahlensystembasis* (hier 2) ausgetauscht werden.

3.20.3 Oktalsystem

Ähnlich wie beim Dualsystem werden im *Oktalsystem* die Zahlen allerdings von 0 bis 7 pro Ziffernstelle gezählt:

$$\begin{aligned}[1074]_8 &= 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ &= 1 \cdot 512 + 0 \cdot 64 + 7 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \\ &= [572]_{10}\end{aligned} \tag{3.127}$$

In Informatik ergeben sich $8bit$ zu $1byte$, sodass bei kleinsten Informationsmengen oftmals auf das *Oktalsystem* zurückgegriffen wird.

3.20.4 Hexadezimalsystem

Farben werden in der Informatik meistens mit einem *Hexadezimalcode* angegeben. Hierbei wird von 0 bis F gezählt, wobei das F einer 15 entspricht. Bei der Umrechnung kann wieder die schon im *Dual-* und *Oktalsystem* vorgestellt *Gleichung* verwendet werden:

$$\begin{aligned}[2B1]_{16} &= 2 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 \\ &= 2 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 1 \cdot 1 \\ &= [689]_{10}\end{aligned} \tag{3.128}$$

Die folgende Tabelle soll dazu dienen, um eine Gesamtübersicht über die Zusammenhänge der *Zahlensysteme* zu bekommen.

Dezimal	Dual	Oktal	Hexadezimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

3.20.5 Übungsaufgaben zu Zahlensystemen

Aufgabe 1: *Übersetze die Zahl in das Dezimalsystem.*

a) XXIII	*b)* XLIV
c) LXII	*d)* CXXXII
e) CCLVIII	*f)* CDXXXIX
g) DXLV	*h)* CCCXXVII
i) DCCCLXIII	*j)* DCXXXVI
k) MMDCLXXVII	*l)* MDLXVII
m) MCLXIV	*n)* MMMMMMDCCLXXXIV
o) MMDCXXVIII	*p)* MCCXXXVIII
q) MMMDCCXLI	*r)* MMMMMMMMMCMXCIX

Aufgabe 2: *Berechne den Wert des Terms und übersetze die Zahl in das Dezimalsystem.*

a) CLV + CCCXLVII =	*b)* DCCXLII − DLXV =
c) XXV · XVI =	*d)* MMDLXXVIII + MCDLXVII =
e) MMMMMMMDCXLV − MMDCXXVI =	*f)* MMCCCXLV : V =
g) LXXVI · XXXI =	*h)* MCDLII : XII =

Aufgabe 3: *Übersetze die lateinischen Zahlen in römische Zahlen.*

a) 47	*b)* 82	*c)* 36	*d)* 93
e) 742	*f)* 676	*g)* 352	*h)* 623
i) 831	*j)* 402	*k)* 2729	*l)* 3526
m) 2053	*n)* 4013	*o)* 1987	*p)* 1383

Aufgabe 4: *Übersetze die Zahl in das Dezimalsystem.*

a) $[10111]_2$	*b)* $[110101]_2$	*c)* $[101101]_2$
d) $[10101]_2$	*e)* $[1010111]_2$	*f)* $[1101101]_2$
g) $[1001001]_2$	*h)* $[1000101]_2$	*i)* $[1010100]_2$
j) $[1011110]_2$	*k)* $[1001101]_2$	*l)* $[1010010]_2$
m) $[10001011]_2$	*n)* $[10110101]_2$	*o)* $[11110101]_2$
p) $[10100111]_2$	*q)* $[100010101]_2$	*r)* $[111010101]_2$

Aufgabe 5: *Berechne den Wert des Terms und übersetze die Zahl in das Dezimalsystem.*

a) $[100111]_2 + [1101101]_2 =$	*b)* $[10101]_2 \cdot [100111]_2 =$
c) $[11101101]_2 \cdot [1110]_2 =$	*d)* $[11100000]_2 : [100]_2 =$
e) $[110111011]_2 - [1001101]_2 =$	*f)* $[101001010]_2 + [1111111001]_2 =$
g) $[110101001100]_2 : [101]_2 =$	*h)* $[100000111101]_2 - [101001011]_2 =$

Aufgabe 6: *Übersetze in das Dualsystem.*

a) 47	*b)* 82	*c)* 36	*d)* 93
e) 742	*f)* 676	*g)* 352	*h)* 623
i) 831	*j)* 402	*k)* 2729	*l)* 3526
m) 2053	*n)* 4013	*o)* 1987	*p)* 1383

Aufgabe 7: *Übersetze die Zahl in das Dezimalsystem.*

a) $[432]_8$	*b)* $[527]_8$	*c)* $[630]_8$	*d)* $[731]_8$
e) $[2053]_8$	*f)* $[7251]_8$	*g)* $[5672]_8$	*h)* $[10242]_8$
i) $[23424]_8$	*j)* $[70350]_8$	*k)* $[35366]_8$	*l)* $[60340]_8$
m) $[21503]_8$	*n)* $[52052]_8$	*o)* $[173503]_8$	*p)* $[203725]_8$

Aufgabe 8: *Berechne den Wert des Terms und übersetze die Zahl in das Dezimalsystem.*

a) $[624]_8 + [167]_8 =$ *b)* $[367]_8 - [152]_8 =$

c) $[75]_8 \cdot [215]_8 =$ *d)* $[3723]_8 + [2357]_8 =$

e) $[5731]_8 : [11]_8 =$ *f)* $[525]_8 \cdot [236]_8 =$

g) $[2727]_8 - [345]_8 =$ *h)* $[5536]_8 : [36]_8 =$

Aufgabe 9: *Übersetze in das Oktalsystem.*

a) 47 *b)* 82 *c)* 36 *d)* 93

e) 742 *f)* 676 *g)* 352 *h)* 623

i) 831 *j)* 402 *k)* 2729 *l)* 3526

m) 2053 *n)* 4013 *o)* 1987 *p)* 1383

Aufgabe 10: *Übersetze in das Dezimalsystem.*

a) $[BC]_{16}$ *b)* $[F3]_{16}$ *c)* $[5C]_{16}$ *d)* $[A9]_{16}$

e) $[3EA]_{16}$ *f)* $[C4D]_{16}$ *g)* $[8DA]_{16}$ *h)* $[B71]_{16}$

i) $[ABCD]_{16}$ *j)* $[63D7]_{16}$ *k)* $[9F3E]_{16}$ *l)* $[7D32]_{16}$

m) $[FF00FF]_{16}$ *n)* $[ABABAB]_{16}$ *o)* $[6F34AC]_{16}$ *p)* $[7D4E1A]_{16}$

Aufgabe 11: *Berechne den Wert des Terms und übersetze die Zahl in das Dezimalsystem.*

a) $[F04]_{16} + [A5D]_{16}$ *b)* $[2D]_{16} \cdot [5A]_{16}$

c) $[634]_{16} + [11F]_{16}$ *d)* $[9B5]_{16} : [23]_{16}$

e) $[A43E]_{16} - [6D3F]_{16}$ *f)* $[74B0]_{16} - [3AE7]_{16}$

g) $[EFAD]_{16} \cdot [91CB]_{16}$ *h)* $[550]_{16} : [AA]_{16}$

Aufgabe 12: *Übersetze in das Hexadezimalsystem.*

$a)$ 47	$b)$ 82	$c)$ 36	$d)$ 93
$e)$ 742	$f)$ 676	$g)$ 352	$h)$ 623
$i)$ 831	$j)$ 402	$k)$ 2729	$l)$ 3526
$m)$ 2053	$n)$ 4013	$o)$ 1987	$p)$ 1383

Aufgabe 13: *Übersetze in das Dezimalsystem.*

$a)$ $[4211]_5$	$b)$ $[12210]_3$	$c)$ $[1063]_7$	$d)$ $[8205]_9$
$e)$ $[B4A]_{12}$	$f)$ $[3012]_4$	$g)$ $[3541]_7$	$h)$ $[200102]_3$
$i)$ $[42AA2]_{11}$	$j)$ $[1GD]_{18}$	$k)$ $[5AJ]_{20}$	$l)$ $[10N]_{25}$
$m)$ $[1010]_{17}$	$n)$ $[C03]_{13}$	$o)$ $[1K1]_{21}$	$p)$ $[MLI]_{23}$

Aufgabe 14: *Übersetze in das angegebene Zahlensystem.*

$a)$ 256 in ein 3er System	$b)$ 272 in ein 5er System
$c)$ 578 in ein 4er System	$d)$ 388 in ein 7er System
$e)$ 437 in ein 9er System	$f)$ 653 in ein 4er System
$g)$ 3464 in ein 8er System	$h)$ 6747 in ein 12er System
$i)$ 6833 in ein 11er System	$j)$ 5462 in ein 20er System
$k)$ 27859 in ein 25er System	$l)$ 30541 in ein 13er System
$m)$ 60341 in ein 17er System	$n)$ 53256 in ein 23er System

Aufgabe 15: *Berechne den Wert des Terms und übersetze die Zahl in das Dezimalsystem.*

$a)$ $[10110]_2 + [37]_8 =$	$b)$ $[32011]_4 + [201022]_3 =$
$c)$ $[1000111]_2 + [833]_9 =$	$d)$ $[44101]_5 - [103211]_4 =$
$e)$ $[5240]_6 : [201]_3 =$	$f)$ $[63]_7 \cdot [28]_9 =$
$g)$ $[32101]_4 - [635]_7 =$	$h)$ $[221]_3 \cdot [75]_8 =$
$i)$ $[8035]_9 + [302013]_4 =$	$j)$ $[4AA39]_{11} - [2210010]_4 =$
$k)$ $[3H5]_{20} + [21200102]_3 =$	$l)$ $[100111010]_2 + [2FA]_{18} =$
$m)$ $[412]_5 \cdot [3C]_{13} =$	$n)$ $[1KKA]_{21} - [N42]_{25} =$
$o)$ $[8135]_9 - [AG]_{17} =$	$p)$ $[2J5]_{23} : [6A]_{15} =$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.20) Lösungen zu Zahlensysteme.

3.21 Einheiten

Ohne *Einheiten* haben wissenschaftliche Aussagen (außer in der Mathematik) keine Bedeutung. Um Verwirrungen zwischen den verschiedenen *Einheiten* zu vermeiden, wurde das SI-Einheitensystem für alltägliche Phänomene eingeführt. Das SI-Einheitensystem besitzt sieben Grundeinheiten, aus denen alle anderen Einheiten zusammengesetzt werden können. In der mathematischen Beschreibung von Phänomenen verändert die Wahl der *Einheiten* nahezu alles. Aus diesem Grund sollte immer mit SI-Einheiten gerechnet werden, solange kein anderes Einheitensystem für eine Beschreibung explizit gefordert ist. Die SI-Einheiten sind in der nachfolgenden Tabelle aufgelistet, wobei in die zweite Spalte die üblich gewählte Parameternamen zur Größe angegeben sind.

Größenname	Formelzeichen	Einheit	Einheitenzeichen
Länge	$l, h, s, x, r, ...$	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	s
Stromstärke	I	Ampere	A
Temperatur	T, Θ	Kelvin	K
Stoffmenge	n	Mol	mol
Lichtstärke	I_V	Candela	cd

Oftmals kommen die SI-Einheiten mit einem Präfix vor. Diese sind nur Abkürzungen hinter denen sich lediglich Nullen verstecken. Statt eines Präfix kann einfach die dazugehörige Zahl eingesetzt werden (z.B.: k = 1000). Eine Übersichtsliste befindet sich im Anhang (18.4).

Einheiten behaftete *Größen* können nur mit Größen *addiert* oder *subtrahiert* werden, wenn diese die gleiche Einheit besitzen, somit ist eine Einheit ähnlich wie ein *Parameter* zu behandeln, welcher allerdings nur eine Sinnbedeutung besitzt.

$$2 \cdot (3\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m} + 8\,\mathrm{s} \tag{3.129}$$

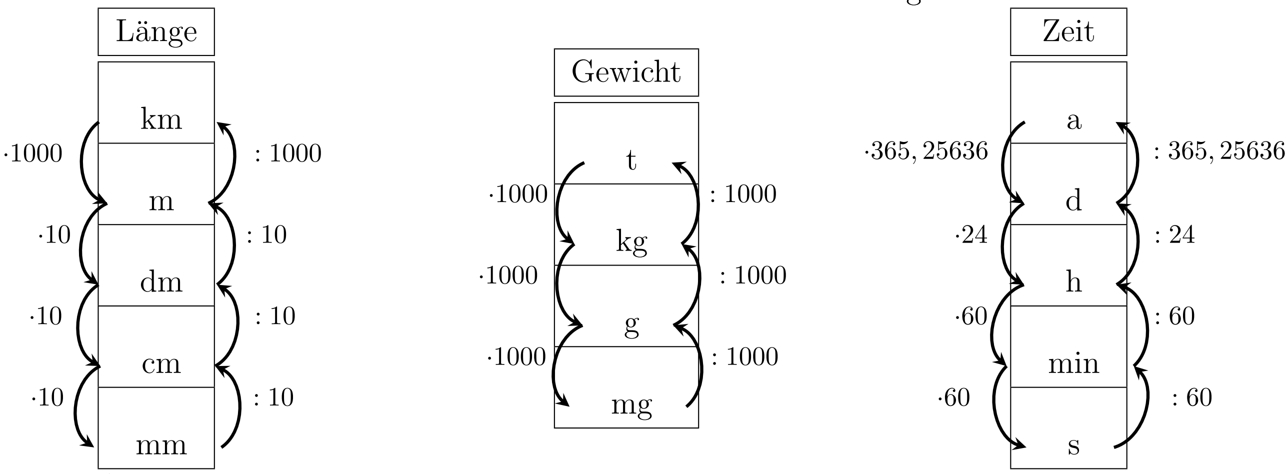
alle *Einheiten* werden stets hinter der Zahl geschrieben. Präfixe wie Millimeter mm für Verwirrung sorgen könnten, da der Buchstabe mehrere Bedeutungen zugesprochen bekommt. Meistens wird die genaue Bedeutung allerdings im Zusammenhang der Rechnung klar. Da *Gleichungen* teilweise nur eine Aussagekraft in bestimmten *Einheiten* besitzen, werden Variablen mit diesen gekennzeichnet:

$$x\,[\mathrm{m}] = 100 \cdot x\,[\mathrm{cm}] \quad , \tag{3.130}$$

wobei die eckigen *Klammern* die zu wählende *Einheit* für die *Variable* beherbergen.

Bei einigen *Einheiten* existieren trotz der flächendeckenden Einführung des *Dezimalsystems* nach der französischen Revolution nach wie vor Besonderheiten. So konnte sich bei der Zeit das *Dezimalsystem* nicht durchsetzen, sodass $1\,\mathrm{y} = 1\,\mathrm{a} = 365\,\mathrm{d}$; $1\,\mathrm{d} = 24\,\mathrm{h}$; $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$; $1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$ gilt. Hierbei wurde ein Kalenderjahr $1\,\mathrm{a}$ gewählt, während das Bankenjahr nur 360 Tage besitzt. Durch die Bewegung der Erde um die Sonne ist genau ein Jahr physikalisch mit $1\,\mathrm{a} \approx 365{,}25636\,\mathrm{d}$ definiert, sodass in guter Näherung lediglich das Schaltjahr mit betrachtet wird $1\,\mathrm{a} = 365{,}25\,\mathrm{d}$. In der Regel wird mit dem Kalenderjahr gerechnet. Beim Gewicht muss beachtet werden, dass Kilogramm $1\,\mathrm{kg}$ die SI-Einheit ist und dass eine Tonne $1\mathrm{t} = 1000\,\mathrm{kg}$ entspricht und dass in der deutschsprachigen Region zwei Pfund einem Kilogramm entsprechen. Bei den Flächen sind noch „Ar“ $(1\,\mathrm{a} = 100\,\mathrm{m}^2)$ und Hektar $(1\,\mathrm{ha} = 10000\,\mathrm{m}^2)$ zu erwähnen. Für *Volumina* gilt die Definition für einen Liter $1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{l}$.

So können für einheitenbehafteten Größen eine Umrechnungstabelle erstellt werden.



Andere *Einheiten* als die SI-Einheiten sind meistens zusammengesetzte *Einheiten*, welche als Abkürzung eingeführt wurden. Die wichtigsten zusammengesetzten *Einheiten* sind von oft vorkommenden Größen der Physik. (Hier sind nur Größen aufgelistet, welche in späteren Übungsaufgaben mit Bezug zu *Einheitenrechnungen* verwendet werden könnten.)

Kraft F in $1\,\mathrm{N} = 1\,\dfrac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$

Dichte ρ in $1\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

Frequenz f in $1\,\mathrm{Hz} = 1\dfrac{1}{\mathrm{s}}$

Geschwindigkeit v in $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Beschleunigung a in $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Druck p in $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}$

Druck p in $10\,\mathrm{bar} = 1\,\mathrm{MPa}$

Energie E in $1J = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = 1\,\dfrac{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$

Leistung P in $1W = 1\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{V} = 1\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}$

elektrische Ladung Q in $1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$

elektrische Spannung U in $1\,\mathrm{V} = 1\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = 1\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}$

elektrischer Widerstand R in $1\Omega = 1\,\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$

magnetische Flussdichte B in $1\,\mathrm{T} = 1\,\dfrac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}$

Induktivität L in $1\,\mathrm{H} = 1\,\dfrac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{A}}$

Kapazität C in $1\,\mathrm{F} = 1\,\dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}$

Drehmoment M in $1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$

Des Weiteren sind besonders häufig die folgenden Naturkonstanten in vielen Rechnungen vorzufinden:
Lichtgeschwindigkeit $c = 299792458\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Dielektrizitätskonstante des Vakuums $\epsilon_0 \approx 8,854187817\cdot 10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{V}\cdot\mathrm{m}}$

Vakuumpermeabilität $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}$

Boltzmann-Konstante $k_B \approx 1,38064852\,\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

Plancksches Wirkungsquantum $\hbar \approx 1,05447800\cdot 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$

Mittels einer *Einheitenrechnung* lassen sich *Gleichungen* auf ihre Richtigkeit überprüfen. Dazu werden die Einheiten der Größen der *Gleichung* statt den *Parametern* und *Variablen* niedergeschrieben. Wenn auf beiden Seiten der *Gleichung* die gleiche *Einheit* nachgewiesen werden kann, ist dies ein Indiz für die Richtigkeit der *Gleichung*. Außerdem können so *Umrechnungsfaktoren* von Präfixen mit berücksichtigt werden.

$$
\begin{aligned}
r = \frac{mv}{qB} \quad \Rightarrow \quad [1\,\mathrm{m}] &= \left[1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\mathrm{C}\cdot\mathrm{T}}\right] = \left[1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\frac{\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}}\right] = \left[1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}}\right] \\
&= \left[1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{A}\cdot\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}}\right] = \left[1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{C}}{\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{A}\ \cdot\mathrm{J}}\right] = \left[1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{A}\cdot\frac{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}}\right] \\
&= \left[1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{s}^2}{\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}}\right] = \left[1\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}}\right] = \left[1\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2}\right] = [1\,\mathrm{m}]
\end{aligned} \tag{3.131}
$$

3.21.1 Übungsaufgaben zu Einheiten

Aufgabe 1: *Rechne die Zeiten in die angegebene Einheit um.*

$a)$ $3\,\mathrm{h} =$ min
$b)$ $480\,\mathrm{min} =$ h
$c)$ $11\,\mathrm{min} =$ s
$d)$ $1440\,\mathrm{s} =$ min
$e)$ $3\,\mathrm{h} =$ s
$f)$ $25200\,\mathrm{s} =$ h
$g)$ $13\,\mathrm{h} =$ min
$h)$ $1980\,\mathrm{min} =$ h
$i)$ $9360\,\mathrm{min} =$ h
$j)$ $248\,\mathrm{h} =$ min
$k)$ $61200\,\mathrm{s} =$ h
$l)$ $4980\,\mathrm{s} =$ min
$m)$ $11\,\mathrm{d} =$ h
$n)$ $5760\,\mathrm{min} =$ d
$o)$ $2460\,\mathrm{min} =$ h
$p)$ $2\,\mathrm{d} =$ s
$q)$ $51\,\mathrm{d} =$ min
$r)$ $89\,\mathrm{h} =$ min
$s)$ $7020\,\mathrm{s} =$ min
$t)$ $8640\,\mathrm{min} =$ d
$u)$ $9\,\mathrm{d} =$ s
$v)$ $41340\,\mathrm{min} =$ h
$w)$ $527\,\mathrm{h} =$ min
$x)$ $31\,\mathrm{d} =$ min
$y)$ $4\,\mathrm{a} =$ d
$z)$ $8\,\mathrm{a} =$ s

Aufgabe 2: *Rechne die Zeiten in die angegebene Einheit um.*

$a)$ $4,75\,\mathrm{h} =$ min
$b)$ $580\,\mathrm{min} =$ h
$c)$ $54,8\,\mathrm{min} =$ s
$d)$ $9547\,\mathrm{s} =$ min
$e)$ $2,54\,\mathrm{h} =$ s
$f)$ $56107\,\mathrm{s} =$ h
$g)$ $6,38\,\mathrm{h} =$ min
$h)$ $863\,\mathrm{min} =$ h
$i)$ $3349\,\mathrm{min} =$ h
$j)$ $11,45\,\mathrm{h} =$ min
$k)$ $459270\,\mathrm{s} =$ h
$l)$ $6704\,\mathrm{s} =$ min
$m)$ $0,6\,\mathrm{d} =$ h
$n)$ $9528\,\mathrm{min} =$ d
$o)$ $7614\,\mathrm{min} =$ h
$p)$ $0,04\,\mathrm{d} =$ s
$q)$ $1,89\,\mathrm{d} =$ min
$r)$ $8,31\,\mathrm{h} =$ min
$s)$ $14896\,\mathrm{s} =$ min
$t)$ $92760\,\mathrm{min} =$ d
$u)$ $4,672\,\mathrm{d} =$ s
$v)$ $10695\,\mathrm{min} =$ h
$w)$ $45,875\,\mathrm{h} =$ min
$x)$ $182,625\,\mathrm{d} =$ min

Aufgabe 3: *Rechne in die angegebene Einheit um.*

a) $45000\,\mathrm{g} = \quad \mathrm{kg}$	*b*) $340\,\mathrm{dm} = \quad \mathrm{m}$	*c*) $7\,\mathrm{kg} = \quad \mathrm{g}$
d) $9000\,\mathrm{kg} = \quad \mathrm{t}$	*e*) $400\,\mathrm{cm} = \quad \mathrm{m}$	*f*) $7000000\,\mathrm{mm} = \quad \mathrm{km}$
g) $5\,\mathrm{g} = \quad \mathrm{mg}$	*h*) $640000\,\mathrm{cm}^2 = \quad \mathrm{m}^2$	*i*) $4\,\mathrm{dm}^3 = \quad \mathrm{l}$
j) $2\,\mathrm{t} = \quad \mathrm{g}$	*k*) $34\,\mathrm{m}^3 = \quad \mathrm{l}$	*l*) $4\,\mathrm{cm}^3 = \quad \mathrm{mm}^3$
m) $5\,\mathrm{ha} = \quad \mathrm{dm}^2$	*n*) $73\,\mathrm{a} = \quad \mathrm{cm}^2$	*o*) $65000\,\mathrm{g} = \quad \mathrm{kg}$
p) $43\,\mathrm{ml} = \quad \mathrm{cm}^3$	*q*) $23\,\mathrm{kg} = \quad \mathrm{mg}$	*r*) $490000\,\mathrm{cm}^3 = \quad \mathrm{dm}^3$
s) $67000000\,\mathrm{mm}^2 = \quad \mathrm{dm}^2$	*t*) $450000\,\mathrm{g} = \quad \mathrm{kg}$	*u*) $504\,\mathrm{km}^2 = \quad \mathrm{m}^2$
v) $210000000\,\mathrm{g} = \quad \mathrm{t}$	*w*) $3\,\mathrm{km}^2 = \quad \mathrm{ha}$	*x*) $2\,\mathrm{km}^3 = \quad \mathrm{l}$

Aufgabe 4: *Berechne den Wert des Terms und gib dieses in der größtmöglichen Einheit ohne Nachkommastellen an.*

a) $3\,\mathrm{m} + 7\,\mathrm{cm} =$	*b*) $11\,\mathrm{dm} + 247\,\mathrm{mm} =$
c) $4\,\mathrm{kg} - 350\,\mathrm{g} =$	*d*) $45000\,\mathrm{g} - 2\,\mathrm{kg} =$
e) $34\,\mathrm{dm} - 120\,\mathrm{cm} =$	*f*) $40\,\mathrm{dm} + 2\,\mathrm{km} =$
g) $43\,\mathrm{m}^2 - 1320\,\mathrm{dm}^2 =$	*h*) $64\,\mathrm{cm}^2 + 3600\,\mathrm{mm}^2 =$
i) $12\,\mathrm{m} - 84\,\mathrm{dm} + 42\,\mathrm{cm} =$	*j*) $2\,\mathrm{km} - 3250\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{dm} =$
k) $6000\,\mathrm{cm}^3 - 2\,\mathrm{l} =$	*l*) $4000\,\mathrm{dm}^3 + 23\,\mathrm{m}^3 =$
m) $3\,\mathrm{a} + 30\,\mathrm{m}^2 =$	*n*) $789\,\mathrm{g} + 456\,\mathrm{kg} + 3\,\mathrm{t} =$
o) $300\,\mathrm{cm}^3 - 1000\,\mathrm{mm}^3 + 1\,\mathrm{dm}^3 =$	*p*) $72\,\mathrm{m}^3 - 3040000\,\mathrm{cm}^3 =$
q) $90000\,\mathrm{cm}^2 - 2\,\mathrm{m}^2 + 400\,\mathrm{dm}^2 =$	*r*) $1\,\mathrm{km}^2 + 1\,\mathrm{ha} + 1\,\mathrm{a} + 1\,\mathrm{m}^2 =$
s) $450\,\mathrm{g} - 753\,\mathrm{mg} + 2550753\,\mathrm{mg} =$	*t*) $2\,\mathrm{t} - 1962454\,\mathrm{g} =$
u) $3\,\mathrm{ha} - 4300\,\mathrm{m}^2 + 55\,\mathrm{a} =$	*v*) $1425\,\mathrm{mm} + 363\,\mathrm{cm} - 55\,\mathrm{mm} + 2\,\mathrm{dm} =$
w) $2300\,\mathrm{ml} - 2\,\mathrm{dm}^3 + 23\,\mathrm{l} + 3700\,\mathrm{cm}^3 =$	*x*) $3\,\mathrm{km} - 450\,\mathrm{cm} - 49\,\mathrm{m} + 3245\,\mathrm{dm} =$
y) $4000\,\mathrm{mm}^3 + 16\,\mathrm{l} + 28\,\mathrm{m}^3 =$	*z*) $34\,\mathrm{ha} - 2900\,\mathrm{a} + 23\,\mathrm{km}^2 =$

Aufgabe 5: *Berechne den Wert des Terms und gib dieses in der größtmöglichen Einheit ohne Nachkommastellen an.*

a) $3\,\mathrm{kg} + 5\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{kg} - 2\,\mathrm{m} =$	*b)* $23000\,\mathrm{ml} + 3\,\mathrm{dm} - 17\,\mathrm{cm} - 30\,\mathrm{mm} - 19\,\mathrm{l} =$
c) $4\,\mathrm{dm}^2 + 3000\,\mathrm{cm}^3 - 50\,\mathrm{cm}^2 + 2\,\mathrm{dm}^3 =$	*d)* $5\,\mathrm{kg} - 45\,\mathrm{min} + 30\,\mathrm{g} + 3\,\mathrm{h} =$
e) $8\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{s} + 3\,\mathrm{dm} - 4\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{g} =$	*f)* $3\,\mathrm{min} + 5\,\mathrm{cm}^2 - 20\,\mathrm{s} + 45\,\mathrm{mm}^2 =$
g) $6000\,\mathrm{mg} + 45\,\mathrm{min} + 29\,\mathrm{g} - 380\,\mathrm{s} =$	*h)* $53\,\mathrm{dm}^3 + 25\,\mathrm{l} + 39000\,\mathrm{ml} - 17000\,\mathrm{cm}^3 =$
i) $4\,\mathrm{d} + 2\,\mathrm{t} - 33\,\mathrm{h} - 1950\,\mathrm{kg} + 20\,\mathrm{min} =$	*j)* $2\,\mathrm{h} + 5\,\mathrm{m}^2 - 45\,\mathrm{dm}^2 - 4370\,\mathrm{s} =$
k) $60\,\mathrm{cm} + 360\,\mathrm{s} - 3\,\mathrm{dm} - 4\,\mathrm{min} + 9\,\mathrm{m} =$	*l)* $5\,\mathrm{h} + 23\,\mathrm{m} - 6780\,\mathrm{s} - 1790\,\mathrm{cm} =$
m) $5\,\mathrm{h} + 2\,\mathrm{ha} + 8\,\mathrm{g} + 3\,\mathrm{l} + 6\,\mathrm{km} =$	*n)* $113\,\mathrm{m}^3 + 4700\,\mathrm{mm}^2 - 45000\,\mathrm{l} - 33\,\mathrm{cm}^2 + 8\,\mathrm{h} =$
o) $4\,\mathrm{h} + 43\,\mathrm{m} - 63\,\mathrm{min} - 240\,\mathrm{cm} + 921\,\mathrm{s} =$	*p)* $23\,\mathrm{m}^3 - 345\,\mathrm{l} + 82\,\mathrm{dm}^3 + 43\,\mathrm{min} - 290\,\mathrm{s} =$
q) $3\,\mathrm{d} + 6\,\mathrm{t} - 241\,\mathrm{kg} - 2785\,\mathrm{min} =$	*r)* $6050\,\mathrm{min} + 3\,\mathrm{dm}^2 - 4\,\mathrm{d} - 270\,\mathrm{cm}^2 + 4200\,\mathrm{s} =$

Aufgabe 6: *Rechne die Temperaturen von der jeweiligen Einheiten in die angegebenen um! (Die angegebene Gleichung gibt die Zusammenhänge an.)*

$$T\,[\mathrm{K}] = T\,[^\circ\mathrm{C}] + 273,16$$
$$T\,[^\circ\mathrm{F}] = \frac{9}{5}T\,[^\circ\mathrm{C}] + 32$$

a) $200\,^\circ\mathrm{C} =$ $\quad$ K	*b)* $20\,^\circ\mathrm{C} =$ $\quad$ °F	*c)* $355\,\mathrm{K} =$ $\quad$ °C
d) $335\,\mathrm{K} =$ $\quad$ °F	*e)* $80\,^\circ\mathrm{C} =$ $\quad$ K	*f)* $180\,^\circ\mathrm{F} =$ $\quad$ °C
g) $91\,^\circ\mathrm{C} =$ $\quad$ °F	*h)* $-133\,^\circ\mathrm{C} =$ $\quad$ K	*i)* $40\,\mathrm{K} =$ $\quad$ °C
j) $-180\,^\circ\mathrm{C} =$ $\quad$ K	*k)* $550\,\mathrm{K} =$ $\quad$ °F	*l)* $-340\,^\circ\mathrm{F} =$ $\quad$ °C
m) $660\,^\circ\mathrm{C} =$ $\quad$ °F	*n)* $390\,^\circ\mathrm{F} =$ $\quad$ K	*o)* $777000\,^\circ\mathrm{C} =$ $\quad$ K
p) $777000\,^\circ\mathrm{F} =$ $\quad$ K	*q)* $4\,\mathrm{K} =$ $\quad$ F	*r)* $65\,\mathrm{K} =$ $\quad$ F

Aufgabe 7: *Rechne in die angegebenen Einheiten um! Runde falls nötig auf drei Nachkommastellen. (Die angegebene Gleichung gibt die Zusammenhänge an.)*

$$m\,[\text{oz.}] = 28,349523125 \cdot m\,[\text{g}]$$
$$m\,[\text{ct}] = 0,2m\,[\text{g}]$$

a) $85\,\text{g} =$ oz.	*b*) $33\,\text{kg} =$ ct	*c*) $742\,\text{ct} =$ g
d) $246\,\text{oz.} =$ ct	*e*) $373\,\text{ct} =$ g	*f*) $17\,\text{kg} =$ oz.
g) $467\,\text{g} =$ ct	*h*) $3\,\text{t} =$ oz.	*i*) $2461\,\text{oz.} =$ kg
j) $346\,\text{ct} =$ g	*k*) $548\,\text{oz.} =$ ct	*l*) $4377\,\text{ct} =$ kg
m) $5873\,\text{oz.} =$ ct	*n*) $5734\,\text{g} =$ ct	*o*) $467\,\text{kg} =$ ct
p) $347\,\text{ct} =$ oz.	*q*) $583029\,\text{oz.} =$ t	*r*) $3477\,\text{oz.} =$ ct

Aufgabe 8: *Rechne in die angegebenen Einheiten um! Runde falls nötig auf drei Nachkommastellen. (Die angegebene Gleichung gibt die Zusammenhänge an.)*

$$\varphi\,[{}'] = 60 \cdot \varphi\,[{}^\circ]$$
$$\varphi\,[{}''] = 60 \cdot \varphi\,[{}']$$
$$\varphi\,[{}^\circ] = 15 \cdot \varphi\,\left[{}^{\text{h}}\right]$$
$$\varphi\,[\text{rad}] = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \varphi\,[{}^\circ]$$
$$\varphi\,[{}^\circ] = 0,9 \cdot \varphi\,[\text{gon}]$$

a) $156\,^\circ =$ gon	*b*) $47\,\text{gon} =$ rad	*c*) $11\,^{\text{h}} =$ $^\circ$
d) $2,54\,\text{rad} =$ $''$	*e*) $8,34\,^{\text{h}} =$ gon	*f*) $1,552\,\text{rad} =$ $'$
g) $281\,^\circ =$ rad	*h*) $34063\,'' =$ gon	*i*) $3\,\text{rad} =$ $^\circ$
j) $307\,^\circ =$ $^{\text{h}}$	*k*) $813\,' =$ $^\circ$	*l*) $200\,\text{gon} =$ $''$
m) $35^\circ =$ $''$	*n*) $16,4\,^{\text{h}} =$ gon	*o*) $48235\,' =$ gon
p) $102,2\,^\circ =$ $''$	*q*) $5,37\,^{\text{h}} =$ rad	*r*) $89346\,'' =$ $^\circ$

Aufgabe 9: *Rechne in die angegebenen Einheiten um! Runde falls nötig auf drei Nachkommastellen. (Die angegebene Gleichung gibt die Zusammenhänge an.)*

$$x\,[\mathrm{m}] = 39,3701x\,[\mathrm{in}]$$
$$x\,[\mathrm{m}] = 3,28084x\,[\mathrm{ft}]$$
$$x\,[\mathrm{mile}] = 1,60934x\,[\mathrm{km}]$$
$$x\,[\mathrm{mile}] = 1760x\,[\mathrm{yd}]$$

a) $25\,\mathrm{m} = \qquad \mathrm{in}$	*b*) $73\,\mathrm{yd} = \qquad \mathrm{ft}$	*c*) $48\,\mathrm{in} = \qquad \mathrm{ft}$
d) $27\,\mathrm{yd} = \qquad \mathrm{m}$	*e*) $58\,\mathrm{km} = \qquad \mathrm{ft}$	*f*) $234\,\mathrm{km} = \qquad \mathrm{mile}$
g) $236\,\mathrm{yd} = \qquad \mathrm{in}$	*h*) $878\,\mathrm{ft} = \qquad \mathrm{m}$	*i*) $684\,\mathrm{in}^2 = \qquad \mathrm{ha}$
j) $9434\,\mathrm{ft}^2 = \qquad \mathrm{mile}^2$	*k*) $4378\,\mathrm{m}^2 = \qquad \mathrm{yd}^2$	*l*) $3478\,\mathrm{mile}^2 = \qquad \mathrm{ha}$
m) $1839\,\mathrm{mile}^2 = \qquad \mathrm{in}^2$	*n*) $2478\,\mathrm{yd}^2 = \qquad \mathrm{mile}^2$	*o*) $7638\,\mathrm{in}^3 = \qquad \mathrm{m}^3$
p) $6426\,\mathrm{ft}^3 = \qquad \mathrm{mile}^3$	*q*) $3458\,\mathrm{m}^3 = \qquad \mathrm{yd}^3$	*r*) $538\,\mathrm{mile}^3 = \qquad \mathrm{km}^3$
s) $389\,\mathrm{mile}^3 = \qquad \mathrm{in}^3$	*t*) $694\,\mathrm{yd}^3 = \qquad \mathrm{mile}^3$	*u*) $73\,\mathrm{l} = \qquad \mathrm{ft}^3$
v) $45\,\mathrm{l} = \qquad \mathrm{mile}^3$	*w*) $38\,\mathrm{l} = \qquad \mathrm{yd}^3$	*x*) $95\,\mathrm{l} = \qquad \mathrm{in}^3$

Aufgabe 10: *Rechne in die angegebenen Einheiten um! Runde falls nötig auf drei Nachkommastellen. (Die angegebene Gleichung gibt die Zusammenhänge an.)*

$$v\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right] = 3,6\cdot v\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$
$$v\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right] \approx 1,60934\cdot v\,[\mathrm{mph}]$$
$$v\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right] = 1,852\cdot v\,[\mathrm{kn}]$$

a) $35\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	*b*) $27\,\mathrm{mph} = \qquad \mathrm{kn}$	*c*) $458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \qquad \mathrm{mph}$
d) $156\,\mathrm{mph} = \qquad \mathrm{kn}$	*e*) $34\,\mathrm{kn} = \qquad \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	*f*) $126\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \qquad \mathrm{mph}$
g) $1326\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \qquad \mathrm{mph}$	*h*) $27\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \qquad \mathrm{kn}$	*i*) $4458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \qquad \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
j) $347\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \qquad \mathrm{mph}$	*k*) $193\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \qquad \mathrm{kn}$	*l*) $94\,\mathrm{mph} = \qquad \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
m) $83\,\mathrm{mph} = \qquad \mathrm{kn}$	*n*) $63,14\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \qquad \mathrm{kn}$	*o*) $4371\,\mathrm{mph} = \qquad \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$
p) $16942\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \qquad \mathrm{mph}$	*q*) $48258\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \qquad \mathrm{kn}$	*r*) $236\,\mathrm{mph} = \qquad \mathrm{kn}$

Aufgabe 11: *Rechne in die angegebenen Einheiten um! Runde falls nötig auf drei Nachkommastellen. (Die angegebene Gleichung gibt die Zusammenhänge an.)*

$$E\,[\mathrm{eV}] \approx 1{,}6021766208 \cdot 10^{-19} \cdot E\,[\mathrm{J}]$$
$$E\,[\mathrm{Wh}] = 3600 \cdot E\,[\mathrm{J}]$$
$$E\,[\mathrm{kcal}] = 4184 \cdot E\,[\mathrm{J}]$$

$a)$ $346\,\mathrm{Wh} = \quad \mathrm{J}$	$b)$ $247\,\mathrm{J} = \quad \mathrm{kcal}$	$c)$ $759\,\mathrm{Wh} = \quad \mathrm{J}$
$d)$ $3834\,\mathrm{keV} = \quad \mathrm{Wh}$	$e)$ $498\,\mathrm{kcal} = \quad \mathrm{J}$	$f)$ $389\,\mathrm{kcal} = \quad \mathrm{Wh}$
$g)$ $679\,\mathrm{eV} = \quad \mathrm{J}$	$h)$ $548\,\mathrm{keV} = \quad \mathrm{J}$	$i)$ $3056\,\mathrm{Wh} = \quad \mathrm{kcal}$
$j)$ $659\,\mathrm{eV} = \quad \mathrm{J}$	$k)$ $7604\,\mathrm{kcal} = \quad \mathrm{eV}$	$l)$ $5693\,\mathrm{kcal} = \quad \mathrm{Wh}$
$m)$ $2790\,\mathrm{J} = \quad \mathrm{Wh}$	$n)$ $17506\,\mathrm{Wh} = \quad \mathrm{keV}$	$o)$ $3477\,\mathrm{keV} = \quad \mathrm{J}$
$p)$ $3689\,\mathrm{eV} = \quad \mathrm{kcal}$	$q)$ $9054\,\mathrm{J} = \quad \mathrm{MeV}$	$r)$ $2367\,\mathrm{kcal} = \quad \mathrm{MeV}$

Aufgabe 12: *Rechne in SI-Einheiten um.*

$a)$ $5\,\mathrm{km} =$	$b)$ $6\,\mathrm{cm} =$	$c)$ $150\,\mathrm{g} =$
$d)$ $10\,\mathrm{min} =$	$e)$ $1\,\mathrm{h} =$	$f)$ $7\,\mathrm{d} =$
$g)$ $1\,\mathrm{a} =$	$h)$ $15060\,\mathrm{mm} =$	$i)$ $\frac{350\,\mathrm{g}}{20\,\mathrm{dm}} =$
$j)$ $\frac{0{,}18\,\mathrm{kA}}{3\,\mathrm{min}} =$	$k)$ $\frac{100\,\mathrm{cA}}{2000\,\mathrm{mcd}} =$	$l)$ $\frac{50\,\mathrm{dmol}}{0{,}2\,\mathrm{cK}} =$
$m)$ $\frac{0{,}05\,\mathrm{Mg}}{500\,\mathrm{cs}} \cdot 1\,\mathrm{hmol} =$	$n)$ $\frac{4\,\mathrm{h}}{200\,\mathrm{cK}} : \frac{240\,\mathrm{min}}{4\,\mathrm{GA}} =$	$o)$ $\frac{3\,\mathrm{min} \cdot 4\,\mathrm{kK} \cdot \mu\mathrm{A}}{4\,\mathrm{mmol}} =$
$p)$ $60\,\mathrm{g} + 8\,\mathrm{min} \cdot 32\,\mathrm{mm} =$	$q)$ $\frac{3\,\mathrm{Mmol}}{4\,\mathrm{t} \cdot 2\,\mathrm{km}} =$	$r)$ $\frac{8\,\mathrm{l}}{5\,\mathrm{cm}} : \frac{64\,\mathrm{dm}}{5\,\mathrm{hcd}} =$

Aufgabe 13: *Rechne in die angegebene Einheit um.*

$1\,\mathrm{B} = 8\,\mathrm{bit} \quad ; \quad 1024\,\mathrm{B} = 1\,\mathrm{kB} \quad ; \quad 1024\,\mathrm{kB} = 1\,\mathrm{MB} \quad ; \quad 1024\,\mathrm{MB} = 1\,\mathrm{GB}$

a) $57\,\mathrm{B} =$ bit

b) $459\,\mathrm{kB} =$ B

c) $21\,\mathrm{GB} =$ kB

d) $67k\,\mathrm{B} =$ bit

e) $79\,\mathrm{MB} =$ bit

f) $357864\,\mathrm{bit} =$ B

g) $2\,\mathrm{GB} =$ B

h) $7\,\mathrm{GB} =$ bit

i) $55296\,\mathrm{MB} =$ kB

j) $7\,\mathrm{GB} =$ bit

k) $8388608\,\mathrm{bit} =$ kB

l) $6442450944\,\mathrm{B} =$ GB

Aufgabe 14: *Zeige durch eine Einheitenrechnung, ob die Gleichung bezüglich der Einheiten richtig erscheint.*

a) $E = mvth$

b) $F = \frac{mv^2}{r}$

c) $F = mxt$

d) $mal = \frac{1}{2}mv^2$

e) $P = URI$

f) $C = \epsilon_0 x$

g) $\hbar f = Fx$

h) $\frac{\hbar}{xm} = \frac{q^2}{\epsilon_0 rm}$

i) $\epsilon_0 l^2 = \frac{rt^2}{R}$

Aufgabe 15: *Zeige die Richtigkeit der Gleichung.* (keine Lösung!)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Aufgabe 16: *Stell die Gleichung nach der fehlenden Größe um und bestimme die resultierende Einheit. Gib den Wert des Terms in SI-Grundeinheiten an.*

a) $eU = \frac{1}{2}mv^2$ mit: $e = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; $U = 23\,\mathrm{kV}$; $m = 9,109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

b) $\frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ mit: $Q = 4,52 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$; $A = 3,4\,\mathrm{mm}^2$; $d = 12\,\mu\mathrm{m}$; $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{V \cdot m}}$

c) $\frac{U}{I} = \rho \frac{l}{\pi r^2}$ mit: $U = 220\,\mathrm{V}$; $I = 124\,\mu\mathrm{A}$; $l = 7,2\,\mathrm{cm}$; $\rho = 1,721 \cdot 10^{-2}\,\frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$

d) $evB = \frac{mv^2}{r}$ mit: $B = 0,44\,\mathrm{T}$; $e = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; $r = 5,3\,\mathrm{cm}$; $5,88 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

e) $pV = Nk_BT$ mit: $T = 300\,\mathrm{K}$; $p = 0,95\,\mathrm{bar}$; $N = 6,022 \cdot 10^{23}$; $k_B = 1,381 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$

f) $p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2a}{V^2}$ mit: $R = 8,314\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{molK}}$; $n = 0,2\,\mathrm{mol}$; $p = 1,013\,\mathrm{bar}$;

$T = 293\mathrm{K}$; $V = 44,8\,\mathrm{l}$; $a = 137,8\,\frac{\mathrm{Jm}^3}{\mathrm{mol}^2}$

Ausgangswährung	100 \$	100 €	100 £	100 €	100 \$	100 £
Zielwährung	94 €	106 \$	115 €	87 £	82 £	122 \$

Aufgabe 17: *Rechne in die angegebene Währung um. Verwende die fiktive Umrechnungstabelle, wobei die Ausgangswährung in die Zielwährung getauscht wird. (Runde falls nötig auf zwei Nachkommastellen!)*

a) 122 \$ = €	*b)* 106 \$ = £	*c)* 450 £ = \$
d) 950 € = \$	*e)* 1 £ = €	*f)* 125 \$ = £
g) 60 € = £	*h)* 492 £ = €	*i)* 95 4\$ = €
h) 0,5 € = \$	*k)* 20 £ = €	*l)* 33,33 € = £

Ausgangswährung	100 \$	100 €	100 £	100 €	100 \$	100 £
Zielwährung	94 €	106 \$	115 €	87 £	82 £	122 \$

Aufgabe 18: *Welche Geldsumme ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den angegeben Geldsummen ein. Verwende die fiktive Umrechnungstabelle, wobei die Ausgangswährung in die Zielwährung getauscht wird.*

a) 50 \$ 47,5 €	*b*) 1 € 1 £	*c*) 1 £ 1 \$
d) 24000 \$ 19780 £	*e*) 5600 € 5930 \$	*f*) 5082 € 4420 £
g) 83787 £ 96300 €	*h*) 5 £ 5,9 €	*i*) 854 \$ 680 £
h) 900 € 792 £	*k*) 14,5 \$ 15,3 €	*l*) 1,74 £ 2,18 \$

Aufgabe 19: *Gib den Wert des Terms in der größtmöglichen Einheit an, sodass kein Komma gesetzt werden muss.*

a) $45\,\mathrm{cm} + 2\,\mathrm{m} - 13\,\mathrm{dm} =$	*b*) $4,4\,\mathrm{kg} - 1298\,\mathrm{g} =$
c) $1\,\mathrm{h} + 34\,\mathrm{min} + 29\,\mathrm{s} =$	*d*) $3\,\mathrm{km} - 34\,\mathrm{mm} =$
e) $38\,\mathrm{mm} + 2\,\mathrm{dm} - 13\,\mathrm{cm} =$	*f*) $7,8\,\mathrm{t} - 9234\,\mathrm{mg} =$
g) $243\,\mathrm{min} - 2\,\mathrm{h} + 724\,\mathrm{s} =$	*h*) $0,05\,\mathrm{kg} + 341,3\,\mathrm{g} - 2300\,\mathrm{mg} =$
i) $750\,\mathrm{s} + 17,5\,\mathrm{min} + 0,5\,\mathrm{h} =$	*j*) $345\,\mathrm{cm} + 230\,\mathrm{mm} + 63,2\,\mathrm{dm} =$
k) $3,4\,\mathrm{kg} + 100600\,\mathrm{g} =$	*l*) $4,5\,\mathrm{h} - 1800\,\mathrm{s} + 660\,\mathrm{min} =$

Aufgabe 20: *Welche Länge ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den angegeben Längen ein.*

a) 4 m 44 dm	*b*) 5600 mm 46 cm	*c*) 2 km 230 m
d) 92 dm 9200 mm	*e*) 128 cm 1,3 m	*f*) 82 mm 1 dm
g) 7,3 cm 0,9 dm	*h*) 0,04 km 39000 cm	*i*) 7,2 dm 6920 mm
j) 459 cm 4,59 m	*k*) 1,82 km 1820000 cm	*l*) 2345 m 0,3 km

Aufgabe 21: *Welches Gewicht ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den angegeben Längen ein.*

a) 1340 g 2 kg	*b)* 3,3 t 3300 kg	*c)* 54 g 5400 mg
d) 25,2 kg 0,252 t	*e)* 0,0014 t 1400 g	*f)* 235 mg 1,3 kg
g) 4,4 kg 7249 g	*h)* 0,06 g 43 mg	*i)* 2526234 g 2,5 t
j) 11,7 t 12344 kg	*k)* 0,349 g 452 mg	*l)* 0,00234 t 3250000 mg

Aufgabe 22: *Welche Zeitspanne ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den angegeben Längen ein.*

a) 3 min 150 s	*b)* 5 h 315 min	*c)* 2 h 8000 s
d) 82 min 2347 s	*e)* 283 h 7657 min	*f)* 6 d 144 h
g) 3,4 min 245 s	*h)* 245463 s 2 d	*i)* 351 min 5,9 h
j) 45 min 0,75 h	*k)* 12 h 0,5 d	*l)* 0,25 min 15 s

Aufgabe 23: *An einer Tankstelle wurden exakt* 32 l *Diesel getankt und* 40 € *bezahlt. Berechne den Preis pro Liter.*

Aufgabe 24: *An einer Tankstelle wird angezeigt, dass ein Liter Benzin* 1,40 e *kosten soll. Berechne den Preis für* 25 l.

Aufgabe 25: *An einer Fleischtheke wurde eine Mortadella mit einem Gewicht von* 200 g *für* 4,50 e *eingekauft. Berechne den Preis für* 1 kg *und* 100 g*, der überall ausgezeichnet sein muss.*

Aufgabe 26: *Auf einem Straßenschild steht, dass die nächste Stadt* 17 km *in Fahrtrichtung entfernt liegt. Durch die kleinen Streckenabschnittsschilder auf der Straße kann erlesen werden, dass diese Straße* 56,7 km *bis zu diesem Punkt lang ist und dass diese Zahl in Fahrtrichtung zunimmt. Diese Straße endet in der nächsten Stadt. Berechne die gesamte Länge der Straße.*

Aufgabe 27: *Ein Würfel mit einer Seitenlänge von* 12 cm *besteht aus hundert kleineren Würfeln und wiegt* 0,8 kg. *Berechne das Gewicht eines kleinen Würfels. Berechne außerdem wie schwer ein noch größerer Würfel aus acht der großen Würfeln wäre.*

Aufgabe 28: *Ein Quadrat mit einer Seitenlänge von* 6 cm *besitzt eine Fläche von* $36\,\text{cm}^2$. *Wie groß wäre eine Fläche eines Quadrat mit halber beziehungsweise doppelter Seitenlänge?*

Aufgabe 29: *Ein Bitcoin* ₿ *ist eine virtuelle Währung für Internetgeschäfte und ist aktuell* 1129 € *wert. Ein Auto aus der Tschechischen Republik soll* 120000 Kč *tschechische Kronen kosten, wobei der Wechselkurs bei* 27 Kč *pro Euro liegt. Berechne, ob* 4 ₿ *für den Kauf des Autos ausreichen würden.*

Aufgabe 30: *Ein Mobilfunkanbieter bietet bei einem Tarif an, dass beim Internetroaming außerhalb der europäischen Union nur Kosten in Höhe von* 0,02 € *pro Megabyte Datenvolumen anfallen, verlangt aber eine Grundgebühr von* 19,99 € *pro Monat. Ein anderer Anbieter verlangt keine Grundgebühr und setzt einen Preis von* 2,5 *ct pro Megabyte Datenvolumen an. Berechne welcher Anbieter günstiger wäre, wenn vier Gigabyte Datenvolumen in einem Monat verbraucht werden.*

Aufgabe 31: *Rechne auf die angegebene Einheit um.*

a) 4 m = mm	*b*) 3 dm = cm
c) 7 cm = mm	*d*) 4500 cm = m
e) 230 dm = m	*f*) 34000 mm = dm

Aufgabe 32: *Rechne auf die angegebene Einheit um.*

a) 3 kg = g	*b*) 6 g = mg
c) 7 t = kg	*d*) 9 t = g
e) 56000 mg = g	*f*) 4500 g = kg

Aufgabe 33: *Rechne auf die angegebene Einheit um.*

$a)$ $2\,\mathrm{min} =$ s	$b)$ $18\,\mathrm{h} =$ min
$c)$ $6\,\mathrm{h} =$ s	$d)$ $720\,\mathrm{s} =$ min
$e)$ $50400\,\mathrm{s} =$ h	$f)$ $4\,\mathrm{d} =$ s

Aufgabe 34: *Berechne den Wert des Terms. (Achte auf die Einheiten!)*

$a)$ $60\,\mathrm{g} : 3 =$	$b)$ $55\,\mathrm{km} : 11\,\mathrm{km} =$	$c)$ $7 \cdot 12\,\mathrm{m} =$
$d)$ $11\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm} =$	$e)$ $75\,\mathrm{l} : 15 =$	$f)$ $84\,\mathrm{g} : 7\,\mathrm{g} =$
$d)$ $8\,\mathrm{cm}^2 \cdot 9\,\mathrm{cm} =$	$e)$ $8\,\mathrm{m}^3 : 2\,\mathrm{m} =$	$f)$ $9\,\mathrm{km}^3 : 3\,\mathrm{km}^2 =$

Weitere Einheitenrechnungsübungen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden: Einheitenrechnungen: leichteres Niveau, mittleres Niveau oder schwereres Niveau

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.21) Lösungen zu Einheiten.

3.22 Verhältnisse

Ein *Verhältnis* lässt sich durch einen *Bruch* oder einer *Division* darstellen. *Verhältnisse* werden benutzt, um Vergrößerungen oder Verkleinerungen zu verdeutlichen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= 1:4 \qquad \text{Verkleinerung} \\ \frac{4}{1} &= 4:1 \qquad \text{Vergrößerung} \end{aligned} \tag{3.132}$$

Diese Form von *Verhältnissen* wird bei Karten „Maßstab“ genannt. Dabei ist die erste Zahl immer die Darstellung auf der Karte, während die zweite Zahl die dazugehörige Strecke in der Natur widerspiegelt. So wäre bei einem *Maßstab* von 1 : 1000 ein gemessener Meter auf der Karte in der Natur $1000m$.
Verhältnisse werden auch in vielen anderen Bereichen, wie der Chemie und beim Kochen, verwendet. Dabei werden *Verhältnisgleichungen* benötigt:

$$\frac{4}{500g} = \frac{3}{x} \ , \tag{3.133}$$

wobei das Beispiel so interpretiert werden kann, dass für vier Personen $500g$ benötigt werden und nun die Menge für drei Personen bestimmt werden soll, dabei gilt das *Verhältnis* $\frac{4}{500g} = 1 : 125g$ (pro Person $125g$), sodass die $125g$ nur mit der Anzahl der Personen *multipliziert* werden muss (wie es durch *Äquivalenzumformung* ebenso bestimmt wird).
Des Weiteren kann ein *Verhältnis* benutzt werden, um zum Beispiel zu verdeutlichen, dass auf jedes Sauerstoffmolekül O_2 eine gewisse *Anzahl* # von Stickstoffmolekülen N_2 kommen, wenn Luft aus unserer Atmosphäre betrachtet wird:

$$\frac{\#(O_2)}{21\%} = \frac{\#(N_2)}{78\%} \ \Rightarrow \ \frac{78\%\#(O_2)}{21\%} = \#(N_2) \ \Rightarrow \ 3,714\#(O_2) \approx \#(N_2) \ \Rightarrow \ 3,714 : 1 \ , \tag{3.134}$$

wobei die Information, welche Zahl zu welcher Größe gehört, angegeben werden sollte.

Generell lässt sich festhalten, dass *Verhältnisgleichungen* eine Gleichheit von *Quotienten* beschreiben und die allgemeine Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ besitzen. *Verhältnisse* werden bei *Streckungen* und *Ähnlichkeiten* sowie bei der Berechnung von *Strahlensatz-* und *Trigonometrieaufgaben* vorkommen.

3.22.1 Übungsaufgaben zu Verhältnissen

Aufgabe 1: *Fülle die Lücken in den Sätzen aus.*

a) Wenn auf der Karte ein Maßstab von 1 : 1000 vermerkt ist, dann ist eine Strecke in der Realität ________-mal größer.

b) Eine Strecke ist in der Realität 25000-mal größer als auf der Karte. Somit handelt es sich um einen ________ Maßstab.

c) Wenn auf der Karte ein Maßstab von 1 : 300000 vermerkt ist, dann ist eine 900 km Strecke in der Realität auf der Karte ________ lang.

d) Wenn auf der Karte ein Maßstab von 50 : 1 vermerkt ist, dann ist eine Strecke von 5 dm auf der Karte in der Realität ________ lang.

e) Auf einer Karte ist eine Strecke 4 cm lang, während sie in der Realität 6 km beträgt. Somit handelt es sich um einen ________ Maßstab.

Aufgabe 2: *Berechne die fehlenden Längen in den Tabellen.*

a) Maßstab: 1 : 500

Planung	Realität
5 cm	
9 cm	
13 cm	

b) Maßstab: 1 : 30000

Planung	Realität
45 cm	
1,8 dm	
34 mm	

c) Maßstab: 1 : 2000

Planung	Realität
	50 m
	120 m
	5 m

d) Maßstab: 1 : 250000

Planung	Realität
8 mm	
	125 km
3,7 mm	

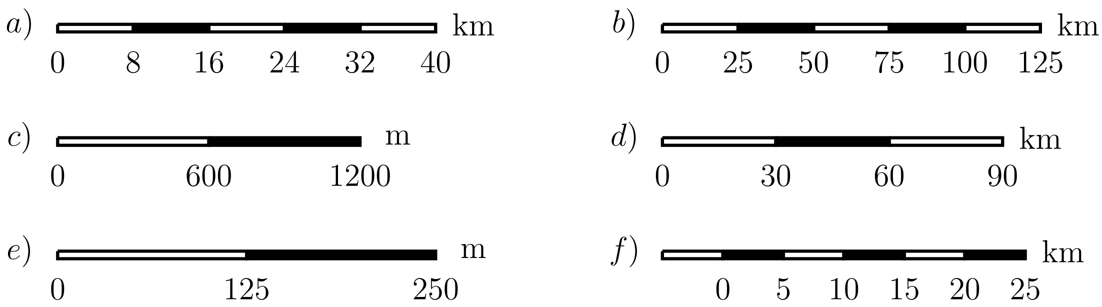
e) Maßstab: 8 : 1

Planung	Realität
	7 cm
2,4 dm	
	11 dm

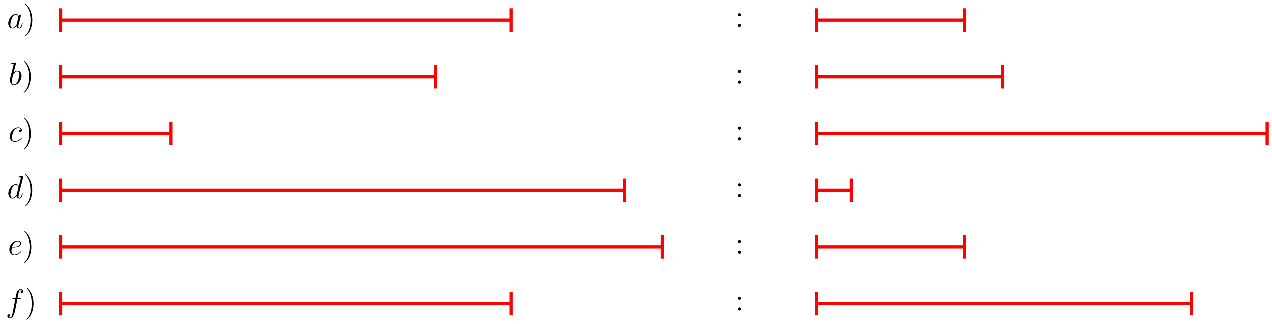
f) Maßstab: 4 : 3

Planung	Realität
	12 cm
240 km	
	7,2 dm

Aufgabe 3: *Gib den dargestellten Maßstab an.*



Aufgabe 4: *Gib den Maßstab der jeweiligen beiden verglichenen Strecken an.*



Aufgabe 5: *Fülle die freien Felder in der gegeben aus.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Entfernung Karte	6 cm	cm	15 cm	cm	45 m	1,7 dm
Entfernung real	180000 cm	8 km	km	2,5 cm	3 mm	km
Maßstab		1 : 200000	1 : 5000000	8 : 1		1 : 40000

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.22) Lösungen zu Verhältnissen.

3.23 Gemischte Algebraaufgaben

Aufgabe 1: *Sortiere die Zahlen nach ihrer Größe.*

a) $\frac{5}{3}$; $1,41$; $2,13$; $\frac{9}{4}$; $\frac{11}{6}$; 2 ; $\frac{15}{7}$; $2,26$.

b) $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{4}{7}$; $0,57$; $\sqrt{3}$; $\frac{3}{8}$; $0,45$; $\frac{5}{9}$.

c) $\sqrt{5}$; $\frac{7}{3}$; $\sqrt{6}$; $2,51$; $\frac{14}{5}$; $2,33$; $\frac{37}{16}$; $\frac{17}{6}$.

d) $\ln 36$; π ; $\sqrt{13}$; $3,141$; e ; $\frac{13}{4}$; $\frac{19}{6}$; $3,\bar{3}$.

e) 5^2 ; $\frac{51}{2}$; $\sqrt{620}$; 8π ; 3^3 ; $\frac{128}{25}$; $24,79$; $\lg 10^{25,01}$.

f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{7}{10}$; $\frac{\pi}{4}$; $0,734$; $\ln 2$; $\frac{2}{3}$; $0,69$; $\frac{e}{3}$.

g) $-\frac{7}{3}$; $-\sqrt{6,25}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $(-1,34)^3$; $-\ln \pi^2$; $-\frac{15}{6}$; $-2,27$; $-\frac{5e}{6}$.

Aufgabe 2: *Löse die Gleichungen nach x auf.*

a) $(x-2)(x+2)$

b) $(x+3)(x+1)$

c) $(x-4)(x-5)$

d) $(x+1)(x-6)$

e) $(x-2,25)(x+3,3)$

f) $(x-1,45)(x+2,05)$

g) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

h) $\left(x+\frac{7}{3}\right)\left(x+\frac{2}{9}\right)$

i) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$

j) $(x-\ln 2)\left(x-\sqrt[3]{e\pi^4}\right)$

Aufgabe 3: *Stelle die Gleichung nach der fehlenden Variable um und setze anschließend die gegebenen Werte ein, um den Wert des Terms zu berechnen.*

a) $x = vt$	mit: $v = \frac{11}{2}$ und $x = \frac{3}{4}$
b) $V = abc$	mit: $V = 5$; $a = 2,25$ und $b = \frac{1}{6}$
c) $V = \frac{1}{3}Gh$	mit: $h = \frac{8}{5}$ und $V = 8$
d) $x = \frac{1}{2}at^2$	mit: $t = \frac{3}{4}$ und $x = \frac{4}{3}$
e) $x = \frac{1}{2}at^2$	mit: $a = \frac{9}{2}$ und $x = \frac{1}{8}$
f) $U = I\left(R_1 + R_2\right)$	mit: $U = 20$; $I = 3$ und $R_1 = 470$
g) $U = \frac{I}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$	mit: $U = -240$; $I = -5$ und $R_2 = 1000$
h) $O = 2ab + 2ac + 2bc$	mit: $a = 7$; $b = \frac{9}{5}$ und $O = 144$
i) $c^2 = a^2 + b^2$	mit: $c = \frac{7}{8}$ und $a = \frac{2}{3}$
j) $a = \sqrt{c^2 - b^2}$	mit: $c = \sqrt{8}$ und $a = \sqrt{5}$
k) $A = \frac{a+c}{2}h$	mit: $c = 41$; $A = 83$ und $h = 8$
l) $V = \frac{s^3}{12}\sqrt{2}$	mit: $V = 81$
m) $O = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + s_1\left(r_1 + r_2\right)\right)$	mit: $O = 5$; $r_1 = \sqrt{3}$ und $r_2 = \frac{5}{3}$
n) $A = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 - \frac{sh}{2}$	mit: $A = \frac{10}{3}$; $\alpha = 44,7$; $h = \sqrt{5}$ und $s = \ln 4$
o) $O = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + s_1\left(r_1 + r_2\right)\right)$	mit: $O = 3,4$; $r_1 = \frac{1}{10}$ und $s_1 = \sqrt{2}$
p) $f = ax^2 + bx + c$	mit: $f = 0$; $a = 3$; $b = \frac{5}{2}$ und $c = -4$
q) $x = \frac{1}{2}at^2 + vt + s$	mit: $a = 11$; $x = 50$; $v = \frac{5}{4}$ und $s = \ln 5$
r) $N = Ae^{\lambda t}$	mit: $N = 22500$; $A = 12000$ und $t = 365,249$

Aufgabe 4: *Berechne alle freien Zellen der Tabelle. Die Rechenvorschriften sind jeweils in der ersten Spalte gegeben.*

	1	2	3	4	5	6	7
v	1	2	$1,75$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\sqrt{2}$
t	2	4	$2,25$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
$a = v \cdot t$	2						
$x = \frac{1}{2}at^2 + vt$	6						
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{9}}}$	$\approx 1{,}06$						
$L = \frac{x}{\gamma}$	$\approx 5{,}66$						
$m = \frac{4}{3}\pi x^3$	$\approx 904{,}78$						
$F = m\gamma a$	$\approx 1919{,}22$						
$r = \frac{\gamma a}{v^2}$	2,12						
$E = \frac{1}{2}mv^2$	$\approx 1809{,}56$						
$h = \frac{E}{F}$	$\approx 0{,}94$						

Aufgabe 5: *Übersetze den Text in eine Gleichung.*

a) Das dreifache der gesuchten Zahl ergibt 81.

b) Das doppelte der gesuchten Zahl reduziert um 4 ergibt 11.

c) Die gesuchte Zahl subtrahiert um 10 ist identisch zum Produkt aus der Zahl und 5.

d) Die doppelte Summe aus der Zahl und sieben ergibt die Zahl dividiert durch vier.

e) Die gesuchte Zahl befindet sich in einem Nenner dessen Zähler 5 ist. Die Summe aus diesem Bruch mit 5 ist äquivalent zu 8.

f) Der Quotient der gesuchte Zahl dividiert durch 6 erhöht um 3 ist gleich der Summe aus der Zahl und 3.

g) Das vierfache einer gesuchten Zahl addiert mit dem doppeltem der Summe aus der Zahl und 3 ergibt 0.

h) Die Hälfte der Differenz von 8 und dem gesuchten Minuenden ist gleich den Summanden 4 und der Zahl.

i) Ein Drittel der gesuchten Zahl erhöht um 4 ergibt sich zu drei Vierteln der Zahl subtrahiert um ein Halb.

j) Ein Neuntel addiert zur gesuchten Zahl, welche mit sich selbst multipliziert wird ergibt sich zum Quotienten aus 2 und der Zahl als Dividenden.

k) Das Produkt aus der Summe von 5 und der gesuchten Zahl mit der Differenz der doppelten Zahl und dem Subtrahenden 10 ergibt sich zur Zahl subtrahiert von 24.

l) Die negative gesuchte Zahl addiert um 11 ergibt sich aus einer Summe von Produkten, welchen die Zahl als gemeinsamen Faktor haben. Die jeweiligen anderen Faktoren sind 3 und 5.

m) Das Produkt der Summen von der gesuchten Zahl und 7 mit der gesuchten Zahl und 4 ist äquivalent zum Quotienten aus der Zahl dividiert durch 5.

n) Die gesuchte Zahl mit einer Potenz von 3 addiert um das dreifache des Quadrat der Zahl ist äquivalent zur Differenz der vierten Wurzel aus der Zahl und dem Minuenden 11.

o) Die Wurzel aus dem Produkt von der gesuchten Zahl und 8 ergibt sich zu dem Quadrat der Summe aus der Zahl und 6.

p) Der Logarithmus der gesuchten Zahl zur Basis 10 subtrahiert von 12 ist gleich der Zahl im Exponenten zur Basis 2 addiert mit dem Produkt der Zahl zum Quadrat und 7.

Aufgabe 6: *Schreibe die Aufgabe so um, dass sie kürzer wird.*

a) $\textcolor{red}{\bullet} + 0 =$

b) $\textcolor{red}{\bullet} - 0 =$

c) $\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet} =$

d) $\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet} =$

e) $\textcolor{red}{\bullet} + (\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet}) =$

f) $(\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet}) + \textcolor{red}{\bullet} =$

g) $(\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet}) \cdot \textcolor{blue}{\bullet} =$

h) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}) =$

i) $\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{red}{\bullet} =$

j) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{blue}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} =$

Aufgabe 7: *Schreibe die Aufgabe so um, dass daraus ein Bruch oder eine Zahl wird.*

a) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot 1 =$

b) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{1} =$

c) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{red}{\bullet}} =$

d) $\frac{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}} =$

e) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot \frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{red}{\bullet}} =$

f) $\frac{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}} =$

g) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} \cdot \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{blue}{\bullet}} =$

h) $\frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet}} \cdot \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{cyan}{\bullet}} \cdot \frac{\textcolor{blue}{\bullet}}{\textcolor{brown}{\bullet}} =$

i) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} : \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{blue}{\bullet}} =$

j) $\frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet}} : \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{cyan}{\bullet}} : \frac{\textcolor{blue}{\bullet}}{\textcolor{brown}{\bullet}} =$

k) $\frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet}} \cdot \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{cyan}{\bullet}} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} =$

l) $\frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet}} : \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{cyan}{\bullet}} : \textcolor{blue}{\bullet} =$

m) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} + \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{blue}{\bullet}} =$

n) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} - \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{blue}{\bullet}} =$

o) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} + \textcolor{green}{\bullet} =$

p) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} - \textcolor{green}{\bullet} =$

Aufgabe 8: *Schreibe die Aufgabe durch Ausmultiplizieren oder Benutzen von Potenzgesetzen um.*

a) $(\textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) \cdot \textcolor{red}{\bullet} =$

b) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) =$

c) $-(\textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) =$

d) $-\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{green}{\bullet} - \textcolor{blue}{\bullet}) =$

e) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{magenta}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet}) \cdot \textcolor{blue}{\bullet} =$

f) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{magenta}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) =$

g) $(\textcolor{magenta}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}) \cdot (\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) =$

h) $(\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}) \cdot (\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}) =$

i) $(\textcolor{red}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet}) \cdot (\textcolor{red}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet}) =$

j) $(\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}) \cdot (\textcolor{red}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet}) =$

k) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} =$

l) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} =$

m) $\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet}} \cdot \textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{blue}{\bullet}} =$

n) $\left(\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet}}\right)^{\textcolor{blue}{\bullet}} =$

o) $\dfrac{\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet}}}{\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{blue}{\bullet}}} =$

p) $\left(\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet}}\right)^{\frac{\textcolor{blue}{\bullet}}{\textcolor{green}{\bullet}}} =$

Aufgabe 9: *Die fehlende Größe der Linsengleichung* $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ *und gib den Wert des Terms in Metern an.*

a) $b = 2\,\mathrm{m}$ und $g = 1\,\mathrm{m}$

b) $f = 25\,\mathrm{cm}$ und $g = 1{,}5\,\mathrm{m}$

c) $b = 20\,\mathrm{cm}$ und $f = 10\,\mathrm{cm}$

d) $b = 40\,\mathrm{cm}$ und $g = 60\,\mathrm{cm}$

e) $f = 12{,}5\,\mathrm{cm}$ und $g = 2\,\mathrm{m}$

f) $b = 30\,\mathrm{cm}$ und $f = 5\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 10: *Bestimme die fehlende Größe für die Impulserhaltung* $p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$ *mit* $p = mv$. *Gib den Wert des Terms in* $\frac{m}{s}$ *oder in kg an.*

a) $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$; $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$; $v_1 = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_1' = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

b) $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$; $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$; $v_1 = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_1' = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

c) $m_1 = 4\,\mathrm{kg}$; $m_2 = 6\,\mathrm{kg}$; $v_1 = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_2' = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_1' = 8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

d) $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$; $m_2 = 8\,\mathrm{kg}$; $v_1 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_2 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_2' = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

e) $m_1 = 500\,\mathrm{g}$; $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$; $v_1 = 0,08\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$; $v_2 = 0,04\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$; $v_1' = 35\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

f) $m_1 = 0,01\,\mathrm{Mg}$; $m_2 = 4\,\mathrm{kg}$; $v_1 = 5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$; $v_2 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_1' = 15\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

g) $m_1 = \frac{1}{250}\,\mathrm{t}$; $m_2 = 50\,\mathrm{kg}$; $v_1 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_2' = \frac{3}{4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_1' = \frac{5}{8}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

h) $m_1 = 250\,\mathrm{hg}$; $m_2 = \frac{1}{5}\,\mathrm{t}$; $v_1' = 20\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$; $v_2 = 4200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$; $v_2' = 36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

i) $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$; $v_2' = 5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_1 = 7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_2 = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_1' = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

j) $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$; $v_2' = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_1 = 9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_2 = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$; $v_1' = 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$;

Aufgabe 11: *Löse die Gleichung nach* ${\color{red}\bullet}$ *auf.*

a) ${\color{red}\bullet} \cdot {\color{blue}\bullet} = {\color{green}\bullet}$

b) ${\color{red}\bullet} \cdot {\color{green}\bullet} - {\color{blue}\bullet} = 0$

c) ${\color{red}\bullet} \cdot {\color{green}\bullet} + {\color{blue}\bullet} = 0$

d) ${\color{red}\bullet} \cdot {\color{green}\bullet} - {\color{blue}\bullet} = {\color{cyan}\bullet}$

e) $-{\color{red}\bullet} + {\color{cyan}\bullet} = -{\color{blue}\bullet}$

f) $-{\color{red}\bullet}{\color{blue}\bullet} - {\color{green}\bullet} = {\color{cyan}\bullet}$

g) ${\color{magenta}\bullet} \cdot {\color{red}\bullet} \cdot {\color{green}\bullet} + {\color{blue}\bullet} = 0$

h) $\frac{{\color{red}\bullet} \cdot {\color{green}\bullet}}{{\color{magenta}\bullet}} - {\color{blue}\bullet} = {\color{cyan}\bullet}$

i) ${\color{magenta}\bullet}{\color{red}\bullet}({\color{green}\bullet} + {\color{blue}\bullet}) = {\color{yellow}\bullet}$

j) $\frac{{\color{red}\bullet}{\color{green}\bullet}}{{\color{magenta}\bullet}{\color{yellow}\bullet}} - {\color{blue}\bullet} = {\color{cyan}\bullet}$

k) ${\color{magenta}\bullet}{\color{red}\bullet} + {\color{blue}\bullet}{\color{red}\bullet} = {\color{yellow}\bullet}$

l) $\frac{{\color{red}\bullet}^2 - {\color{green}\bullet}^2}{{\color{red}\bullet} + {\color{green}\bullet}} = {\color{magenta}\bullet}$

m) ${\color{yellow}\bullet} = {\color{red}\bullet} - {\color{blue}\bullet}{\color{red}\bullet}$

n) ${\color{red}\bullet}^2 + {\color{magenta}\bullet}^2 = {\color{blue}\bullet}^2$

o) $\sqrt{{\color{red}\bullet}} + {\color{magenta}\bullet} = {\color{yellow}\bullet}$

p) ${\color{magenta}\bullet} = \sqrt{{\color{green}\bullet}{\color{red}\bullet}} + {\color{yellow}\bullet}$

q) ${\color{red}\bullet}^2 + 2{\color{green}\bullet}{\color{red}\bullet} - {\color{blue}\bullet} = 0$

r) ${\color{magenta}\bullet}{\color{red}\bullet}^2 + 2{\color{green}\bullet}{\color{red}\bullet} - {\color{blue}\bullet} = 0$

s) ${\color{magenta}\bullet}{\color{red}\bullet}^2 - {\color{green}\bullet}{\color{red}\bullet} + {\color{blue}\bullet} = {\color{cyan}\bullet}$

t) $-{\color{magenta}\bullet}{\color{red}\bullet}^2 + {\color{gray}\bullet}{\color{green}\bullet}{\color{red}\bullet} - {\color{blue}\bullet} = {\color{cyan}\bullet}$

Aufgabe 12: *Löse die Gleichung nach* ${\color{red}\bullet}$ *auf.*

a) ${\color{red}\bullet}^2 = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

b) $\sqrt{\color{red}\bullet} = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

c) $\sin({\color{red}\bullet}) = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

d) $\cos({\color{red}\bullet}) = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

e) $\tan({\color{red}\bullet}) = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

f) $\cot({\color{red}\bullet}) = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

g) $\ln({\color{red}\bullet}) = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

h) $\lg({\color{red}\bullet}) = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

i) $\log_{\color{magenta}\bullet}({\color{red}\bullet}) = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

j) $e^{\color{red}\bullet} = \frac{\color{green}\bullet}{\color{blue}\bullet}$

k) ${\color{magenta}\bullet} e^{\color{red}\bullet} - {\color{yellow}\bullet} = 0$

l) ${\color{blue}\bullet} e^{{\color{magenta}\bullet}{\color{red}\bullet} + {\color{cyan}\bullet}} - {\color{green}\bullet} = {\color{yellow}\bullet}$

m) $\sin({\color{magenta}\bullet}{\color{red}\bullet} + {\color{cyan}\bullet}) = {\color{green}\bullet}$

n) ${\color{yellow}\bullet} e^{-{\color{magenta}\bullet}{\color{red}\bullet} + {\color{cyan}\bullet}} = {\color{green}\bullet}$

o) ${\color{yellow}\bullet} \sin(-{\color{magenta}\bullet}{\color{red}\bullet} + {\color{cyan}\bullet}) = {\color{green}\bullet}$

p) ${\color{blue}\bullet}^2 = {\color{red}\bullet}^2 + {\color{green}\bullet}^2 - 2{\color{green}\bullet}{\color{red}\bullet}\cos({\color{magenta}\bullet})$

Aufgabe 13: *Lies die Behauptung und kreuze an, ob diese wahr oder falsch ist.*

Behauptung	wahr	falsch
$1\,\mathrm{m}^2$ entspricht $100\,\mathrm{cm}^2$.		
1% von 2500 € sind 25 €.		
23 ist eine Primzahl.		
$0,43$ ist eine irrationale Zahl.		
$750\,\mathrm{ml}$ sind $\frac{3}{4}\,\mathrm{l}$.		
$\sqrt{81}$ ist eine natürliche Zahl.		
$0,9^6 > 1$.		
Der Logarithmus von Null existiert nicht.		
Man darf nicht durch e^x dividieren.		
$\frac{10}{0,2} > 20$.		
$0,\bar{9}$ ist eine natürliche Zahl.		
$0,37284 \approx 0,372$		

Aufgabe 14: *Übersetze den Text in eine Gleichung und löse diese nach der unbekannten Zahl auf.*

a) Die Summe aus der gesuchten Zahl und Fünf ist äquivalent zu Sieben.

b) Der Minuend Drei und der Subtrahend, welcher eine unbekannte Zahl ist, ergeben sich zu Neun.

c) Das Produkt aus dem doppelten einer Zahl und Vier ist äquivalent zu einem Fünftel.

d) Eine unbekannte Zahl wird um Zwei addiert und befindet sich im Zähler. Im Nenner befindet sich eine Fünf. Dieser Quotient ist gleich Drei.

e) Die Faktoren Vier und die gesuchte Zahl werden durch Drei dividiert. Dieser Quotient ergibt sich zu ein Halb.

f) Bei einer Rechnung bildet die gesuchte Zahl den Minuenden und Acht den Subtrahenden. Diese Differenz ergibt sich zu Vier.

g) Der Quotient aus Fünf und einer gesuchten Zahl, welche den Dividenden bildet, wird um Drei addiert und ergibt sich zu Neun.

h) Die Differenz aus der gesuchten Zahl und dem Subtrahenden Sieben ist äquivalent zu den beiden Summanden Fünf und der gesuchten Zahl, welche mit Zwei multipliziert ist.

i) Das fünffache einer gesuchten Zahl werden mit Sieben addiert, dies ist gleich Drei subtrahiert vom doppelten der gesuchten Zahl.

j) Die Faktoren Neun und die gesuchte Zahl bilden mit Acht eine Summe, welche sich zu Sechs ergibt.

k) Eine gesuchte Zahl multipliziert mit Zwei dividiert durch Fünf wird mit Elf addiert. Dies ist äquivalent zur gesuchten Zahl.

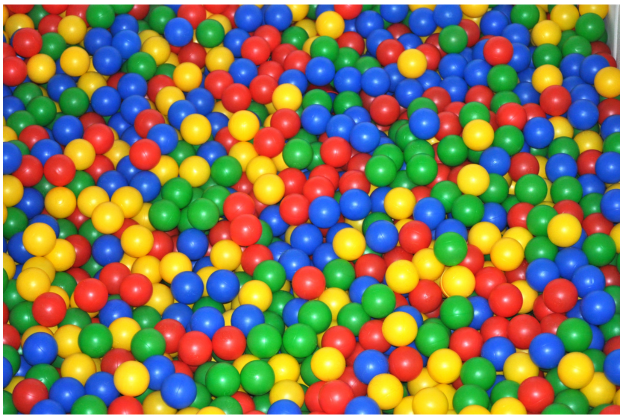
l) Die Summe aus den Produkten der gesuchten Zahl mit Drei und der Zwei mit Sieben ergibt sich zu einem Viertel der gesuchten Zahl.

m) Bei einer Differenz bildet ein Bruch mit dem Nenner Fünf und der gesuchten Zahl als Zähler den Minuenden, während der Subtrahend aus dem Divisor Vier und dem Dividenden Drei besteht. Diese Differenz ergibt sich zu Zehn.

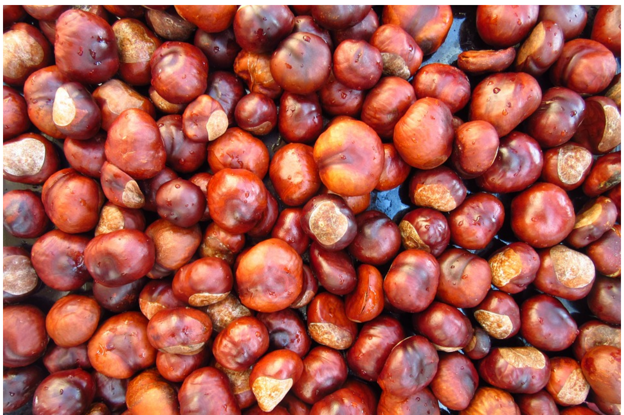
n) Das Produkt aus den Summen der gesuchten Zahl und Acht sowie Zwei und Eins ergibt sich zur Hälfte der gesuchten Zahl.

Aufgabe 15: *Schätze ab wie viele Objekte auf den Bildern zu sehen sind.*







Aufgabe 16: *Bestimme die Zeitdifferenz und gib diese in Minuten an.*

a) 8:00 Uhr bis 10:00 Uhr	*b*) 9:00 Uhr bis 12:30 Uhr
c) 23:30 Uhr bis 7:00 Uhr	*d*) 3:45 Uhr bis 2:10 Uhr
e) 15:17 Uhr bis 22:43 Uhr	*f*) 6:33 Uhr bis 17:19 Uhr
g) 16:03 Uhr bis 4:52 Uhr	*h*) 23:41 Uhr bis 2:52 Uhr
i) 8:13 Uhr bis 2:56 Uhr	*j*) 12:39 Uhr bis 22:44 Uhr
k) 19:22 Uhr bis 14:07 Uhr	*l*) 15:21 Uhr bis 11:54 Uhr
m) 13:59 Uhr bis 4:02 Uhr	*n*) 17:48 Uhr bis 6:29 Uhr
o) 9:32 Uhr bis 0:21 Uhr	*p*) 0:56 Uhr bis 0:19 Uhr

Aufgabe 17: *Bestimme die Zeitdifferenz und gib diese in gemischter Schreibweise (z.B.: 5 h und 45 min) an.*

a) 4:00 Uhr bis 13:00 Uhr	*b*) 5:00 Uhr bis 17:20 Uhr
c) 21:40 Uhr bis 11:30 Uhr	*d*) 22:25 Uhr bis 12:10 Uhr
e) 12:37 Uhr bis 21:54 Uhr	*f*) 8:27 Uhr bis 16:14 Uhr
g) 4:44 Uhr bis 18:31 Uhr	*h*) 21:22 Uhr bis 13:57 Uhr
i) 14:09 Uhr bis 1:36 Uhr	*j*) 16:50 Uhr bis 21:23 Uhr
k) 11:45 Uhr bis 9:26 Uhr	*l*) 22:24 Uhr bis 15:03 Uhr
m) 17:47 Uhr bis 8:37 Uhr	*n*) 3:32 Uhr bis 0:12 Uhr
p) 0:55 Uhr bis 13:23 Uhr	*q*) 9:17 Uhr bis 3:06 Uhr

Aufgabe 18: *Bestimme die Zeitdifferenz und gib diese in Stunden (z.B.: $5\,h$ und $45\,min$= $5,75\,h$) an.*

$a)$ 13:00 Uhr bis 7:00 Uhr	$b)$ 11:00 Uhr bis 23:20 Uhr
$c)$ 9:30 Uhr bis 15:45 Uhr	$d)$ 6:45 Uhr bis 2:40 Uhr
$e)$ 19:14 Uhr bis 21:53 Uhr	$f)$ 12:55 Uhr bis 16:11 Uhr
$g)$ 4:21 Uhr bis 4:07 Uhr	$h)$ 15:51 Uhr bis 21:37 Uhr
$i)$ 6:43 Uhr bis 19:04 Uhr	$j)$ 12:41 Uhr bis 21:35 Uhr
$k)$ 22:08 Uhr bis 13:42 Uhr	$l)$ 17:54 Uhr bis 0:27 Uhr
$m)$ 0:32 Uhr bis 22:28 Uhr	$n)$ 14:18 Uhr bis 8:37 Uhr
$p)$ 15:37 Uhr bis 0:54 Uhr	$q)$ 11:34 Uhr bis 5:21 Uhr

Aufgabe 19: *Bestimme die Zeitdifferenz und gib diese in gemischter Schreibweise (z.B.: $5\,h$ und $45\,min$) an.*

$a)$ Mo 14:00 Uhr bis Mi 6:00 Uhr	$b)$ Do 15:00 Uhr bis Fr 21:00 Uhr
$c)$ Di 9:30 Uhr bis Sa 9:45 Uhr	$d)$ Mi 6:45 Uhr bis So 7:55 Uhr
$e)$ So 23:20 Uhr bis Di 4:50 Uhr	$f)$ Fr 9:55 Uhr bis Mo 11:15 Uhr
$g)$ Di 3:31 Uhr bis Mi 4:55 Uhr	$h)$ Fr 18:12 Uhr bis Do 7:07 Uhr
$i)$ Mo 16:23 Uhr bis Mo 22:54 Uhr	$j)$ Mi 17:51 Uhr bis Mi 8:32 Uhr
$k)$ Mi 0:08 Uhr bis Mo 15:11 Uhr	$l)$ Sa 2:24 Uhr bis Sa 15:39 Uhr
$m)$ Do 10:08 Uhr bis So 20:33 Uhr	$n)$ So 16:43 Uhr bis Sa 9:17 Uhr
$p)$ So 23:47 Uhr bis Mi 1:24 Uhr	$q)$ Mo 0:27 Uhr bis Mi 2:46 Uhr

Aufgabe 20: *Übersetze den Text in eine Rechnung und berechne den Wert des Terms.*

$a)$ Gesucht ist die Summe aus 4645 und dem Produkt aus 1307 und 97.

$b)$ Eine Summe von 126 und 758 wird mit durch 4 dividiert.

$c)$ Die absolute Differenz zwischen 723 und 478 wird mit dem Quotienten aus 3321 und dem Divisor 9 multipliziert.

d) Der Minuend ist gegeben durch die Faktoren 23 und 87, während der Subtrahend durch die Summe aus 309 und 578 gegeben ist.

e) Eine Summe wird mit 5 multipliziert, wobei diese Summe aus 56 und einem Produkt besteht. Das Produkt ist gegeben aus dem Faktor 17 und einer absoluten Differenz zwischen 823 und 677.

f) Der Dividend einer Rechnung ist durch die Summanden 1589 und 3691 definiert, während der Divisor durch die absolute Differenz aus 894 und 888 gegeben ist.

Aufgabe 21: *Um eine Schuldenlast von* $5305,67$ € *zu tilgen wurde ein Entschuldungsplan vereinbart. Dieser sieht vor, dass der Schuldner wöchentlich insgesamt* $124,93$ € *auf das Konto einzahlt. Wie groß ist die Schuldenlast nach* 310 *Tagen?*

Aufgabe 22: *In einem Benzintank eines Autos passen insgesamt* $40\,l$*, allerdings wurde der Preis in „pro US-Gallone“ (*1 *US-Gallone* $\approx 3,785$ *Liter) angegeben. Der Preis pro Gallone beträgt* $6,949$ *\$, wobei nach dem aktuellen Wechselkurs* 1 *\$* $\approx 1,17$ € *entsprechen. Berechne den Preis für eine komplette Tankfüllung in Euro.*

Aufgabe 23: *Ein Gramm Platin wird mit* $29,77$ € *auf den internationalen Handelsplätzen beziffert. Berechne die Kosten eines Quaders mit den Kantenlängen* $a = 1,3\,cm$*,* $b = 2,2\,cm$ *und* $c = 0,9\,cm$*. Die Dichte von Platin ist gegeben als* $\rho \approx 20,3\,\frac{g}{cm^3}$*.*

Aufgabe 24: *Bestimme die Gleichung und berechne den Wert des Terms.*

a) Gesucht ist die Summe aus 83 und dem Produkt aus 45 und 28.

b) Gesucht ist die Differenz aus dem Produkt 54 und 81 als Minuenden und dem Subtrahenden 438.

c) Gesucht ist der Quotient aus der der Summe 88 und 56 als Dividenden und 4 als Divisor.

d) Die beiden Faktoren der gesuchten Gleichung ergeben sich aus den Summen 94 mit 134 und 82 mit 276.

e) Die gesuchte Summe besteht aus zwei Produkten. Dabei ist das erste Produkt durch 73 und 92 und das zweite Produkt aus 24 und 645 gegeben.

f) Vom ganzzahligen Quotienten aus 176 und 8 sollen noch 11 subtrahiert werden.

g) Die gesuchte absolute Differenz aus 4234 und 2467 wird mit dem Produkt aus 56 und 17 multipliziert.

h) Das Produkt aus 158 und 235 wird mit dem Produkt aus 346 und 278 addiert.

i) Vom ganzzahligen Quotienten aus 28734 und 6 soll die Zahl 4788 subtrahiert werden.

j) Die Summe aus 7564 und 17566 bildet vom gesuchten Quotienten den Dividenden mit dem dazugehörigen Divisor 5.

k) Die Minuend 234645 und der Subtrahend 29562 bilden den Dividenden wobei der Divisor aus dem Produkt aus 3 mit sich selbst gegeben ist.

l) Die Summe aus 3726 und 2387 sowie 2359 soll mit der absoluten Differenz aus 2466 und 932 multipliziert werden.

m) Gesucht ist die Summe aus 525 und dem Produkt aus 125 und 234 soll durch 5 dividiert werden.

n) Die Summe aus zwei Zahlen soll mit der absoluten Differenz aus den selben zwei Zahlen multipliziert werden. Dabei ist ein Summand 42356, während der einzige Subtrahend 23566 ist.

o) Die Summe aus 34 und dem Produkt aus 12 und der Summe 46 mit dem Produkt aus 35 und der Summe aus 91 mit dem Produkt aus 46 und 8 soll mit 2 multipliziert werden.

Aufgabe 25: *Berechne alle Felder der Tabelle.*

s	r	k	$r \cdot s$	$k \cdot r + s = p$	$(p+k) \cdot r = q$	$p \cdot k + r \cdot (k+s) = z$	$z + p \cdot q$
2	6	3					
4	7	5					
8	3	9					
5		7	45				
7	3			19			
	8	5		51			
6		7		62			

Aufgabe 26: *Berechne alle Felder der Tabelle. Gib den Wert des Terms in der geforderten Einheit an.*

d	t	l	$d + t - l$ in [dm]	$2 \cdot d + 3 \cdot l$ in [cm]	$d \cdot l$ in $\left[\mathrm{m}^2\right]$	$d \cdot l \cdot t$ in [l]
$3\,\mathrm{m}$	$2\,\mathrm{dm}$	$18\,\mathrm{cm}$				
$7\,\mathrm{dm}$	$369\,\mathrm{cm}$	$344\,\mathrm{mm}$				
$4,2\,\mathrm{dm}$	$1,03\,\mathrm{m}$	$23\,\mathrm{mm}$				
$2,3\,\mathrm{m}$	$5,5\,\mathrm{m}$	$61,2\,\mathrm{dm}$				
$0,02\,\mathrm{km}$	$2900\,\mathrm{mm}$	$12\,\mathrm{dm}$				
$3,93\,\mathrm{dm}$	$8,13\,\mathrm{m}$	$45,23\,\mathrm{cm}$				

Aufgabe 27: *Bestimme die nachfolgenden Glieder der Reihen.*

a) 5 11 17 23 29

b) 65 54 43 32 21

c) 845 833 821 809 797

d) 4 8 16 32 64

e) 5 10 30 120 600

f) 52002 17334 5778 1926 642

g) 1 2 6 24 120

h) 1 4 9 16 25

i) 18 54 162 486 1458

j) 8 27 64 125 216

k) 1 4 27 128 3125

Aufgabe 28: *Ein Bauer besitzt* 56 *Hektar Ackerland, wovon* 17 *Hektar mit Weizen gepflanzt wurden. Berechne den prozentualen Anteil der Fläche, die mit Weizen bepflanzt wurde.*

Aufgabe 29: *Ein Kapital von* 7800 € *wurde zu einem Jahreszins von* 2,3% *ein Jahr lang angelegt. Berechne wie viel Geld nach dem Jahr zu Verfügung steht.*

Aufgabe 30: *Ein Preis von* 29,99 € *soll um* 15% *gesenkt werden. Berechne den neuen Preis.*

Aufgabe 31: *Ein Preis wurde um* 35% *gesenkt und beträgt nun* 24,50 €*. Berechne wie hoch der ursprünglich Preis war.*

Aufgabe 32: *Von* 4500 *befragten Menschen gaben* 3933 *an, dass sie nicht wissen, dass HTML eine Skriptsprache sei. Berechne den prozentualen Anteil.*

Aufgabe 33: *Ein Produkt kostet* 450 € *netto. Berechne den Bruttopreis, wenn* 19% *Mehrwertsteuer hinzukommen.*

Aufgabe 34: *Ein Containerschiff hat eine Ladung von* $145000t$*, wovon nach* 7 *Stunden* 65% *gelöscht (entladen) wurden. Berechne wie lange die gesamte Entladung dauert.*

Aufgabe 35: *Durch Inflation wird das Geld jedes Jahr durchschnittlich* 2,2% *weniger Wert. Berechne wie viel* 4000 € *nach einen Jahr nur noch Wert wären.*

Aufgabe 36: *In der Bundesrepublik Deutschland leben* 82 *Millionen Menschen, wovon rund* 42 *Millionen Menschen einer Arbeit nach gehen könnten. Es sind* 5,5% *der Menschen arbeitslos. Berechne die Anzahl der arbeitslosen Menschen in der Bundesrepublik Deutschland*

Aufgabe 37: *Bestimme die Anzahl der unterschiedlichen Quader mit der angegebenen Anzahl von Würfeln. (Ohne Permutationen.)*

a) 64	*b*) 96	*c*) 132	*d*) 625
e) 225	*f*) 75	*g*) 289	*h*) 512

Aufgabe 38: *Bestimme wie viele Möglichkeiten der Addition von drei natürlichen Zahlen (außer* 0*) es für die gegebenen Zahlen gibt. (Ohne Permutationen.)*

a) 4	*b*) 6	*c*) 10	*d*) 18
e) 22	*f*) 28	*g*) 46	*h*) 78
i) 112	*j*) 122	*k*) 154	*l*) 196

Aufgabe 39: *Beschreibe die Auffälligkeiten zur Lösung von Aufgabe 38.*

Aufgabe 40: *Bestimme wie viele Möglichkeiten der Addition von drei natürlichen Zahlen (außer* 0*) es für die gegebenen Zahlen gibt. (Ohne Permutationen.)*

a) 3	*b*) 5	*c*) 7	*d*) 11
e) 15	*f*) 19	*g*) 31	*h*) 55
i) 79	*j*) 123	*k*) 137	*l*) 197

Aufgabe 41: *Gib einen allgemein gültigen Term zur Lösung von Aufgabe 38 und 40 an.*

Aufgabe 42: *Ein n-Eck besteht aus n Ecken, an denen Gummibänder gespannt werden sollen, sodass jeder Eckpunkt maximal eine Berührung eines Gummibandes besitzt. Jedes Gummiband muss mindestens zwei Eckpunkte berühren. Die Anzahl der Gummibänder kann variiert werden. Bestimme wie viele Möglichkeiten der Gummibandanordnungen es insgesamt für das gegebene regelmäßige n-Eck geben kann. (Mit Permutationen.)*

a) 1-Eck	*b)* 2-Eck	*c)* 3-Eck	*d)* 4-Eck	*e)* 5-Eck
f) 6-Eck	*g)* 7-Eck	*h)* 8-Eck	*i)* 9-Eck	*i)* 10-Eck

Aufgabe 43: *Ein n-Eck besteht aus n Ecken, an denen Gummibänder gespannt werden sollen, sodass jeder Eckpunkt maximal eine Berührung eines Gummibandes besitzt. Jedes Gummiband muss mindestens zwei Eckpunkte berühren. Die Anzahl der Gummibänder kann variiert werden. Bestimme wie viele Möglichkeiten der Gummibandanordnungen es insgesamt für das gegebene regelmäßige n-Eck geben kann, ohne dass sich die Gummibänder überkreuzen. (Mit Permutationen.)*

a) 1-Eck	*b)* 2-Eck	*c)* 3-Eck	*d)* 4-Eck	*e)* 5-Eck
f) 6-Eck	*g)* 7-Eck	*h)* 8-Eck	*i)* 9-Eck	*i)* 10-Eck

Aufgabe 44: *Gib einen allgemeinen Term zur Lösung von Aufgabe 43 an.*

Aufgabe 45: *Vervollständige die Tabelle.*

1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	2	-	-	-	-	-	-	-	-
2	3	5	-	-	-	-	-	-	-
5	7	10	15	-	-	-	-	-	-
15	20	27	37	52	-	-	-	-	-
									115975

Aufgabe 46: *Bestimme die nachfolgenden Glieder der Reihen und beschreibe die Auffälligkeit in der gesamten Aufgabe.*

a)	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
b)		1	2	3	4	5	6	7	8		
c)			1	3	6	10	15	21	28		
d)				1	4	10	20	35	56		
e)					1	5	15	35	70		
f)						1	6	21	56		
g)							1	7	28		
h)								1	8		
i)									1		

Weitere Behauptung zu Zahlen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

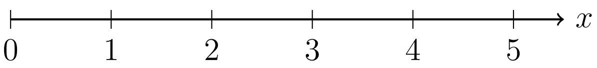
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.23) Lösungen zu den gemischten Algebraaufgaben.

4 Geometrie

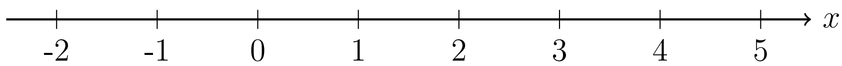
Eines der zentralen Themen der Mathematik in der Schule ist die *Geometrie*. Dies ist dem Fakt geschuldet, dass geometrischen Formen im menschlichen Alltag überall vorzufinden sind und viele Vorgänge durch sie beeinflusst werden.

4.1 Zahlenstrahl

Der *Zahlenstrahl* ist eine Linie, an der es möglich ist Zahlen in regelmäßigen *Abständen* vorzufinden. Diese Linie ist eine *Halbgerade*, also eine gerade Linie mit einem Anfangspunkt (beim Zahlenstrahl wäre dies die 0) aber keinen Endpunkt. Durch die Einführung ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$[1] wird aus dieser *Halbgeraden* eine *Gerade*, welche weder Anfangs- noch Endpunkt besitzt.



Halbgerade (Zahlenstrahl nur mit $\mathbb{N}$)



Gerade (Zahlenstrahl mit $\mathbb{Z}$)

Eine wichtige Eigenschaft des *Zahlenstrahls* ist, dass ein Einheitenschritt (also der *Abstand* von 1 bis nach 2) beliebig groß sein kann. Allerdings müssen alle Einheitenschritte die gleichen *Abstände* haben - es wird von *äquidistanten Abständen* gesprochen. Das x am *Zahlenstrahl* beschreibt den Namen der *Dimension*, auf der sich die Zahlen befinden.

4.1.1 Intervalle

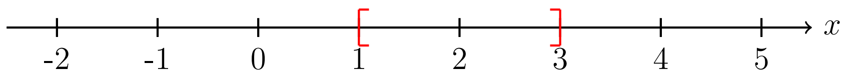
Intervalle sind festgelegte Bereiche auf einem *Zahlenstrahl*. Diese Bereiche können in verschiedene Gruppen eingeteilt werden. Dabei werden die Anfangs- und Endzahlenwerte des *Intervalls* entweder mit (*inklusive Intervallgrenze*) oder nicht (*exklusive Intervallgrenze*) berücksichtigt. Folglich existieren vier verschiedene mögliche Typen von *Intervallen*:

[1] $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

- Beide *Grenzen* des *Intervalls* sind inklusiv, was durch folgenden Formalismus beschrieben wird:

$$[1,3] = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\} \quad . \tag{4.1}$$

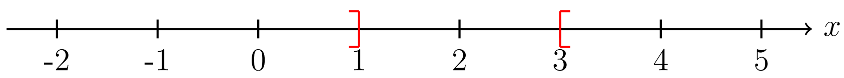
Das *Intervall* von *inklusiv* 1 bis *inklusiv* 3 ist gegeben durch alle Zahlen x zwischen 1 und 3 mit den Zahlen 1 und 3. Graphisch veranschaulichen lässt sich dies durch den *Zahlenstrahl*:



- Beide *Grenzen* des *Intervalls* sind *exklusiv*, was durch folgenden Formalismus beschrieben wird:

$$(1,3) = \,]\,1,3\,[\, = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 3\} \quad . \tag{4.2}$$

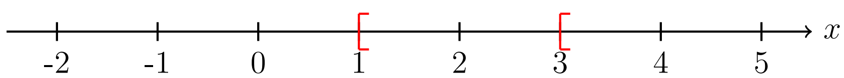
Das *Intervall* von *exklusiv* 1 bis *exklusiv* 3 ist gegeben durch alle Zahlen x zwischen 1 und 3. Graphisch veranschaulichen lässt sich dies durch den *Zahlenstrahl*:

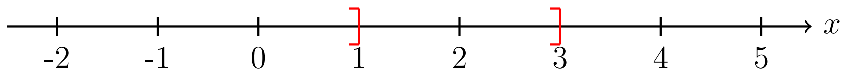


- Eine *Grenzen* des *Intervalls* ist *inklusiv* und die andere *exklusiv*, was durch folgenden Formalismus beschrieben wird:

$$\begin{aligned} [1,3) &= [\,1,3\,[\, = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x < 3\} \quad , \\ (1,3] &= \,]\,1,3\,] = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x \leq 3\} \quad . \end{aligned} \tag{4.3}$$

Graphisch lässt sich dies durch den *Zahlenstrahl* veranschaulichen:



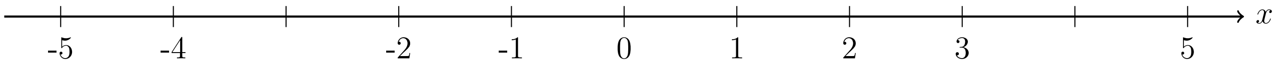


Intervalle werden dazu benötigt um *Lösungensmengen* für bestimme Probleme anzugeben. Dies wird besonders wichtig, wenn die *Funktionen* eingeführt werden.
Der *Zahlenstrahl* ist ein *eindimensionales* Objekt, da es nur möglich ist sich nach Vorne oder Hinten auf dem *Zahlenstrahl* zu bewegen. Andere Objekte dieser Art sind *Geraden* und *Halbgeraden* im Allgemeinen. Außerdem existieren noch *Strecken*, welche im nachfolgenden Abschnitt erläutert werden.

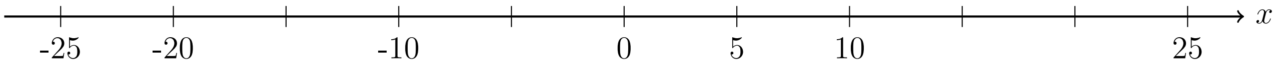
4.1.2 Übungsaufgaben zum Zahlenstrahl

Aufgabe 1: *Trage die fehlenden Zahlen ein.*

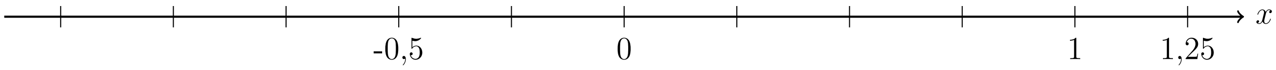
a)



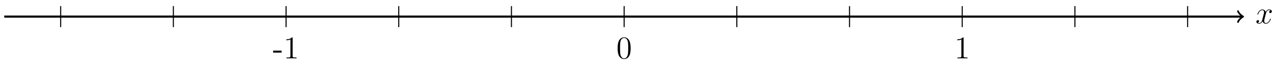
b)



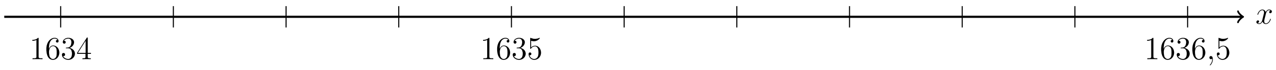
c)



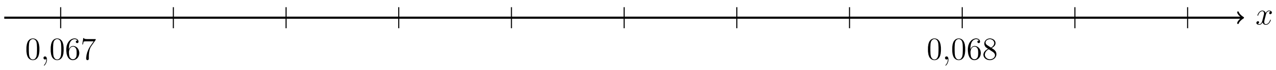
d)



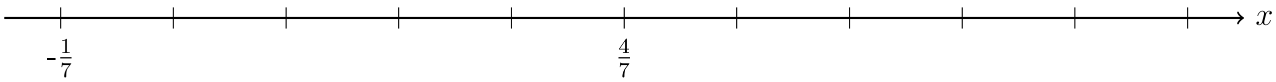
e)



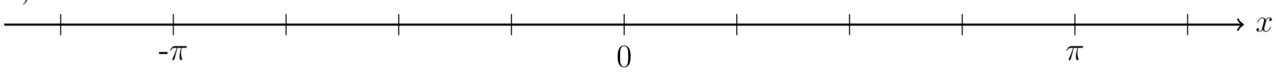
f)



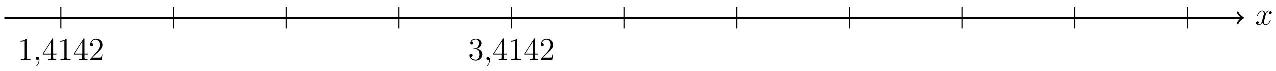
g)



h)



i)

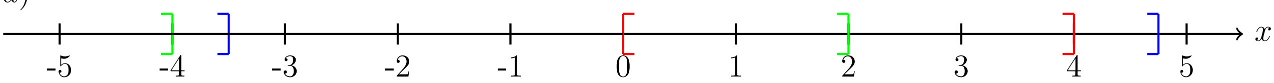


Aufgabe 2: *Trage die Intervalle auf einen Zahlenstrahl ein.*

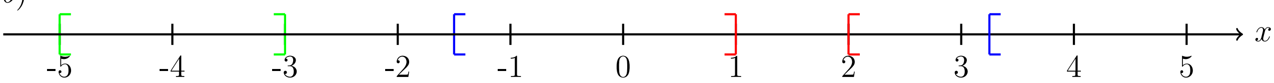
a) $[0,5]$	*b)* $[-1,3]$	*c)* $\left[-\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right]$
d) $]\,3,6\,[$	*e)* $]\,-4,-2\,[$	*f)* $\left]\,-\frac{8}{5},\frac{17}{8}\,\right[$
g) $[\,2,4\,[$	*h)* $[\,-4,1\,[$	*i)* $\left[\,\frac{1}{4},\frac{15}{4}\,\right[$
j) $]\,1,7\,]$	*k)* $]\,-6,6\,]$	*l)* $\left]\,-\frac{17}{5},-\frac{1}{2}\,\right]$

Aufgabe 3: *Schreibe die eingezeichneten Intervalle der Zahlenstrahl auf.*

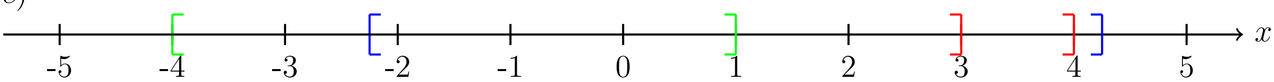
a)



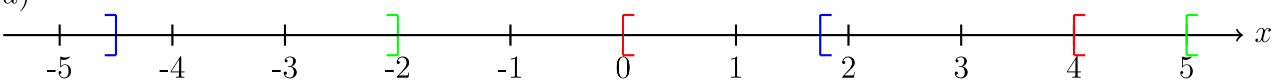
b)



c)



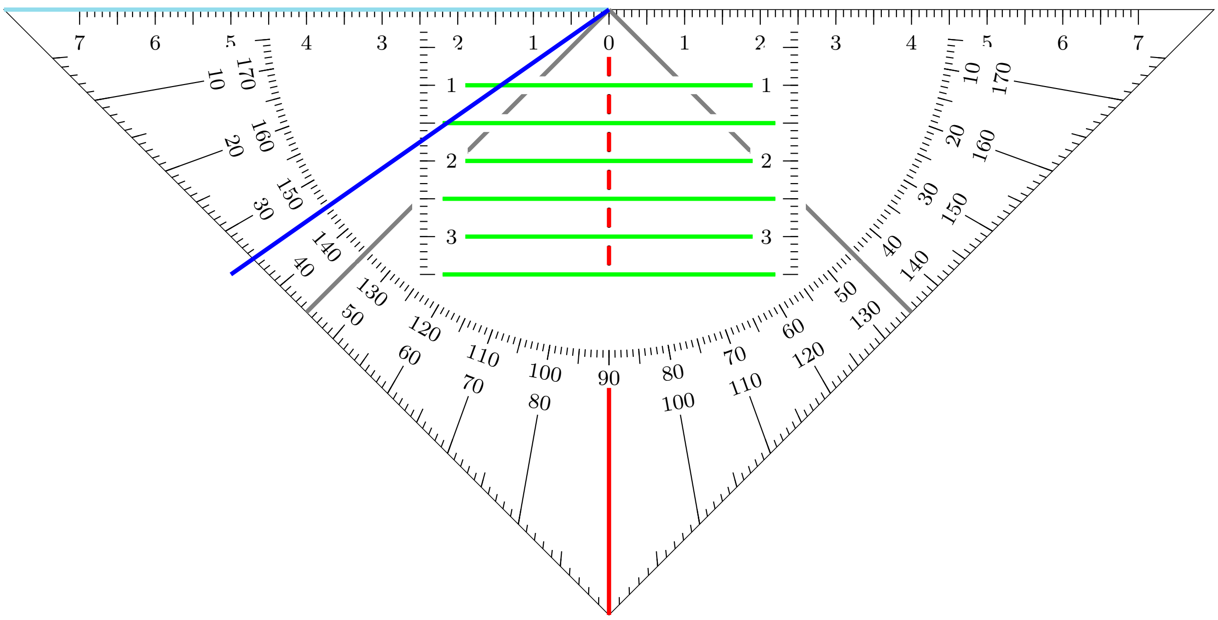
d)



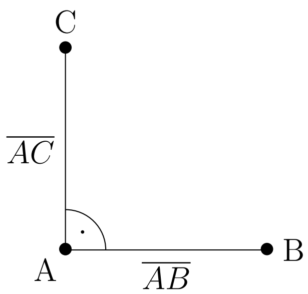
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.24) Lösungen zum Zahlenstrahl.

4.2 Winkel

Als wichtigster Bestandteil der *Geometrie* in der Schule kann das Geodreieck angesehen werden und sollte in keinem naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterricht fehlen.



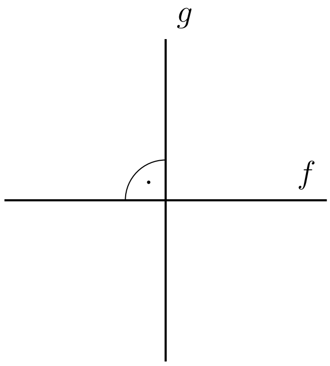
In der Abbildung mit dem Geodreieck wurden zusätzliche farbige *Strecken* eingefügt, an denen die Funktionsweise des Geodreiecks erklärt werden kann. *Strecken* sind im Allgemeinen gerade Linien mit einem Anfangs- und einem Endpunkt. Eine *Strecke* zwischen den *Punkten* A und B wird durch $\overline{AB}$ verschriftlicht, wobei die *Länge* der *Strecke* durch den *Betrag* der *Strecke* $\left|\overline{AB}\right|$ beschrieben wird. Die wohl bedeutendste *Strecke* auf dem Geodreieck ist die Nulllinie, welche auch Mittellinie oder Orthogonalitätslinie genannt wird. Diese *Strecke* ist rot markiert. Wenn das Geodreieck so auf eine gezeichnete Linie gelegt wird, dass die Linie von der Nulllinie verdeckt wird, dann kann ein sogenannter *rechter Winkel* zu dieser Linie eingezeichnet werden. Ein solcher *rechter Winkel* zwischen den zwei *Strecken* $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ würde wie folgt aussehen:



Ein *Winkel* zwischen zwei *Strecken* wird durch einen Bogen beschrieben und der Wert in ihm eingetragen. Dabei stellt der *rechte Winkel* aufgrund seiner Relevanz für die Mathematik und Naturwissenschaften eine Besonderheit da, denn statt den Wert 90°, wie auf auf dem Geodreieck abzulesen ist, einzutragen, wird stattdessen als abkürzende Schreibweise ein *Punkt* in den *Kreisbogen* gesetzt. *Winkel* werden in der *Geometrie* nahezu immer in der *Einheit Grad* ° gemessen, wobei die Zahl für einen *rechten Winkel* in der Geschichte irgendwann willkürlich festgelegt wurde. Es gibt noch andere *Einheiten* für die Winkelmessung, die sich bis heute nicht in der *Geometrie* durchgesetzt haben. Im Kapitel „Funktionen“ wird noch eine Umrechnung zu einer anderen *Einheit* vorgenommen, da es sich im dortigen Zusammenhang lohnt eine neue *Einheit* für die *Winkel* einzuführen. Die mathematische Schreibweise eines *Winkels* am oben gezeigten Beispiels ist wie folgt definiert:

$$\measuredangle\left(\overline{AB},\overline{AC}\right) = 90° \tag{4.4}$$

und wird gelesen als „Das *Winkelmaß* zwischen der *Strecke* $\overline{AB}$ und der *Strecke* $\overline{AC}$ ist gleich 90°.“ Wobei das *Winkelmaß* oftmals mit einem griechischen Buchstaben abgekürzt wird: $\measuredangle\left(\overline{AB},\overline{AC}\right) = \alpha$. Winkel hingegen werden durch die *Punkte* beschrieben durch, welche dieser aufgespannt wird, wobei bei der Notation der *Punkt*, an dem der *Winkel* vorzufinden ist, in der Mitte steht und die *Punkte* gegen den Uhrzeigersinn genannt werden, sodass sich für den oben beschrieben Winkel folgende Notation ergibt: $\angle BAC$. *Winkel* können nicht nur zwischen *Strecken* zu finden sein sondern auch zwischen *Geraden*. *Geraden* sind Linien ohne Anfangs- und Endpunkt. Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ werden auch *Schenkel* des *Winkels* genannt.



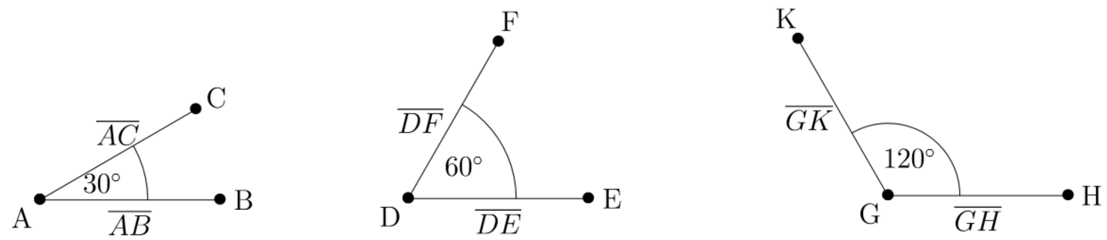
Die Abbildung zeigt einen *rechten Winkel* zwischen der *Gerade* f und g: $\measuredangle(f,g) = 90°$. Die Eigenschaft, dass *Strecken* und/oder *Geraden* einen *rechten Winkel* zu einander haben, wird *Orthogonalität* genannt. Es wird davon gesprochen, dass zum Beispiel zwei *Geraden orthogonal* zu einander sind (oft wird auch der Begriff „*senkrecht*“ verwendet). Abkürzend wird die *Orthogonalität* der *Strecken* und *Geraden* in den Beispielen so ausgedrückt:

$$\begin{gathered}\overline{AB}\perp\overline{AC}\\ f\perp g\end{gathered} \tag{4.5}$$

Wie das Geodreieck schon vermuten lässt, gibt es nicht nur *rechte Winkel* sondern sechs andere Einordnungen in Gruppen von *Winkeln*. Dazu ist es unerlässlich *Winkel* messen zu können.

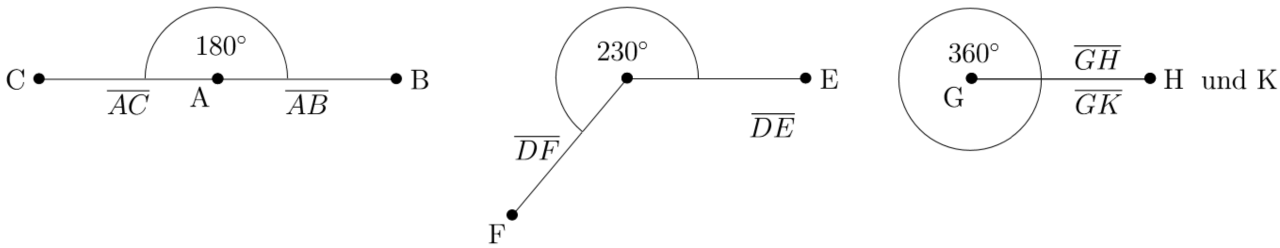
Hierfür wird das Geodreieck so positioniert, dass sich der *Schnittpunkt* der Linien direkt auf der Null befindet. Dann muss die erste Linie so ausgerichtet werden, dass sie genau auf der hellblauen Linie liegen würde und die zweite Linie sich unter dem Geodreieck befindet. Diese zweite Linie trifft dann auf eine Gradzahlmarkierung, welche dann den Wert der Winkelgröße angibt. In der Abbildung mit dem Geodreieck sei die dunkelblaue Linie die zweite Linie. Sie trifft die Winkelmarkung (beim gelben Bogen) bei 34° und somit hat der *Winkel* zwischen den blauen Linien auch genau diese Größe. Wenn der *Winkel* allerdings größer als 90° ist, dann müssen die anderen Zahlen (in diesem Fall die gelb unterlegten) verwendet werden.

Winkel werden in verschiedene Gruppen eingeordnet. Die ersten drei Arten von *Winkel* können anhand der folgenden drei Beispiele dargestellt werden:



Dabei wird bei einem *Winkel* zwischen 0° und 45° von einem *überspitzen Winkel* gesprochen ($0° < \measuredangle\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) < 45°$). Bei *Winkeln* ab 45° bis 90° ist die Rede von einem *spitzen Winkel* ($45° \leq \measuredangle\left(\overline{DE}, \overline{DF}\right) < 90°$). Während ein *Winkel* zwischen 90° und 180° *stumpfer Winkel* genannt wird ($90° < \measuredangle\left(\overline{GH}, \overline{GK}\right) < 180°$).

Auch die *Winkel* ab 180° können in drei Gruppen einsortiert werden.

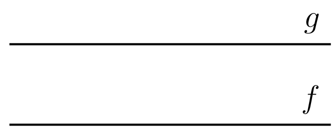


Wobei ein *Winkel* von 180° *gestreckter Winkel* genannt wird ($\measuredangle\left(\overline{AB}, \overline{AC}\right) = 180°$). Bei *Winkeln* zwischen 180° und 360° ist die Rede von einem *überstumpfen Winkel* ($180° < \measuredangle\left(\overline{DE}, \overline{DF}\right) < 360°$). Abschließend existiert noch ein *Winkel* von 360°, welcher als *voller Winkel* bezeichnet wird ($\measuredangle\left(\overline{GH}, \overline{GK}\right) = 360°$).

Überstumpfe Winkel können mit einem Geodreieck nicht direkt gemessen werden, allerdings kann der andere nicht gesucht *Winkel* abgelesen werden. Danach bedarf ein nur einer kleinen

Rechnung, um den Wert für den *überstumpfen Winkel* zu erhalten. Dabei wird der abgelesene Wert des nicht gesuchten *Winkels* von einem *vollen Winkel* 360° *subtrahiert*.

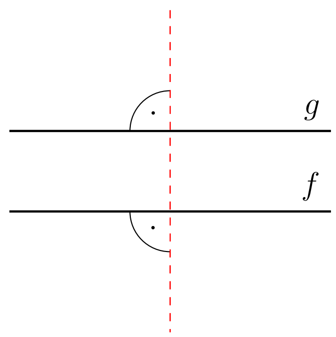
Allerdings gibt es auch *Strecken* und *Geraden*, welche sich nicht schneiden, sodass eine Winkelbestimmung entweder schwer oder gar unmöglich wird. Wenn zwei Linien immer den gleichen *Abstand* zu einander haben, dann wird dies *Parallelität* der Linien genannt. Mit den grünen Linien des Geodreiecks kann dies getestet werden.



Die beiden *Geraden* f und g sind *parallel* zu einander, da sie immer den gleichen *Abstand* zu einander haben. Mathematische wird dies ausgedrückt durch:

$$f \,||\, g \tag{4.6}$$

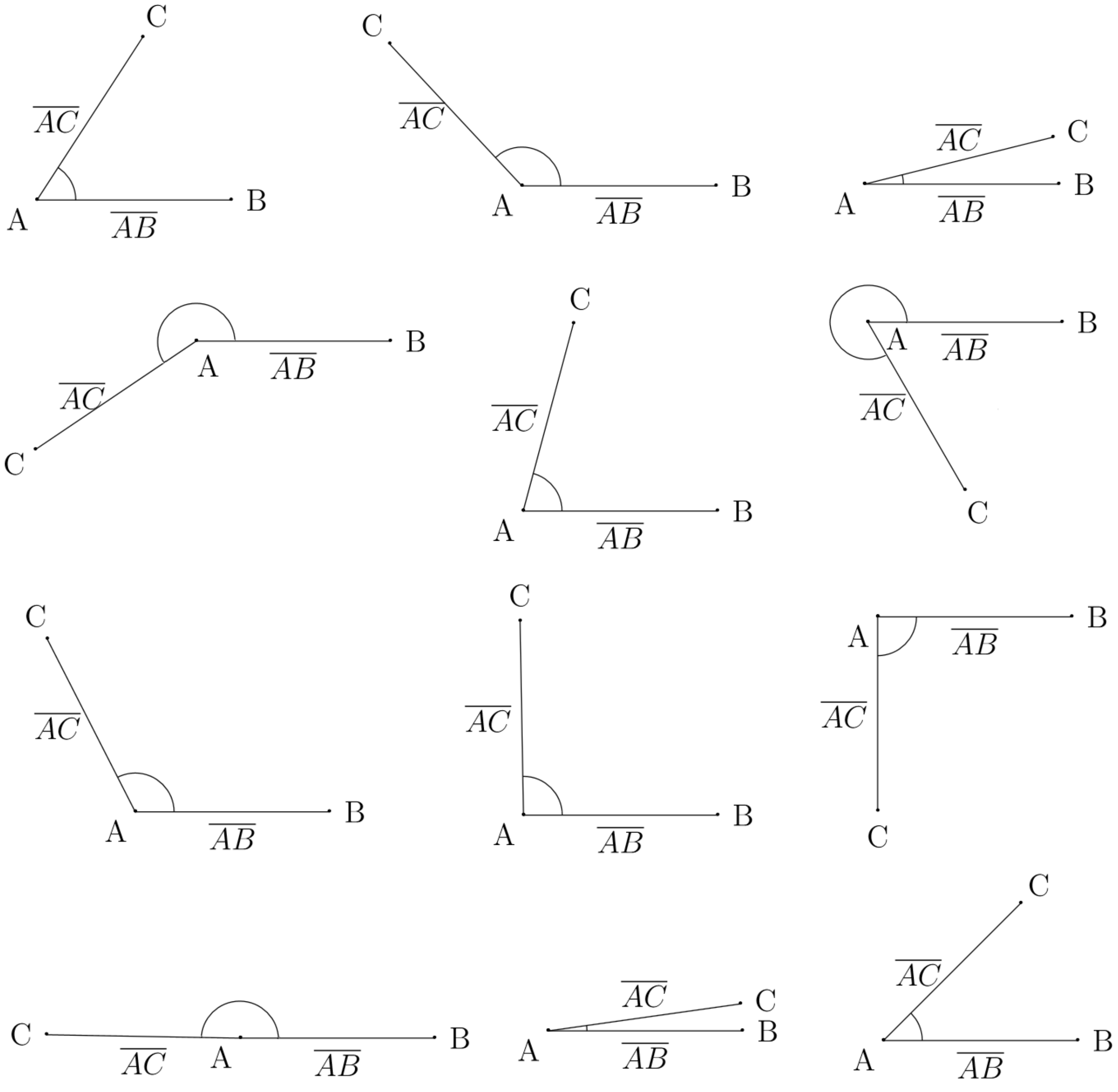
Die *Parallelität* zwischen zwei Linien kann auch überprüft werden, in dem eine *orthogonale* Linie zur ersten Linie gezogen wird. Wenn diese auch wieder *orthogonal* zur zweiten Linie ist, ist dies ebenso ein Anzeichen für die *Parallelität*.



Im Großen und Ganzen können viele wichtige Eigenschaften der geometrischen Körper durch *Winkel* und durch *Parallelität* sowie *Orthogonalität* beschrieben werden, sodass diese Begriffe von jedem Schüler verinnerlicht sein sollten.

4.2.1 Übungsaufgaben zu Winkeln

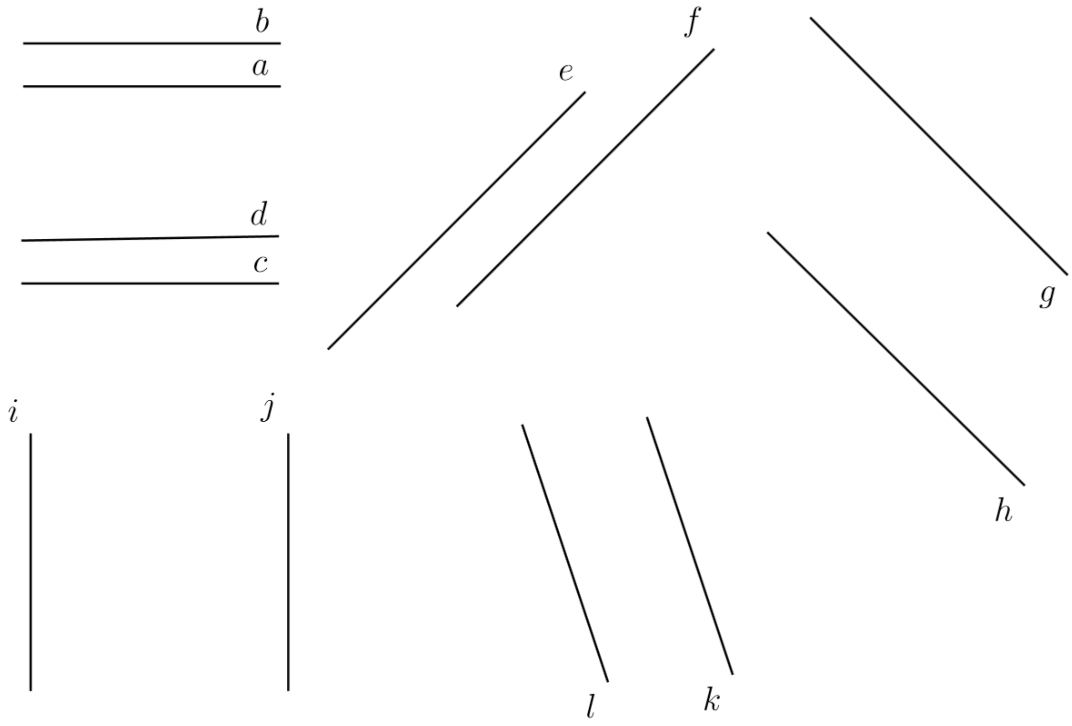
Aufgabe 1: *Bestimme die Winkelmaße und ordne sie den Kategorien zu.*



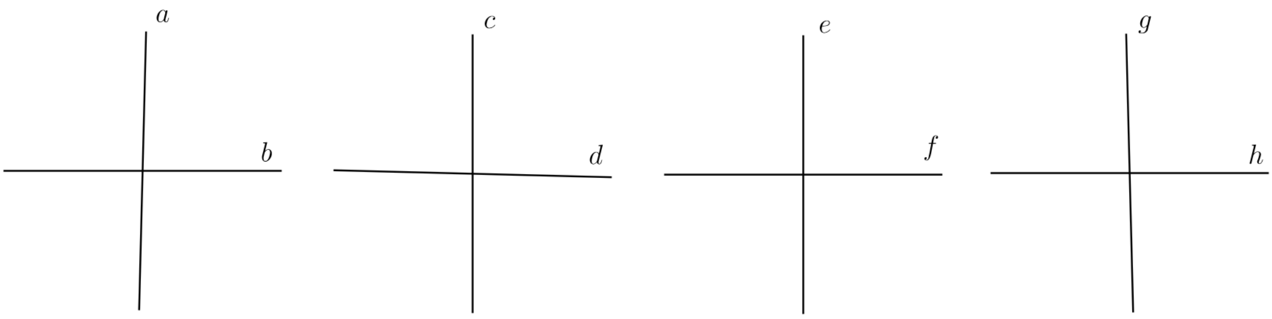
Aufgabe 2: *Zeichne die folgenden Winkel.*

148°	27°	59°	90°	210°	180°	11°	70°
30°	60°	120°	330°	267°	240°	94°	5°

Aufgabe 3: *Teste auf Parallelität.*



Aufgabe 4: *Teste auf Orthogonalität.*



Aufgabe 5: *Setze die Anweisungen in eine Zeichnung um und benutze verschiedene Farben zu Verdeutlichung.* (keine Lösung!)

$a)$ Zeichne $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$, sodass sich die Strecken im Punkt A schneiden.

$b)$ Zeichne $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$, sodass $\overline{AB}$ auf $\overline{CD}$ liegt.

$c)$ Zeichne vier Geraden, so dass nur drei Schnittpunkte existieren.

$d)$ Zeichne vier Geraden, so dass genau vier Schnittpunkte existieren.

$e)$ Zeichne sechs Geraden, so dass genau neun Schnittpunkte existieren.

Aufgabe 6: *Bestimme die gesuchte Lagebeziehung.*

$a)$ $a||b \wedge a||c$ gesucht: c zu b

$b)$ $a\perp b \wedge a||c$ gesucht: c zu b

$c)$ $a\perp b \wedge a\perp c$ gesucht: c zu b

$d)$ $a\perp b \wedge d\perp c \wedge b||c$ gesucht: d zu a

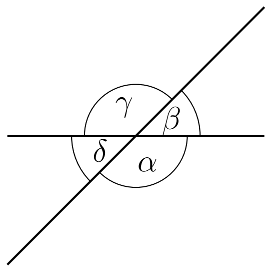
$e)$ $a\perp b \wedge d||c \wedge b||c$ gesucht: d zu a

$f)$ $a||b \wedge d\perp c \wedge b||c$ gesucht: d zu a

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.25) Lösungen zu Winkeln.

4.3 Winkelbeziehungen

Wenn sich zwei *Geraden* kreuzen werden vier *Winkel* erzeugt. Diese Winkel stehen in Beziehungen zu einander.



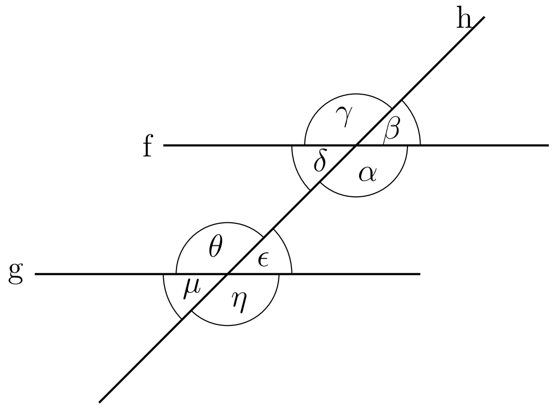
Dabei wird durch die *Geraden* jeweils der *volle Winkel* (360°) in zwei *gestreckte Winkel* (180°) unterteilt. Dies lässt erahnen, dass zwei benachbarte *Winkel* die *Winkelsumme* von 180° bilden. Die Berechnung eines *Winkels* aus dieser Beziehung geschieht über den sogenannten *Nebenwinkelsatz*, sodass diese Winkel auch *Nebenwinkel* genannt werden:

$$\begin{aligned}
\delta + \alpha = 180^\circ \qquad & \Rightarrow \quad \delta = 180^\circ - \alpha \\
& \Rightarrow \quad \alpha = 180^\circ - \delta \\
\beta + \alpha = 180^\circ \qquad & \Rightarrow \quad \beta = 180^\circ - \alpha \\
& \Rightarrow \quad \alpha = 180^\circ - \beta \\
\gamma + \beta = 180^\circ \qquad & \Rightarrow \quad \gamma = 180^\circ - \beta \\
& \Rightarrow \quad \beta = 180^\circ - \gamma \\
\gamma + \delta = 180^\circ \qquad & \Rightarrow \quad \gamma = 180^\circ - \delta \\
& \Rightarrow \quad \delta = 180^\circ - \gamma
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Aus diesen Beziehungen wird auch deutlich, dass die sich gegenüberliegenden *Winkeln* bei sich kreuzenden Geraden den selben Wert haben müssen. Diese *Winkel* werden *Scheitelwinkel* genannt.

$$\begin{aligned}
\delta &= \beta \\
\gamma &= \alpha
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Wird eine *Gerade* von zwei, *parallel* zu einander stehenden, *Geraden* $f||g$ gekreuzt, können noch weitere Beziehungen aufgestellt werden.



So kann durch die Verschiebung der *Geraden* f auf die dazu *parallelen Geraden* g gezeigt werden, dass die *Winkel* der Kreuzung von f mit h die selben Werte wie die *Winkel* der Kreuzung von g mit h. So ergeben sich zum einen die *Stufenwinkel*:

$$\begin{aligned} \alpha &= \eta \ , \\ \beta &= \epsilon \ , \\ \gamma &= \theta \ , \\ \delta &= \mu \ , \end{aligned} \tag{4.9}$$

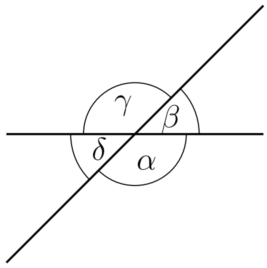
und zum anderen die sogenannten *Wechselwinkel*:

$$\begin{aligned} \gamma &= \eta \ , \\ \delta &= \epsilon \ , \\ \alpha &= \theta \ , \\ \beta &= \mu \ , \end{aligned} \tag{4.10}$$

Aufgrund dieser Beziehungen können viele Probleme vereinfacht werden, was besonders deutlich wird, wenn komplexere geometrische Strukturen betrachtet werden.

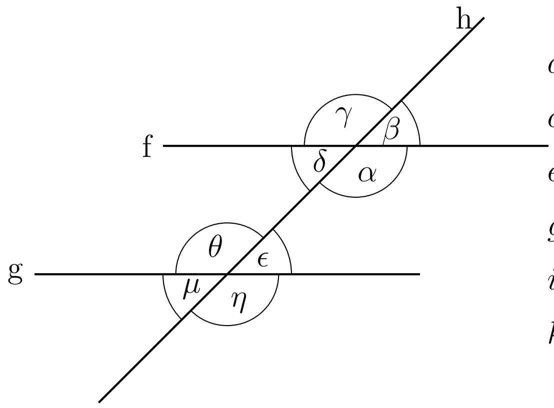
4.3.1 Übungsaufgaben zu Winkelbeziehungen

Aufgabe 1: *Bestimme durch den gegebenen Winkelmaße die restlichen Winkelmaße. (Beachte, dass die Skizze nur zur Orientierung dient und nicht maßstabsgetreu ist).*



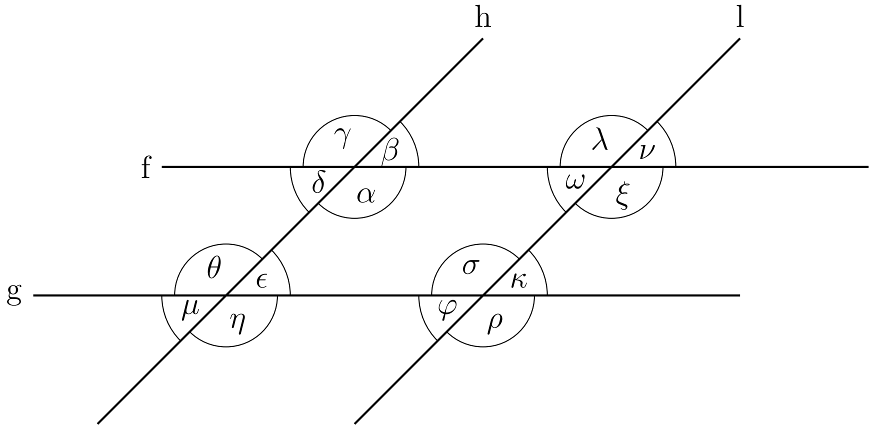
a) $\alpha = 35°$	*b)* $\beta = 11°$
c) $\alpha = 137°$	*d)* $\gamma = 27°$
e) $\delta = 62°$	*f)* $\beta = 111°$
g) $\gamma = 49°$	*h)* $\delta = 23°$
i) $\alpha = 123°$	*j)* $\delta = 86°$
k) $\gamma = 151°$	*l)* $\alpha = 173°$

Aufgabe 2: *Bestimme durch die gegebenen Winkelmaße die restlichen Winkelmaße. (Beachte, dass die Skizze nur zur Orientierung dient und nicht maßstabsgetreu ist).* $f||g$.



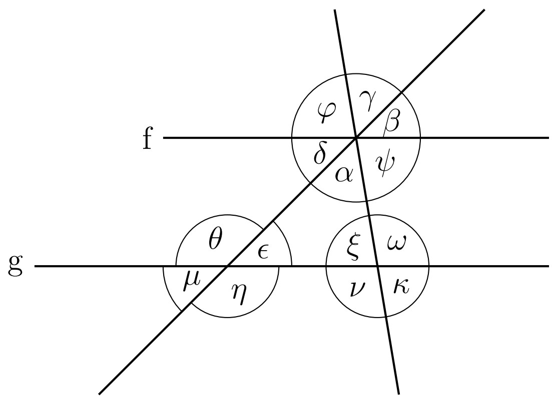
a) $\alpha = 23°$	*b)* $\beta = 19°$
c) $\epsilon = 146°$	*d)* $\gamma = 35°$
e) $\delta = 59°$	*f)* $\eta = 38°$
g) $\gamma = 142°$	*h)* $\delta = 75°$
i) $\alpha = 99°$	*j)* $\mu = 155°$
k) $\theta = 3°$	*l)* $\epsilon = 103°$

Aufgabe 3: *Bestimme durch die gegebenen Winkelmaße die restlichen Winkelmaße. (Beachte, dass die Skizze nur zur Orientierung dient und nicht maßstabsgetreu ist).* $f||g$ *und* $l||h$.



a) $\alpha = 56°$	*b)* $\beta = 13°$	*c)* $\lambda = 77°$
d) $\epsilon = 153°$	*e)* $\gamma = 95°$	*f)* $\xi = 111°$
g) $\delta = 43°$	*h)* $\eta = 24°$	*i)* $\kappa = 134°$
j) $\gamma = 20°$	*k)* $\rho = 6°$	*l)* $\nu = 172°$
m) $\omega = 81°$	*n)* $\mu = 68°$	*o)* $\sigma = 10°$
p) $\theta = 167°$	*q)* $\epsilon = 55°$	*r)* $\varphi = 64°$

Aufgabe 4: *Bestimme durch die gegebenen Winkelmaße die restlichen Winkelmaße. (Beachte, dass die Skizze nur zur Orientierung dient und nicht maßstabsgetreu ist).*

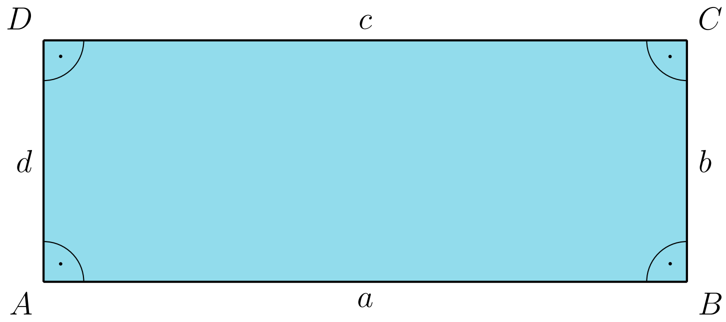


a) $\alpha = 34°$ und $\psi = 67°$
b) $\beta = 22°$ und $\gamma = 75°$
c) $\epsilon = 33°$ und $\omega = 54°$
d) $\gamma = 45°$ und $\theta = 82°$
e) $\epsilon = 28°$ und $\varphi = 73°$
f) $\mu = 11°$ und $\nu = 100°$
g) $\eta = 139°$ und $\varphi = 53°$
h) $\delta = 31°$ und $\omega = 76°$
i) $\alpha = 52°$ und $\nu = 129°$
j) $\kappa = 74°$ und $\mu = 41°$
k) $\eta = 142°$ und $\kappa = 68°$
l) $\xi = 103°$ und $\gamma = 43°$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.26) Lösungen zu Winkelbeziehungen.

4.4 Rechteck

Nachdem *Winkel* anhand von *Strecken* und *Geraden* eingeführt wurden und somit der erste Kontakt mit einer *Ebene*, also einer Ausdehnung in zwei *Dimensionen*, werden nun weitere wichtige Größen für zweidimensionale Körper am *Rechteck* eingeführt. Ein *Rechteck* ist eine *geometrisches* Objekt, welches aus vier *rechten Winkel* besteht. Somit hat ein *Rechteck* insgesamt eine *Winkelsumme* von 360°. Außerdem besitzt jedes *Rechteck* vier *Seiten*. Dabei sind die gegenüber liegenden *Seiten* gleich lang und *parallel* zu einander.



Die Abbildung zeigt, wie die *Seiten* und die *Eckpunkte* eines *Rechtecks* benannt werden. Es gilt, wie bereits erwähnt, dass $\left|\overline{AB}\right| = a = c = \left|\overline{CD}\right|$ und $\left|\overline{BC}\right| = b = d = \left|\overline{DA}\right|$. Die *Strecken* $\overline{DB}$ und $\overline{AC}$ werden *Diagonalen* genannt.

Die bedeutendste *zweidimensionale Größe* von zweidimensionalen *geometrischen* Objekten ist der sogenannte *Flächeninhalt* A. Dieser gibt an wie groß die *Fläche* ist, welche durch die *Seiten* eingerahmt wurde. Dabei ist eine *Fläche* immer vorhanden, wenn zwei Richtungen, also *Dimensionen*, betrachtet werden. Ein Blatt Papier, ein Tisch und auch die Tafel bilden jeweils eine *Fläche*. Die *Fläche* wird in Quadratmeter $1\,\mathrm{m}^2$ gemessen. Dabei ist ein Quadratmeter eine *Fläche* die von einem *Rechteck* eingeschlossen wird von einem Meter $a = 1\,\mathrm{m}$ mal einem Meter $b = 1\,\mathrm{m}$: $1\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{m}^2$. Somit ist der *Flächeninhalt* A gegeben durch das *Produkt* der beiden *Seiten* a und b.

$$A = a \cdot b \tag{4.11}$$

Die zweite wichtige *Größe* ist der *Umfang* U, welcher den *Rand* der *Fläche* markiert und selbst eine *eindimensionale Größe* ist. Der *Umfang* U ist die *Summe* aller *Strecken*, somit ergibt sich für ein *Rechteck*:

$$U = 2a + 2b \tag{4.12}$$

4.4.1 Übungsaufgaben zu Rechtecken

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Rechtecken.*

a) $a = 3\,\text{cm}$ und $b = 6\,\text{cm}$

b) $a = 2\,\text{cm}$ und $b = 7\,\text{cm}$

c) $a = 9\,\text{cm}$ und $b = 12\,\text{cm}$

d) $a = 4\,\text{cm}$ und $b = 17\,\text{cm}$

e) $a = 27\,\text{cm}$ und $b = 3\,\text{cm}$

f) $a = 1,5\,\text{cm}$ und $b = 60\,\text{cm}$

g) $a = 0,5\,\text{cm}$ und $b = 2\,\text{cm}$

h) $a = \frac{3}{4}\,\text{cm}$ und $b = \frac{6}{5}\,\text{cm}$

i) $a = \frac{5}{6}\,\text{cm}$ und $b = \frac{10}{7}\,\text{cm}$

j) $a = \frac{3}{10}\,\text{cm}$ und $b = \frac{11}{12}\,\text{cm}$

k) $a = \sqrt{2}\,\text{cm}$ und $b = \sqrt{3}\,\text{cm}$

l) $a = \ln 5\,\text{cm}$ und $b = \lg 12\,\text{cm}$

m) $a = 2^3\,\text{cm}$ und $b = 4^{-1}\,\text{cm}$

n) $a = e\,\text{cm}$ und $b = \pi\,\text{cm}$

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von Rechtecken. Gib den Wert des Terms in der Einheit der längeren Seite an. Runde dabei den Wert des Terms bis auf drei Nachkommastellen.*

a) $a = 3\,\text{dm}$ und $b = 6\,\text{cm}$

b) $a = \frac{1}{2}\,\text{dm}$ und $b = 90\,\text{mm}$

c) $a = 4,2\,\text{m}$ und $b = 430\,\text{cm}$

d) $a = 2\,\text{mm}$ und $b = 2\,\text{cm}$

e) $a = \frac{1}{9}\,\text{cm}$ und $b = 27\,\text{dm}$

f) $a = 1,125\,\text{km}$ und $b = 8000\,\text{m}$

g) $a = \frac{3}{4}\,\text{mm}$ und $b = \frac{5}{7}\,\text{dm}$

h) $a = \frac{4}{5}\,\text{m}$ und $b = \frac{11}{2}\,\text{cm}$

i) $a = \sqrt{111}\,\text{cm}$ und $b = 120\,\text{mm}$

j) $a = \sqrt{83}\,\text{mm}$ und $b = \frac{11}{13}\,\text{cm}$

Aufgabe 3: *Bestimme Umfang U, Flächeninhalt A, Länge a und Breite b der jeweiligen Rechtecke.*

a) $A = 12\,\text{cm}^2$ und $b = 3\,\text{cm}$

b) $U = 36\,\text{cm}$ und $a = 6\,\text{cm}$

c) $a = 11\,\text{cm}$ und $b = 5\,\text{dm}$

d) $A = 156\,\text{cm}^2$ und $b = 1,3\,\text{dm}$

e) $U = 15\,\text{dm}$ und $b = \dfrac{1}{16}\,\text{m}$

f) $A = \dfrac{72}{45}\,\text{cm}^2$ und $a = \dfrac{80}{9}\,\text{mm}$

g) $U = 56\,\text{dm}$ und $A = \dfrac{3}{4}\,\text{m}^2$

h) $A = \dfrac{4}{17}\,\text{mm}^2$ und $U = \dfrac{83}{11}\,\text{mm}$

Aufgabe 4: *Ein rechteckiger Kuchen mit der Länge a und der Breite b soll zur Hälfte in Stücke mit Rand und zur Hälfte in Stücke ohne Rand zu teilen. Berechne alle möglichen Schnittkombinaten die möglich sind.*

Aufgabe 5: *Berechne die fehlenden Größen für ein Rechteck.*

	1	2	3	4	5	6
Seite a	4		5		0,5	
Seite b	5	6		2		$\frac{1}{4}$
Flächeninhalt A		42			13	
Umfang U			32	18		3

Aufgabe 6: *Ein Rechteck hat den Umfang von $24\,m$ und eine Seite soll $4\,m$ lang sein. Wie groß ist der Flächeninhalt A des Rechtecks?*

Aufgabe 7: *Zeichne folgende Quadrate.* (keine Lösung!)

$a)$ $a = 5\,\text{cm}$	$b)$ $a = 6\,\text{cm}$	$c)$ $a = 2\,\text{cm}$
$d)$ $a = 4,5\,\text{cm}$	$e)$ $a = 3,5\,\text{cm}$	$f)$ $a = 6,5\,\text{cm}$
$g)$ $a = 5,2\,\text{cm}$	$h)$ $a = 4,9\,\text{cm}$	$i)$ $a = 2,3\,\text{cm}$
$j)$ $a = 0,8\,\text{cm}$	$k)$ $a = 1,3\,\text{cm}$	$l)$ $a = 2,75\,\text{cm}$

Aufgabe 8: *Zeichne folgende Rechtecke.* (keine Lösung!)

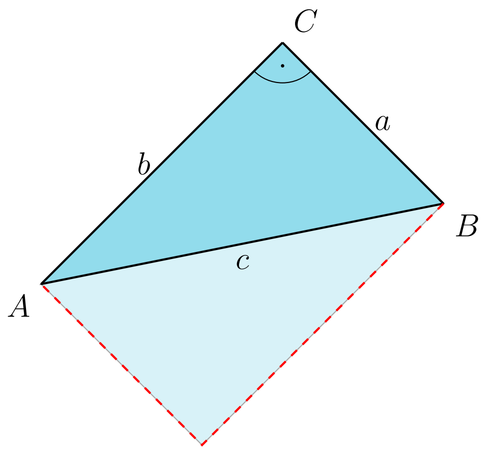
$a)$ $a = 5\,\text{cm}\ ;\ b = 4\,\text{cm}$	$b)$ $a = 2\,\text{cm}\ ;\ b = 5\,\text{cm}$
$c)$ $a = 6\,\text{cm}\ ;\ b = 2\,\text{cm}$	$d)$ $a = 3\,\text{cm}\ ;\ b = 7\,\text{cm}$
$e)$ $a = 1\,\text{cm}\ ;\ b = 6\,\text{cm}$	$f)$ $a = 2,5\,\text{cm}\ ;\ b = 5,5\,\text{cm}$
$g)$ $a = 7,5\,\text{cm}\ ;\ b = 0,5\,\text{cm}$	$h)$ $a = 1,5\,\text{cm}\ ;\ b = 7\,\text{cm}$
$i)$ $a = 0,7\,\text{cm}\ ;\ b = 4,6\,\text{cm}$	$j)$ $a = 3,4\,\text{cm}\ ;\ b = 5,8\,\text{cm}$
$k)$ $a = 1,1\,\text{cm}\ ;\ b = 5,2\,\text{cm}$	$l)$ $a = 8,3\,\text{cm}\ ;\ b = 4,7\,\text{cm}$

Weitere Übungen zu Rechtecken zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

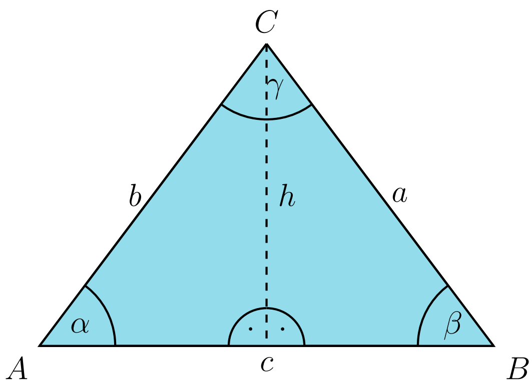
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.27) Lösungen zu Rechtecken.

4.5 Dreieck

Wenn ein *Rechteck* entlang einer *Diagonalen* in zwei Objekte zerschnitten wird, so ergeben sich daraus zwei *Dreiecke* mit jeweils einem *rechten Winkel* - *rechtwinklige Dreiecke*. *Dreiecke* sind mit *Abstand* die wichtigste *geometrische* Konstruktion der Mathematik, denn nicht zu Letzt lässt sich jede eckige *geometrische* Form in *Dreiecke* unterteilen und sogar die Eigenschaften des *Kreises* an ihnen erklären. Das *rechtwinklige Dreieck* ist hierbei das bedeutendste *Dreieck*.



Die Abbildung zeigt die Benennung der *Größen* eines *rechtwinkligen Dreieckes*. Da das *Dreieck* aus dem Zerschneiden eines *Rechtecks* in zwei Teile gewonnen wurde, ist die *Winkelsumme* eines *Dreieckes* gegeben als 180°. Allerdings müssen nicht alle *Dreiecke* einen *rechten Winkel* besitzen, sodass auch die *Winkel* benannt werden müssen.

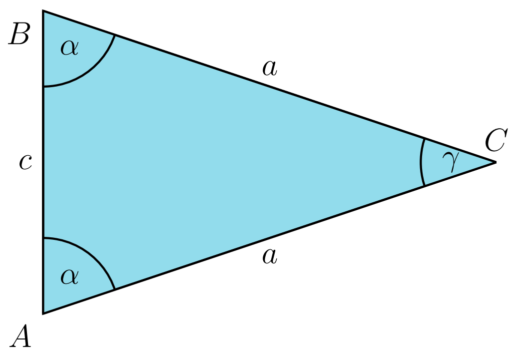


Die Abbildung zeigt, dass die Winkel mit griechischen Buchstaben benannt werden - das vollständige griechische Alphabet sowie andere können im Anhang gefunden werden (18.1). Außerdem ist zu erkennen, dass ein beliebiges *Dreieck* immer in zwei *rechtwinklige Dreiecke* unterteilt werden können. Dazu bedarf es der Konstruktion der sogenannten *Höhe* h des *Dreiecks*, wobei dann in diesem Fall die *Seite* c die *Grundseite* g wäre. Die *Höhe* h muss immer *orthogonal* zur *Grundseite* g sein und im *Punkt* enden, welcher der *Grundseite* g gegenüber liegt (in der Abbildung wäre dies der Punkt C).

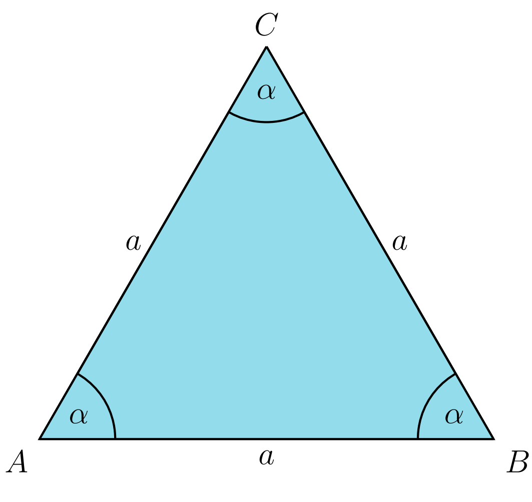
Aus der Zerlegung des *Rechtecks* in zwei *Dreiecke* ergibt sich, dass der *Flächeninhalt* A eines *Dreiecks* halb so groß sein muss wie ein *Rechteck* mit gleichen Maßen. Die Bedingung zur Berechnung des *Flächeninhalts* A beim *Rechteck* waren dessen Eigenschaften, dass die gegenüber liegenden *Seiten* gleich lang und alle *Winkel rechte Winkel* sein müssen. Somit muss die Hälfte des *Produkts* der *Grundseite* g mit der Höhe h den *Flächeninhalt* A des *Dreiecks* widerspiegeln, da die *Grundseite* g und die *Höhe* h ein *Rechteck* aufspannen. Der *Umfang* U ist wieder gegeben durch die *Summe* aller *Strecken*, die die *Fläche* umranden.

$$\begin{aligned} A &= \frac{gh}{2} \\ U &= a + b + c \end{aligned} \tag{4.13}$$

Neben dem *rechtwinkligen Dreieck* gibt es noch weitere spezielle *Dreiecke*. Darunter fällt das sogenannte *gleichschenklige Dreieck*, bei dem zwei *Seiten* gleich lang sind. Nicht nur die *Schenkellängen* zum *Winkel* γ sind gleich groß, sondern auch die anderen beiden *Winkel*.

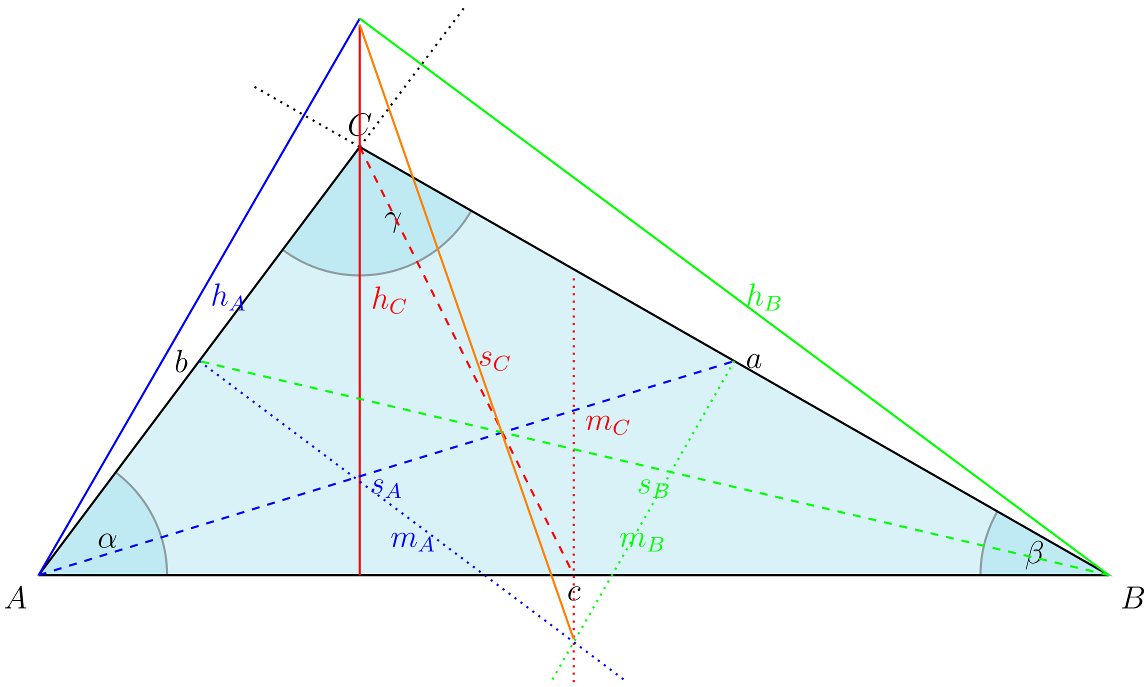


Das Geodreieck ist ein solches *gleichschenkliges Dreieck*. Durch die Bestimmung eines *Winkels* sind alle *Winkel* bekannt - Diese Eigenschaft kann in vielen Aufgaben ausgenutzt werden.
Des Weiteren gibt es noch den Spezialfall, dass alle *Seiten* des *Dreiecks* gleich lang und alle *Winkel* gleich groß sind - das *gleichseitige Dreieck*. Damit ergibt sich automatisch, dass jeder *Winkel* exakt 60° messen muss.



Nachdem das *Dreieck* und dessen spezielle Formen eingeführt wurden, werden im Folgenden weitere *Größen* eingeführt, welche manchmal Aufgaben vereinfachen oder gar erst lösbar machen.

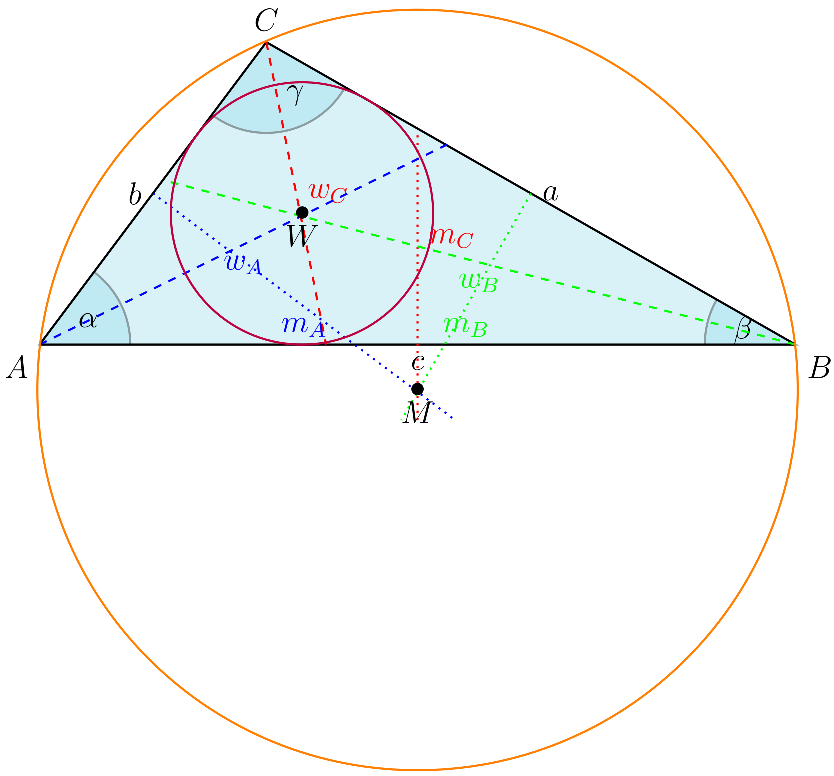
Eine solche *Größe* ist der *Schwerpunkt*. Dieser kann zeichnerisch ermittelt werden, indem die *Seitenhalbierenden* gefunden werden. Dabei wird die Mitte einer *Seite* mit dem gegenüberliegenden *Punkt* verbunden. Der *Schnittpunkt* der *Seitenhalbierenden* ist der *Schwerpunkt* S.
Durch die Konstruktion einer *Orthogonalen* in der Mitte einer jeden Seite ergeben sich die sogenannten *Mittelsenkrechten*. Auch sie haben einen *Schnittpunkt*, welcher auch *Mittelpunkt* des *Umkreises* M genannt wird. An diesem Punkt wäre es möglich einen *Kreis* zu ziehen, sodass alle *Eckpunkte* des *Dreiecks* auf dem *Kreis* liegen würden.
Eine sogenannte *Winkelhalbierende* kann, wie der Name es schon erahnen lässt, durch die Halbierung des *Winkels* konstruiert werden. Der *Schnittpunkt* der *Winkelhalbierenden* wird *Mittelpunkt* des *Innenkreises* W genannt und dient zur Konstruktion eines *Kreis*, der jede *Seite* berührt aber nicht schneidet.



In der Abbildung wurden alle *Höhen* h als solide, alle *Seitenhalbierenden* s als gestrichelte und alle *Mittelsenkrechten* m als gepunktete Linien eingezeichnet. Dabei sind alle Linien die vom *Punkt* A ausgehen blau, alle Linien die vom *Punkt* B ausgehen grün und alle Linie die vom *Punkt* C ausgehen rot gehalten. Es fällt auf, dass der *Schnittpunkt* der *Höhen* sowie der *Schnittpunkt Mittelsenkrechten* außerhalb des *Dreiecks* liegen. Dies rührt daher, dass ein *Winkel* größer als 90° ist.
Die *Schnittpunkte* der *Winkelhalbierenden*, der *Seitenhalbierenden* und der *Höhen* liegen auf

einer *Geraden*, der sogenannten *Euler'schen Gerade*, welche in der Abbildung orange eingezeichnet ist. Dabei ist das Streckenverhältnis immer das gleiche. Die *Strecke* $\overline{HS}$ besitzt dabei immer eine doppelte so großen *Betrag* wie die *Strecke* $\overline{SM}$

Zur Veranschaulichung des *Innen*- und *Umkreises* dient folgende Abbildung:



In der Abbildung sind die *Winkelhalbierenden* w gestrichelt und die *Mittelsenkrechten* m gepunktet. Dabei sind alle Linien die vom *Punkt* A ausgehen blau, alle Linien die vom *Punkt* B ausgehen grün und alle Linie die vom *Punkt* C ausgehen rot gehalten. Der *Innenkreis* ist in einem dunklen violett gehalten und hat seinen *Mittelpunkt* beim *Punkt* W, während der *Umkreis* ist in orange gezeichnet wurde und seinen *Mittelpunkt* beim *Punkt* M hat.

Aus den geometrischen Beziehungen, können die Gleichungen für die Radien des Innenkreises r und des Umkreises R bestimmt werden.

$$r = \frac{2A}{U} \qquad \wedge \qquad R = \frac{abc}{4A} \tag{4.14}$$

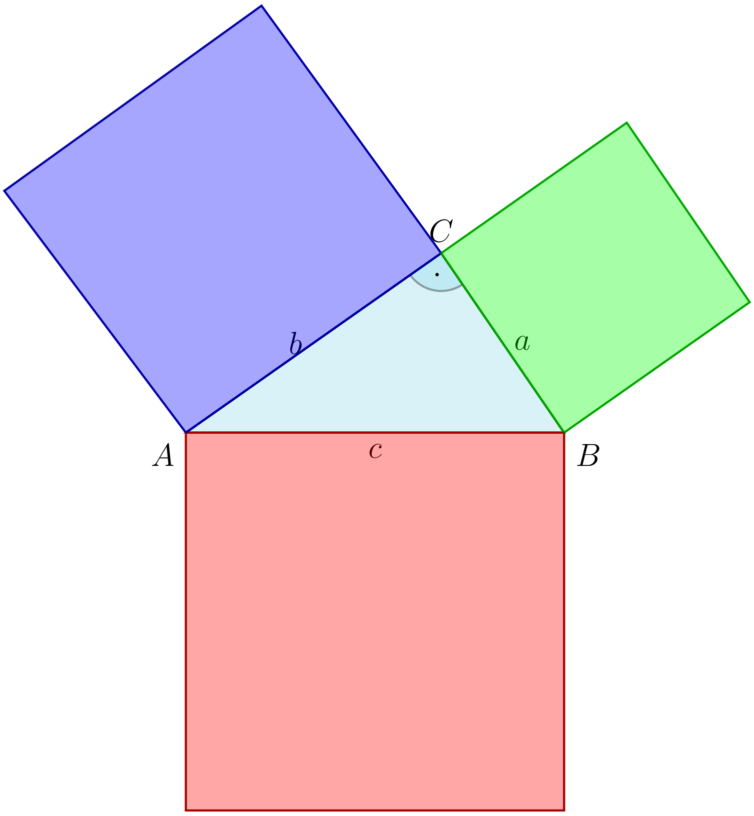
Auch fällt bei spitzwinkligen Dreiecken auf, dass der Schnittpunkt der Höhen H innerhalb der Dreiecksfläche befindet und die Höhen stets in Teilstrecken mit gleichem Verhältnis teilt. Da die Höhen h orthogonal auf den Seiten steht, wird der Schnittpunkt der Höhen mit den Seiten auch Lotfußpunkt H_x genannt, wobei der Index die betrachtete Seite angibt.

$$\overline{HC} \cdot \overline{HH_c} = \overline{HA} \cdot \overline{HH_a} \tag{4.15}$$

Nachdem nun die Konstruktion von verschiedenen wichtigen *Punkten* und *Strecken* beziehungsweise *Geraden* erläutert wurde, soll das *rechtwinklige Dreieck* genauer betrachtet werden. Zunächst soll der *Satz des Pythagoras* betrachtet werden, welcher wohl der berühmteste *Satz* der Mathematik ist. Ein *Satz* in der Mathematik ist eine bewiesene *Gleichung*, die bis auf in sehr speziellen Ausnahmefällen immer ihre Gültigkeit besitzt.

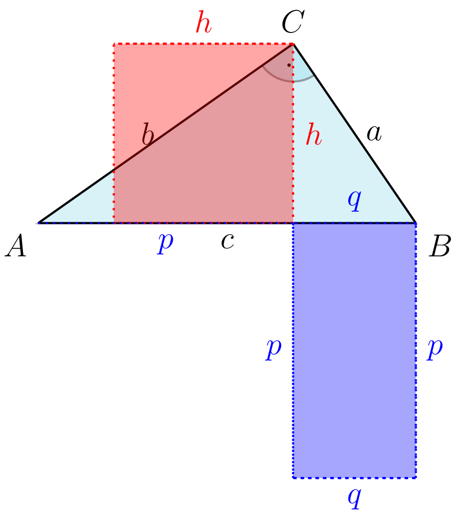
$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{4.16}$$

Wie das a^2, b^2 und c^2 schon suggerieren, werden hierbei *Flächeninhalte* von *Rechtecken* mit den gleichen *Seitenlängen* (sogenannte *Quadrate*), die von den jeweiligen *Seiten* des *Dreiecks* aufgespannt werden, ins Verhältnis gebracht.



Die Abbildung zeigt deutlich die verschieden *Flächen* der *Quadrate*. Dabei gilt, dass der *Flächeninhalt*, der am größten ist und von der längsten *Seite c* aufgespannt wird, genau so groß ist wie die *Summe* der beiden anderen *Flächen*. Die längste *Seite* eines *rechtwinkligen Dreiecks* wird *Hypotenuse* genannt und befindet sich immer gegenüber vom *rechten Winkel*. Die beiden anderen *Seiten* heißen *Katheten* und werden vom Kapitel „Trigonometrie“ detaillierter unterschieden und untersucht.

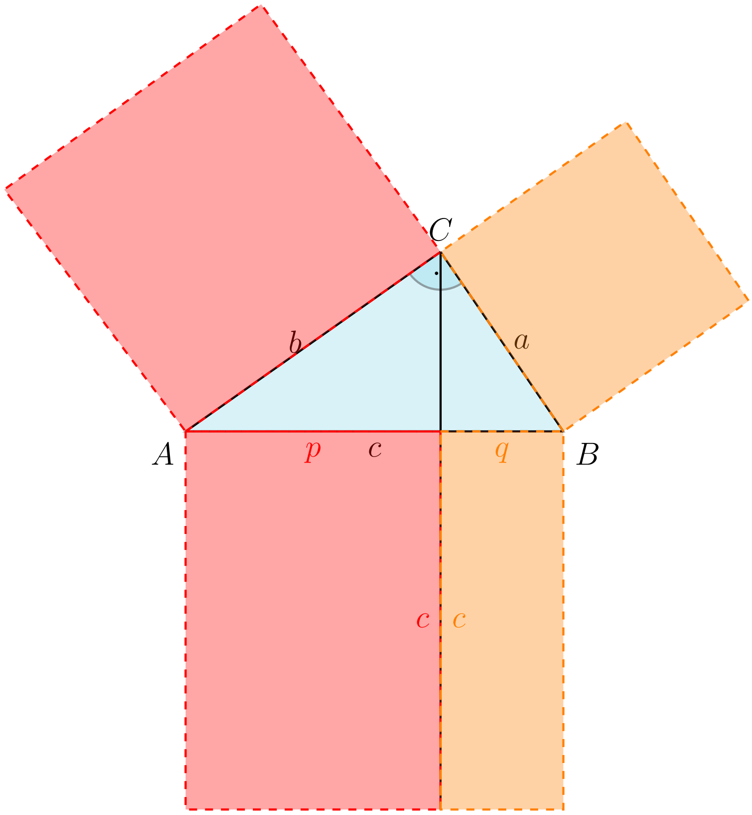
Neben dem *Satz das Pythagoras* existieren noch weitere *Sätze*. Einer von ihnen ist der sogenannte *Höhensatz von Euklid*.



Die Abbildung zeigt, dass die *Flächeninhalte* aus dem *Quadrat*, welches durch die *Höhe* h mit sich selbst aufgespannt wird, mit dem *Rechteck* aus der unterteilten *Hypotenuse* aus p und q in Verbindung gebracht werden. Es gilt:

$$h^2 = pq \tag{4.17}$$

Zu guter Letzt wird noch auf den *Kathetensatz* hingewiesen, welcher die *Rechtecke* aus den Teilstücken der *Hypotenuse* mit der *Hypotenuse* und jeweiligen *Kathetenquadraten* in Verbindung setzt.



Allgemein gilt:

$$a^2 = cq$$
$$b^2 = cp \tag{4.18}$$

Es soll nochmals betont werden, dass das *Dreieck* eine zentrale Rolle in der Mathematik einnimmt. Und auch grade in den Naturwissenschaften sind *Dreiecke* von fundamentaler Wichtigkeit. Im Kapitel „*Trigonometrie*“ werden die Eigenschaften des *Dreiecks* und Beziehungen von *Größen* des *Dreiecks* untereinander weiter beleuchtet bis sich daraus resultierendes Wissen nochmals vertieft wird im Kapitel „*Funktionen*“.

4.5.1 Übungsaufgaben zu Dreiecken

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von rechtwinkligen Dreiecken. (Benutze die vorgestellten Sätze!)*

$a)$	$g = 9\,\text{cm}$	und $a = 4\,\text{cm}$	$b)$	$g = 11\,\text{cm}$	und $a = 5\,\text{cm}$
$c)$	$a = 4\,\text{cm}$	und $b = 6\,\text{cm}$	$d)$	$g = 7\,\text{cm}$	und $b = 6\,\text{cm}$
$e)$	$p = 2,5\,\text{cm}$	und $q = 2\,\text{cm}$	$f)$	$c = 12\,\text{cm}$	und $q = 3\,\text{cm}$
$g)$	$a = \frac{1}{2}\,\text{cm}$	und $b = \frac{1}{3}\,\text{cm}$	$h)$	$c = \frac{7}{3}\,\text{cm}$	und $q = \frac{3}{4}\,\text{cm}$
$i)$	$p = \frac{4}{5}\,\text{cm}$	und $q = \frac{7}{4}\,\text{cm}$	$j)$	$h = \frac{11}{5}\,\text{cm}$	und $p = \frac{4}{3}\,\text{cm}$
$k)$	$q = \frac{9}{5}\,\text{cm}$	und $h = \frac{5}{3}\,\text{cm}$	$l)$	$c = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$	und $p = \ln 5\,\text{cm}$
$m)$	$p = e\,\text{cm}$	und $q = \sqrt{3}\,\text{cm}$	$n)$	$c = 2\pi\,\text{cm}$	und $q = \sqrt{17}\,\text{cm}$

Aufgabe 2: *Du befindest dich mit deinem Geodreieck* $20\,m$ *weit weg von einem Turm und hältst das Geodreieck auf* $1,5\,m$ *Höhe vom Boden. Du schaust entlang der längsten Kante, sodass die Kante und die Spitze des Turms eine Linie bilden. Dabei ist die Kante, die nach unten zeigt nun parallel zum Boden. Wie hoch ist der Turm?*

Aufgabe 3: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die Winkel.*

$a)$	$a = 3\,\text{cm}$;	$b = 4\,\text{cm}$	und $c = 5\,\text{cm}$
$b)$	$a = 5\,\text{cm}$;	$b = 5\,\text{cm}$	und $c = 7\,\text{cm}$
$c)$	$a = 6\,\text{cm}$;	$b = 4\,\text{cm}$	und $c = 8\,\text{cm}$
$d)$	$a = 4\,\text{cm}$;	$b = 7\,\text{cm}$	und $c = 9\,\text{cm}$
$e)$	$a = 7\,\text{cm}$;	$b = 5,5\,\text{cm}$	und $c = 8,7\,\text{cm}$
$f)$	$a = 3,4\,\text{cm}$;	$b = 4,6\,\text{cm}$	und $c = 7,1\,\text{cm}$

Aufgabe 4: *Konstruiere folgende rechtwinklige Dreiecke ($\gamma = 90°$) und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlenden Seite.*

a) $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 5\,\text{cm}$

b) $a = 5\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$

c) $a = 6\,\text{cm}$ und $c = 8\,\text{cm}$

d) $a = 4\,\text{cm}$ und $c = 9\,\text{cm}$

e) $a = 7\,\text{cm}$ und $b = 4\,\text{cm}$

f) $a = 3\,\text{cm}$ und $b = 6\,\text{cm}$

Aufgabe 5: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlende Seite.*

a) $a = 7\,\text{cm}$; $b = 6\,\text{cm}$ und $\gamma = 65°$

b) $a = 4,5\,\text{cm}$; $c = 5,7\,\text{cm}$ und $\beta = 34°$

c) $c = 6,8\,\text{cm}$; $b = 5,3\,\text{cm}$ und $\alpha = 84°$

d) $a = 4,4\,\text{cm}$; $b = 6,7\,\text{cm}$ und $\gamma = 72°$

Aufgabe 6: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlende Seite.*

a) $a = 5\,\text{cm}$; $b = 4\,\text{cm}$ und $\alpha = 50°$

b) $a = 5,2\,\text{cm}$; $b = 5,8\,\text{cm}$ und $\beta = 40°$

c) $a = 6\,\text{cm}$; $b = 4\,\text{cm}$ und $\gamma = 75°$

d) $a = 8,5\,\text{cm}$; $b = 7\,\text{cm}$ und $\alpha = 68°$

Aufgabe 7: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlende Seiten.*

a) $a = 7\,\mathrm{cm}$; $\beta = 77°$ und $\gamma = 25°$

b) $c = 4,5\,\mathrm{cm}$; $\alpha = 37°$ und $\beta = 86°$

c) $b = 6,8\,\mathrm{cm}$; $\gamma = 72°$ und $\alpha = 54°$

d) $a = 4,4\,\mathrm{cm}$; $\beta = 21°$ und $\gamma = 62°$

Aufgabe 8: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlende Seiten.*

a) $c = 6,2\,\mathrm{cm}$; $\alpha = 65°$ und $\gamma = 35°$

b) $c = 4,9\,\mathrm{cm}$; $\gamma = 40°$ und $\beta = 75°$

c) $b = 5,5\,\mathrm{cm}$; $\gamma = 70°$ und $\beta = 40°$

d) $a = 4,4\,\mathrm{cm}$; $\beta = 30°$ und $\alpha = 90°$

Aufgabe 9: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig. Miss die fehlenden Größen.*

a) $a = 6,3\,\mathrm{cm}$; $b = 5,2\,\mathrm{cm}$ und $\alpha = 33°$

b) $a = 4,1\,\mathrm{cm}$; $b = 5,4\,\mathrm{cm}$ und $c = 6,2\,\mathrm{cm}$

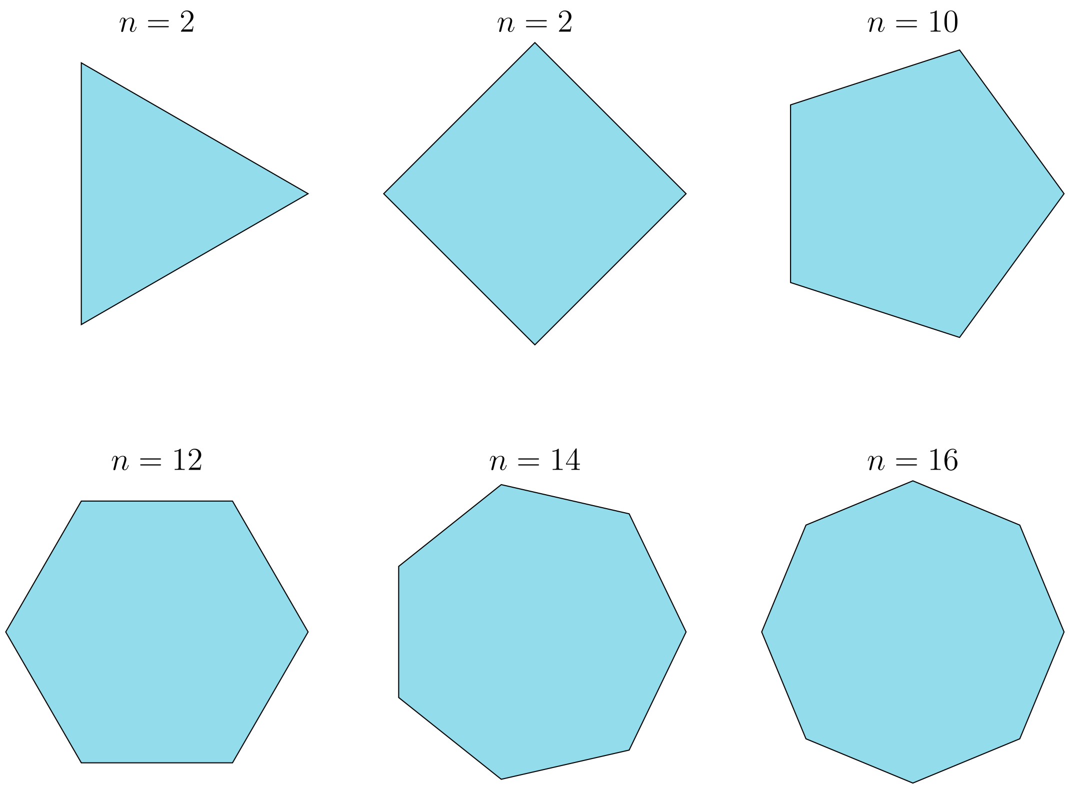
c) $a = 6,6\,\mathrm{cm}$; $b = 5,3\,\mathrm{cm}$ und $\gamma = 80°$

d) $c = 7,9\,\mathrm{cm}$; $b = 6,7\,\mathrm{cm}$ und $\alpha = 75°$

e) $a = 6,8\,\mathrm{cm}$; $b = 8,7\,\mathrm{cm}$ und $c = 10,2\,\mathrm{cm}$

f) $a = 4,4\,\mathrm{cm}$; $b = 3,7\,\mathrm{cm}$ und $c = 5,2\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 10: *Unterteile die Figuren, sodass die jeweilig Figur nur noch aus rechtwinkligen Dreiecken besteht. Beachte die maximale Anzahl der Dreiecke n, die angegeben ist.*



Aufgabe 11: *Stelle die Gleichungen auf und bestimme alle Winkel des Dreiecks.*

a) Der Winkelmaß α ist doppelt so groß wie der Winkelmaß β. Dabei gilt, dass der Winkelmaß β genauso groß ist wie der Winkelmaß γ.

b) Der Winkelmaß α ist doppelt so groß wie der Winkelmaß β, der doppelt so groß ist wie der Winkelmaß γ.

c) Der Winkelmaß α ist halb so groß wie der Winkelmaß β, der viermal größer ist als der Winkelmaß γ.

d) Der Winkelmaß α ist dreimal so groß wie der Winkelmaß β, der dreimal kleiner ist als der Winkelmaß γ.

e) Der Winkelmaß α ist siebenmal so groß wie der Winkelmaß β und der letzte Winkelmaß des Dreiecks ist ein rechter Winkelmaß.

f) Der Winkelmaß α ist dreimal kleiner der Winkelmaß β, der viermal kleiner ist als der Winkelmaß γ.

g) Der Winkelmaß α ist dreieinhalbmal größer der Winkelmaß β, der dreiviertel kleiner ist als der Winkelmaß γ.

h) Der Winkelmaß α ist π-mal kleiner der Winkelmaß β, der $\sqrt{2}$-mal größer ist als der Winkelmaß γ.

Aufgabe 12: *Berechne die fehlenden Größen der Dreiecke ohne rechten Winkel.*

	1	2	3	4	5	6
a	5	4				$\frac{11}{2}$
b	7	6	5		$\frac{11}{3}$	
c		9		7	$\frac{22}{5}$	
h_a				6		
h_b				5		$\frac{17}{4}$
h_c	3		7		$\frac{7}{3}$	
A		16	42	28		$\frac{16}{3}$
U	18		18		$\frac{83}{7}$	$\frac{62}{5}$

Aufgabe 13: *Konstruiere folgende Dreiecke und beschrifte sie vollständig.* (keine Lösung!)

a)	$a = 4\,\text{cm}$;	$b = 6\,\text{cm}$	und $\alpha = 35°$
b)	$c = 6,7\,\text{cm}$;	$b = 4,8\,\text{cm}$	und $\beta = 78°$
c)	$a = 3\,\text{cm}$;	$b = 4\,\text{cm}$	und $\gamma = 130°$
d)	$a = 6,4\,\text{cm}$;	$b = 3,3\,\text{cm}$	und $c = 5,2\,\text{cm}$
e)	$c = 3,4\,\text{cm}$;	$b = 6,7\,\text{cm}$	und $\gamma = 100°$
f)	$a = 2,4\,\text{cm}$;	$c = 4,9\,\text{cm}$	und $\beta = 25°$
g)	$a = 4,8\,\text{cm}$;	$b = 5,3\,\text{cm}$	und $c = 7,2$
h)	$c = 5,1\,\text{cm}$;	$b = 2,9\,\text{cm}$	und $\beta = 71°$
i)	$c = 7,1\,\text{cm}$;	$\alpha = 60°$	und $\beta = 45°$
j)	$a = 5,8\,\text{cm}$;	$b = 4,5\,\text{cm}$	und $\beta = 90°$
k)	$a = 4,2\,\text{cm}$;	$c = 6,2\,\text{cm}$	und $\gamma = 55°$
l)	$a = 7,9\,\text{cm}$;	$\gamma = 90°$	und $\beta = 35°$

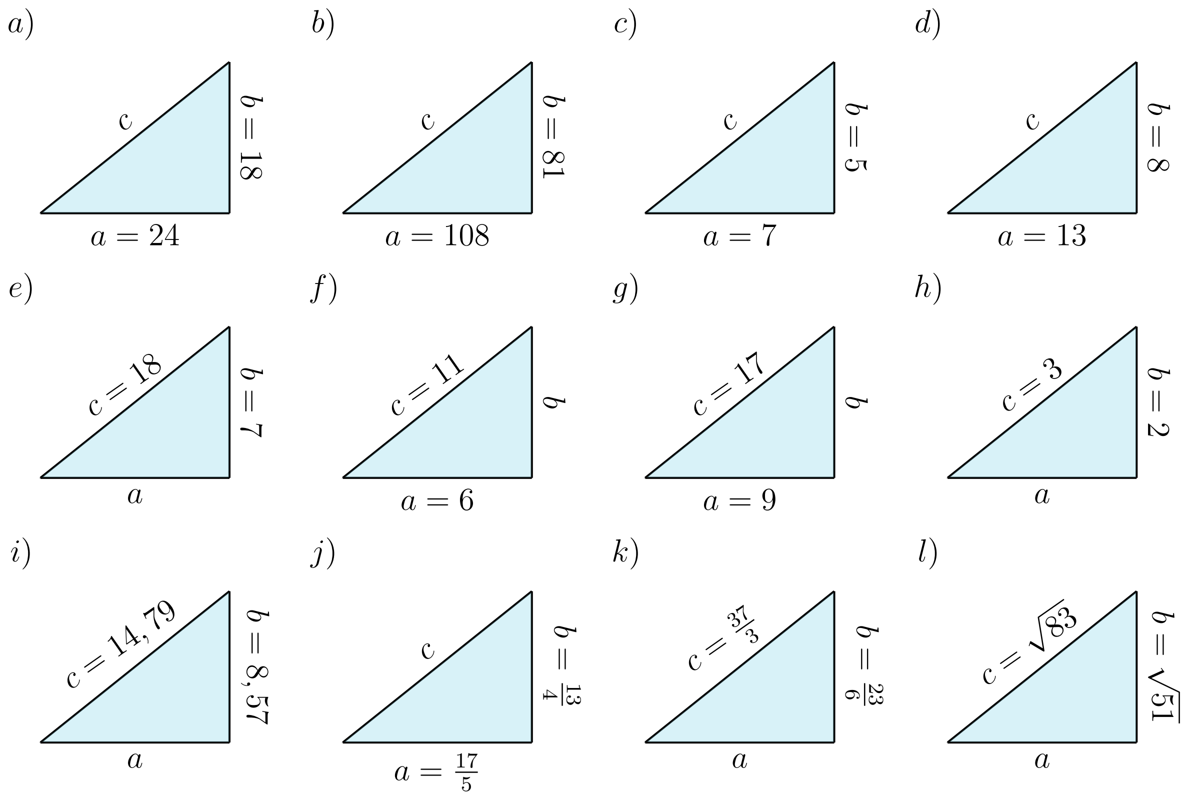
Aufgabe 14: *Ein Dreieck besitzt eine Fläche von* $40\,\text{cm}^2$ *und hat eine Seiten a mit der Länge* 4 *cm. Die Seite a ist die Grundseite g und das Dreieck besitzt einen rechten Winkel* γ*. Berechne die Seitenlänge b. Außerdem hat das Dreieck einen Umfang von ungefähr* $40,8\,\text{cm}$*. Wie lang ist die Seite c?*

Aufgabe 15: *Berechne die fehlenden Größen für ein Dreieck.*

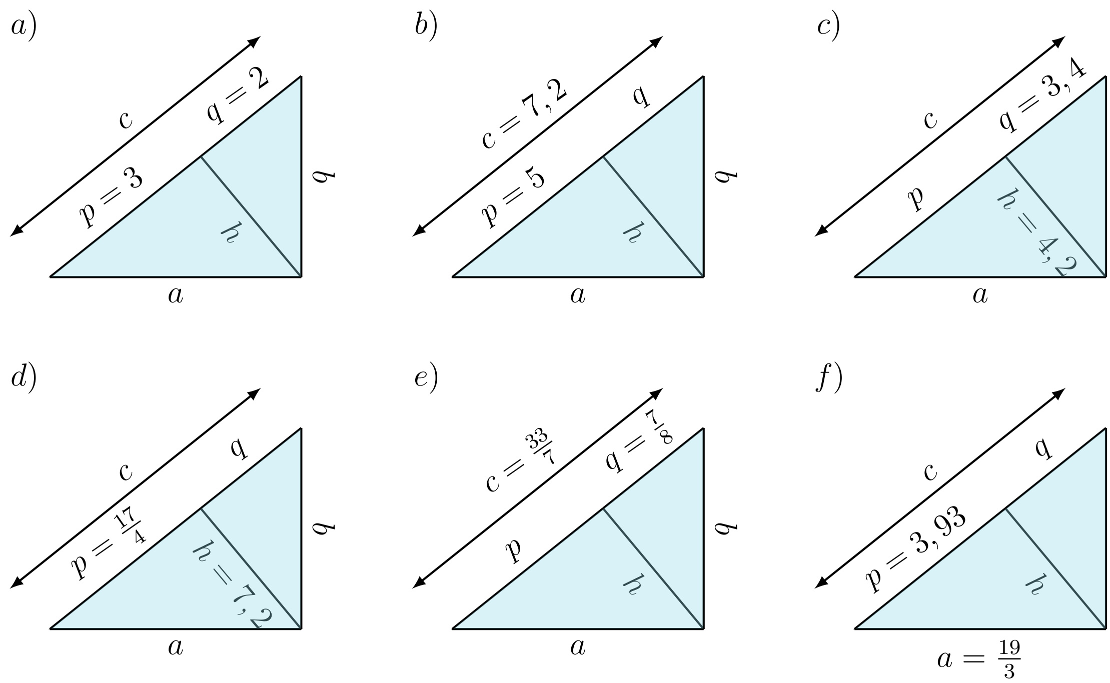
	1	2	3	4	5	6
Grundseite g	7		14		$8,5$	
Höhe h	3	8		5		$\frac{4}{5}$
Flächeninhalt A		92	18	43	$24,5$	$\frac{9}{4}$

Aufgabe 16: *Ein Dreieck hat einen Umfang von* $92\,\mathrm{cm}$. *Dabei sind die Seiten* $a = 17\,\mathrm{cm}$ *und* $c = 37\,\mathrm{cm}$ *bekannt. Berechne die Länge der fehlenden Seite.*

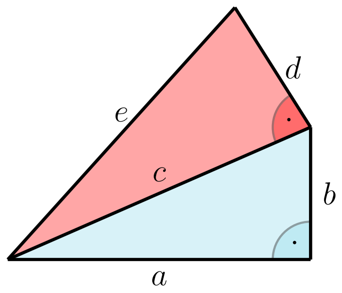
Aufgabe 17: *Bestimme die fehlende Seite des rechtwinkligen Dreiecks.*



Aufgabe 18: *Bestimme die fehlenden Seite des rechtwinkligen Dreiecks.*



Aufgabe 19: *Löse alle Teilaufgaben.*



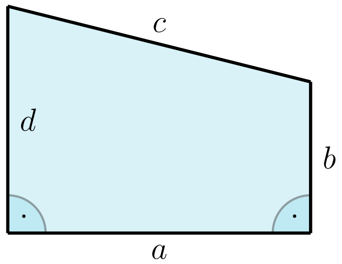
a) Berechne die Seite e aus den gegebenen Werten $a = 7\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $d = 3\,\text{cm}$.

b) Berechne den Umfang aus den gegebenen Werten $c = 8{,}2\,\text{cm}$, $b = 3{,}7\,\text{cm}$ und $d = 4{,}3\,\text{cm}$.

c) Berechne den Flächeninhalt aus den gegebenen Werten $e = 6{,}7\,\text{cm}$, $a = 5{,}45\,\text{cm}$ und $c = 6{,}1\,\text{cm}$.

d) Berechne den Flächeninhalt und den Umfang aus den gegebenen Werten $a = 1{,}38\,\text{dm}$, $b = 4{,}27\,\text{cm}$ und $d = 46{,}3\,\text{mm}$.

Aufgabe 20: *Löse alle Teilaufgaben.*



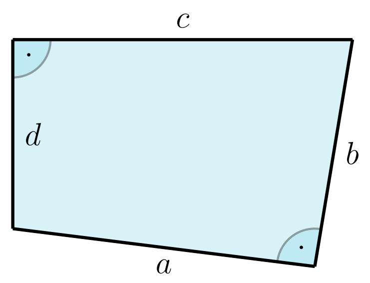
a) Berechne die Seite c aus den gegebenen Werten $a = 8\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $d = 5\,\text{cm}$.

b) Berechne den Umfang aus den gegebenen Werten $c = 9{,}6\,\text{cm}$, $b = 3{,}4\,\text{cm}$ und $d = 4{,}33\,\text{cm}$.

c) Berechne den Flächeninhalt aus den gegebenen Werten $a = 8{,}8\,\text{cm}$, $c = 15{,}4\,\text{cm}$ und $b = 1{,}7\,\text{dm}$.

d) Berechne den Flächeninhalt und den Umfang aus den gegebenen Werten $c = 1{,}2\,\text{dm}$, $b = 34\,\text{mm}$ und $d = 5{,}2\,\text{cm}$.

Aufgabe 21: *Löse alle Teilaufgaben.*



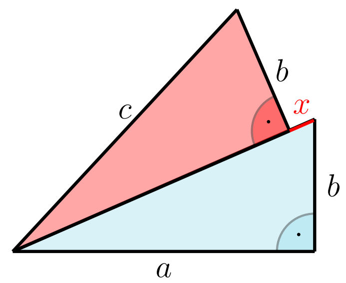
$a)$ Berechne die Diagonale zwischen den Ecken ohne rechten Winkel aus den gegebenen Werten $a = 7\,\text{cm}$ und $b = 4,4\,\text{cm}$.

$b)$ Berechne die Seite c aus den gegebenen Werten $a = 7,9\,\text{cm}$, $b = 6,3\,\text{cm}$ und $d = 5,9\,\text{cm}$.

$c)$ Berechne den Umfang aus den gegebenen Werten $c = 3,4\,\text{cm}$, $b = 1,22\,\text{cm}$ und $d = 8,4\,\text{mm}$.

$d)$ Berechne den Flächeninhalt aus den gegebenen Werten $a = 11,4\,\text{cm}$, $d = 1,34\,\text{dm}$ und einer Diagonalen zwischen den Ecken ohne rechten Winkel von $1,73\,\text{dm}$.

Aufgabe 22: *Löse alle Teilaufgaben.*



$a)$ Berechne die Seite a aus den gegebenen Werten $c = 6,4\,\text{cm}$, $x = 0,5\,\text{cm}$ und $b = 3,1\,\text{cm}$.

$b)$ Berechne die Strecke x aus den gegebenen Werten $a = 1,07\,\text{dm}$, $b = 4,84\,\text{cm}$ und $c = 11,9\,\text{cm}$.

$c)$ Berechne den Umfang aus den gegebenen Werten $a = 7,85\,\text{cm}$, $b = 3,56\,\text{cm}$ und $c = 6,97\,\text{cm}$.

$d)$ Berechne den Flächeninhalt aus den gegebenen Werten $c = 9,33\,\text{cm}$, $x = 0,37\,\text{cm}$ und $a = 7,82\,\text{cm}$.

Aufgabe 23: *Löse alle Teilaufgaben.*

a) Die gezeigte Leiter hat im aufgestellten Zustand eine Höhe von $1,6\,\text{m}$, wobei die Fußbreite $1,46\,\text{m}$ beträgt. Berechne die Länge der Leiter im zusammengeklappten Zustand.

b) Die gezeigte Leiter hat Länge von $2,1\,\text{m}$ und soll im aufgestellten Zustand eine Fußbreite von $1,6\,\text{m}$ besitzen. Wie hoch ist die Leiter im aufgestellten Zustand?

Aufgabe 24: *Löse alle Teilaufgaben.*

a) Der gezeigte Dachgiebel besteht aus einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck. Das Dach hat eine Höhe von $4,75\,\text{m}$. Eine Dachschindel hat eine Länge von $40\,\text{cm}$. Berechne wie viele Schindeln in einer Reihe zum Dachdecken benötigt werden.

b) Für eine Dachschindelreihe wurden 24 Schindeln mit einer Länge von $45\,\text{cm}$ verwendet. Berechne die Höhe des Dachgiebels.

Aufgabe 25: *Löse alle Teilaufgaben.*

a) Ein Baum ist in einer Höhe von $2,6\,\text{m}$ durch eine Sturmböe, wie im Bild dargestellt, umgeknickt. Die Baumkrone befindet sich $7,3\,\text{m}$ vom ehemaligen Standort des Baumes entfernt. Berechne wie hoch der Baum insgesamt war.

b) Ein Baum mit einer Gesamthöhe von $17,4\,\text{m}$ auf einer Höhe von $5,6\,\text{m}$ abgesägt werden. Eine nahegelegene Straße befindet sich $10,4\,\text{m}$ vom Baumstandort entfernt. Berechne ob der Baum auf die Straße fallen würde, wenn dieser wie im Bild dargestellt, nach dem Ansägen abgeknickt werden soll.

Aufgabe 26: *Zeichne ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Zeichne anschließend Quadrate zu den Seiten des Dreiecks. An den gegenüberliegenden Seiten des ersten Dreiecks soll nun erneut ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck gezeichnet werden, an dessen Seiten wiederum Quadrate konstruiert werden soll. Wiederhole den Vorgang mindestens vier Mal. Starte mit einer Hypotenuse von* 5 *cm.*

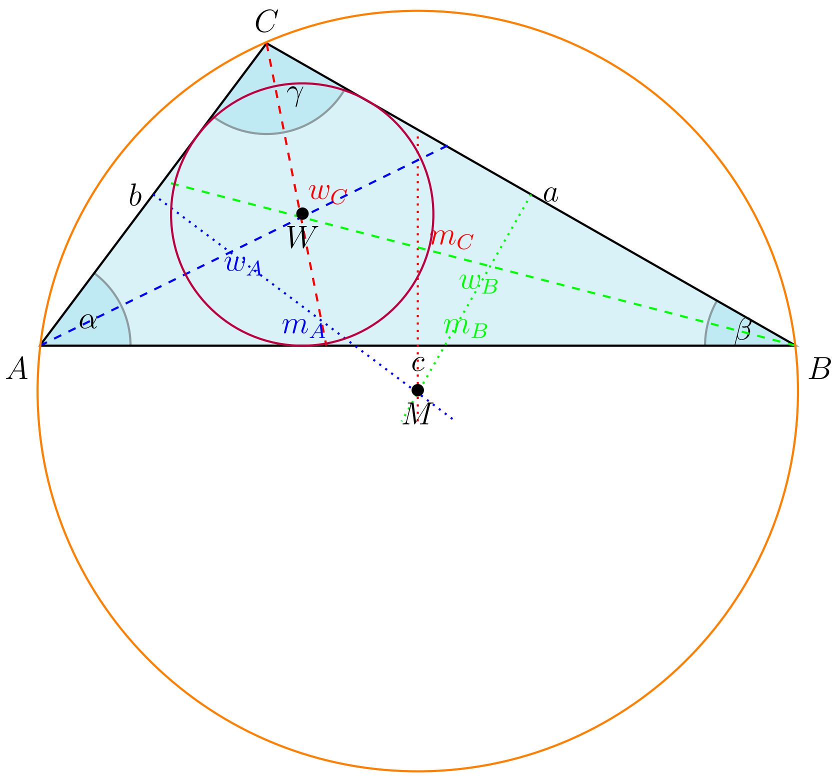
Aufgabe 27: *Zeichne ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck. Zeichne anschließend Quadrate zu den Seiten des Dreiecks. An den gegenüberliegenden Seiten des ersten Dreiecks soll nun erneut ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck (mit dem gleichen Kathetenverhältnis und der gleichen Orientierung.) gezeichnet werden, an dessen Seiten wiederum Quadrate konstruiert werden soll. Wiederhole den Vorgang mindestens vier Mal. Starte mit einer Hypotenuse von* 5 *cm.*

Aufgabe 28: *Berechne die fehlenden Größen für ein rechtwinkliges Dreieck.*

	1	2	3	4	5	6
Hypotenuse c		11				
Kathete a	7	$6,7$		$3,2$	$\frac{11}{3}$	
Kathete b	9		$5,9$	a		$\frac{27}{4}$
Höhe h					$\frac{9}{4}$	
Umfang U						
Flächeninhalt A			$19,5$			$\frac{41}{5}$

Aufgabe 29: *Ein Bildschirm hat eine Bilddiagonale von 28", was $71,12\,cm$ entspricht. Berechne die Kantenlängen, die sich aus dem $16:9$ Format ergeben. Der Bildschirm besitzt eine maximale Auflösung von 3840 zu 2160 Pixel. Berechne die Größe eines Pixels. Bestimme dann die Kantenlänge eines quadratischen Pixel.*

Aufgabe 30: *Leite aus der Geometrie der Abbildung die Gleichung für den Innenkreis* $r = \dfrac{2A}{U}$ *her.*

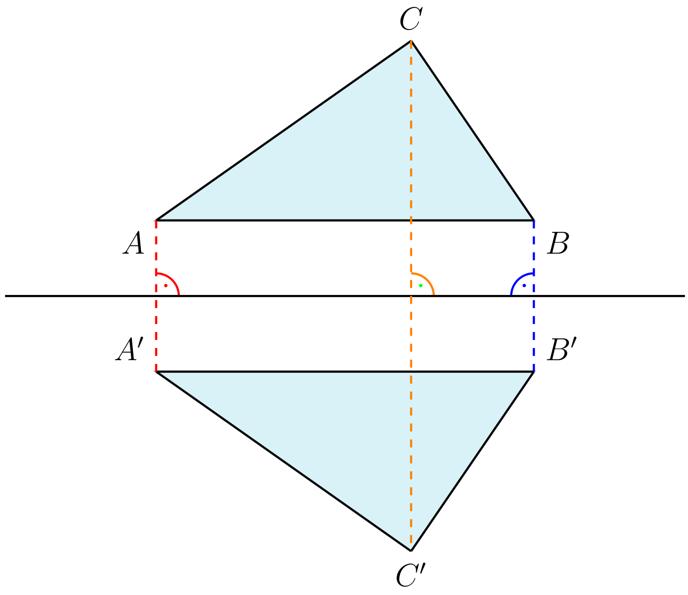


Aufgabe 31: *Leite aus der Geometrie der Abbildung aus Aufgabe 1 die Gleichung für den Umkreis* $R = \dfrac{abc}{4A}$ *her.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie")

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.28) Lösungen zu Dreiecken.

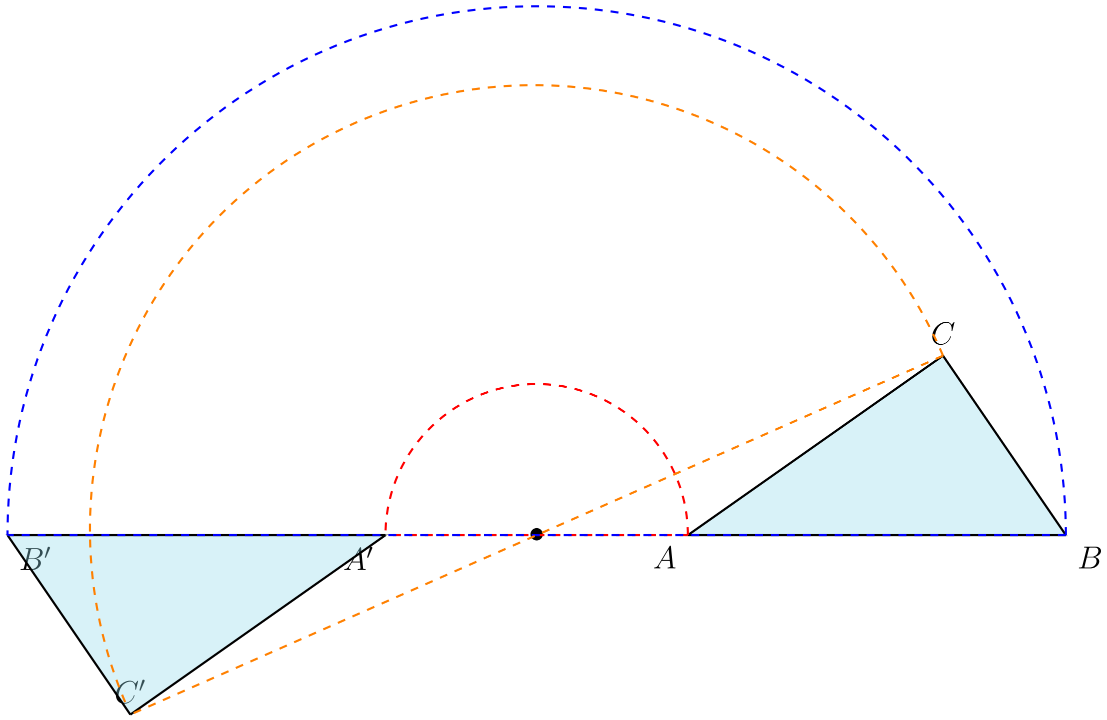
4.6 Symmetrien und Spiegelungen

Symmetrien sind wichtige Eigenschaften von Objekten und *Funktionen*. Die bis jetzt erfolgreichste Beschreibung der Natur beruht ausschließlich auf *Symmetrien*. Aus diesem Grund sollen in diesem Abschnitt zwei spezielle Formen von *Symmetrien* vorgestellt werden. Um eine *Symmetrie* verstehen zu können müssen *Spiegelungen* eingeführt werden. Dabei wird im Wesentlichen zwischen zwei Arten von *Spiegelungen* unterschieden. Die erste Art ist eine *Achsenspiegelung* mit den Eigenschaften, dass alle *Punkte*, die einen *Abstand* zu einer beliebigen *Achse* haben, mit dem gleichen *Abstand* auf die andere *Seite* der *Achse* eingezeichnet - *gespiegelt* - werden.



In der Abbildung ist zu erkennen wie eine solche *Achsenspiegelung* aussieht. Hierbei zeigen die gestrichelten Linien, dass die *Abstände* zwischen den *Eckpunkten* (A, B und C) und der *Achse* genauso lang sind wie die *Abstände* der *Spiegeleckpunkt* (A', B' und C') zur *Spiegelachse*. Dabei meint *Abstand* immer die kürzeste *Strecke* zwischen *Punkt* und *Achse*, was immer die *orthogonale Strecke* zur *Achse* ist.

Die zweite Art der *Spiegelungen* ist die *Punktspiegelung*, dabei wird ein Objekt in einem *Punkt* um 180° gedreht. Dabei sind die *Abstände* der *Eckpunkte* (A, B und C) zum *Spiegelpunkt* genauso groß wie die *Abstände* der *Spiegeleckpunkte* (A', B' und C') zum *Spiegelpunkt*, wie an der folgenden Abbildung zu erkennen ist.



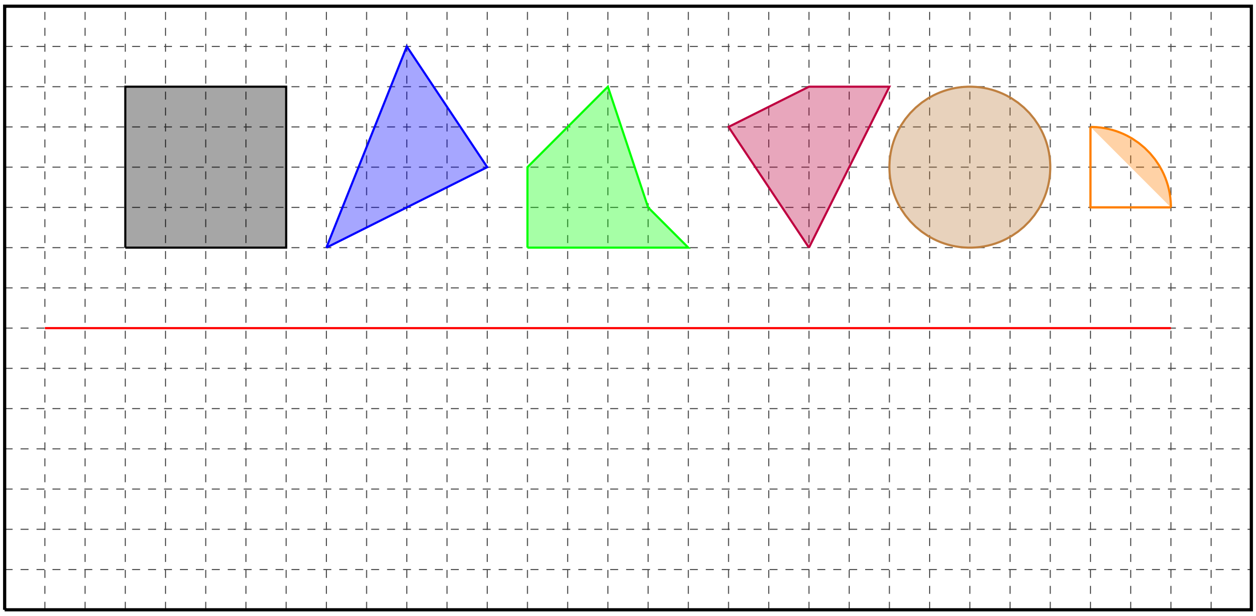
Im Allgemeinen wird bei diesen beiden *Spiegelungen* von einer *Achsen*- oder *Punktsymmetrie* gesprochen, wenn nach einer solchen *Spiegelung* das Ergebnisbild identisch zum Ausgangsbild ist. Die wohl bedeutendste *Symmetrie* in der Beschreibung der Natur ist die *radiale Symmetrie*[2], welche angibt, dass es keine Relevanz hat in welche Richtung ausgehend von einem *Punkt* das Problem betrachtet wird. Folglich ist die *radiale Symmetrie* eine noch speziellere *Punktsymmetrie*.

[2]heißt soviel wie Kreissymmetrie

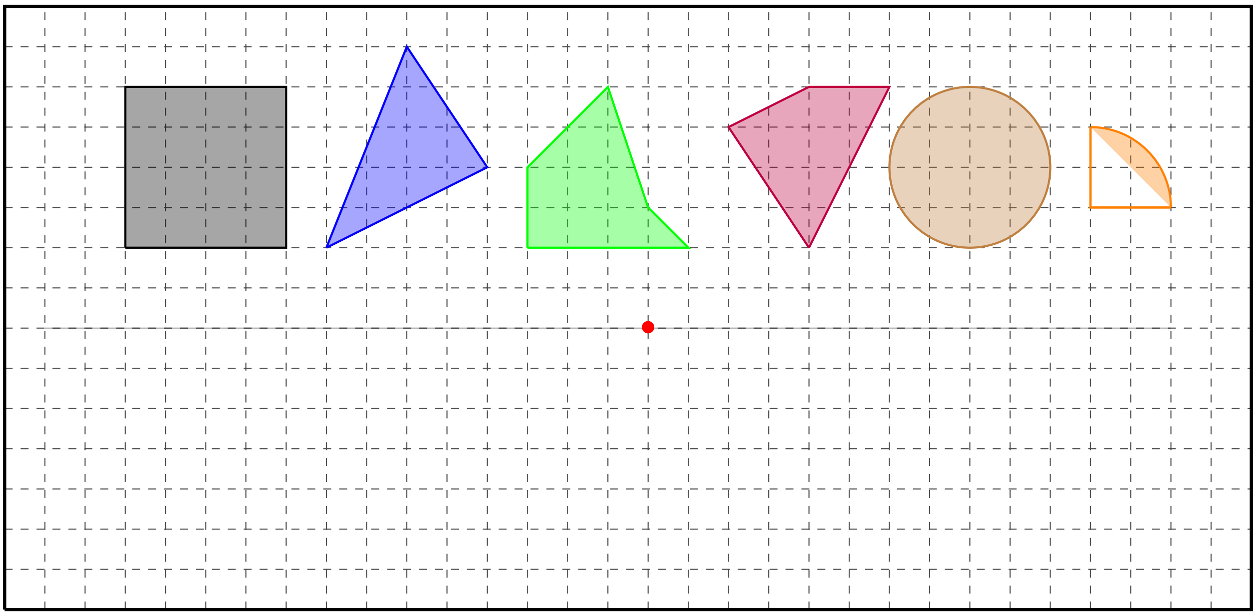
4.6.1 Übungsaufgaben zu Symmetrien

Aufgabe 1: *Spiegel die Körper an den angegebenen Achsen oder Punkten. (Übernehme die Figuren in dein Heft, deine Mappe oder deinen Block.)*

a)

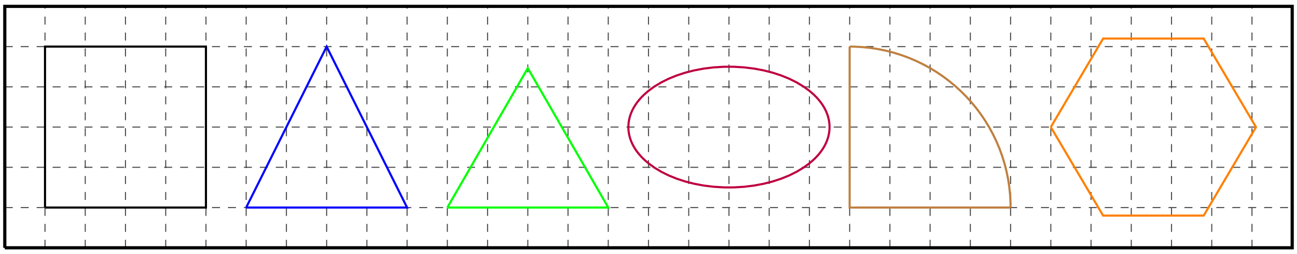


b)

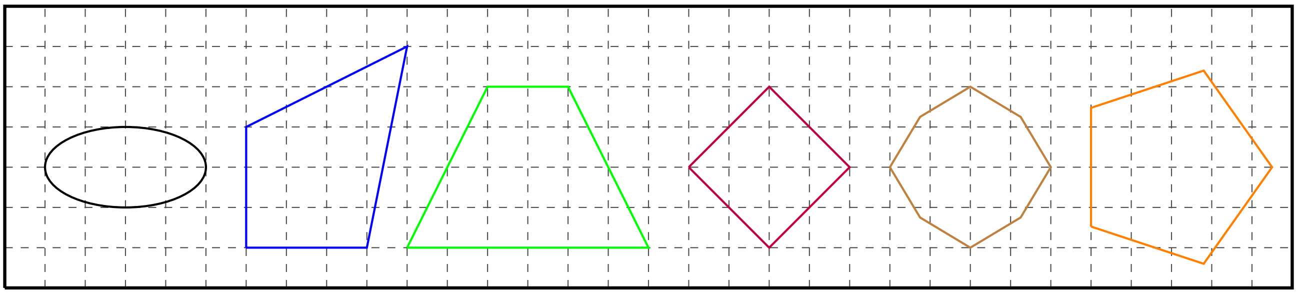


Aufgabe 2: *Zeichne die Symmetrieachsen und Symmetriepunkte ein. (Übernehme die Figuren in dein Heft, deine Mappe oder deinen Block.)*

a)

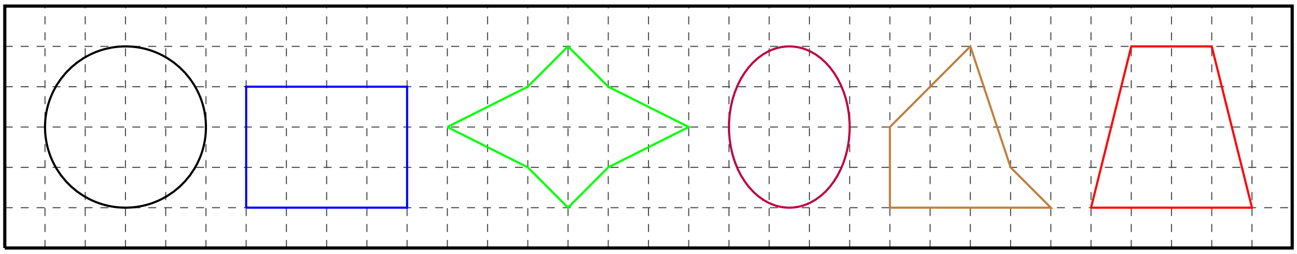


b)

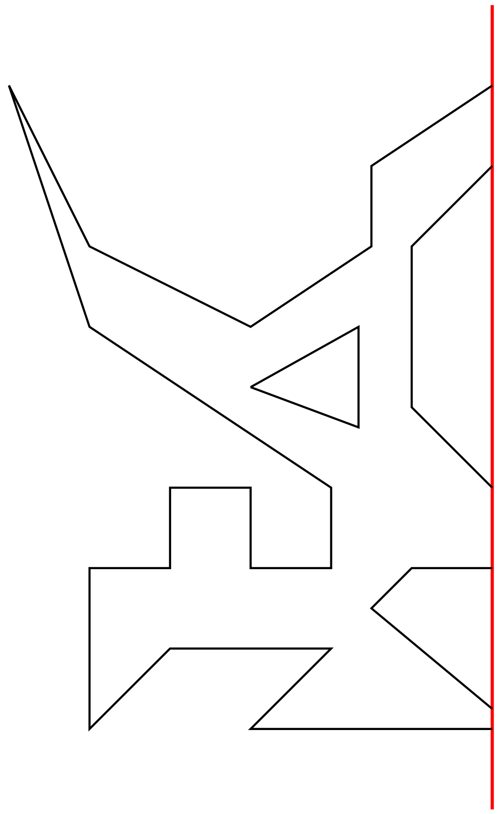


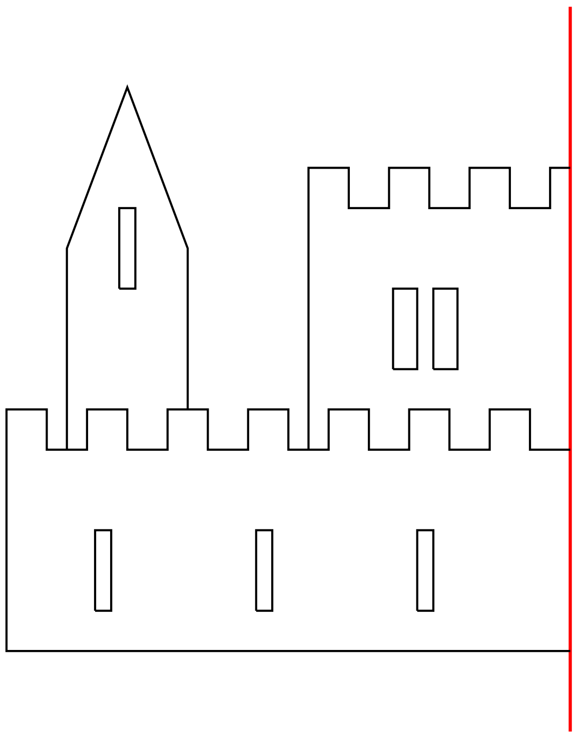
Aufgabe 3: *Wie viele Symmetrieachsen und Symmetriepunkte besitzen die Körper?*

a)



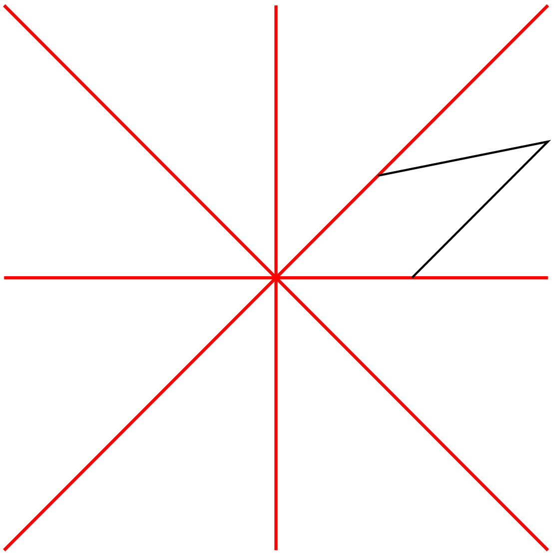
Aufgabe 4: *Spiegel die Figuren an der Achse.* (Keine Lösungen!)



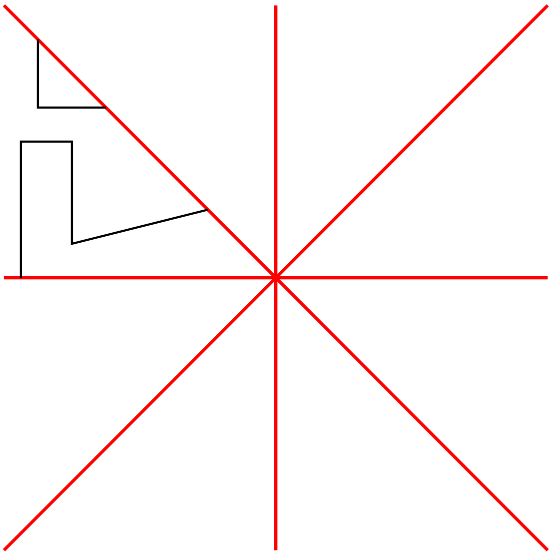


Aufgabe 5: *Spiegel die Figur an allen Achsen.*

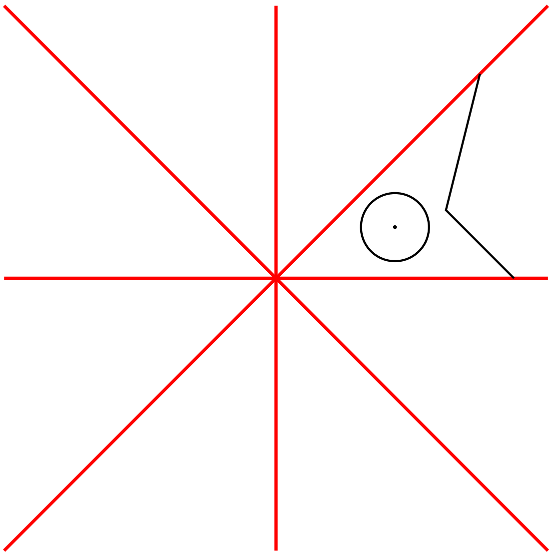
a)



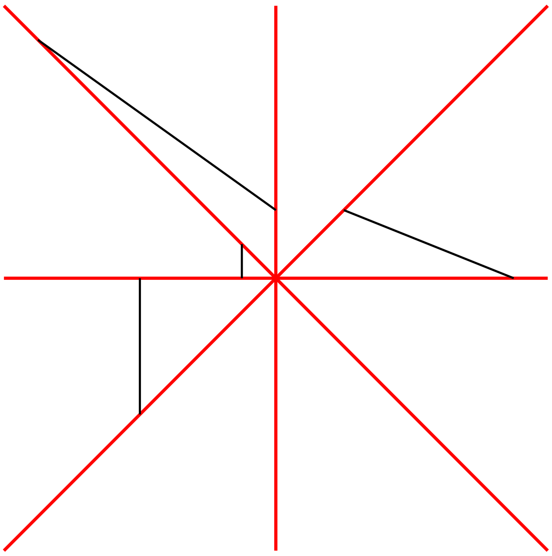
b)



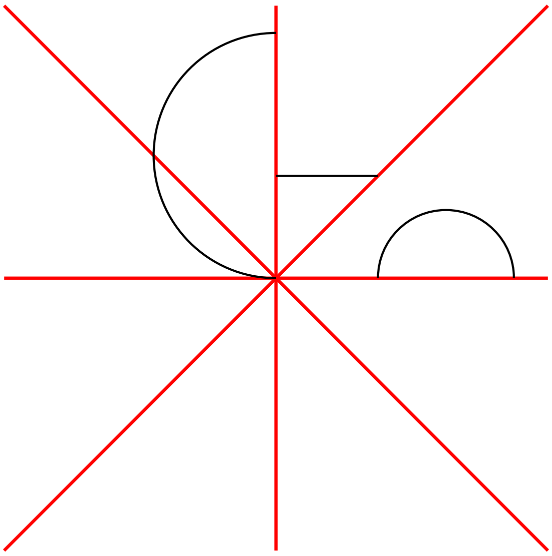
c)



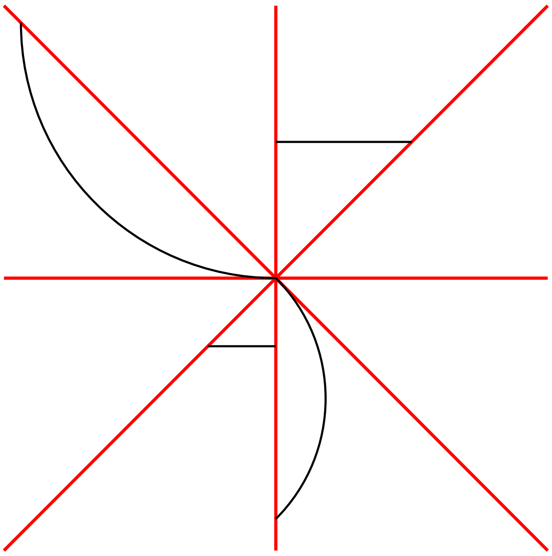
d)



e)



f)



Aufgabe 6: *Finde alle Symmetrien des Alphabets.*

A B C D E F G H I J K L M

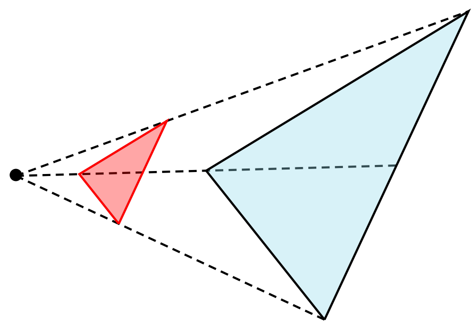
N O P Q R S T U V W X Y Z

Aufgabe 7: *Finde alle Symmetrien der Flaggen.*

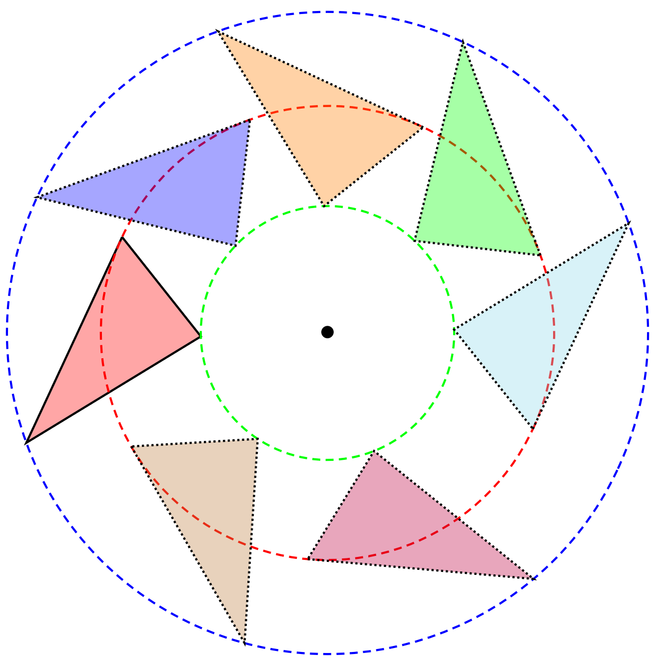
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.29) Lösungen zu Dreiecken.

4.7 Streckungen und Drehungen

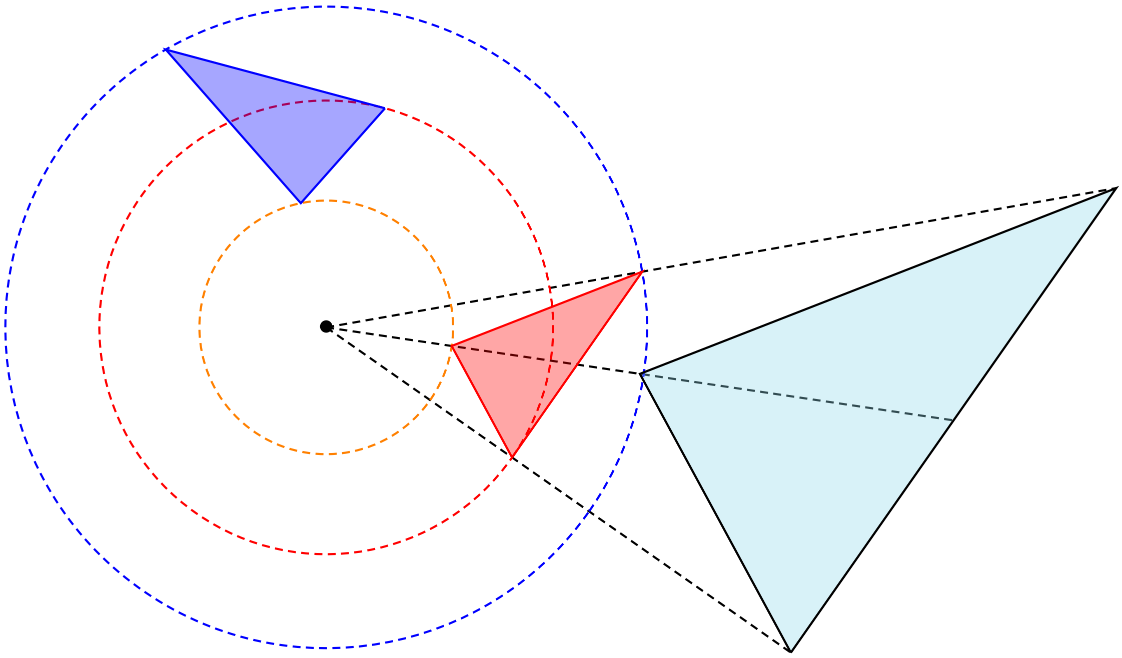
Geometrische Figuren können mittels einer *zentrischen Streckung* vergrößert oder verkleinert werden. Dazu wird ein Punkt gewählt von dem aus charakteristische Punkte der geometrischen Figur mit diesem verbunden werden. Diese Strecken werden dann zu *Geraden* erweitert und nach der gewünschten *Strecke* die geometrische Figur vergrößert oder verkleinert eingezeichnet.



Deutlich zu erkennen ist, dass das rote Dreieck die verkleinerte Version des schwarzen Dreiecks ist und somit ist auch das schwarze Dreieck die Vergrößerung des roten Dreiecks. Beim Einzeichnen des neuen Dreieckes muss die Vergrößerung beziehungsweise Verkleinerung die neuen charakteristischen Punkte des Objektes im gleichen *Verhältnis* verschoben werden.
Aber auch eine *Drehung* ist an einem Punkt ist möglich, so werden die charakteristischen Punkte um einen bestimmten *Winkel* entlang eines *Kreises* verschoben.



So entstehen jegliche mögliche Neigungen der geometrischen Figur. Die *zentrische Streckung* und die *Rotation* um einen Punkt können auch kombiniert verwendet werden.



Diese Kombination von *Rotation* und *Streckung* kann dazu verwendet werden, um die *Kongruenz* oder die *Ähnlichkeit* von geometrischen Figuren zu untersuchen. Diese beiden Eigenschaften werden im übernächsten Abschnitt genauer vorgestellt.

4.7.1 Übungsaufgaben zu Streckungen und Drehungen

Aufgabe 1: *Vergrößere die beschriebene geometrische Figur mit einer zentrischen Streckung um das angegebene Verhältnis. Zeichne zunächst die angegebene Figur. Das Streckzentrum sollte mindestens 2cm von allen Ecken außerhalb der Figuren liegen.* (Keine Lösungen!)

$a)$ Dreieck: $a = 5\,\text{cm}, b = 3\,\text{cm}$ und $c = 4\,\text{cm}$	Verhältnis: $1 : 2$
$b)$ Rechtwinkliges Dreieck: $a = 4\,\text{cm}$ *und* $b = 2\,\text{cm}$	Verhältnis: $1 : 1,25$
$c)$ Gleichseitiges Dreieck: $a = 3\,\text{cm}$	Verhältnis: $1 : 1,5$
$d)$ Quadrat: $a = 3,7\,\text{cm}$	Verhältnis: $1 : 1,4$
$e)$ Rechteck: $a = 6\,\text{cm}$ und $b = 4\,\text{cm}$	Verhältnis: $1,5 : 1$
$f)$ Kreis: $r = 2,2\,\text{cm}$	Verhältnis: $1 : 1,25$

Aufgabe 2: *Rotiere die beschriebene geometrische Figur um den angegebene Winkel. Zeichne zunächst die angegebene Figur. Das Rotationszentrum sollte mindestens 2 cm von allen Ecken außerhalb der Figuren liegen.* (Keine Lösungen!)

$a)$ Dreieck: $a = 5\,\text{cm}, b = 3\,\text{cm}$ und $\gamma = 70°$	Winkel: 60°
$b)$ Rechtwinkliges Dreieck: $a = 2\,\text{cm}$ *und* $b = 4\,\text{cm}$	Winkel: 220°
$c)$ Gleichseitiges Dreieck: $a = 3,2\,\text{cm}$	Winkel: 135°
$d)$ Quadrat: $a = 2,8\,\text{cm}$	Winkel: 290°
$e)$ Rechteck: $a = 5,5\,\text{cm}$ und $b = 3,8\,\text{cm}$	Winkel: 110°
$f)$ Kreis: $r = 2,4\,\text{cm}$	Winkel: 265°

Aufgabe 3: *Vergrößere die beschriebene geometrische Figur mit einer zentrischen Streckung um das angegebene Verhältnis. Rotiere es anschließend um den angegebene Winkel. Zeichne zunächst die angegebene Figur. Das Streck- und Rotationszentrum sollte mindestens 2 cm von allen Ecken außerhalb der Figuren liegen.* (Keine Lösungen!)

$a)$ Dreieck: $\alpha = 35°, b = 3\,\text{cm}$ und $c = 4\,\text{cm}$	Winkel: 45°	Verhältnis: $1 : 1,2$
$b)$ Rechtwinkliges Dreieck: $a = 3\,\text{cm}$ *und* $b = 5\,\text{cm}$	Winkel: 130°	Verhältnis: $1,2 : 1$
$c)$ Gleichseitiges Dreieck: $a = 2,8\,\text{cm}$	Winkel: 195°	Verhältnis: $1 : 1,5$
$d)$ Quadrat: $a = 3,3\,\text{cm}$	Winkel: 200°	Verhältnis: $1 : 2$
$e)$ Rechteck: $a = 5\,\text{cm}$ und $b = 3,5\,\text{cm}$	Winkel: 310°	Verhältnis: $2 : 1$
$f)$ Kreis: $r = 2,5\,\text{cm}$	Winkel: 185°	Verhältnis: $1 : 1,3$

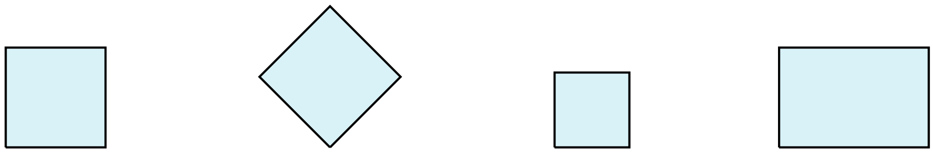
Aufgabe 4: *Vergrößere die beschriebene geometrische Figur mit einer zentrischen Streckung um das angegebene Verhältnis. Zeichne zunächst die angegebene Figur. Das Streckzentrum sollte auf einer Ecke der Figuren liegen.* (Keine Lösungen!)

$a)$ Dreieck: $\alpha = 65°, b = 3\,\text{cm}$ und $c = 4\,\text{cm}$	Verhältnis: $1 : 1,4$
$b)$ Dreieck: $\alpha = 25°, b = 4\,\text{cm}$ und $\gamma = 65°$	Verhältnis: $1 : 1,75$
$c)$ Dreieck: $\gamma = 50°, b = 3,6\,\text{cm}$ und $a = 4,4\,\text{cm}$	Verhältnis: $1 : 1,5$
$d)$ Dreieck: $a = b = 3\,\text{cm}$ und $\gamma = 110°$	Verhältnis: $1 : 1.25$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.30) Lösungen zu Streckungen und Drehungen.

4.8 Kongruenz und Ähnlichkeit

Oftmals können Zusammenhänge schneller dargestellt werden, wenn bestimmte Übereinstimmungen gefunden werden können. So können besonders für die Geometrie die Begriffe „*Kongruenz*“ und „*Ähnlichkeit*“ Rechnungen stark vereinfachen. Wie diese Begriffe zu verstehen sind, kann schnell an den folgenden geometrischen Figuren erklärt werden.

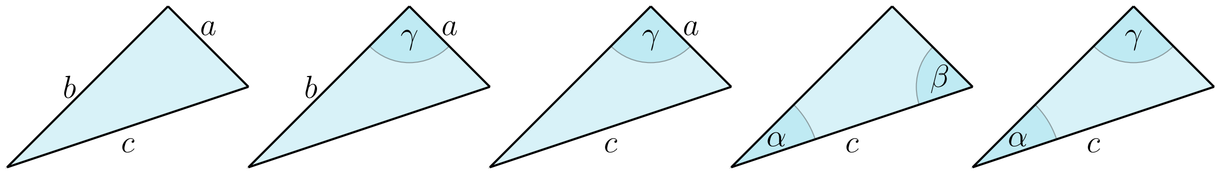


So sind die ersten beiden Figuren durch eine *Drehung* und *Verschiebung* direkt aufeinander abbildbar. Diese Eigenschaft wird *Kongruenz* genannt, folglich sind die ersten beiden Figuren *kongruent* zueinander. Eine *Kongruenz* impliziert, dass beide Körper genau die gleichen mathematischen Eigenschaften besitzen $Figur_1 \cong Figur_2$. Bei der dritten Figur fällt auf, dass diese Figur mit einer *Streckung*, *Verschiebung* und *Drehung* auf den ersten beiden Figuren abzubilden ist. Wenn eine *Streckung* hinzu kommt, dann wird diese Eigenschaft *Ähnlichkeit* genannt. Somit ist die dritte Figur *ähnlich* zu den ersten beiden Figuren $Figur_1 \sim Figur_3$ und $Figur_2 \sim Figur_3$. Folglich ist bei einer *ähnlichen* Figur nur ein *Skalierungsfaktor* zu beachten.

Da im besonderen geometrische Figuren durch *Dreiecke* dargestellt werden können, sind im folgenden *Sätze* für *Kongruenz* und *Ähnlichkeit* von *Dreiecken* aufgelistet:
So sind *Dreiecke* kongruent zueinander, wenn:

- SSS: Alle drei Seitenlängen bei beiden *Dreiecken* sind identisch.
- SWS: Zwei Seiten und der damit *eingeschlossene Winkel* bei beiden *Dreiecken* sind identisch.
- SsW: Zwei Seiten und ein *Winkel*, welcher gegenüber der längeren Seite ist, bei beiden *Dreiecken* sind identisch.
- WSW: Eine Seite und die beiden daran anliegenden *Winkel* bei beiden *Dreiecken* sind identisch.
- WWS: Eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende *Winkel* bei beiden *Dreiecken* sind identisch.

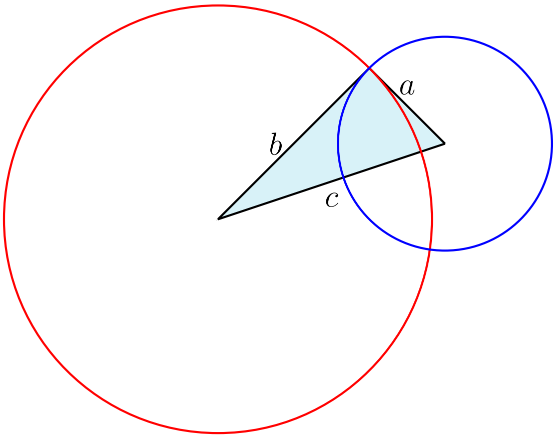
Diese sogenannten Kongruenzsätze sind noch einmal beispielsweise graphisch dargestellt:

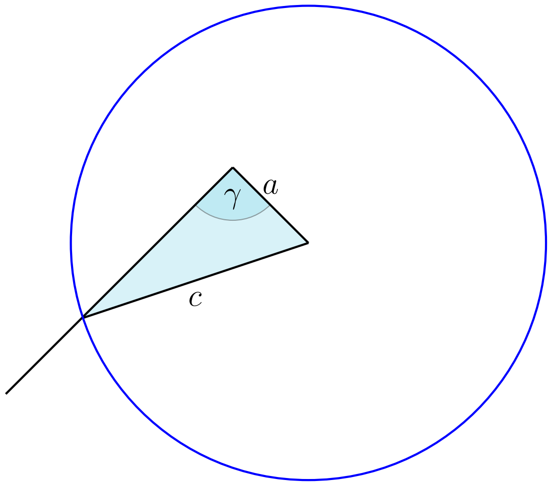


Aber auch für die *Ähnlichkeit* können bestimme *Sätze* bei *Dreiecken* aufgestellt werden:
So sind *Dreiecke ähnlich* zueinander, wenn:

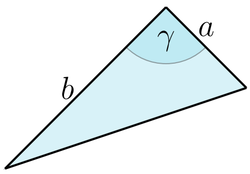
- WWW: Wenn zwei *Winkel* (über die *Winkelsumme* also drei *Winkel*) bei beiden *Dreiecken* sind identisch.
- SSS: Wenn die *Seitenverhältnisse* bei beiden *Dreiecken* sind identisch.
- SWS: Wenn ein *Winkel* im *Verhältnis* der anliegenden *Seite* bei beiden *Dreiecken* sind identisch.
- SSW: Wenn das *Verhältnis* zweier *Seiten* und der *Gegenwinkel* der längsten Seite bei beiden *Dreiecken* sind identisch.

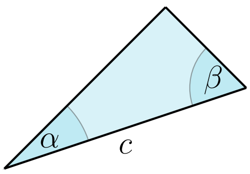
Aus den *Ähnlichkeits*- und *Kongruenzsätzen*, können weitere Anwendungen und neue *Operatoren* und *Funktionen* hergeleitet werden. So finden diese *Sätze* im nächsten Abschnitt bei den *Strahlensätzen* ihre rechnerische Anwendung und werden im späteren Kapitel zur Veranschaulichung der *Trigonometrie* benutzt.
Um die Kongruenzsätze als Konstruktion von Dreiecken zu verwenden, müssen diese zunächst identifiziert werden. So kann der Kongruenzsatz SSS durch das Zeichnen von Kreisen realisiert werden. Um den Kongruenzsatz SsW für die Konstruktion auszunutzen, sollte zunächst der Winkel gezeichnet werden, wobei der unbekannte Schenkel beliebig lang sein kann. Durch die bekannte kleinere Seite des Dreiecks kann über dem Zirkel der fehlende Eckpunkt bestimmt werden.

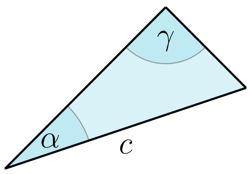




Die Kongruenzsätze WSW und SWS können direkt über das Zeichnen der Winkel mit dem Geodreieck verwendet werden, um Dreiecke zu konstruieren. Auch der Kongruenzsatz WWS kann durch das Geodreieck konstruiert werden, da der fehlende Winkel über die Winkelsumme berechnet werden kann.







4.8.1 Übungsaufgaben zu Kongruenz und Ähnlichkeit

Aufgabe 1: *Zeichne drei verschiedene Dreiecke mit den angegebenen Maßen, die nicht kongruent zu einander sind.* (keine Lösung!)

a) $\alpha = 40°$ und $\gamma = 80°$	*b)* $\gamma = 30°$ und $b = 3\,\text{cm}$
c) $a = 4\,\text{cm}$ und $b = 5\,\text{cm}$	*d)* $a = 4,5\,\text{cm}$ und $\alpha = 50°$
e) $\beta = 75°$ und $b = 5\,\text{cm}$	*f)* $\alpha = 20°$ und $\beta = 100°$

Aufgabe 2: *Zeichne drei verschiedene Dreiecke mit den angegebenen Maßen, die nicht ähnlich zu einander sind.* (keine Lösung!)

a) $\gamma = 40°$; und $a = 6\,\text{cm}$	*b)* $a = 4\,\text{cm}$; und $c = 3,5\,\text{cm}$
c) $\alpha = 60°$; und $c = 4,5\,\text{cm}$	*d)* $b = 4,5\,\text{cm}$; und $c = 5,5\,\text{cm}$
e) $\beta = 110°$; und $a = 3,8\,\text{cm}$	*f)* $c = 6,2\,\text{cm}$; und $\alpha = 35°$

Aufgabe 3: *Zeichne drei verschiedene Dreiecke mit den angegebenen Maßen, die ähnlich zu einander sind.* (keine Lösung!)

a) $\gamma = 40°$; und $\beta = 80°$	*b)* $\alpha = 20°$; und $\beta = 90°$
c) $\alpha = 75°$; und $\gamma = 50°$	*d)* $\gamma = 55°$; und $\beta = 65°$
e) $a = b = c$	*f)* $c = 6,2\,\text{cm}$; und $a = b$

Aufgabe 4: *Bestimme durch die gegebenen Werte, ob die Dreiecke kongruent zueinander sind.*

a) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 4\,\text{cm}\ ;\ b = 6\,\text{cm}\ ;\ c = 8\,\text{cm}$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ d = 2\,\text{cm}\ ;\ e = 4\,\text{cm}\ ;\ f = 3\,\text{cm}$

b) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 5\,\text{cm}\ ;\ b = 4\,\text{cm}\ ;\ c = 7\,\text{cm}$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ d = 4\,\text{cm}\ ;\ e = 7\,\text{cm}\ ;\ f = 5\,\text{cm}$

c) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 4,5\,\text{cm}\ ;\ \beta = 45^\circ\ ;\ \gamma = 60^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ e = 4,5\,\text{cm}\ ;\ \delta = 60^\circ\ ;\ \phi = 45^\circ$

d) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ c = 13\,\text{cm}\ ;\ \gamma = 60^\circ\ ;\ \alpha = 40^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ d = 13\,\text{cm}\ ;\ \phi = 60^\circ\ ;\ \delta = 45^\circ$

e) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 5\,\text{cm}\ ;\ b = 8\,\text{cm}\ ;\ \gamma = 133^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ f = 5\,\text{cm}\ ;\ e = 8\,\text{cm}\ ;\ \eta = 133^\circ$

f) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ c = 8\,\text{cm}\ ;\ a = 3\,\text{cm}\ ;\ \gamma = 54^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ f = 8\,\text{cm}\ ;\ d = 3\,\text{cm}\ ;\ \phi = 54^\circ$

Aufgabe 5: *Bestimme durch die gegebenen Werte, ob die Dreiecke ähnlich zueinander sind.*

a) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 4\,\text{cm}\ ;\ b = 6\,\text{cm}\ ;\ c = 4\,\text{cm}$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ d = 3\,\text{cm}\ ;\ e = 2\,\text{cm}\ ;\ f = 2\,\text{cm}$

b) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 5\,\text{cm}\ ;\ b = 5\,\text{cm}\ ;\ c = 9\,\text{cm}$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ d = 5\,\text{cm}\ ;\ e = 9\,\text{cm}\ ;\ f = 5\,\text{cm}$

c) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 6\,\text{cm}\ ;\ \beta = 37^\circ\ ;\ \gamma = 78^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ e = 4\,\text{cm}\ ;\ \delta = 78^\circ\ ;\ \phi = 37^\circ$

d) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 7\,\text{cm}\ ;\ b = 8\,\text{cm}\ ;\ \gamma = 93^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ f = 2,5\,\text{cm}\ ;\ e = 3\,\text{cm}\ ;\ \phi = 93^\circ$

e) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ c = 9\,\text{cm}\ ;\ a = 5\,\text{cm}\ ;\ \gamma = 114^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ f = 18\,\text{cm}\ ;\ d = 10\,\text{cm}\ ;\ \eta = 114^\circ$

f) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ \alpha = 58^\circ\ ;\ \beta = 47^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ \eta = 58^\circ\ ;\ \phi = 75^\circ$

Aufgabe 6: *Bestimme durch die gegebenen Werte, ob die Dreiecke kongruent oder ähnlich zueinander sind.*

a) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 3\,\text{cm}\ ;\ b = 4\,\text{cm}\ ;\ \gamma = 90^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ d = 3\,\text{cm}\ ;\ f = 5\,\text{cm}\ ;\ \phi = 90^\circ$

b) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ c = 8\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 50^\circ\ ;\ \beta = 30^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ d = 6\,\text{cm}\ ;\ \eta = 30^\circ\ ;\ \phi = 50^\circ$

c) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 2\,\text{cm}\ ;\ c = 5\,\text{cm}\ ;\ \beta = 99^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ f = 1\,\text{cm}\ ;\ e = 2,5\,\text{cm}\ ;\ \phi = 99^\circ$

d) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ a = 4\,\text{cm}\ ;\ b = 9\,\text{cm}\ ;\ \gamma = 121^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ f = 4\,\text{cm}\ ;\ e = 9\,\text{cm}\ ;\ \eta = 121^\circ$

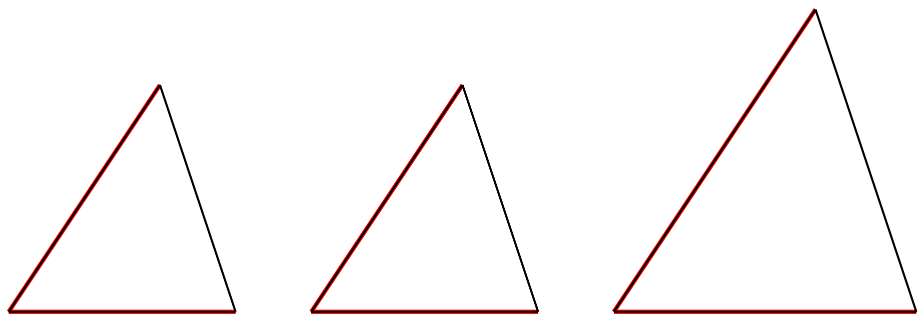
e) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ c = 13\,\text{cm}\ ;\ \gamma = 54^\circ\ ;\ \alpha = 73^\circ$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ d = 13\,\text{cm}\ ;\ \phi = 54^\circ\ ;\ \delta = 73^\circ$

f) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma}:\ \alpha = \beta = \gamma$ und $\Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}:\ \delta = \eta = \phi$

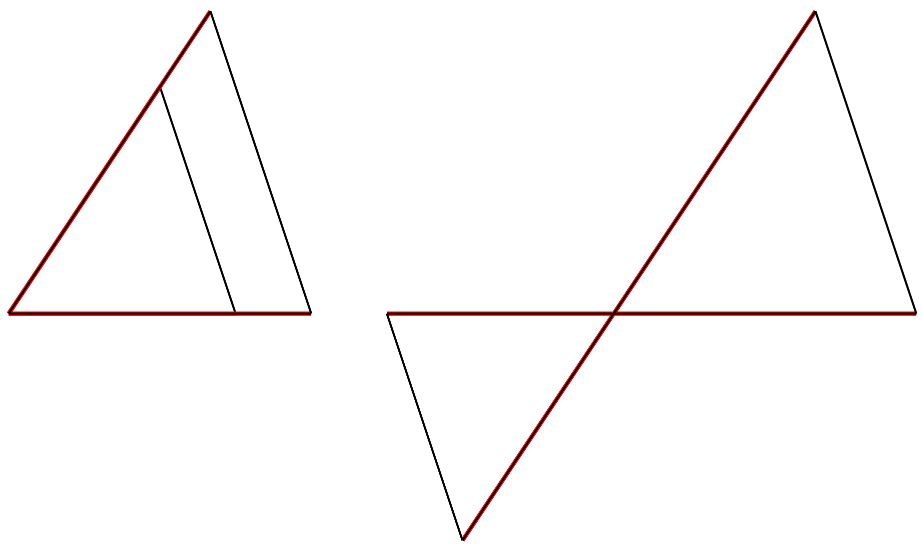
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.31) Lösungen zu Kongruenz und Ähnlichkeit.

4.9 Strahlensatz

Werden zwei kongruente Dreiecke betrachtet, dann sind auch die Seitenverhältnisse gleich, wie es in der nachfolgenden Abbildung durch die rot markierten Strecken verdeutlicht wird.

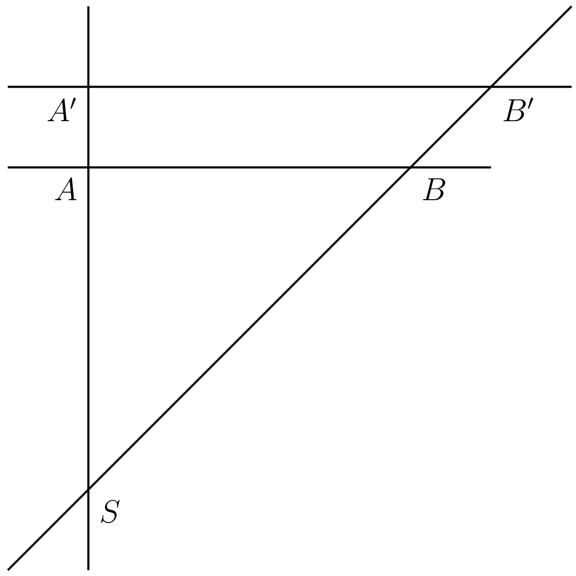


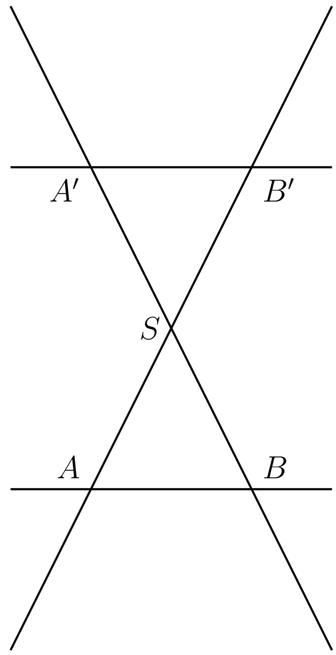
Das dritte Dreieck ist ähnlich zu den beiden ersten Dreiecken. Die Seitenverhältnisse sind aller Dreiecke sind hierbei gleich. Werden zwei ähnliche Dreiecke in einer Abbildung verbunden, entstehen daraus die charakteristischen Darstellungen der Strahlensätze:



wobei deutlich zu erkennen ist, dass ein kleines und das große Dreieck aus der ersten Abbildung dieses Abschnittes entweder direkt überlagert (links) oder um einem gemeinsamen Punkt gedreht (rechts) wurde.

Der *Strahlensatz* wird gerne verwendet um *Streckenlängen* zu bestimmen. Dazu müssen zwei *Geraden parallel* zu einander sein und zwei weitere *Geraden* sich in einem *Punkt* schneiden.





Die Abbildung veranschaulicht diese Bedingung auf die zwei möglichen Arten. Deutlich zu erkennen ist, dass dabei die *parallelen Geraden* auf einer Seite des *Schnittpunktes* oder auf unterschiedlichen Seiten befinden dürfen. Hierbei können *Verhältnisse* zwischen den jeweiligen *Strecken* aufgestellt werden. So verhält sich $\overline{AB}$ zu $\overline{A'B'}$ wie $\overline{AS}$ zu $\overline{A'S}$. Es gibt noch weitere solche Beziehungen, darunter auch diese:

$$\begin{aligned} &\frac{|\overline{AS}|}{|\overline{BS}|}=\frac{|\overline{A'S}|}{|\overline{B'S}|} \quad ; \quad \frac{|\overline{AS}|}{|\overline{A'A}|}=\frac{|\overline{SB}|}{|\overline{B'B}|} \quad ; \quad \frac{|\overline{A'S}|}{|\overline{A'A}|}=\frac{|\overline{SB'}|}{|\overline{B'B}|} \text{ 1. Strahlensatz,} \\ &\frac{|\overline{AS}|}{|\overline{A'S}|}=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{B'A'}|} \quad ; \quad \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{B'S}|}=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{B'A'}|} \text{ 2. Strahlensatz.} \end{aligned} \tag{4.19}$$

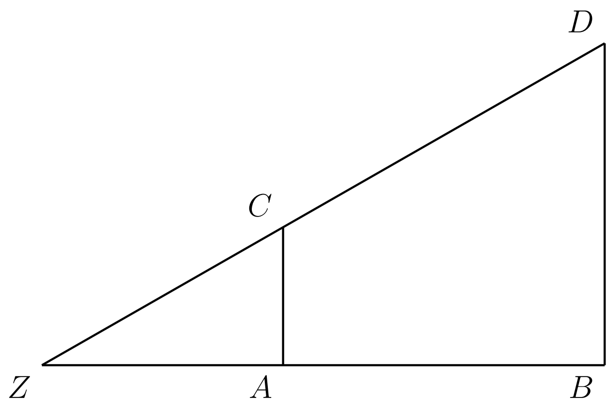
Beim 2. *Strahlensatz* muss jeweils die gesamte *Strecke* vom Anfangspunkt der *Dreiecke* S genommen werden, da ein *Verhältnis* der *Dreiecke* gesucht wird. Der 2. *Strahlensatz* kann dadurch erkannt werden, dass *Strecken* betroffen sind, die nicht mit S in Verbindung stehen. Es ist möglich eine „L-Form“ zu erkennen, wenn der 2. *Strahlensatz* zu verwenden ist. Um die *Verhältnisgleichungen* richtig aufstellen zu können, sollte immer zu erst nach den *Parallelitäten* in der *Skizze* gesucht werden. Anschließend werden diese je nach Dreieckszugehörigkeit sortiert:

$$\begin{aligned} \overline{BS}||\overline{B'S} \text{ und } \overline{AB}||\overline{B'A'} \Rightarrow \text{2. Strahlensatz,} \\ |\overline{BS}| < |\overline{B'S}| \text{ und } |\overline{AB}| < |\overline{B'A'}| \Rightarrow \overline{B'S} \text{ und } \overline{B'A'}\text{auf gleichen Position im Bruch,} \\ \frac{|\overline{BS}|}{|\overline{B'S}|}=\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{B'A'}|} \quad . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Der *Strahlensatz* wird nach der Behandlung des *Dreiecks* wird bei der Behandlung der *Trigonometrie* wiederaufkommen, da den aufgestellten Verhältnistermen ein *Winkel* zugeordnet werden kann.

4.9.1 Übungsaufgaben zum Strahlensatz

Aufgabe 1: *Berechne mit dem Strahlensatz für die folgenden Werte die jeweils fehlenden Strecken.*



a) $\left|\overline{ZA}\right| = 5$; $\left|\overline{ZB}\right| = 9$; $\left|\overline{AB}\right| =$; $\left|\overline{DB}\right| = 4$; $\left|\overline{AC}\right| =$

b) $\left|\overline{ZD}\right| = 12$; $\left|\overline{ZC}\right| = 8$; $\left|\overline{DC}\right| =$; $\left|\overline{DB}\right| =$; $\left|\overline{AC}\right| = 3$

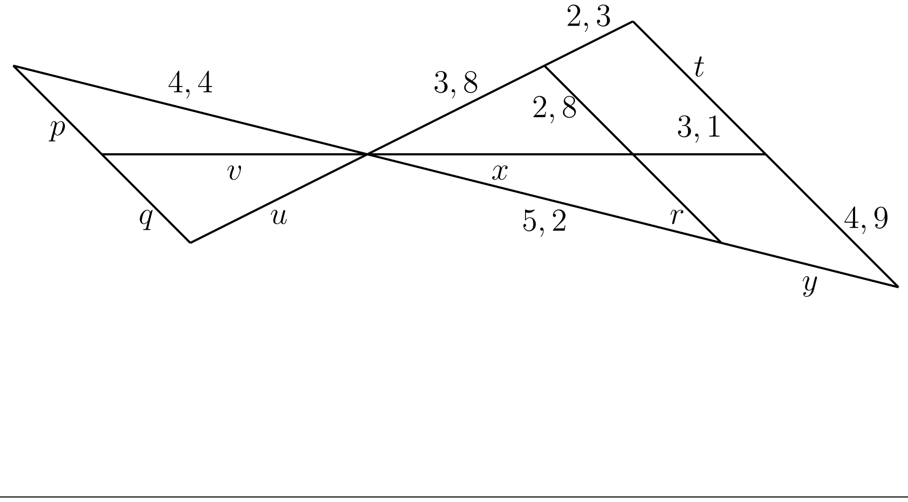
c) $\left|\overline{ZA}\right| =$; $\left|\overline{ZB}\right| = 2$; $\left|\overline{AB}\right| = \frac{8}{11}$; $\left|\overline{DB}\right| = 7$; $\left|\overline{AC}\right| =$

d) $\left|\overline{ZA}\right| = 5$; $\left|\overline{ZB}\right| = 8$; $\left|\overline{AB}\right| =$; $\left|\overline{ZD}\right| =$; $\left|\overline{ZC}\right| = 4$; $\left|\overline{DC}\right| =$

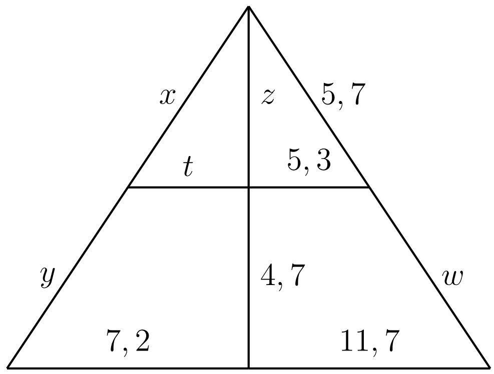
e) $\left|\overline{ZA}\right| =$; $\left|\overline{ZB}\right| = \frac{3}{4}$; $\left|\overline{AB}\right| =$; $\left|\overline{DB}\right| = \frac{1}{3}$; $\left|\overline{AC}\right| = \frac{7}{5}$

f) $\left|\overline{ZD}\right| = \pi$; $\left|\overline{ZC}\right| = \sqrt{2}$; $\left|\overline{DC}\right| =$; $\left|\overline{DB}\right| = e$; $\left|\overline{AC}\right| =$;

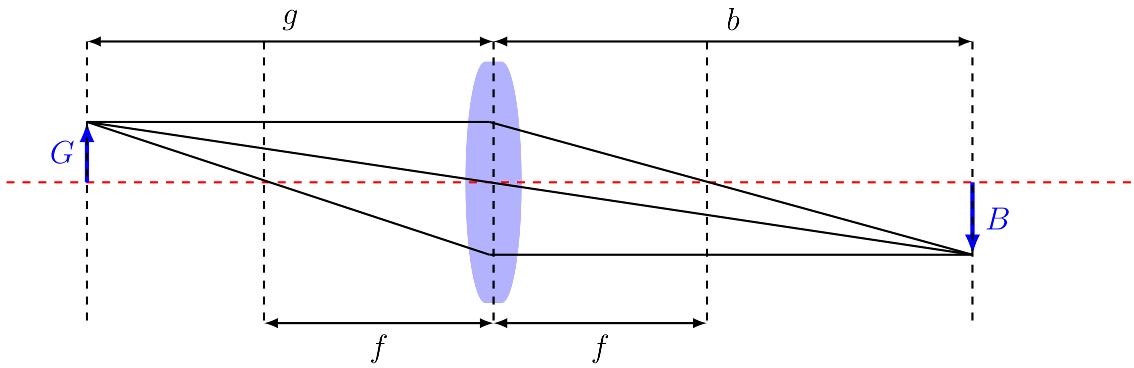
Aufgabe 2: *Bestimme alle unbekannten Strecken.*



Aufgabe 3: *Bestimme alle unbekannten Strecken ($x + y = 15,7$).*



Aufgabe 4: *Leite über Strahlensätze die Linsengleichung* $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}$ *her.*



Aufgabe 5: *Bestimme aus den gegebenen Werten die gesuchte Größe. Betrachte dabei die Skizze aus Aufgabe 4.*

a) gegeben: $G = 3\,\text{cm}$; $b = 35\,\text{cm}$ und $g = 22\,\text{cm}$ gesucht: B und f

b) gegeben: $B = 1,3\,\text{cm}$; $b = 17,4\,\text{cm}$ und $f = 5,4\,\text{cm}$ gesucht: G und g

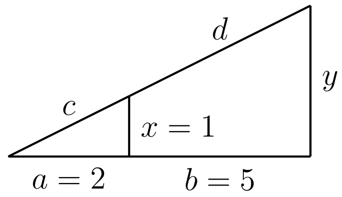
c) gegeben: $B = \frac{7}{5}\,\text{cm}$; $f = \frac{1}{3}\,\text{cm}$ und $g = \frac{33}{4}\,\text{cm}$ gesucht: G und b

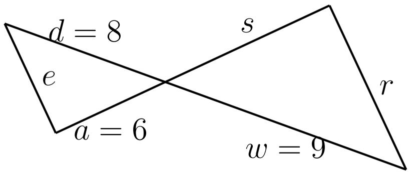
d) gegeben: $G = 12\,\text{mm}$; $b = 4\,\text{dm}$ und $g = 27\,\text{cm}$ gesucht: B und f

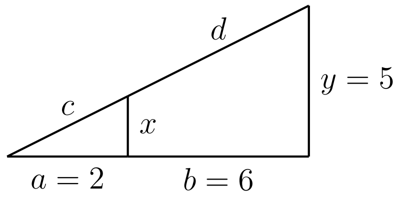
e) gegeben: $B = 4,5\,\text{mm}$; $b = 22,3\,\text{cm}$ und $f = \frac{14}{3}\,\text{cm}$ gesucht: G und g

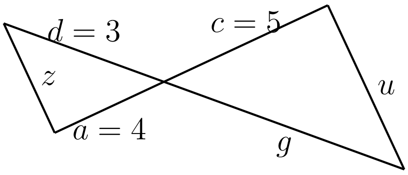
f) gegeben: $G = \frac{6}{7}\,\text{cm}$; $f = \frac{3}{4}\,\text{dm}$ und $g = \sqrt{180}\,\text{cm}$ gesucht: B und b

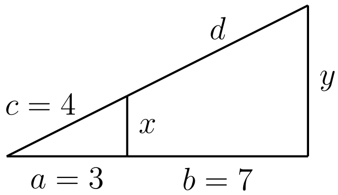
Aufgabe 6: *Bestimme aus den gegebenen Informationen alle Teilstrecken, welche ausschließlich über die Strahlensätze bestimmbar sind. (Die Skizzen sind nicht maßstabsgetreu.)*

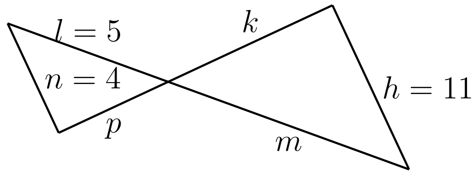
a)


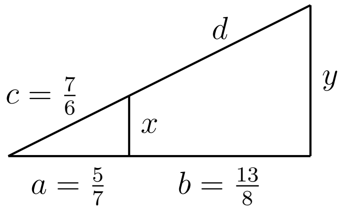
b)


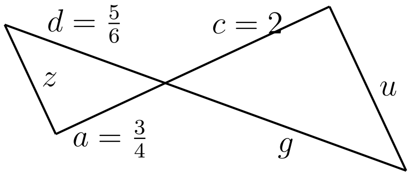
c)


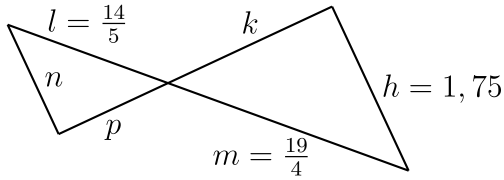
d)


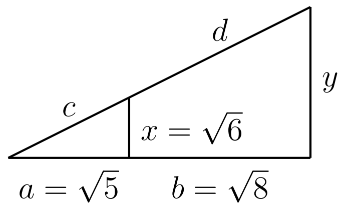
e)


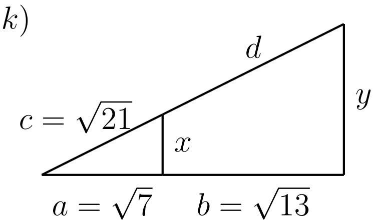
f)


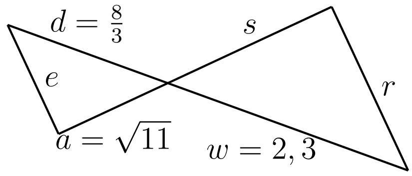
g)


h)


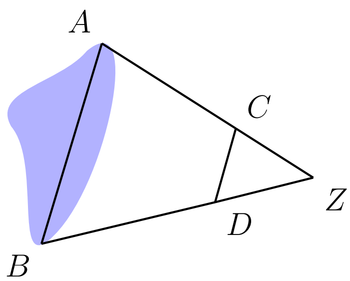
i)


j)


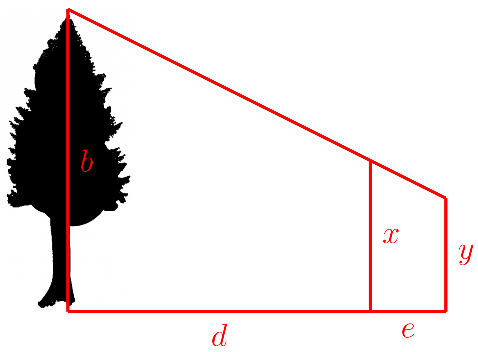
k)


l)


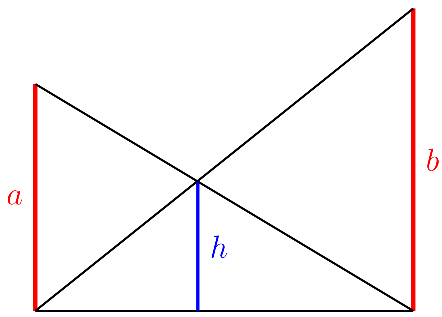
Aufgabe 7: *Bei einer Landvermessung wurden die Strecken* $\left|\overline{AC}\right| = 3,4\,km$, $\left|\overline{ZC}\right| = 0,9\,km$ *und* $\left|\overline{CD}\right| = 0,74\,km$ *gemessen. Berechne die längste Ausdehnung des Sees, welche durch die Strecke zwischen den Punkten* A *und* B *charakterisiert wird.*



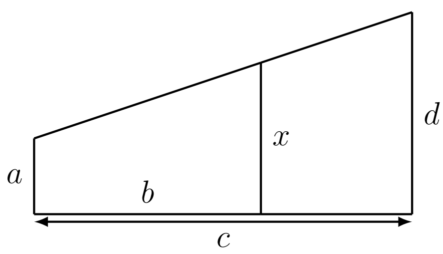
Aufgabe 8: *Mittels zweier Stäbe kann die Höhe von nahezu allen Objekten bestimmt werden. Dazu werden die Stäbe mit einer Kerbe versehen und so angeordnet, dass wenn man durch die Kerben gleichzeitig durchguckt und so die oberste Kante des Objekts betrachtet. Die Stäbe haben in diesem Beispiel eine Länge von* $x = 75\,cm$ *und* $60\,cm$*. Anschließend muss die Entfernung zwischen den Stäben und zum Objekt hin gemessen werden. Es wurden folgende Werte gemessen:* $e = 0,2\,m$ *und* $d = 12,4\,m$*. Bestimme die Höhe des Baumes.*



Aufgabe 9: *Zwischen zwei Säulen mit der Höhe* $a = 23,8\,m$ *und* $b = 37,2\,m$ *sind Seile gespannt. Bestimme die Höhe des Schnittpunktes der Seile* h*.*



Aufgabe 10: *Bestimme* x*.*

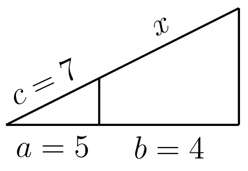


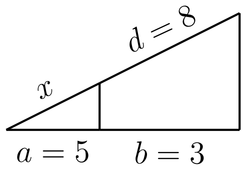
a) $a = 5$; $b = 7$; $c = 9$ und $d = 6,5$

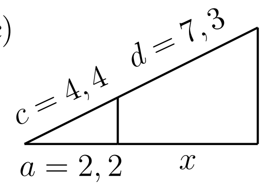
b) $a = 3,4$; $b = 5,2$; $c = 7,8$ und $d = 4,9$

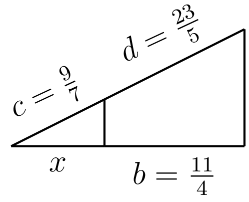
c) $a = \frac{7}{8}$; $b = \frac{9}{4}$; $c = \frac{19}{3}$ und $d = \sqrt{20}$

Aufgabe 11: *Bestimme die Länge der Strecke x.*

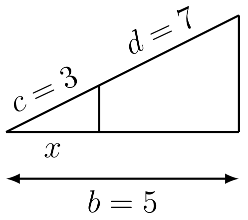
a)


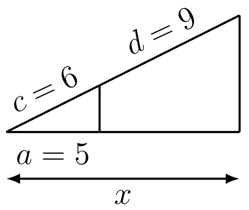
b)


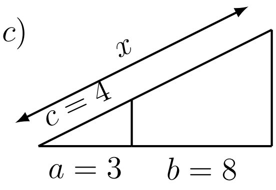
c)


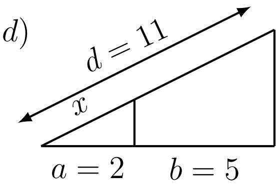
d)


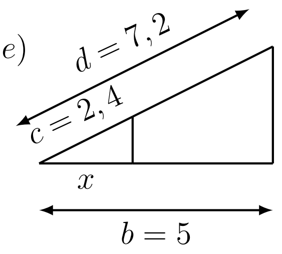
Aufgabe 12: *Bestimme die Länge der Strecke x.*

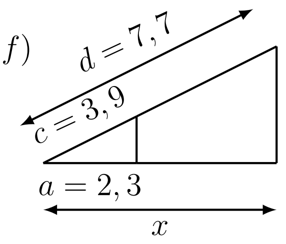
a)


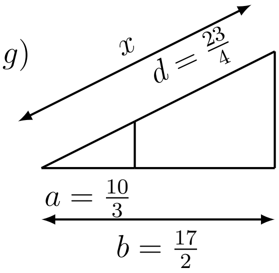
b)


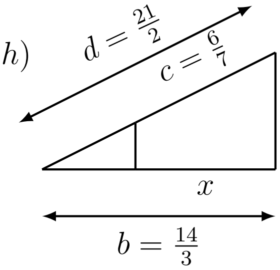
c)


d)


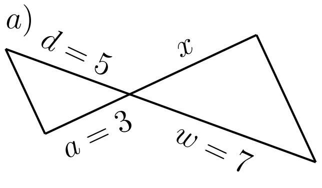
e)


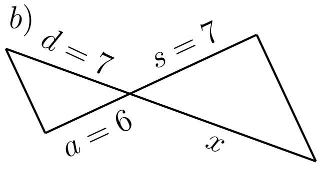
f)


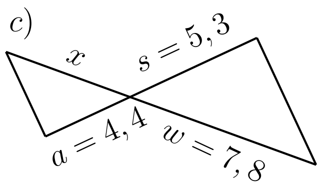
g)


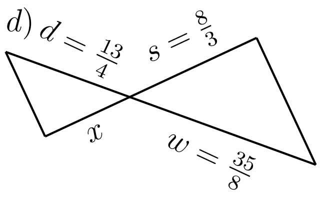
h)


Aufgabe 13: *Bestimme die Länge der Strecke x.*

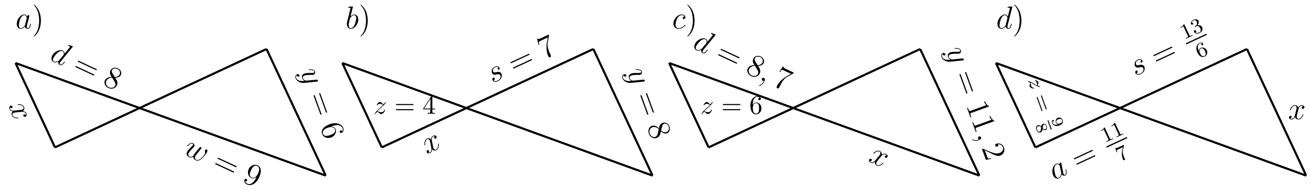
a)


b)


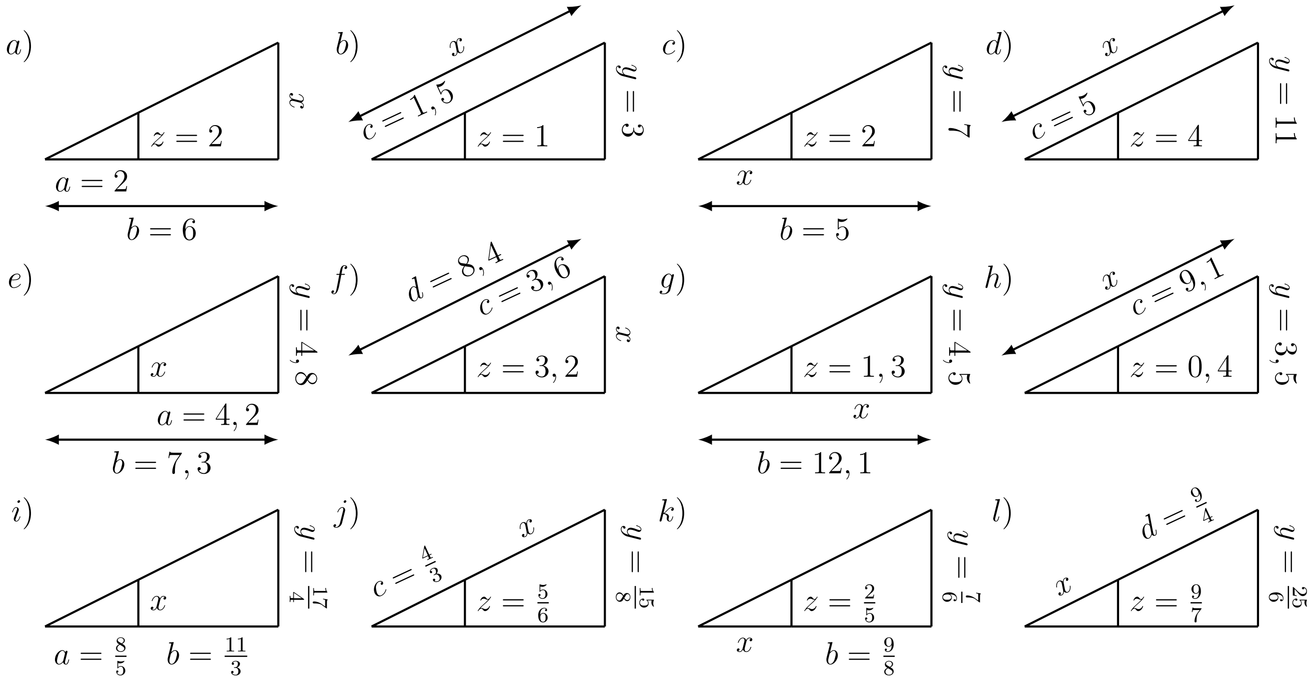
c)


d)


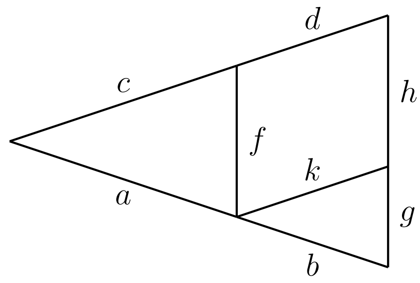
Aufgabe 14: *Bestimme die Länge der Strecke x.*



Aufgabe 15: *Bestimme die Länge der Strecke x.*



Aufgabe 16: *Beantworte alle Teilaufgaben.*



$a)$ Welche Eigenschaften können bei dieser Abbildung festgestellt werden?

$b)$ Wenn $c = 4$, $f = 3$ und $k = 5$ gegeben sind, wie lang sind die fehlenden restlichen Seiten?

$c)$ Wenn $a \neq c$ und $b = 6$, $h = 7$ und $g = 3$ gegeben sind, wie lang wäre die Seite a ?

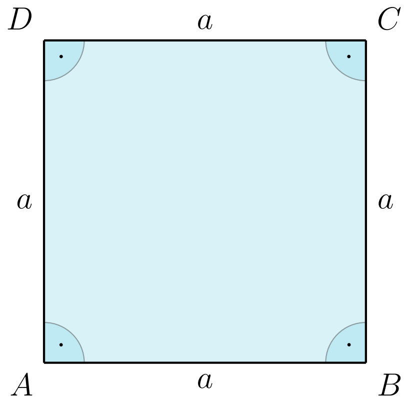
$d)$ Stelle eine Verhältnisgleichung direkt zwischen c, k, f und g auf.

Weitere Übungsaufgaben zum Strahlensatz zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.32) Lösungen zum Strahlensatz.

4.10 Spezielle Vierecke

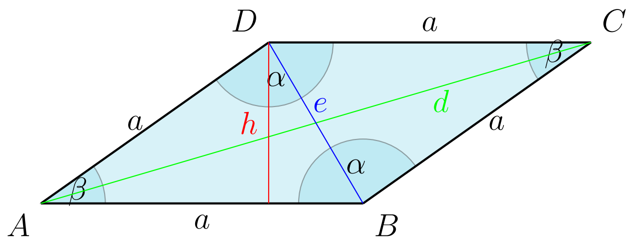
Wie bereits schon im vorigen Abschnitt beschrieben, gibt es spezielle Vierecke. So wird ein *Rechteck*, bei dem alle Seiten die gleiche *Länge* vorweisen können, *Quadrat* genannt.



Die Berechnung des *Flächeninhalts* A und des *Umfangs* U sind beim *Quadrat* trivialer Natur und ergeben sich als:

$$A = a^2$$
$$U = 4a \tag{4.21}$$

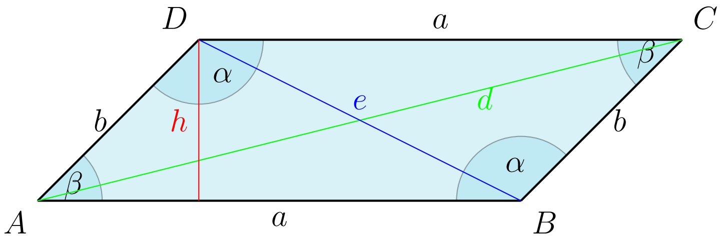
Ein Viereck mit vier gleich langen *Seiten*, deren gegenüber liegende *Winkel* gleich groß sind, wird *Raute* genannt (selten auch *Rhombus*).



Die Berechnung des *Flächeninhalts* A ist ähnlich wie bei einem *Dreieck* mit dem Unterschied, dass durch die Einzeichnung der *Diagonale* e zwei *Dreiecke* vorliegen. Somit muss der *Flächeninhalt* A_Δ eines der *Dreiecke* verdoppelt werden, sodass sich daraus wiederum der *Flächeninhalt* der *Raute* $A = 2A_\Delta$ ergibt. Somit gilt für den *Umfang* U und dem *Flächeninhalt* A (wobei in der Abbildung die *Grundseite* g gleich a ist):

$$A = gh$$
$$U = 4a \tag{4.22}$$

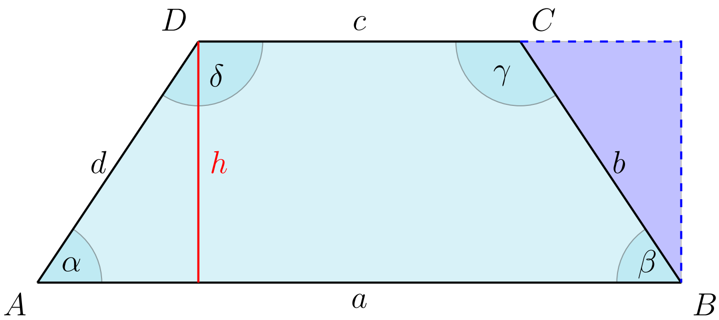
Wenn nun die benachbarten *Seiten* eine unterschiedliche Länge besitzen aber die gegenüber liegenden *Seiten* gleich lang und *parallel* zu einander sind, wird von einem *Parallelogramm* gesprochen.



Dabei unterscheidet sich zur *Raute* lediglich der *Umfang* U, welcher nach wie vor durch die Aufsummierung der *Seiten* gegeben ist:

$$\begin{aligned} A &= gh \\ U &= 2a + 2b \end{aligned} \tag{4.23}$$

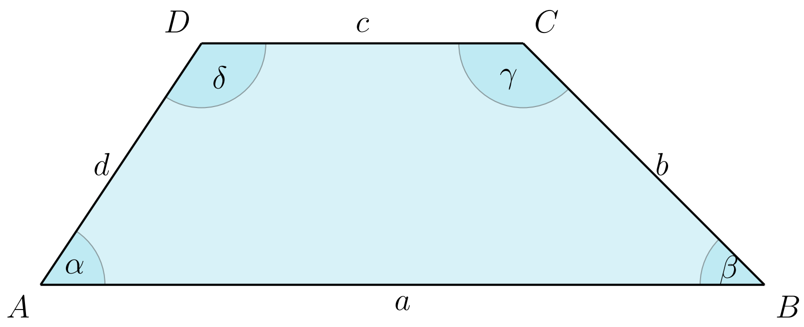
Wenn mindestens zwei *Seiten parallel* zu einander sind, allerdings sonst keine Größen zwingend gleich groß sein müssen, ist die Rede von einem *Trapez*.



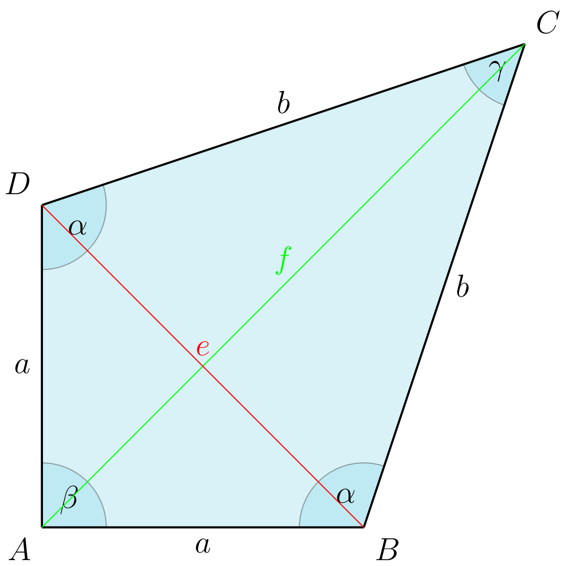
Die Abbildung zeigt ein *Trapez* bei dem die *Winkel* δ und γ sowie α und β gleich groß und aus diesem Grund auch die *Seiten* d und $b$gleich lang sind. Auch zeigt die Abbildung wie aus einem solchen *Trapez* wieder ein *Rechteck* gewonnen werden kann. Dabei wären die Seiten dieses *Rechtecks* gegeben durch die *Höhe* h und dem *Mittelwert* m der *Summe* von a und c. Hierbei gilt $m = \frac{a+c}{2}$ und somit:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a+c}{2}h \\ U &= a + b + c + d \end{aligned} \tag{4.24}$$

Wie bereits erwähnt müssen nur zwei *Seiten parallel* zu einander sein, sodass von einem *Trapez* gesprochen werden kann.



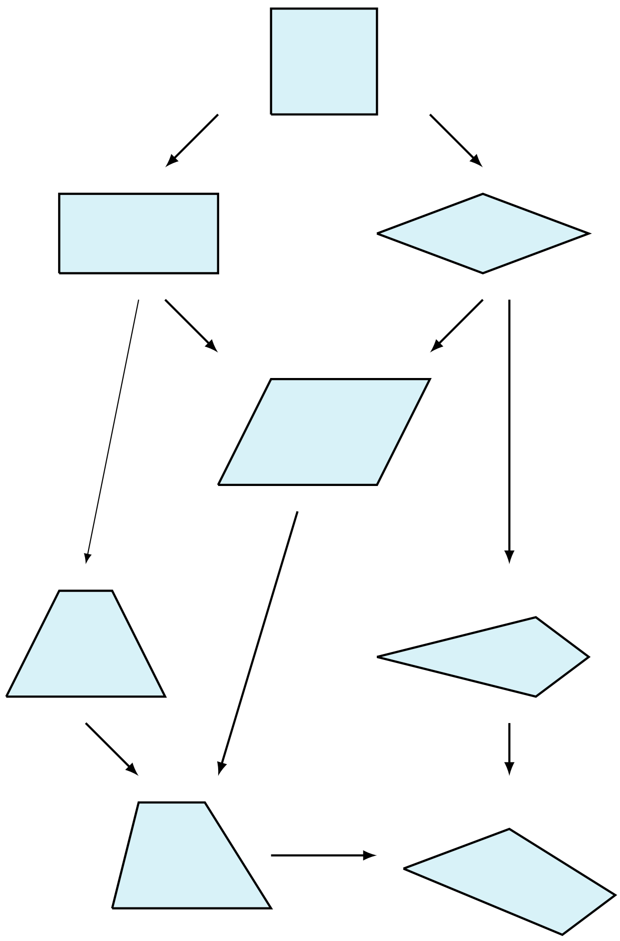
Dabei verändert sich die Berechnungsmethode das *Flächeninhalts* A und des *Umfangs* U nicht und ist genauso durch zu führen wie in Gleichung (4.24)
Als letztes soll der *Drachen* eingeführt werden. Er zeichnet sich dadurch aus, dass zwei *Winkel* gleich groß sind, welche sich gegenüber liegen.



Wie die Abbildung zeigt sind die *Schenkel* des *Winkels* β und die *Schenkel* des *Winkels* γ jeweils gleichlang, was auch ein Merkmal eines *Drachens* ist. Dabei ist ein *Drachen* aus zwei *Dreiecken* aufgebaut, deren *Flächeninhalte addiert* werden können. Die *Höhen* dieser *Dreiecke* sind gegeben durch die Einzeichnung der *Diagonalen* e und f. Somit gilt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{fe}{2} \\ U &= 2a + 2b \end{aligned} \tag{4.25}$$

Die Verbindungen der *Vierecke* untereinander sind im folgenden Diagramm dargestellt:



Quadrat: Alle *Seiten* gleich lang, alle *Winkel* gleich groß, gegenüberliegende *Seiten parallel* zu einander, *Diagonalen* gleich lang und *orthogonal* zueinander.

(links) **Rechteck:** Gegenüberliegende *Seiten* gleich lang, alle *Winkel* gleich groß, gegenüberliegende *Seiten parallel* zu einander, *Diagonalen* gleich lang.
(rechts) **Raute:** Alle *Seiten* gleich lang, gegenüberliegende *Winkel* gleich groß, gegenüberliegende *Seiten parallel* zu einander, *Diagonalen orthogonal* zueinander.

Parallelogramm: Gegenüberliegende *Seiten* gleich lang, gegenüberliegende *Winkel* gleich groß, gegenüberliegende *Seiten parallel* zu einander.

(links) **symmetrisches Trapez:** Ein Paar gegenüberliegende *Seiten* gleich lang, zwei Paare von benachbarten *Winkeln* gleich groß, ein Paar von gegenüberliegende *Seiten parallel* zu einander, *Diagonalen* gleich lang.
(rechts) **Drachen:** Zwei Paare von benachbarten *Seiten* gleich lang, ein Paar von gegenüberliegenden *Winkeln* gleich groß, *Diagonalen orthogonal* zueinander.

(links) **Trapez:** Ein Paar von gegenüberliegende Seiten *parallel* zu einander.
(rechts) **beliebiges Viereck:** Keine speziellen Bedingungen.

Die Pfeile „→“ symbolisieren „ist auch“, und stellt somit die Hierarchie der *Vierecke* dar. (Beispiel: Ein *Quadrat* ist auch ein *Rechteck*.)

4.10.1 Übungsaufgaben zu Vierecken

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von jeweiligen angegeben Viereck.*

a) Quadrat: $a = 2\,\text{cm}$

b) Raute: $a = 5\,\text{cm}$ und $h = 4\,\text{cm}$

c) Parallelogramm: $a = 6\,\text{cm},\ b = 3\,\text{cm}$ und $h_a = 2\,\text{cm}$

d) Trapez: $a = 4\,\text{cm},\ c = 11\,\text{cm},\ b = d$ und $h = 4\,\text{cm}$

e) Drachen: $a = 4\,\text{cm},\ b = 6\,\text{cm}$ und $e = 6\,\text{cm}$

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Quadraten.*

a) $a = 4\,\text{cm}$	*b)* $a = 11\,\text{cm}$	*c)* $a = 15\,\text{dm}$
d) $a = \frac{5}{6}\,\text{cm}$	*e)* $a = \frac{3}{4}\,\text{km}$	*f)* $a = \frac{5}{12}\,\text{m}$
e) $a = \sqrt{5}\,\text{mm}$	*g)* $a = \sqrt{149}\,\text{m}$	*h)* $a = \sqrt{88}\,\text{dm}$
i) $a = e\,\text{mm}$	*j)* $a = \pi\,\text{m}$	*k)* $a = \ln 2\,\text{dm}$

Aufgabe 3: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Rauten.*

a) $a = 4\,\text{cm}$	und $h = 6\,\text{cm}$	*b)* $a = 9\,\text{dm}$	und $h = 11\,\text{dm}$
c) $a = 2\,\text{m}$	und $h = 50\,\text{cm}$	*d)* $a = 3\,\text{km}$	und $h = 100\,\text{m}$
e) $a = \frac{1}{2}\mu\,\text{m}$	und $h = \frac{1}{3}\mu\,\text{m}$	*f)* $a = \frac{7}{8}\,\text{cm}$	und $h = \frac{3}{4}\,\text{cm}$
g) $a = \frac{11}{3}\,\text{mm}$	und $h = \frac{6}{7}\,\text{mm}$	*h)* $a = \frac{14}{5}\,\text{km}$	und $h = \frac{5}{9}\,\text{km}$
i) $a = \frac{7}{4}\,\text{dm}$	und $h = \frac{7}{5}\,\text{cm}$	*j)* $a = \frac{17}{9}\,\text{cm}$	und $h = \frac{11}{8}\,\text{mm}$
k) $a = \sqrt{5}\,\text{Mm}$	und $h = \sqrt{3}\,\text{Mm}$	*l)* $a = \sqrt{17}\,\text{nm}$	und $h = \sqrt{2}\,\text{nm}$
m) $a = e\,\text{mm}$	und $h = \pi\,\text{dm}$	*n)* $a = \ln 9\,\text{m}$	und $h = \ln 2m$

Aufgabe 4: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Parallelogramm.*

a) $a = 3\,\text{cm},\ b = 7\,\text{cm}$ und $h_a = 4\,\text{cm}$

b) $a = 7\,\text{dm},\ b = 6\,\text{dm}$ und $h_a = 5\,\text{dm}$

c) $a = 9\,\text{m},\ b = 8\,\text{m}$ und $h_a = 6\,\text{m}$

d) $a = 4\,\text{km},\ b = 44\,\text{km}$ und $h_a = 2\,\text{km}$

e) $a = 2\,\text{cm},\ b = 5\,\text{dm}$ und $h_a = 5\,\text{mm}$

f) $a = 4\,\text{m},\ b = 9\,\text{cm}$ und $h_a = 25\,\text{dm}$

g) $a = 90\,\text{dm},\ b = 60\,\text{mm}$ und $h_a = 4\,\text{m}$

h) $a = 46\,\text{km},\ b = 1\,\text{dm}$ und $h_a = 1\,\text{dm}$

i) $a = \frac{1}{4}\,\text{cm},\ b = \frac{1}{2}\,\text{cm}$ und $h_a = \frac{1}{6}\,\text{cm}$

j) $a = \frac{11}{3}\,\text{dm},\ b = \frac{6}{7}\,\text{dm}$ und $h_a = \frac{7}{8}\,\text{dm}$

k) $a = \frac{13}{8}\,\text{dm},\ b = \frac{1}{10}\,\text{mm}$ und $h_a = \frac{144}{10}\,\text{cm}$

l) $a = \sqrt{7}\,\text{dm},\ b = \sqrt{2}\,\text{dm}$ und $h_a = \sqrt{3}\,\text{dm}$

m) $a = \lg 125\,\text{cm},\ b = \ln 6\,\text{cm}$ und $h_a = \text{lb}5\,\text{cm}$

n) $a = e\,\text{dm},\ b = \pi\,\text{dm}$ und $h_a = \sqrt{5}\,\text{dm}$

Aufgabe 5: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Trapez.*

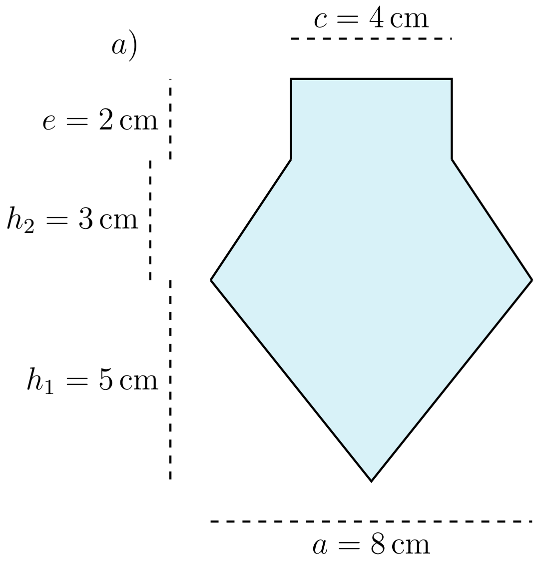
a)	$a = 4\,\text{cm}, c = 3\,\text{cm}, d = b$	und $h_a = 5\,\text{cm}$
b)	$a = 7\,\text{cm}, c = 5\,\text{cm}, d = b$	und $h_a = 3\,\text{cm}$
c)	$a = 120\,\text{mm}, c = 6\,\text{cm}, d = b$	und $h_a = 2,4\,\text{cm}$
d)	$a = 5\,\text{dm}, c = 11\,\text{cm}, d = b$	und $h_a = 9\,\text{cm}$
e)	$a = 11\,\text{cm}, c = 4\,\text{mm}, d = b$	und $h_a = \frac{7}{5}\,\text{cm}$
f)	$a = 3\,\text{km}, c = 1,5\,\text{km}, d = b$	und $h_a = 1,65\,\text{km}$
g)	$a = 9\,\text{cm}, c = \frac{1}{5}\,\text{dm}, d = b$	und $h_a = 5,53\,\text{cm}$
h)	$a = \frac{3}{4}\,\text{cm}, c = \frac{5}{4}\,\text{cm}, d = b$	und $h_a = \frac{4}{7}\,\text{cm}$
i)	$a = \frac{15}{8}\,\text{mm}, c = \frac{7}{10}\,\text{mm}, d = b$	und $h_a = \frac{5}{4}\,\text{cm}$
j)	$a = \frac{11}{5}\,\text{dm}, c = \frac{38}{9}\,\text{cm}, d = b$	und $h_a = \frac{1}{8}\,\text{dm}$
k)	$a = \frac{7}{6}\,\text{m}, c = \frac{11}{4}\,\text{dm}, d = b$	und $h_a = \frac{3}{4}\,\text{m}$
l)	$a = \frac{9}{4}\,\text{m}, c = \frac{6}{5}\,\text{m}, d = b$	und $h_a = \frac{8}{3}\,\text{dm}$
m)	$a = \sqrt{17}\,\text{cm}, c = \sqrt{3}\,\text{cm}, d = b$	und $h_a = \sqrt{7}\,\text{cm}$
n)	$a = \ln 2\,\text{cm}, c = \pi\,\text{mm}, d = b$	und $h_a = e\,\text{mm}$

Aufgabe 6: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte von den Drachen.*

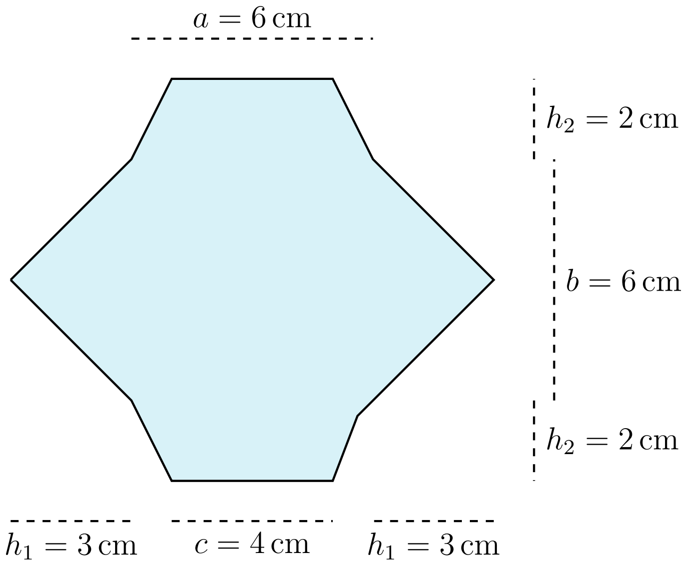
a)	$a = 4\,\text{cm}, b = 9\,\text{cm},$	und $e = 6\,\text{cm}$
b)	$a = 5\,\text{cm}, b = 6\,\text{cm},$	und $e = 5,5\,\text{cm}$
c)	$a = 3,2\,\text{cm}, b = 114\,\text{mm},$	und $e = 7,2\,\text{cm}$
d)	$a = 4\,\text{dm}, b = 1,7\,\text{m},$	und $e = 2,25\,\text{m}$
e)	$a = \frac{1}{4}\,\text{cm}, b = \frac{4}{5}\,\text{cm},$	und $e = \frac{5}{8}\,\text{cm}$
f)	$a = \frac{4}{7}\,\text{mm}, b = \frac{1}{6}\,\text{cm},$	und $e = \frac{5}{4}\,\text{mm}$
g)	$a = \frac{2}{30}\,\text{dm}, b = \frac{7}{3}\,\text{cm},$	und $e = \frac{3}{100}\,\text{m}$
h)	$a = \sqrt{10}\,\text{cm}, b = \pi\,\text{cm},$	und $e = e\,\text{cm}$

Aufgabe 7: *Bestimme Umfang U und Flächeninhalt A für die jeweiligen Vielecke.*

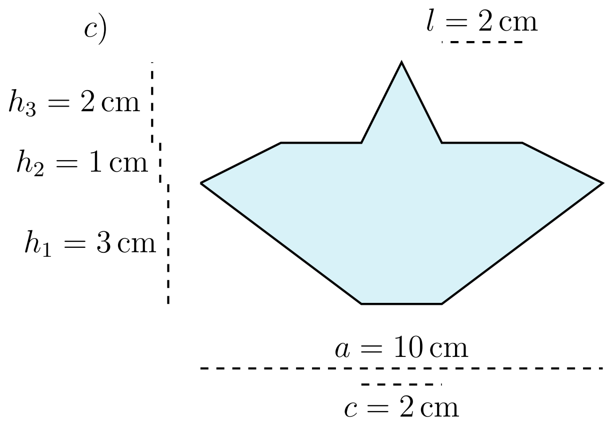
a)



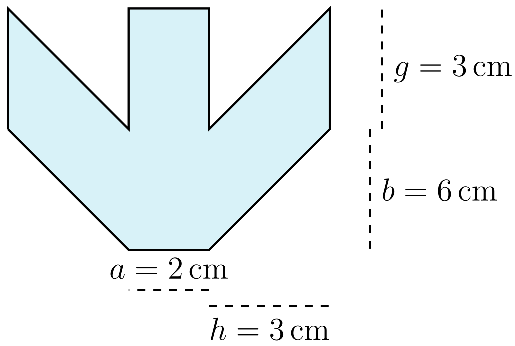
b)



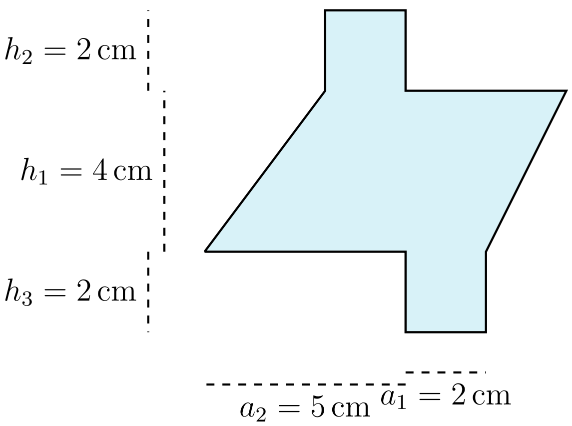
c)



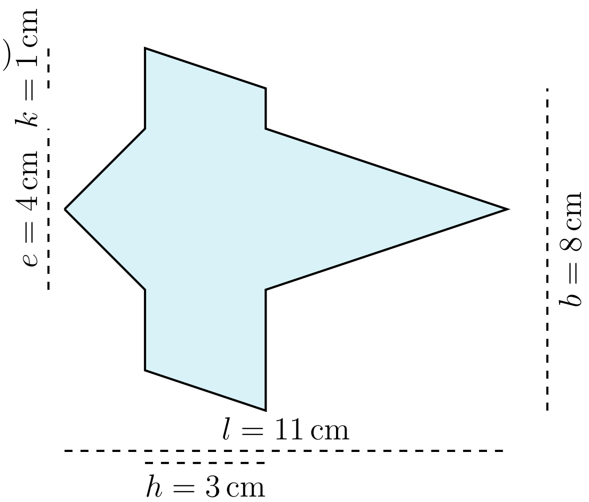
d)



e)



f)



Aufgabe 8: *Die Winkelsumme eines Vierecks beträgt immer* 360°. *Berechne alle Winkel der jeweiligen Vierecke.*

a) Der erste Winkel α ist doppelt so groß wie der Winkel β, aber nur halb so groß wie der Winkel γ. Dabei ist der Winkel δ viermal größer als der Winkel γ.
b) Der erste Winkel α ist doppelt so groß wie der Winkel β, der doppelt so groß wie der Winkel γ ist, der wiederum doppelt so groß wie der Winkel δ ist.
c) Bei einem Parallelogramm ist der Winkel α dreimal größer als der Winkel β.
d) Bei einem Drachen ist die Summe der gleichgroßen Winkel α zweimal größer als die Summe der anderen beiden Winkel. Der Winkel β ist dabei nur 1,5-mal größer als der Winkel γ.
e) Die Summe der Winkel α und β ist doppelt so groß wie die Summe der Winkel γ und δ. Dabei sind α und β gleich groß und δ dreimal kleiner als γ.
f) Bei einem symmetrischen Trapez ist der Winkel δ genau 125° groß.
g) Der erste Winkel α ist zweimal kleiner als der Winkel β, der dreimal kleiner als der Winkel γ ist, der wiederum viermal kleiner als der Winkel δ ist.
h) Bei einem Drachen ist der Winkel β doppelt so groß wie der Winkel γ. Beide zusammen haben eine Summe von 130°.

Aufgabe 9: *Berechne die fehlenden Größen für ein Trapez.* (Benötigt „Spezielle Vierecke“)

	1	2	3	4	5	6
Seite a	4		5		$0,5$	$\frac{4}{5}$
Seite c	6	8		$4,5$		
Hilfsgröße $m = \frac{a+c}{2}$		6	8			$\frac{9}{4}$
Höhe h	3	7		$2,1$	4	
Flächeninhalt A			25	42	18	$\frac{13}{2}$

Aufgabe 10: *Lies die Behauptung und kreuze an, ob diese wahr oder falsch ist.*

Behauptung	wahr	falsch
Jedes Quadrat ist ein Rechteck.		
Bei einem Drachen sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.		
Ein Rechteck ist gleichzeitig ein Trapez.		
Ein Kreis hat 180°.		
Ein Drachen besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.		
Jedes Rechteck ist ein Trapez.		
Ein Quadrat ist eine Raute.		
Die Seiten einer Raute sind alle gleichlang.		
Ein Parallelogramm hat eine Winkelsumme von 180°.		
Die Winkelsumme eines Sechsecks beträgt immer 720°.		
Ein Trapez, dass ein Parallelogramm ist und einen rechten Winkel hat, nennt man immer Rechteck.		
Die längste Seite eines Dreiecks wird Hypotenuse genannt.		
Jede Raute ist ein Parallelogramm.		
Die gegenüberliegenden Winkel einer Raute sind gleichgroß.		
Ein gleichmäßiges Sechseck besteht aus gleichseitigen Dreiecken.		

Aufgabe 11: *Zeichne folgende Rauten.* (keine Lösung!)

$a)$ $a = 4\,\text{cm}$; $\alpha = 60°$

$b)$ $a = 5\,\text{cm}$; $\alpha = 45°$

$c)$ $a = 3\,\text{cm}$; $\alpha = 30°$

$d)$ $a = 7\,\text{cm}$; $\alpha = 20°$

$e)$ $a = 4,5\,\text{cm}$; $\alpha = 120°$

$f)$ $a = 5,5\,\text{cm}$; $\alpha = 115°$

$g)$ $a = 3,9\,\text{cm}$; $\alpha = 80°$

$h)$ $a = 1,9\,\text{cm}$; $\alpha = 15°$

$i)$ $a = 6,2\,\text{cm}$; $\alpha = 42°$

$j)$ $a = 6,7\,\text{cm}$; $\alpha = 72°$

$k)$ $a = 3,3\,\text{cm}$; $\alpha = 116°$

$l)$ $a = 4,1\,\text{cm}$; $\alpha = 57°$

Aufgabe 12: *Zeichne folgende Parallelogramme.* (keine Lösung!)

a) $a = 3\,\text{cm}\ ;\ b = 6\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 50°$

b) $a = 4\,\text{cm}\ ;\ b = 5\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 75°$

c) $a = 5\,\text{cm}\ ;\ b = 2\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 80°$

d) $a = 6\,\text{cm}\ ;\ b = 6\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 75°$

e) $a = 4,5\,\text{cm}\ ;\ b = 3,5\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 150°$

f) $a = 6,5\,\text{cm}\ ;\ b = 3,5\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 75°$

g) $a = 6,7\,\text{cm}\ ;\ b = 3,4\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 70°$

h) $a = 4,7\,\text{cm}\ ;\ b = 5,8\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 75°$

i) $a = 4,6\,\text{cm}\ ;\ b = 1,6\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 110°$

j) $a = 0,9\,\text{cm}\ ;\ b = 8,3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 75°$

k) $a = 4,4\,\text{cm}\ ;\ b = 2,8\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 30°$

l) $a = 7,4\,\text{cm}\ ;\ b = 1,2\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 75°$

Aufgabe 13: *Zeichne folgende Trapeze.* (keine Lösung!)

a) $a = 6\,\text{cm}\ ;\ b = 3\,\text{cm}\ ;\ c = 4\,\text{cm}\ ;\ d = 3\,\text{cm}$

b) $a = 5\,\text{cm}\ ;\ b = 2\,\text{cm}\ ;\ c = 4\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 70°$

c) $a = 7\,\text{cm}\ ;\ b = 3\,\text{cm}\ ;\ c = 3\,\text{cm}\ ;\ d = 3\,\text{cm}$

d) $a = 4\,\text{cm}\ ;\ b = 4\,\text{cm}\ ;\ c = 3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 80°$

e) $a = 7\,\text{cm}\ ;\ b = 4\,\text{cm}\ ;\ c = 2\,\text{cm}\ ;\ d = 4\,\text{cm}$

f) $a = 8\,\text{cm}\ ;\ b = 4\,\text{cm}\ ;\ c = 3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 30°$

g) $a = 4,5\,\text{cm}\ ;\ b = 3,4\,\text{cm}\ ;\ c = 2,8\,\text{cm}\ ;\ d = 3,4\,\text{cm}$

h) $a = 5,6\,\text{cm}\ ;\ b = 2,7\,\text{cm}\ ;\ c = 3,1\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 50°$

i) $a = 3,6\,\text{cm}\ ;\ b = 4,1\,\text{cm}\ ;\ c = 7,2\,\text{cm}\ ;\ d = 4,1\,\text{cm}$

j) $a = 6,6\,\text{cm}\ ;\ b = 1,1\,\text{cm}\ ;\ c = 4,3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 67°$

k) $a = 5,4\,\text{cm}\ ;\ b = 2,2\,\text{cm}\ ;\ c = 7,8\,\text{cm}\ ;\ d = 2,2\,\text{cm}$

l) $a = 1,5\,\text{cm}\ ;\ b = 3,7\,\text{cm}\ ;\ c = 4,2\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 78°$

Aufgabe 14: *Zeichne folgende Drachen.* (keine Lösung!)

a) $a = b = 3\,\text{cm}$; $c = d = 5\,\text{cm}$

b) $a = b = 3\,\text{cm}$; $c = d = 5\,\text{cm}$

c) $a = b = 2\,\text{cm}$; $c = d = 6\,\text{cm}$

d) $a = b = 4\,\text{cm}$; $c = d = 5\,\text{cm}$

e) $a = b = 4,3\,\text{cm}$; $c = d = 2,5\,\text{cm}$

f) $a = b = 3,7\,\text{cm}$; $c = d = 6,4\,\text{cm}$

g) $a = b = 3,1\,\text{cm}$; $c = d = 5,2\,\text{cm}$

h) $a = b = 5,2\,\text{cm}$; $c = d = 5,9\,\text{cm}$

i) $d = c = 3,2\,\text{cm}$; $\gamma = 30°$; $\beta = 100°$

j) $c = d = 5,5\,\text{cm}$; $\gamma = 45°$; $\beta = 120°$

k) $a = b = 4,1\,\text{cm}$; $\alpha = 76°$; $\beta = 133°$

l) $a = b = 2,3\,\text{cm}$; $\alpha = 90°$; $\beta = 108°$

Aufgabe 15: *Zeichne zwei Strecken von* 3 cm *Länge, die einen gemeinsamen Schnittpunkt exakt in der Mitte besitzen. Dabei sollen die Strecken Orthogonal sein. Wie lang sind die restlichen Verbindungsstrecken der Punkte? Wie wird eine solche geometrische Fläche genannt?*

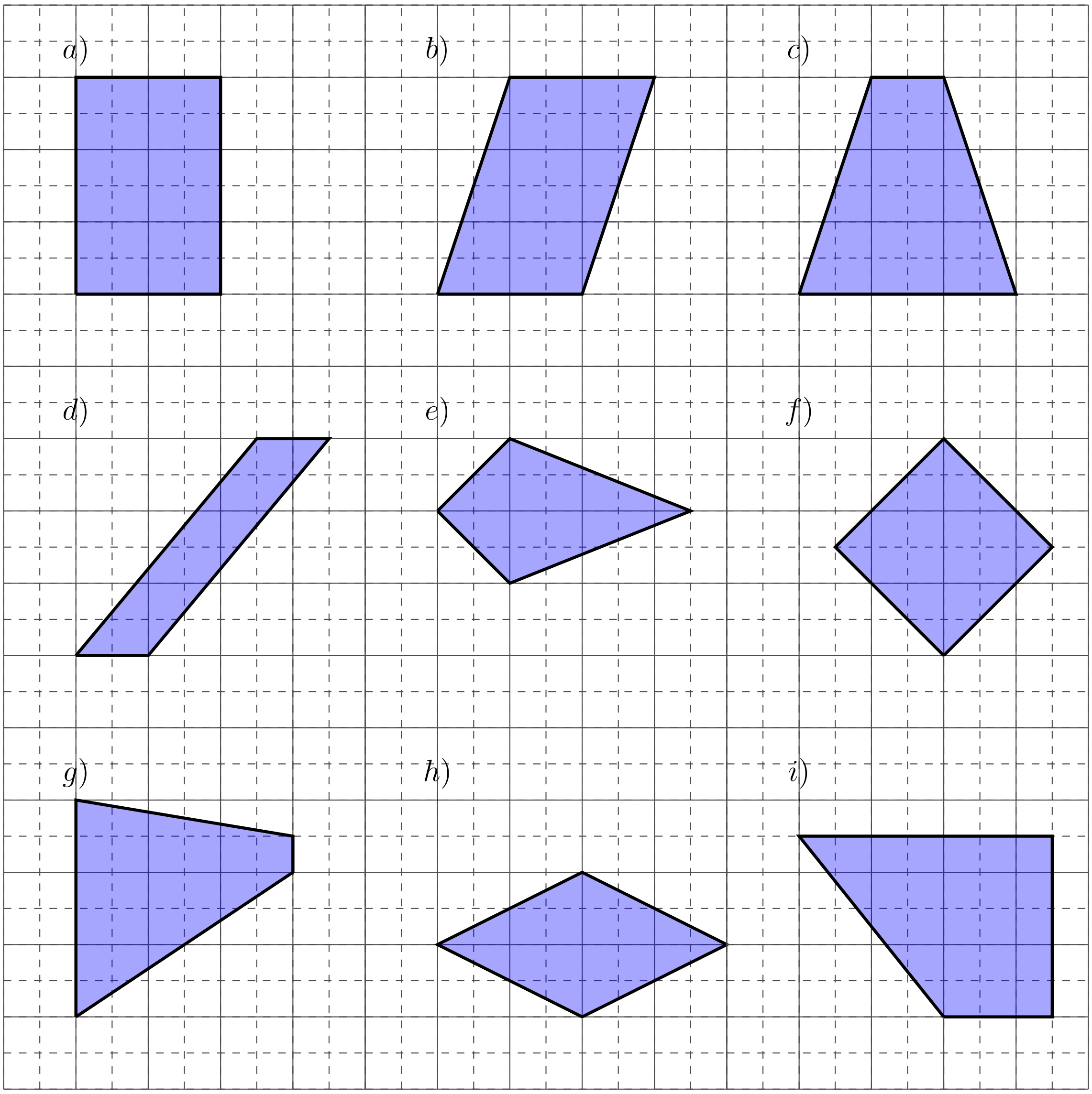
Aufgabe 16: *Zeichne zwei Strecken von* 4 cm *und* 5 cm *Länge, die einen gemeinsamen Schnittpunkt exakt in der Mitte besitzen. Dabei sollen die Strecken Orthogonal sein. Wie lang sind die restlichen Verbindungsstrecken der Punkte? Wie wird eine solche geometrische Fläche genannt?*

Aufgabe 17: *Zeichne die Strecken* $\left|\overline{AB}\right| = 7\,\text{cm}$, $\left|\overline{AC}\right| = 2\,\text{cm}$, $\left|\overline{DC}\right| = 3\,\text{cm}$ *und* $\left|\overline{EC}\right| = 3\,\text{cm}$. *Beachte, dass die Punkte A, B und C sowie D, E und C auf einer Geraden liegen. Außerdem gilt* $\overline{AB} \perp \overline{ED}$ *Wie lang sind die restlichen Verbindungsstrecken der Punkte? Wie wird eine solche geometrische Fläche genannt?*

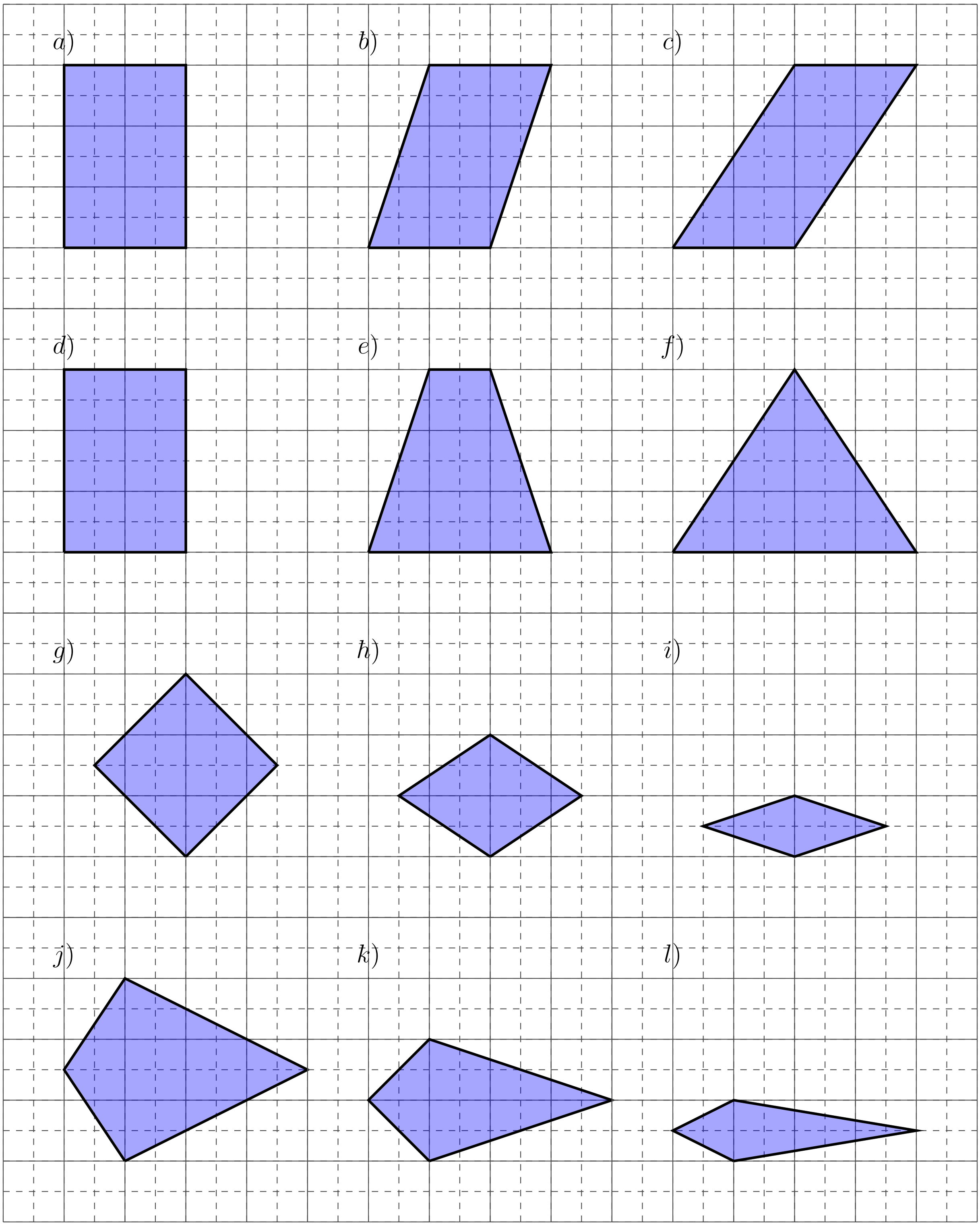
Aufgabe 18: *Zeichne die Strecken* $\left|\overline{AB}\right| = 5\,\text{cm}$ *und* $\left|\overline{DC}\right| = 2\,\text{cm}$, *wobei* $\overline{AB} || \overline{CD}$ *gilt und die beiden Strecken einen Abstand von* 2 cm *haben sollen. Wie lang sind die restlichen Verbindungsstrecken der Punkte, wenn jeweils zwei von ihnen die gleiche Länge haben sollen? Wie wird eine solche geometrische Fläche genannt?*

Aufgabe 19: *Zeichne die Strecken* $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{CD}\right| = 4\,\text{cm}$ *und* $\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{AD}\right| = 5\,\text{cm}$, *wobei* $\overline{AB} || \overline{CD}$ *und* $\overline{BC} || \overline{AD}$ *gilt. Wie lang sind die restlichen Verbindungsstrecken der Punkte? Wie wird eine solche geometrische Fläche genannt?*

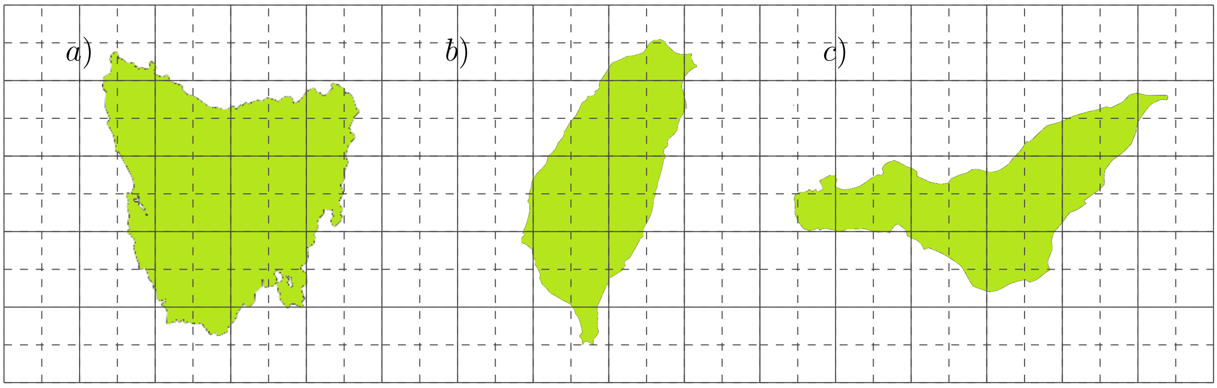
Aufgabe 20: *Berechne die Flächeninhalte der dargestellten Vierecke und gib die Art des Vierecks an.*



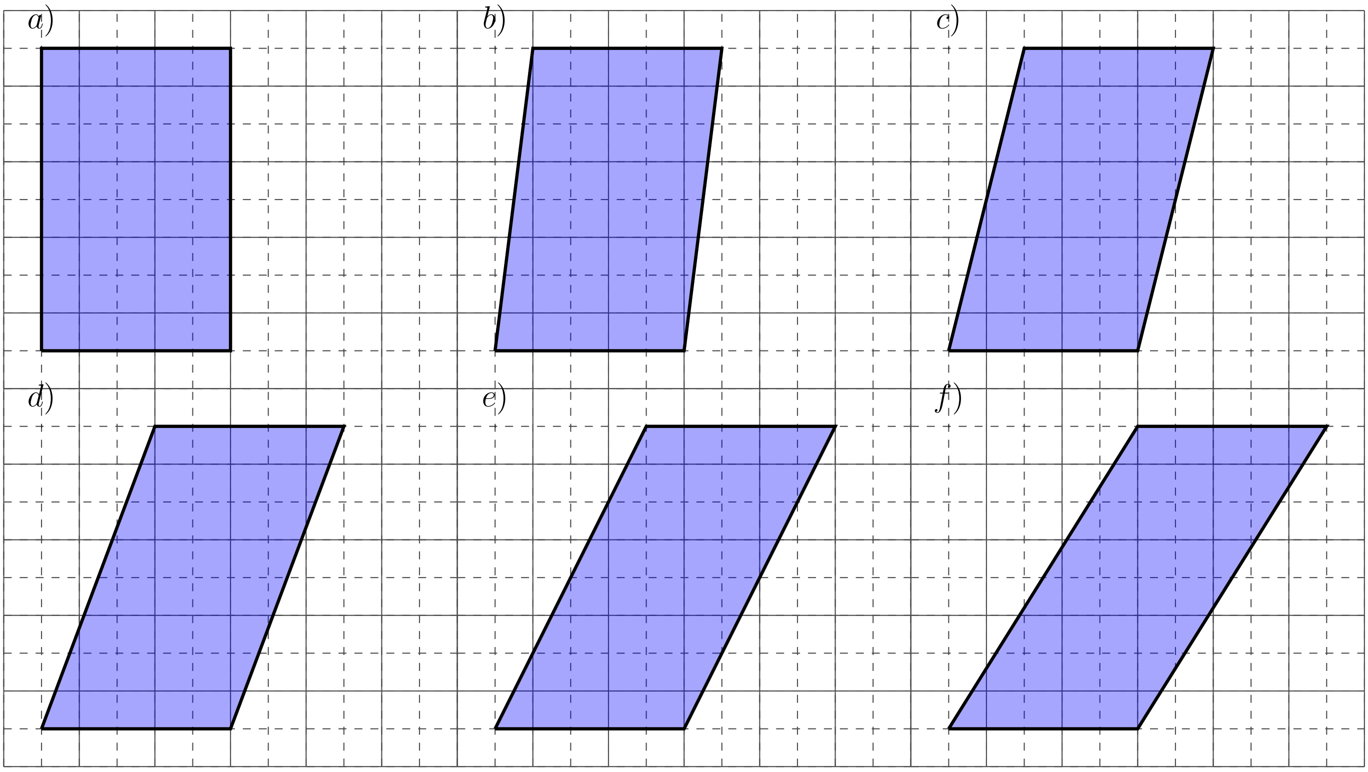
Aufgabe 21: *Berechne die Flächeninhalte der dargestellten Vierecke und gib die Art des Vierecks an. Beschreibe die Auffälligkeit in jeder Zeile.*



Aufgabe 22: *Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang näherungsweise.*

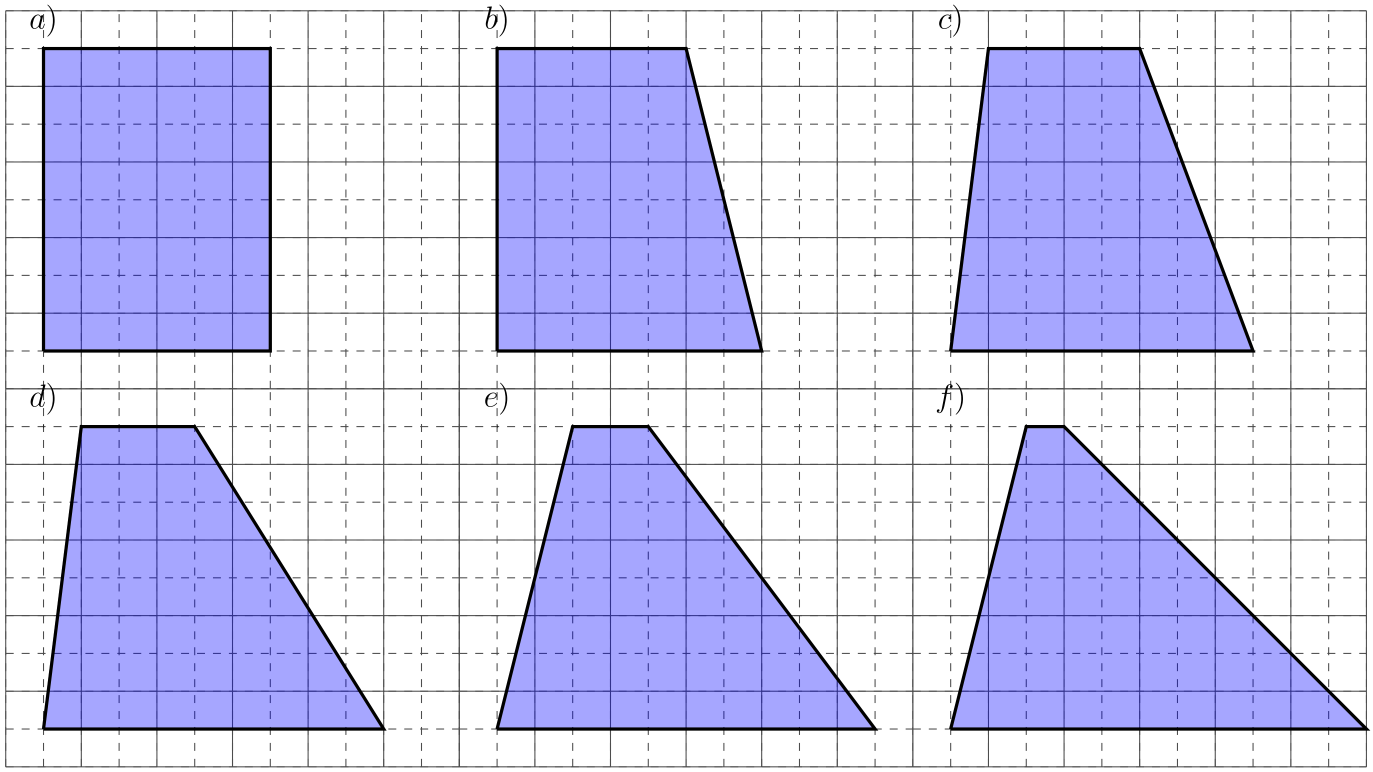


Aufgabe 23: *Berechne die Flächeninhalte der dargestellten Vierecke und gib die Art des Vierecks jeweils an. Beschreibe die Auffälligkeit.*



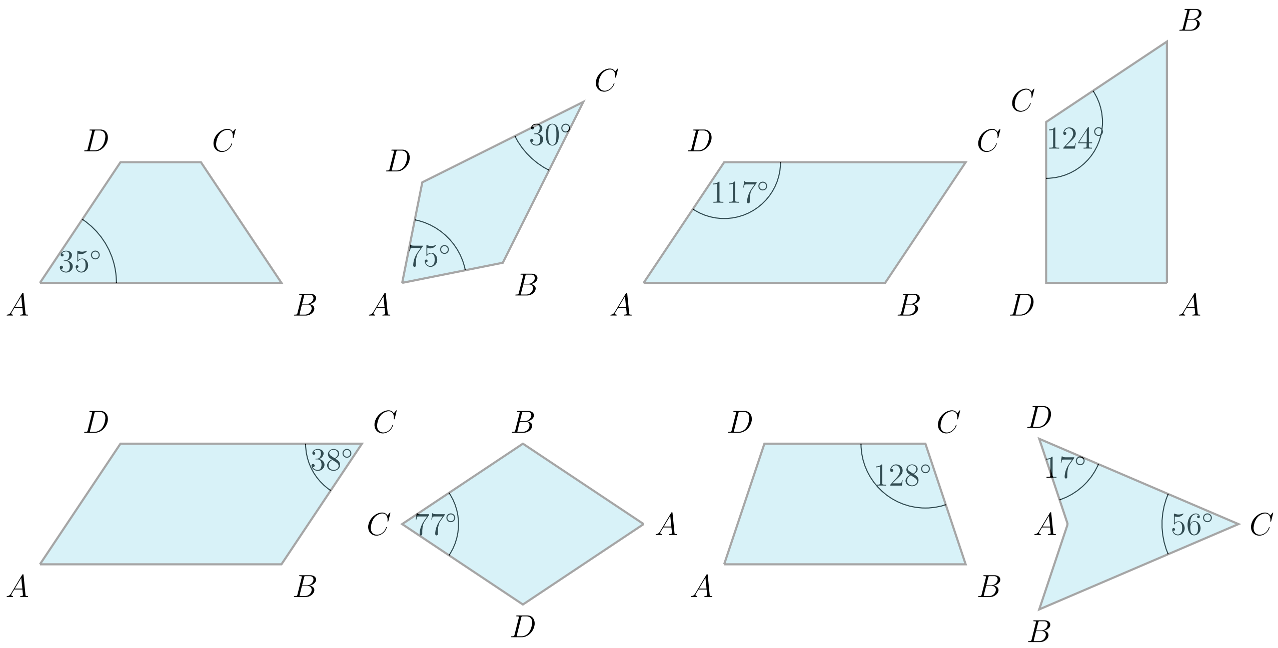
Aufgabe 24: *Stelle dazu eine Gleichung zur Berechnung des Flächeninhalts für alle Teilaufgaben zu Aufgabe 23 auf.*

Aufgabe 25: *Berechne die Flächeninhalte der dargestellten Vierecke. Beschreibe die Auffälligkeit.*



Aufgabe 26: *Stelle dazu eine Gleichung zur Berechnung des Flächeninhalts für alle Teilaufgaben zu Aufgabe 25 auf.*

Aufgabe 27: *Gib die Winkelmaße aller Winkel für die jeweiligen Vierecke an. Gib die Art des Vierecks an.* (Es handelt sich um Skizzen, die nicht maßstabsgetreu sind!)



Aufgabe 28: *Berechne die fehlenden Werte der jeweiligen Parallelogramme.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
a	8cm	7,2cm	6,5cm			
b		6cm		1,1dm	120mm	
h_a	3cm		2,8cm	54mm		7,2cm
h_b	6cm					4,5cm
U			2dm	34cm	72cm	
A		$14,4\text{cm}^2$			$0,84\text{dm}^2$	99cm^2

Aufgabe 29: *Markiere alle Felder, die eine wahre Aussage widerspiegeln.*

ist auch...	Ein Quadrat	Ein Rechteck	Ein Parallelogramm	Eine Raute	Ein symmetrisches Trapez	Ein Trapez	Ein symmetrischer Drachen
ein Quadrat	✓						
ein Rechteck		✓					
ein Parallelogramm			✓				
eine Raute				✓			
ein symmetrisches Trapez					✓		
ein Trapez						✓	
ein symmetrischer Drachen							✓

Aufgabe 30: *Ergänze die fehlenden Koordinaten, sodass aus den beschriebenen Punkten das angegebene Viereck entsteht.*

a) Ein Quadrat: $A(1|3) \;\wedge\; B(4|3) \;\wedge\; C(\square|\square) \;\wedge\; D(\square|\square)$

b) Ein Rechteck: $A(3|0) \;\wedge\; B(5|0) \;\wedge\; C(\square|\square) \;\wedge\; D(\square|7)$

c) Eine Raute: $A(5|1) \;\wedge\; B(8|3) \;\wedge\; C(\square|\square) \;\wedge\; D(\square|\square)$

d) Ein Quadrat: $A(4|3) \;\wedge\; B(6|5) \;\wedge\; C(\square|\square) \;\wedge\; D(\square|\square)$

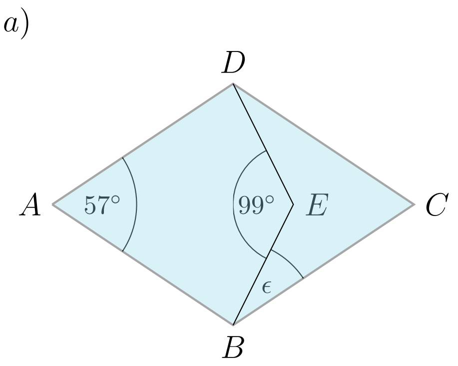
e) Ein Parallelogramm: $A(1|2) \;\wedge\; B(6|3) \;\wedge\; C(\square|\square) \;\wedge\; D(3|9)$

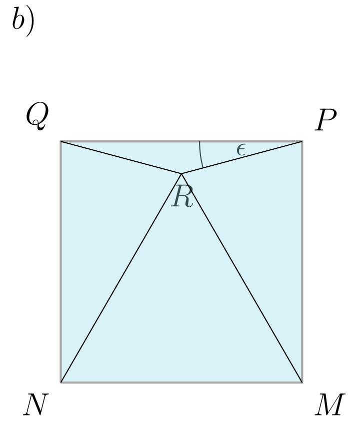
f) Ein symmetrisches Trapez: $A(2|0) \;\wedge\; B(9|0) \;\wedge\; C(\square|\square) \;\wedge\; D(4|5)$

g) Ein symmetrischer Drachen: $A(1|6) \;\wedge\; B(4|3) \;\wedge\; C(11|6) \;\wedge\; D(\square|\square)$

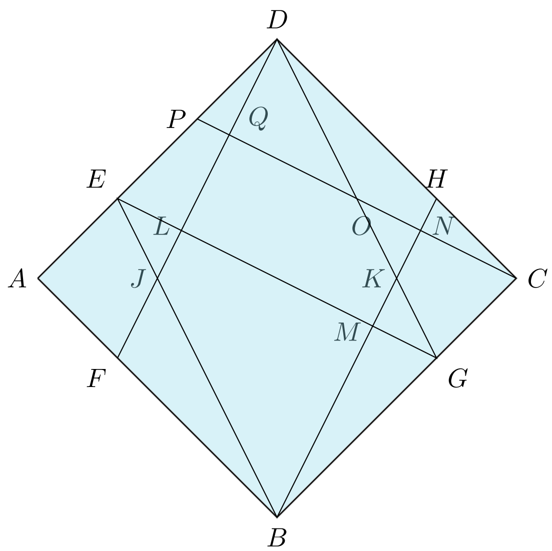
h) Ein symmetrischer Drachen: $A(2|5) \;\wedge\; B(\square|\square) \;\wedge\; C(7|10) \;\wedge\; D(2|7)$

Aufgabe 31: *Berechne den Winkel ϵ. Bei dem Dreieck ΔNMR handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck.*

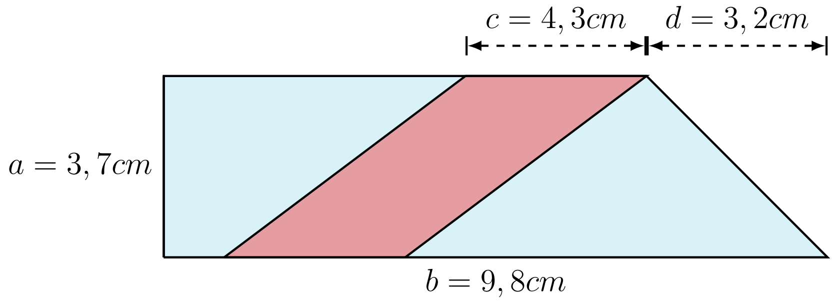




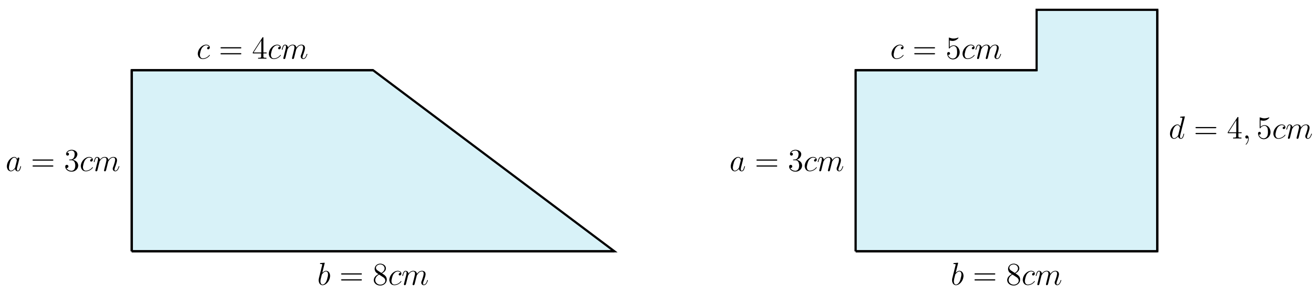
Aufgabe 32: *Gib alle speziellen Vierecke an und benenne diese nach ihrer Art.*



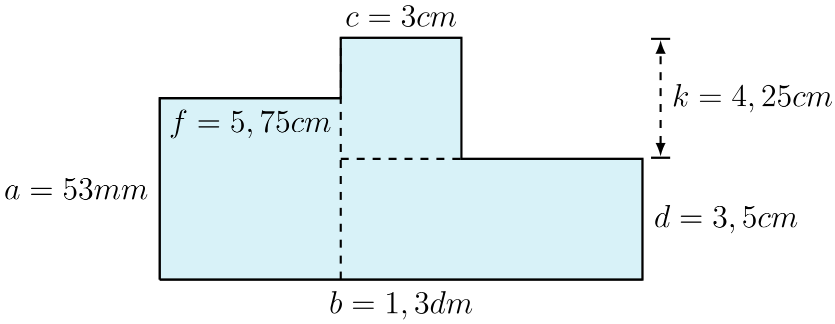
Aufgabe 33: *Berechne den Flächeninhalt der roten Fläche und bestimme wie viel Prozent der gesamten Fläche durch die rote Fläche abgedeckt ist.*



Aufgabe 34: *Berechne den Flächeninhalt der dargestellten Flächen.*



Aufgabe 35: *Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der dargestellten Fläche.*



Aufgabe 36: *Zeichne in ein Koordinatensystem die angegebenen Punkte in ein Koordinatensystem und verbinde diese. Benenne die dargestellte geometrische Figur und berechne den Flächeninhalt.*

$a)$ $A(1|2) \wedge B(6|2) \wedge C(5|4) \wedge D(0|4)$

$b)$ $A(3|1) \wedge B(5|3) \wedge C(3|5) \wedge D(1|3)$

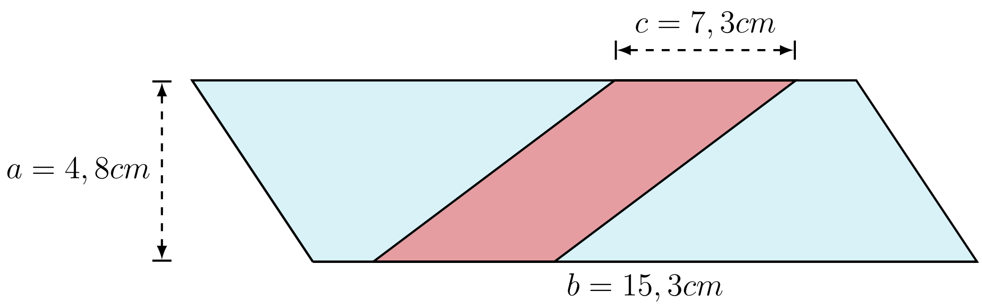
$c)$ $A(1|3) \wedge B(2|4) \wedge C(5|3) \wedge D(2|2)$

$d)$ $A(3|0) \wedge B(5|3) \wedge C(3|6) \wedge D(1|3)$

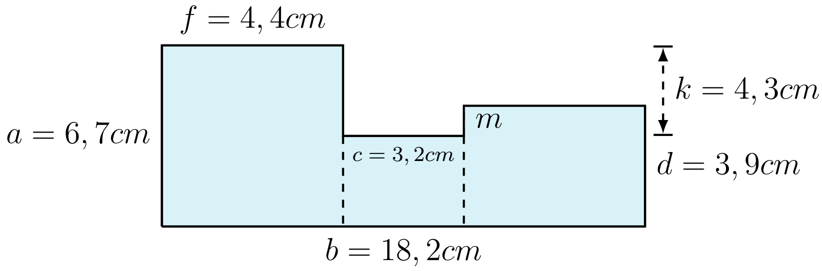
$e)$ $A(0|2) \wedge B(4|2) \wedge C(4|5,5) \wedge D(0|5,5)$

$f)$ $A(1|5) \wedge B(1|0) \wedge C(6|1) \wedge D(6|4)$

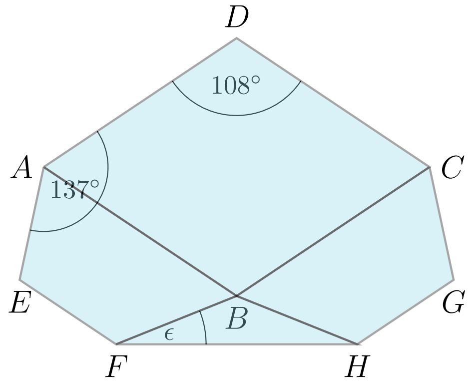
Aufgabe 37: *Berechne den Flächeninhalt der roten Fläche und bestimme wie viel Prozent der gesamten Fläche durch die rote Fläche abgedeckt ist.*



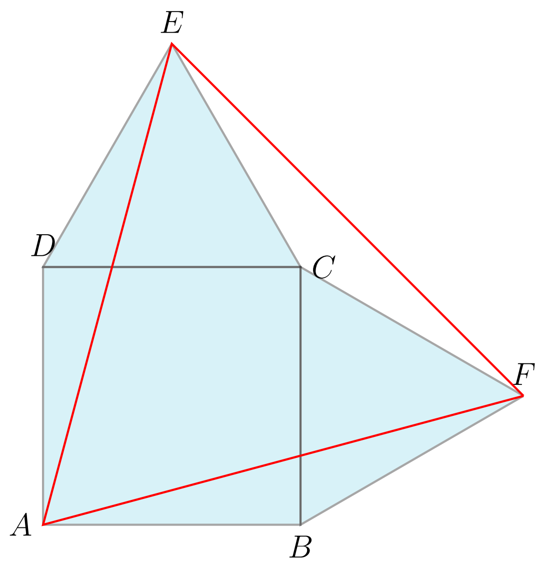
Aufgabe 38: *Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der dargestellten Fläche.*



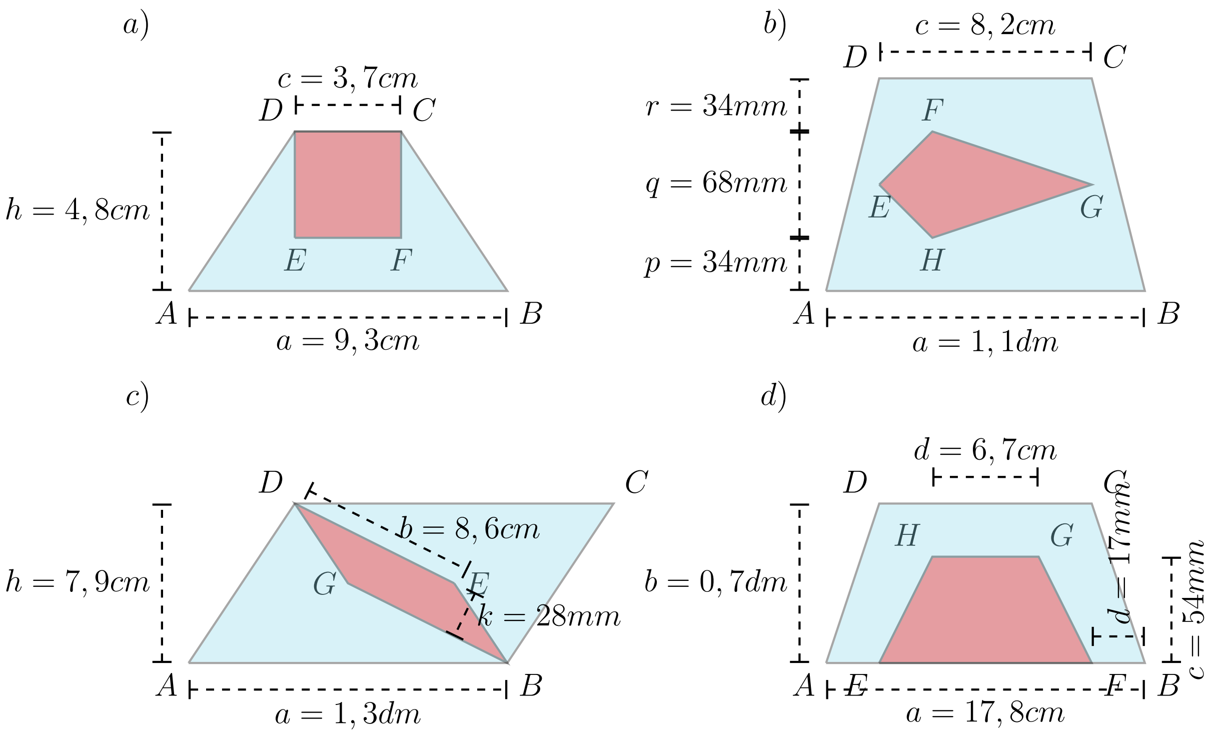
Aufgabe 39: *Berechne den Winkel* ϵ.



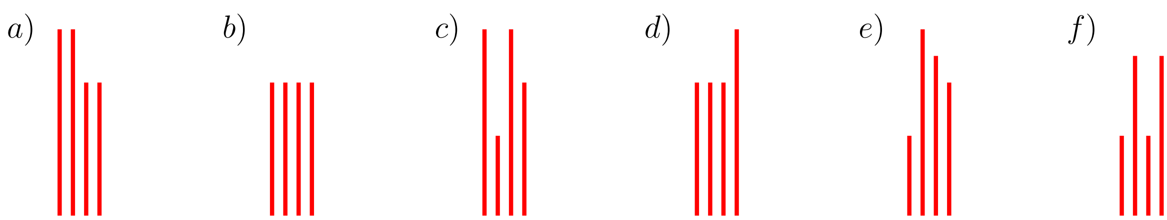
Aufgabe 40: *Das Viereck* $\square ABCD$ *ist ein Quadrat und die Dreiecke* ΔDCE *sowie* ΔBCF *sind gleichseitig. Zeige, dass das Dreieck* ΔAEF *gleichseitig sein muss.*



Aufgabe 41: *Im folgenden wurde aus dem blauen Viereck ein rotes Viereck herausgetrennt. Berechne den Flächeninhalt der jeweiligen Vierecke. Gib anschließend das prozentuale Anteil der roten Fläche an der blauen Fläche an.*



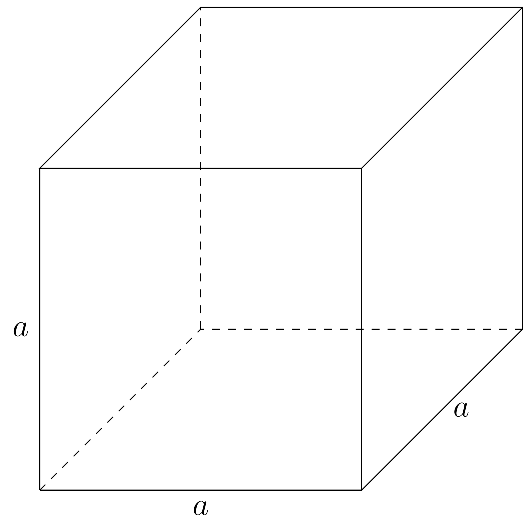
Aufgabe 42: *Gib an welche spezielle Vierecksarten aus den gegebenen Strecken erstellt werden können.*



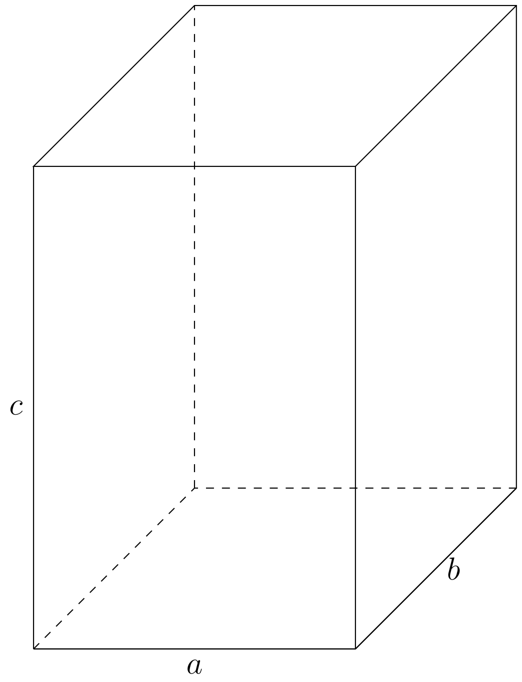
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.33) Lösungen zu Vierecken.

4.11 Mehrdimensionale Vielecke

Nachdem die wichtigsten Objekte in zwei *Dimensionen* besprochen wurden, wird eine weitere *Dimension* eingeführt. So kommt nach der x-Richtung und der y-Richtung die z-Richtung hinzu, welche auch wieder in einem 90°-*Winkel* zu den beiden anderen Richtungen steht. Da ein Blatt Papier nur eine zweidimensionale *Fläche* ist, muss die dritte *Dimension* durch eine Konvention hinzugefügt werden. Dazu wird die z-Richtung in einem 45° zur x- und y-Richtung eingezeichnet. Dabei wird die Länge in z-Richtung beim Einzeichnen halbiert. *Strecken*, die sich hinter *Flächen* befinden, werden gestrichelt. So würde ein *Quadrat*, welches in z-Richtung ebenso um die gleiche *Seitenlänge* a erweitert wird, *Würfel* genannt werden.



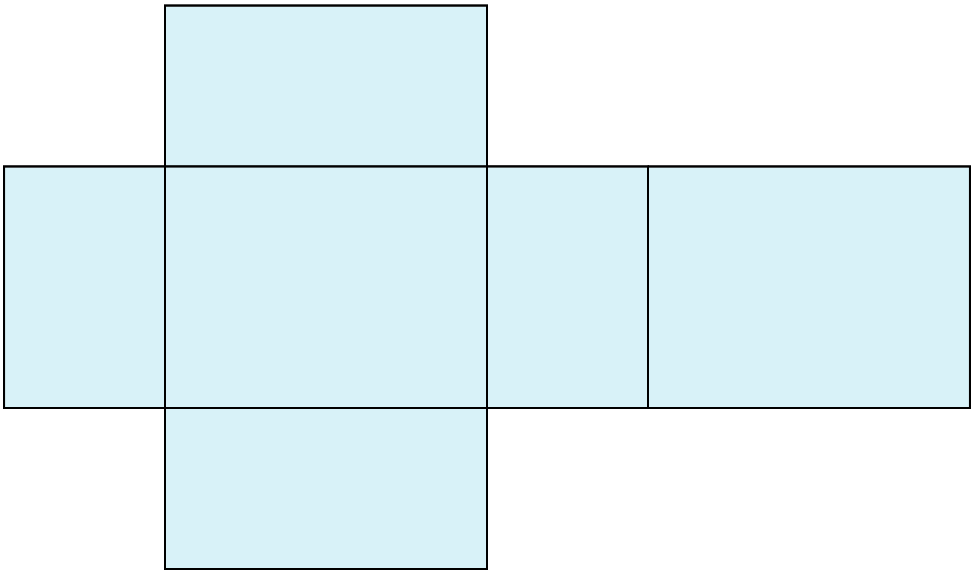
Die Abbildung zeigt genau so einen *Würfel*. Der *Würfel* zeichnet sich dadurch aus, dass alle *Winkel* 90° besitzen und alle *Seiten* gleich lang sind. Wie im zweidimensionalen das *Quadrat* ein Spezialfall des *Rechtecks* ist, so ist auch im dreidimensionalen ein *Würfel* ein Spezialfall eines sogenannten *Quaders*.



Wie die Abbildung zeigt, sind nur alle *Strecken*, die *parallel* zu einander sind gleich lang. Das sind die *Strecken*, die jeweils in eine *Dimension* zeigen. Wie auch schon bei der *Flächenberechnung* soll nun das *Volumen* des Körpers bestimmt werden. Das *Volumen* V ist ein *Größe*, die in $1m^3$ gemessen wird. Dabei gilt $1\,\mathrm{m}^3 = 1\,\mathrm{m}\cdot 1\,\mathrm{m}\cdot 1\,\mathrm{m}$ und somit wird das *Volumen* eines *Quaders* durch die *Multiplikation* der jeweiligen unterschiedlichen *Seiten* bestimmt. Folglich Länge mal Breite mal Höhe.

$$V = abc \tag{4.26}$$

Jeder *Quader* zeichnet sich auch dadurch aus, dass er acht *Ecken*, zwölf *Kanten* und sechs *Seiten* besitzt. Jeder dreidimensionale Körper kann aufgeklappt werden. Dazu werden alle *Flächen* so aneinander gezeichnet, sodass dadurch der Körper wieder erschaffen werden kann. So sind die Anzahl der *Ecken*, *Kanten* und *Flächen* ersichtlicher.

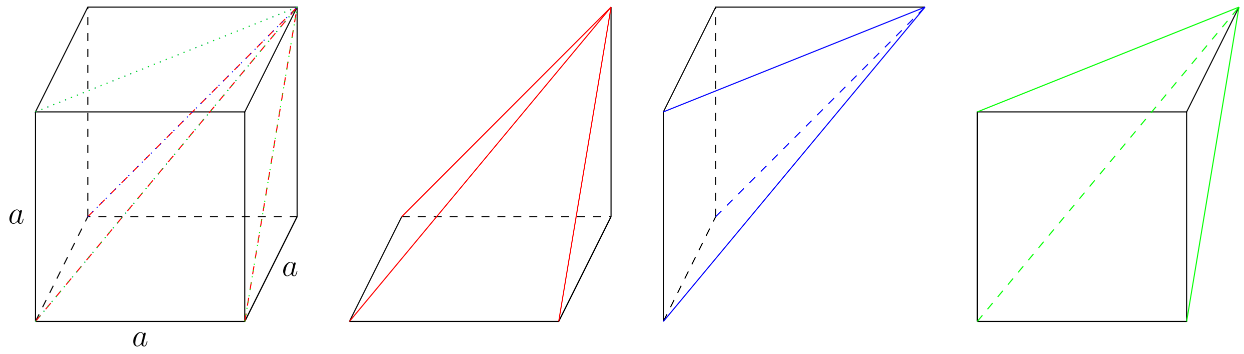


Die Abbildung zeigt so eine *Darstellung*, welche *Netz* genannt wird. Das *Netz* des *Quaders* zeigt, dass die *Oberfläche* O über die *Summe* der jeweiligen *Rechteckflächeninhalte* berechnet werden kann. Dabei ist die *Oberfläche*, die *Fläche*, die das *Volumen* umrandet und wird wie jede *Fläche* in $1\,\mathrm{m}^2$ gemessen.

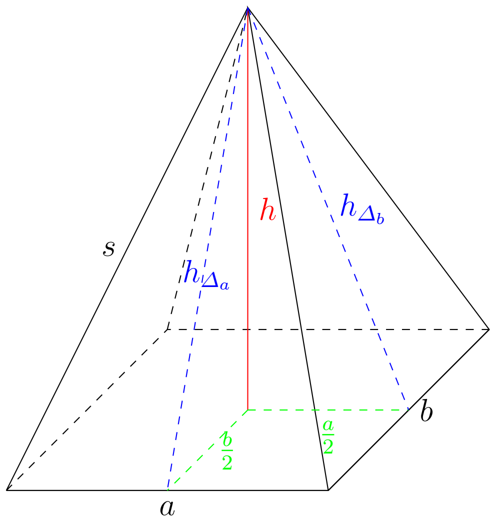
$$O = 2ab + 2ac + 2bc \tag{4.27}$$

Aus der *Flächenberechnung*, wo eine *Fläche* stets durch einen *Umfang* umrandet und nun aus der *Volumenberechnung*, wo das *Volumen* durch eine *Oberfläche* umrandet wird, kann generell gesagt werden, dass der sogenannte *Rand* immer eine *Dimension* kleiner ist als die Gesamtanzahl der *Dimensionen*.

Bisher wurde der *Quader* und der *Würfel* betrachtet, bei denen jeweils acht *Eckpunkt* vorhanden werden. Wenn nun ein Körper eine viereckiger *Grundfläche* haben soll, aber nur aus fünf *Eckpunkten* bestehen soll, dann wäre die *Volumenbestimmung* scheinbar schwieriger Natur. Allerdings kann jeder *Quader* der „unten" wie „oben" die *Grundfläche* aufweist in drei exakt gleiche Körper verschnitten werden, die nur aus fünf *Eckpunkten* bestehen und eine viereckiger *Grundfläche* besitzen.



Die Abbildung zeigt, wie so ein *Quader* zerlegt werden könnte. Ein solcher *Körper* heißt *Pyramide*. Dabei ist es nicht wichtig, wo sich der zulaufende *Punkt*, die Spitze, befindet. Im Folgenden soll sich dieser *Punkt* über dem *Schwerpunkt* der *Grundfläche* befinden.

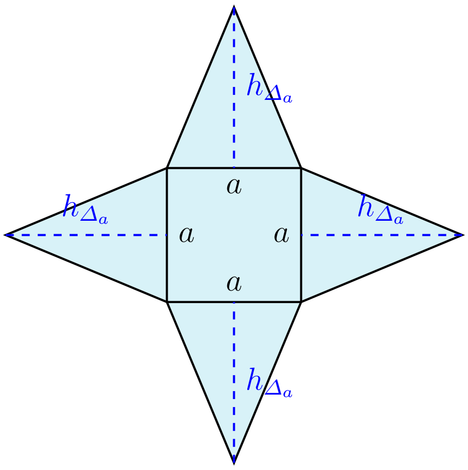


Das *Volumen V* der *Pyramide* mit *rechteckiger Grundseite* aus der Abbildung wäre gegeben durch:

$$V = \frac{1}{3}abh \quad , \tag{4.28}$$

da die *Pyramide* dreimal in einen *Quader* mit den Maßen a, b und h passen würde.

Die *Oberfläche* O wäre nach Betrachtung des *Netzes* der *Pyramide* auch nichts weiter als die *Flächeninhalt* der *Dreiecke* addiert mit der *Grundfläche*, welche in diesem Beispiel *quadratisch* gewählt sei ($b = a$).



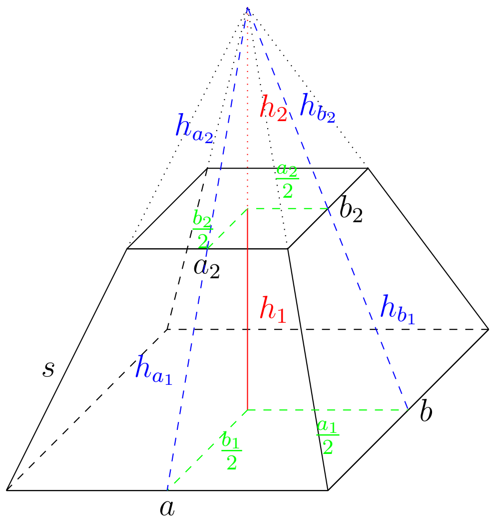
Wie das *Netz* schon vermuten lässt, wird die *Höhe* der *Dreiecke* h_{Δ_a} benötigt. Diese kann über den *Satz des Pythagoras* bestimmt werden (siehe dazu die Abbildung der *Pyramide*):

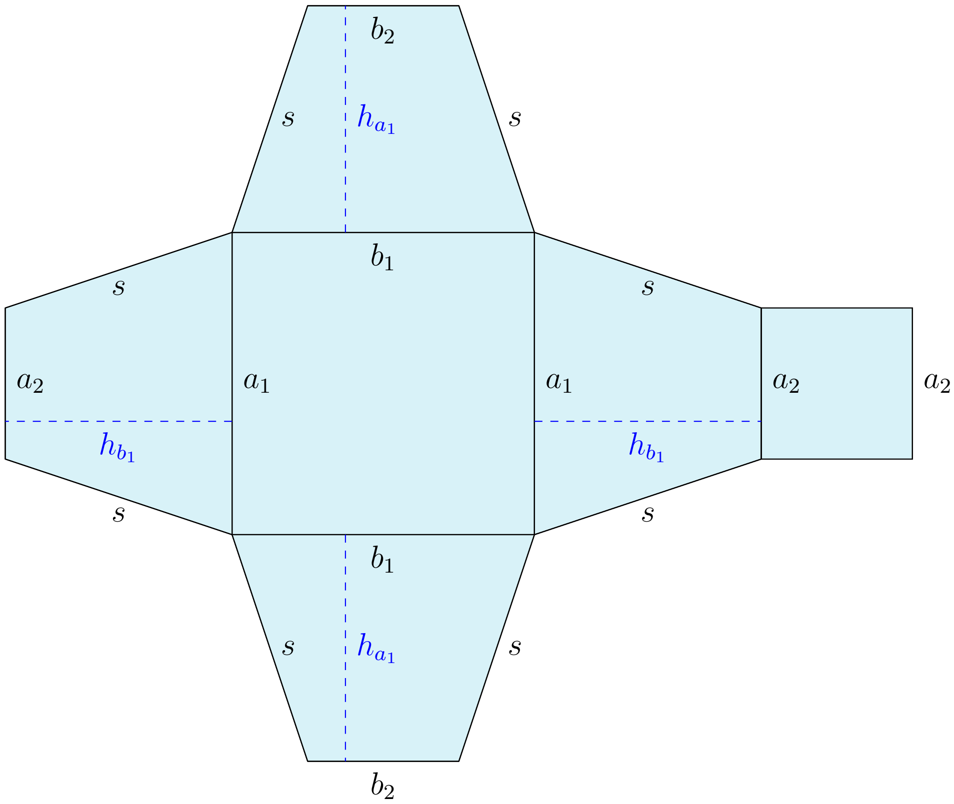
$$h_{\Delta_a} = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \quad . \tag{4.29}$$

Somit ergibt sich für die *Oberfläche* der *Pyramide* O aus:

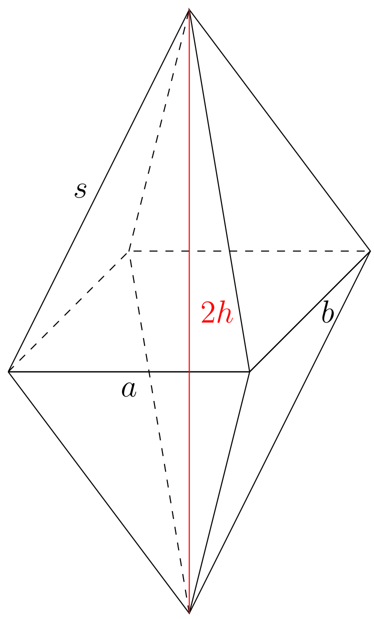
$$O = ah_{\Delta_a} + bh_{\Delta_b} + ab \quad . \tag{4.30}$$

Bei einem *Pyramidenstumpf* ergibt sich das *Netz* aus vier *Trapezen* und zwei *Rechtecken*:





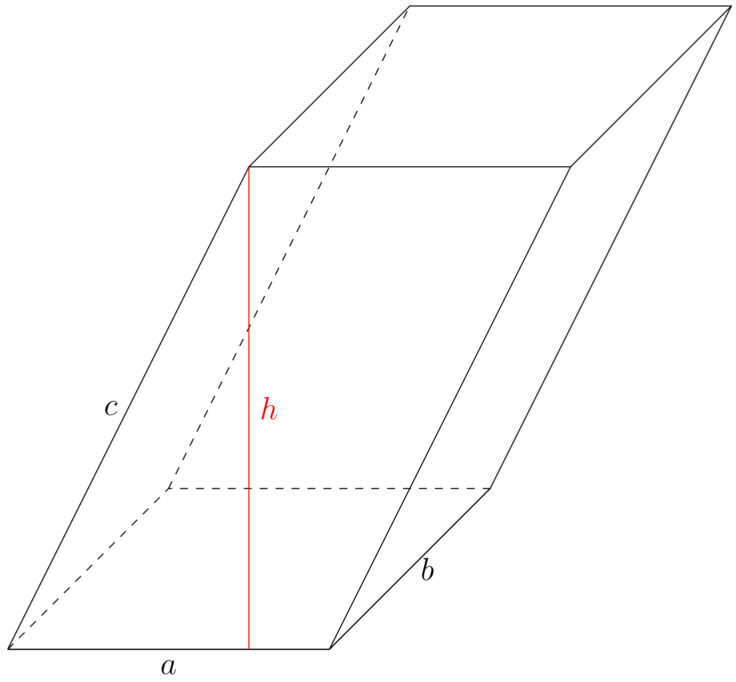
Viele Körper sind aus *Quadern* und *Pyramiden* zusammen gesetzt, wie zum Beispiel das *Oktaeder*:



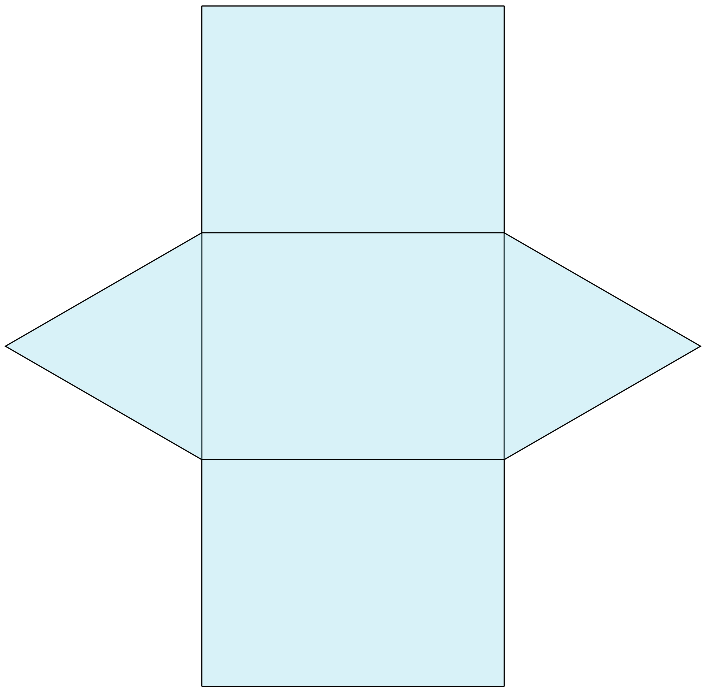
Wie aus der Abbildung des *Oktaeders* zu erkennen ist, ist dieser Körper aus zwei *Pyramiden* zusammengesetzt, sodass das *Volumen* V und die *Oberfläche* O (also zwei *Pyramiden* ohne die *Grundflächen*) gegeben ist als:

$$O = 2ah_{\Delta_a} + 2bh_{\Delta_b}$$
$$V = \frac{2}{3}abh \quad . \tag{4.31}$$

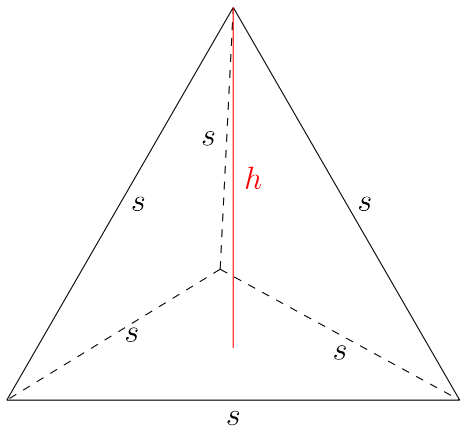
Wie schon bei der *Pyramide*, müssen die Körper nicht nur *rechte Winkel* aufweisen, wie zum Beispiel dieses *schiefe Prisma* mit *rechteckiger Grundfläche*:



Da die *Winkel* im Verhältnis zu einander kleiner und größer geworden sind, wird das *Volumen* durch die *Höhe* h limitiert. Generell gilt für jeden Körper zur Berechnung des *Volumens* immer „*Grundseite* mal *Höhe*“. Somit ist es völlig ausreichend einen Körper zu unterteilen in Teilkörper, die berechnet werden können.
Der Berechnung der *Oberfläche* kann zu jedem *Prisma* durch das Zeichnen des *Netzes* besser dargestellt werden:



Zu guter Letzt soll noch das *Tetraeder* vorgestellt werden:



Das *Tetraeder* zeichnet sich dadurch aus, dass es auf vier *gleichseitigen Dreiecken* besteht und der einzige Körper mit nur vier *Flächen* ist. Die *Oberfläche* O und das Volumen V ist gegeben durch das Prinzip, welches anhand der *Pyramide* erläutert wurde, als:

$$\begin{aligned} O &= s^2\sqrt{3} \\ V &= \frac{s^3}{12}\sqrt{2} \quad . \end{aligned} \tag{4.32}$$

Bei einem *Tetraeder* sind die *Winkel* der zwischen den *Kanten* gleich groß und haben den Wert von $109,5°$.
Da nun viele eckige Körper eingeführt wurden soll im folgenden Abschnitt der *Kreis* und danach die *Ellipse* vorgestellt werden, sodass auch *Rundungen* berechnet werden können.

Oftmals werden in Sachaufgaben und in Abschlüssen physikalische Kenntnisse verlangt. Zum Beispiel wird bei der Stereometrie oftmals nach der Masse gefragt, welche sich durch das Produkt von Volumen V und Dichte ρ ergibt. Dabei wird die Dichte oftmals in $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ oder in $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ angeben, sodass *Einheitenrechnungen* auch von Bedeutung.

$$m = V\rho \tag{4.33}$$

Informationen zu der Anzahl der *Ecken*, *Kanten* und *Flächen* eines Körpers sind im Anhang zu finden: 18.7 .

4.11.1 Übungsaufgaben zu mehrdimensionalen Vielecken

Aufgabe 1: *Berechne das Volumen V und die Oberfläche O der Quader.*

$a)$ Länge: $a = 4\,\text{cm}$, Breite: $b = 5\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 4\,\text{cm}$

$b)$ Länge: $a = 3\,\text{cm}$, Breite: $b = 4\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 6\,\text{cm}$

$c)$ Länge: $a = 3\,\text{cm}$, Breite: $b = 1\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 9\,\text{cm}$

$d)$ Länge: $a = 7\,\text{cm}$, Breite: $b = 7\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 1\,\text{cm}$

$e)$ Länge: $a = 8\,\text{cm}$, Breite: $b = 3\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 2\,\text{cm}$

$f)$ Länge: $a = 4\,\text{cm}$, Breite: $b = 9\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 4\,\text{cm}$

$g)$ Länge: $a = 2\,\text{cm}$, Breite: $b = 11\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 8\,\text{cm}$

$h)$ Länge: $a = 9\,\text{cm}$, Breite: $b = 6\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 7\,\text{cm}$

$i)$ Länge: $a = 7\,\text{cm}$, Breite: $b = 4\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 2\,\text{cm}$

$j)$ Länge: $a = 2\,\text{km}$, Breite: $b = 5\,\text{km}$ und Höhe: $c = 5\,\text{km}$

$k)$ Länge: $a = 1\,\text{cm}$, Breite: $b = 9\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 11\,\text{cm}$

$l)$ Länge: $a = 12\,\text{m}$, Breite: $b = 2\,\text{m}$ und Höhe: $c = 3\,\text{m}$

$m)$ Länge: $a = \frac{14}{7}\,\text{m}$, Breite: $b = \frac{144}{12}\,\text{m}$ und Höhe: $c = \frac{8}{4}\,\text{m}$

$n)$ Länge: $a = 12\,\text{cm}$, Breite: $b = 12\,\text{cm}$ und Höhe: $c = 0\,\text{cm}$

Aufgabe 2: *Berechne das Volumen V und die Oberfläche O der Quader.*

$a)$ $a = \frac{1}{2}\,\text{cm}, b = \frac{2}{5}\,\text{cm}$ und $c = \frac{1}{3}\,\text{cm}$

$b)$ $a = \frac{3}{4}\,\text{cm}, b = \frac{1}{4}\,\text{cm}$ und $c = \frac{3}{5}\,\text{cm}$

$c)$ $a = \frac{4}{9}\,\text{cm}, b = \frac{5}{1}\,\text{cm}$ und $c = \frac{2}{7}\,\text{cm}$

$d)$ $a = \frac{10}{3}\,\text{cm}, b = \frac{1}{10}\,\text{cm}$ und $c = \frac{5}{8}\,\text{cm}$

$e)$ $a = \frac{7}{9}\,\text{cm}, b = 3\,\text{cm}$ und $c = \frac{15}{4}\,\text{cm}$

$f)$ $a = \frac{12}{7}\,\text{cm}, b = \frac{1}{100}\,\text{cm}$ und $c = \frac{12}{11}\,\text{cm}$

$g)$ $a = \frac{4}{5}\,\text{dm}, b = \frac{1}{2}\,\text{cm}$ und $c = \frac{3}{4}\,\text{cm}$

$h)$ $a = \frac{5}{2}\,\text{cm}, b = \frac{35}{3}\,\text{mm}$ und $c = \frac{8}{7}\,\text{cm}$

$i)$ $a = \frac{56}{5}\,\text{mm}, b = \frac{37}{4}\,\text{cm}$ und $c = \frac{9}{8}\,\text{dm}$

$j)$ $a = \frac{1}{2}\,\text{m}, b = \frac{4}{3}\,\text{dm}$ und $c = \frac{45}{12}\,\text{cm}$

Aufgabe 3: *Wenn die Seiten a und b die Grundfläche $G = a \cdot b$ bilden und die Höhe $h = c$ eines Quaders gegeben ist, wie groß ist dann das jeweilige Volumen V der Quader?*

a) Grundfläche: $G = 12\,\text{cm}^2$ und Höhe: $h = 3\,\text{cm}$

b) Grundfläche: $G = 6\,\text{cm}^2$ und Höhe: $h = 5\,\text{cm}$

c) Grundfläche: $G = 11\,\text{cm}^2$ und Höhe: $h = 9\,\text{cm}$

d) Grundfläche: $G = 11\,\text{cm}^2$ und Höhe: $h = 3\,\text{cm}$

e) Grundfläche: $G = 7\,\text{km}^2$ und Höhe: $h = 7\,\text{km}$

f) Grundfläche: $G = 289\,\text{dm}^2$ und Höhe: $h = 1\,\text{dm}$

g) Grundfläche: $G = \frac{16}{4}\,\text{m}^2$ und Höhe: $h = \frac{35}{5}\,\text{cm}$

Aufgabe 4: *Wenn ein Kubikdezimeter dm^3 einem Liter l entspricht, wie viele Liter Wasser passen in die Quader hinein?*

a) Länge: $a = 4\,\text{dm},$ Breite: $b = 4\,\text{dm}$ und Höhe: $c = 4\,\text{dm}$

b) Länge: $a = 5\,\text{dm},$ Breite: $b = 2\,\text{dm}$ und Höhe: $c = 3\,\text{dm}$

c) Grundfläche: $G = 8\,\text{dm}^2$ und Höhe: $h = 9\,\text{dm}$

d) Länge: $a = 10\,\text{cm},$ Breite: $b = 1m$ und Höhe: $c = 4\,\text{dm}$

e) Grundfläche: $G = 11\,\text{dm}^2$ und Höhe: $h = 3\,\text{dm}$

f) Grundfläche: $G = 17\,\text{dm}^2$ und Höhe: $h = 12\,\text{dm}$

Aufgabe 5: *Ein Würfel hat ein Volumen V von* $60\,\text{dm}^3$*, wie viel Liter könnte eine Pyramide mit den gleichen Maßen halten?*

Aufgabe 6: *Ein Schwimmbecken ist* $250\,\text{dm}$ *lang und* $100\,\text{dm}$ *breit. Es hat eine Tiefe von* $20\,\text{dm}$. *Wie viel Liter Wasser passen in dieses Schwimmbecken?*

Aufgabe 7: *Ein Geschenk soll Geschenkpapier eingepackt werden. Dabei ist das Geschenk* $12\,\text{cm}$ *lang,* $6\,\text{cm}$ *breit und* $4\,\text{cm}$ *hoch. Wie viel Quadratzentimeter Geschenkpapier werden benötigt?*

Aufgabe 8: *In einem Karton mit der Länge* $10\,\mathrm{cm}$*, der Breite* $10\,\mathrm{cm}$ *und der Höhe* $10\,\mathrm{cm}$ *befinden sich Zuckerwürfel mit einer Länge von* $1\,\mathrm{cm}$*, einer Breite von* $1\,\mathrm{cm}$ *und einer Höhe von* $1\,\mathrm{cm}$*. Wie viele Zuckerwürfel befinden sich in dem Karton, wenn dieser vollständig mit Zuckerwürfel gefüllt ist.*

Aufgabe 9: *Eine Kiste hat ein Volumen von* $81\,\mathrm{dm}^3$ *und besitzt eine Grundfläche von* $9\,\mathrm{dm}^2$*. Wie hoch ist die Kiste?*

Aufgabe 10: *Ein Gefäß hat eine dreieckige Grundfläche, die* $1\,\mathrm{dm}^2$ *groß ist. Es hat eine Höhe von* $2\,\mathrm{dm}$*. Wie viel Liter Milch kann in dieses Gefäß gefüllt werden?*

Aufgabe 11: *Bestimme die Oberfläche* O *und das Volumen* V *für die gegebenen Werte der jeweiligen Würfel.*

a) $a = 4\,\mathrm{cm}$	*b)* $a = 7\,\mathrm{dm}$	*c)* $a = 11\,\mathrm{m}$	*d)* $a = 12\,\mathrm{km}$
e) $a = \frac{3}{5}\,\mathrm{cm}$	*f)* $a = \frac{6}{7}\,\mathrm{dm}$	*g)* $a = \frac{11}{9}\,\mathrm{m}$	*h)* $a = \frac{17}{3}\,\mathrm{km}$
i) $a = 3,6\,\mathrm{cm}$	*j)* $a = 2,8\,\mathrm{dm}$	*k)* $a = 8,2\,\mathrm{m}$	*l)* $a = 14,24\,\mathrm{km}$
m) $a = \sqrt{7}\,\mathrm{cm}$	*n)* $a = \sqrt{15}\,\mathrm{dm}$	*o)* $a = \sqrt{467}m$	*p)* $a = \sqrt{214,346}\,\mathrm{km}$
q) $a = \ln 5\,\mathrm{cm}$	*r)* $a = \ln 2\,\mathrm{dm}$	*s)* $a = e\,\mathrm{m}$	*t)* $a = \pi\,\mathrm{km}$

Aufgabe 12: *Bestimme das Volumen* V *für die gegebenen Werte der jeweiligen Prismen.*

a)	Dreiecksprisma: $G = 4\,\mathrm{cm}^2$	und $h = 3\,\mathrm{cm}$
b)	Vierecksprisma: $G = 6\,\mathrm{cm}^2$	und $h = 8\,\mathrm{cm}$
c)	Sechsecksprisma: $G = 7,4\,\mathrm{cm}^2$	und $h = 3,2\,\mathrm{cm}$
d)	Zehnecksprisma: $G = \frac{1}{3}\,\mathrm{cm}^2$	und $h = \frac{5}{6}\,\mathrm{cm}$
e)	Dreiecksprisma: $G = \frac{13}{4}\,\mathrm{cm}^2$	und $h = \frac{9}{2}\,\mathrm{cm}$
f)	Fünfecksprisma: $G = \frac{6}{7}\,\mathrm{cm}^2$	und $h = \frac{7}{9}\,\mathrm{cm}$
g)	Neunecksprisma: $G = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$	und $h = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$
h)	Vierecksprisma: $G = e\,\mathrm{cm}^2$	und $h = \pi\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 13: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche.*

a) $a = 4\,\text{cm}\ ,\ b = 4\,\text{cm}$ und $h = 6\,\text{cm}$

b) $a = 3\,\text{cm}\ ,\ b = 4\,\text{cm}$ und $h = \frac{9}{2}\,\text{cm}$

c) $a = 3\,\text{cm}\ ,\ b = \frac{7}{3}\,\text{cm}$ und $h_{\Delta_a} = 5\,\text{cm}$

d) $a = \frac{9}{7}\,\text{cm}\ ,\ b = \frac{5}{4}\,\text{cm}$ und $h_{\Delta_b} = 8\,\text{cm}$

e) $a = \frac{5}{9}\,\text{cm}\ ,\ b = \frac{3}{5}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{3}\,\text{cm}$

f) $a = \sqrt{2}\,\text{cm}\ ,\ b = \sqrt{3}\,\text{cm}$ und $h = \sqrt{5}\,\text{cm}$

g) $a = \ln 2\,\text{cm}\ ,\ b = \ln 3\,\text{cm}$ und $h = \ln 5\,\text{cm}$

h) $a = \pi\,\text{cm}\ ,\ b = e\,\text{cm}$ und $h_{\Delta_b} = \sqrt{17}\,\text{cm}$

Aufgabe 14: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Oktaeder.*

a) $a = 7\,\text{cm}\ ,\ b = 7\,\text{cm}$ und $h = 3\,\text{cm}$

b) $a = 9\,\text{cm}\ ,\ b = 2\,\text{cm}$ und $h = \frac{9}{5}\,\text{cm}$

c) $a = 8\,\text{cm}\ ,\ b = \frac{11}{4}\,\text{cm}$ und $h_{\Delta_a} = 7\,\text{cm}$

d) $a = \frac{5}{4}\,\text{cm}\ ,\ b = \frac{7}{3}\,\text{cm}$ und $h_{\Delta_b} = 6\,\text{cm}$

e) $a = \frac{11}{7}\,\text{cm}\ ,\ b = \frac{5}{9}\,\text{cm}$ und $h = \frac{17}{3}\,\text{cm}$

f) $a = \sqrt{7}\,\text{cm}\ ,\ b = \sqrt{11}\,\text{cm}$ und $h = \sqrt{5}\,\text{cm}$

g) $a = \ln 10\,\text{cm}\ ,\ b = \ln 5\,\text{cm}$ und $h = \ln 7\,\text{cm}$

h) $a = \pi\,\text{cm}\ ,\ b = e\,\text{cm}$ und $h_{\Delta_b} = \sqrt{5}\,\text{cm}$

Aufgabe 15: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Tetraeder.*

$a)$	$s = 4\,\mathrm{cm}$	$b)$	$s = 9\,\mathrm{cm}$	$c)$	$s = \frac{3}{4}\,\mathrm{cm}$
$d)$	$s = \frac{7}{5}\,\mathrm{cm}$	$e)$	$s = \frac{13}{3}\,\mathrm{cm}$	$f)$	$s = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$
$g)$	$s = \ln 3\,\mathrm{cm}$	$h)$	$s = \pi\,\mathrm{cm}$	$i)$	$s = e\,\mathrm{dm}$

Aufgabe 16: *Bestimme Oberfläche O und Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Körper.*

$a)$Würfel: $a = 3\,\mathrm{cm}$

$b)$Quader: $a = 2\,\mathrm{cm}, b = 9\,\mathrm{cm}$ und $c = 4\,\mathrm{cm}$

$c)$Pyramide: $b = a = 4\,\mathrm{cm}$ und $h = 6\,\mathrm{cm}$

$d)$Pyramide: $a = 3\,\mathrm{cm}, b = 4\,\mathrm{cm}$ und $h = 5\,\mathrm{cm}$

$e)$Quader ohne eine gleichmäßige Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$:

$a = 6\,\mathrm{cm}, b = 5\,\mathrm{cm}$ und $c = h = 4\,\mathrm{cm}$

$f)$Quader mit einer gleichmäßigen Pyramide mit der Grundfläche $a \cdot b$ oben drauf:

$a = 2,5\,\mathrm{cm}, b = 5\,\mathrm{cm}$ und $c = h = 2,5\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 17: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen gleichmäßigen Prismen.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie")

a) gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 3\,\text{cm}$

b) gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 3\,\text{cm}$

c) gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 3\,\text{cm}$

d) gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 3\,\text{cm}$

e) gleichmäßiges Siebenecksprisma: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 3\,\text{cm}$

f) gleichmäßiges Achtecksprisma: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 3\,\text{cm}$

g) gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = \frac{4}{3}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{4}\,\text{cm}$

h) gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = \frac{4}{3}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{4}\,\text{cm}$

i) gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = \frac{4}{3}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{4}\,\text{cm}$

j) gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = \frac{4}{3}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{4}\,\text{cm}$

k) gleichmäßiges Siebenecksprisma: $a = \frac{4}{3}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{4}\,\text{cm}$

l) gleichmäßiges Achtecksprisma: $a = \frac{4}{3}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{4}\,\text{cm}$

Aufgabe 18: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen schiefen Prismen.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie")

a) schiefes gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = 2\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$ und $\alpha = 60°$

b) schiefes gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = 2\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$ und $\alpha = 60°$

c) schiefes gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = 2\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$ und $\alpha = 60°$

d) schiefes gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = 2\,\text{cm}$, $c = 4\,\text{cm}$ und $\alpha = 60°$

e) schiefes gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = \frac{6}{5}\,\text{cm}$, $c = \frac{7}{3}\,\text{cm}$ und $\alpha = 44°$

f) schiefes gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = \frac{6}{5}\,\text{cm}$, $c = \frac{7}{3}\,\text{cm}$ und $\alpha = 44°$

g) schiefes gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = \frac{6}{5}\,\text{cm}$, $c = \frac{7}{3}\,\text{cm}$ und $\alpha = 44°$

h) schiefes gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = \frac{6}{5}\,\text{cm}$, $c = \frac{7}{3}\,\text{cm}$ und $\alpha = 44°$

Aufgabe 19: *Bestimme die Oberfläche O und das Volumen V für die gegebenen Werte der jeweiligen Pyramiden mit den angegebenen Grundflächen.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

a) Pyramide mit gleichmäßiger Dreieckgrundfläche: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 7\,\text{cm}$

b) Pyramide mit gleichmäßiger Fünfeckgrundfläche: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 7\,\text{cm}$

c) Pyramide mit gleichmäßiger Sechseckgrundfläche: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 7\,\text{cm}$

d) Pyramide mit gleichmäßiger Dreieckgrundfläche: $a = \frac{5}{4}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{5}\,\text{cm}$

e) Pyramide mit gleichmäßiger Fünfeckgrundfläche: $a = \frac{5}{4}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{5}\,\text{cm}$

f) Pyramide mit gleichmäßiger Sechseckgrundfläche: $a = \frac{5}{4}\,\text{cm}$ und $h = \frac{11}{5}\,\text{cm}$

Aufgabe 20: *Berechne für die angegebenen Werte der Quader die Höhe h.*

a) $V = \frac{7}{5}\,\text{cm}^3$ und $G = \frac{11}{6}\,\text{cm}^2$

b) $V = 8\,\text{cm}^3$ und $G = \frac{10}{3}\,\text{cm}^2$

c) $V = \frac{1}{2}\,\text{cm}^3$ und $G = \frac{1}{10}\,\text{cm}^2$

d) $V = \frac{8}{7}\,\text{cm}^3$ und $G = 2\,\text{cm}^2$

e) $V = \frac{11}{12}\,\text{cm}^3$ und $G = \sqrt{83}\,\text{cm}^2$

f) $V = \pi\,\text{cm}^3$ und $G = e\,\text{cm}^2$

Aufgabe 21: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Quader.*

	1	2	3	4	5	6
a	6	3		3,3		5,5
b	2		9		5,7	
c	8	7	4	5,6	3,2	
V		58		68,7	156	128
O			164			236

Aufgabe 22: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Tetraeder.*

	1	2	3	4	5	6
s	7			3,45		
V		116			$\frac{83}{7}$	
O			23			$\frac{174}{11}$

Aufgabe 23: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene gleichmäßige Prismen.*

	1	2	3	4	5	6
G	13	27		3,95		
h	7		5		$\frac{11}{2}$	
V		86			$\frac{67}{6}$	$\frac{55}{7}$
O			59	24,5		$\frac{599}{17}$
Ecken der Grundfläche	4	4	4	3	6	4

Aufgabe 24: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche.*

	1	2	3	4	5	6
a	8	5	6,5		2,3	4,8
b	8	4			7,4	6,6
h	11		8,8	6,9		
h_{Δ_a}				7,75		
h_{Δ_b}						
s		9	9,7	8,2	9,1	
V						54,3
O						

Aufgabe 25: *Ein Quader hat eine Oberfläche O von* $192\,\text{cm}^2$ *mit den Seiten* $a = 4\,\text{cm}$ *und* $b = 8\,\text{cm}$. *Wie lang ist die fehlende Seite?* (Benötigt „Mehrdimensionale Vielecke“)

Aufgabe 26: *Berechne die fehlenden Größen für ein Quaders.* (Benötigt „Mehrdimensionale Vielecke“)

	1	2	3	4	5	6
Seite a	2		5	2	3	
Seite b	3	4		11	8	$\frac{4}{5}$
Seite c	4	7	6			$\frac{3}{4}$
Volumen V		252	210	77	45	2
Oberfläche O						

Aufgabe 27: *Sortiere die Begriffe nach der Gleichung zur Berechnung des Volumens in die Spalten ein: Quader, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel, schiefes Prisma, Oktaeder, Tetraeder, Würfel.*

$V = Gh$	$V = \frac{1}{3}Gh$	$V = \frac{4}{3}Gh$

Aufgabe 28: *Zeichne folgende Würfel.* (keine Lösung!)

$a)$ $a = 3\,\mathrm{cm}$ | $b)$ $a = 5\,\mathrm{cm}$ | $c)$ $a = 4\,\mathrm{cm}$ | $d)$ $a = 8\,\mathrm{cm}$

$e)$ $a = 4,5\,\mathrm{cm}$ | $f)$ $a = 5,5\,\mathrm{cm}$ | $g)$ $a = 5,2\,\mathrm{cm}$ | $h)$ $a = 7,3\,\mathrm{cm}$

$i)$ $a = 6,6\,\mathrm{cm}$ | $j)$ $a = 2,8\,\mathrm{cm}$ | $k)$ $a = 4,4\,\mathrm{cm}$ | $l)$ $a = 6,8\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 29: *Zeichne folgende Quader.* (keine Lösung!)

$a)$ $a = 3\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 4\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 6\,\mathrm{cm}$

$b)$ $a = 4\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 4\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 6\,\mathrm{cm}$

$c)$ $a = 6\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 2\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 4\,\mathrm{cm}$

$d)$ $a = 5\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 3\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 7\,\mathrm{cm}$

$e)$ $a = 5\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 3\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 6\,\mathrm{cm}$

$f)$ $a = 8\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 5\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 3\,\mathrm{cm}$

$g)$ $a = 1,5\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 3,3\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 4,9\,\mathrm{cm}$

$h)$ $a = 2,3\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 6,1\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 1\,\mathrm{cm}$

$i)$ $a = 6,5\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 3,2\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 7,6\,\mathrm{cm}$

$j)$ $a = 5,4\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 0,8\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 7,8\,\mathrm{cm}$

$k)$ $a = 2,2\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 2,6\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 4,4\,\mathrm{cm}$

$l)$ $a = 8,2\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 5,6\,\mathrm{cm}\ ;\ c = 7,4\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 30: *Zeichne folgende Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche.* (keine Lösung!)

$a)$ $a = 4\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 4\,\mathrm{cm}\ ;\ h = 5\,\mathrm{cm}$

$b)$ $a = 3\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 5\,\mathrm{cm}\ ;\ h = 6\,\mathrm{cm}$

$c)$ $a = 6\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 4\,\mathrm{cm}\ ;\ h = 6\,\mathrm{cm}$

$d)$ $a = 5\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 7\,\mathrm{cm}\ ;\ h = 3\,\mathrm{cm}$

$e)$ $a = 2\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 5\,\mathrm{cm}\ ;\ h = 8\,\mathrm{cm}$

$f)$ $a = 3\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 4\,\mathrm{cm}\ ;\ h = 2\,\mathrm{cm}$

$g)$ $a = 6,4\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 5,5\,\mathrm{cm}\ ;\ h = 4,1\,\mathrm{cm}$

$h)$ $a = 4,8\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 3,8\,\mathrm{cm}\ ;\ h = 2\,\mathrm{cm}$

$i)$ $a = 4,7\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 7,5\,\mathrm{cm}\ ;\ h = 8,4\,\mathrm{cm}$

$j)$ $a = 5,2\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 3,3\,\mathrm{cm}\ ;\ s = 6,3\,\mathrm{cm}$

$k)$ $a = 7,1\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 1,4\,\mathrm{cm}\ ;\ s = 8,4\,\mathrm{cm}$

$l)$ $a = 2,3\,\mathrm{cm}\ ;\ b = 3,1\,\mathrm{cm}\ ;\ s = 7,2\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 31: *Zeichne folgende Pyramidestümpfe mit rechteckiger Grundfläche.* (keine Lösung!)

a) $a_1 = 4\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 4\,\text{cm}\ ;\ h_1 = 3\,\text{cm}\ ;\ h_2 = 4\,\text{cm}$

b) $a_1 = 5\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 5\,\text{cm}\ ;\ h_1 = 3\,\text{cm}\ ;\ h = 8\,\text{cm}$

c) $a_1 = 3\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 5\,\text{cm}\ ;\ h_1 = 4\,\text{cm}\ ;\ h_2 = 4\,\text{cm}$

d) $a_1 = 6\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 5\,\text{cm}\ ;\ h_1 = 5\,\text{cm}\ ;\ h = 6\,\text{cm}$

e) $a_1 = 4{,}4\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 5{,}4\,\text{cm}\ ;\ h_1 = 6{,}5\,\text{cm}\ ;\ h_2 = 1{,}2\,\text{cm}$

f) $a_1 = 4{,}7\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 3{,}3\,\text{cm}\ ;\ h_1 = 5{,}7\,\text{cm}\ ;\ h = 8\,\text{cm}$

g) $a_1 = 2{,}8\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 5{,}2\,\text{cm}\ ;\ h_1 = 5\,\text{cm}\ ;\ h_2 = 3{,}2\,\text{cm}$

h) $a_1 = 6{,}2\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 4{,}2\,\text{cm}\ ;\ h_1 = 3\,\text{cm}\ ;\ h = 9{,}2\,\text{cm}$

i) $a_1 = 5{,}4\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 4{,}5\,\text{cm}\ ;\ a_2 = 2{,}3\,\text{cm}\ ;\ h = 6{,}3\,\text{cm}$

j) $a_1 = 6{,}1\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 2{,}4\,\text{cm}\ ;\ b_2 = 1{,}6\,\text{cm}\ ;\ h = 5{,}6\,\text{cm}$

k) $a_1 = 4{,}8\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 3{,}6\,\text{cm}\ ;\ h_1 = 2{,}4\,\text{cm}\ ;\ s = 6{,}7\,\text{cm}$

l) $a_1 = 3{,}4\,\text{cm}\ ;\ b_1 = 5{,}2\,\text{cm}\ ;\ h_2 = 3{,}8\,\text{cm}\ ;\ s = 7{,}4\,\text{cm}$

Aufgabe 32: *Zeichne die Netze der folgenden Würfel.* (keine Lösung!)

a) $a = 3\,\text{cm}$	*b)* $a = 5\,\text{cm}$	*c)* $a = 4\,\text{cm}$	*d)* $a = 8\,\text{cm}$
e) $a = 4{,}5\,\text{cm}$	*f)* $a = 5{,}5\,\text{cm}$	*g)* $a = 5{,}2\,\text{cm}$	*h)* $a = 7{,}3\,\text{cm}$
i) $a = 6{,}6\,\text{cm}$	*j)* $a = 2{,}8\,\text{cm}$	*k)* $a = 4{,}4\,\text{cm}$	*l)* $a = 6{,}8\,\text{cm}$

Aufgabe 33: *Zeichne die Netze der folgenden Quader.* (keine Lösung!)

a) $a = 3\,\text{cm}\ ;\ b = 4\,\text{cm}\ ;\ c = 6\,\text{cm}$	*b)* $a = 4\,\text{cm}\ ;\ b = 4\,\text{cm}\ ;\ c = 6\,\text{cm}$
c) $a = 6\,\text{cm}\ ;\ b = 2\,\text{cm}\ ;\ c = 4\,\text{cm}$	*d)* $a = 5\,\text{cm}\ ;\ b = 3\,\text{cm}\ ;\ c = 7\,\text{cm}$
e) $a = 5\,\text{cm}\ ;\ b = 3\,\text{cm}\ ;\ c = 6\,\text{cm}$	*f)* $a = 8\,\text{cm}\ ;\ b = 5\,\text{cm}\ ;\ c = 3\,\text{cm}$
g) $a = 1{,}5\,\text{cm}\ ;\ b = 3{,}3\,\text{cm}\ ;\ c = 4{,}9\,\text{cm}$	*h)* $a = 2{,}3\,\text{cm}\ ;\ b = 6{,}1\,\text{cm}\ ;\ c = 1\,\text{cm}$
i) $a = 6{,}5\,\text{cm}\ ;\ b = 3{,}2\,\text{cm}\ ;\ c = 7{,}6\,\text{cm}$	*j)* $a = 5{,}4\,\text{cm}\ ;\ b = 0{,}8\,\text{cm}\ ;\ c = 7{,}8\,\text{cm}$
k) $a = 2{,}2\,\text{cm}\ ;\ b = 2{,}6\,\text{cm}\ ;\ c = 4{,}4\,\text{cm}$	*l)* $a = 8{,}2\,\text{cm}\ ;\ b = 5{,}6\,\text{cm}\ ;\ c = 7{,}4\,\text{cm}$

Aufgabe 34: *Zeichne die Netze der folgenden Pyramiden mit rechteckiger Grundfläche.* (keine Lösung!)

a) $a = 4\,\text{cm}$; $b = 4\,\text{cm}$; $h = 5\,\text{cm}$

b) $a = 3\,\text{cm}$; $b = 5\,\text{cm}$; $h = 6\,\text{cm}$

c) $a = 6\,\text{cm}$; $b = 4\,\text{cm}$; $h = 6\,\text{cm}$

d) $a = 5\,\text{cm}$; $b = 7\,\text{cm}$; $h = 3\,\text{cm}$

e) $a = 2\,\text{cm}$; $b = 5\,\text{cm}$; $h = 8\,\text{cm}$

f) $a = 3\,\text{cm}$; $b = 4\,\text{cm}$; $h = 2\,\text{cm}$

g) $a = 6,4\,\text{cm}$; $b = 5,5\,\text{cm}$; $h = 4,1\,\text{cm}$

h) $a = 4,8\,\text{cm}$; $b = 3,8\,\text{cm}$; $h = 2\,\text{cm}$

i) $a = 4,7\,\text{cm}$; $b = 7,5\,\text{cm}$; $h = 8,4\,\text{cm}$

j) $a = 5,2\,\text{cm}$; $b = 3,3\,\text{cm}$; $s = 6,3\,\text{cm}$

k) $a = 7,1\,\text{cm}$; $b = 1,4\,\text{cm}$; $s = 8,4\,\text{cm}$

l) $a = 2,3\,\text{cm}$; $b = 3,1\,\text{cm}$; $s = 7,2\,\text{cm}$

Aufgabe 35: *Zeichne die Netze der folgenden Pyramidestümpfe mit rechteckiger Grundfläche.* (keine Lösung!)

a) $a_1 = 4\,\text{cm}$; $b_1 = 4\,\text{cm}$; $h_1 = 3\,\text{cm}$; $h_2 = 4\,\text{cm}$

b) $a_1 = 5\,\text{cm}$; $b_1 = 5\,\text{cm}$; $h_1 = 3\,\text{cm}$; $h = 8\,\text{cm}$

c) $a_1 = 3\,\text{cm}$; $b_1 = 5\,\text{cm}$; $h_1 = 4\,\text{cm}$; $h_2 = 4\,\text{cm}$

d) $a_1 = 6\,\text{cm}$; $b_1 = 5\,\text{cm}$; $h_1 = 5\,\text{cm}$; $h = 6\,\text{cm}$

e) $a_1 = 4,4\,\text{cm}$; $b_1 = 5,4\,\text{cm}$; $h_1 = 6,5\,\text{cm}$; $h_2 = 1,2\,\text{cm}$

f) $a_1 = 4,7\,\text{cm}$; $b_1 = 3,3\,\text{cm}$; $h_1 = 5,7\,\text{cm}$; $h = 8\,\text{cm}$

g) $a_1 = 2,8\,\text{cm}$; $b_1 = 5,2\,\text{cm}$; $h_1 = 5\,\text{cm}$; $h_2 = 3,2\,\text{cm}$

h) $a_1 = 6,2\,\text{cm}$; $b_1 = 4,2\,\text{cm}$; $h_1 = 3\,\text{cm}$; $h = 9,2\,\text{cm}$

i) $a_1 = 5,4\,\text{cm}$; $b_1 = 4,5\,\text{cm}$; $a_2 = 2,3\,\text{cm}$; $h = 6,3\,\text{cm}$

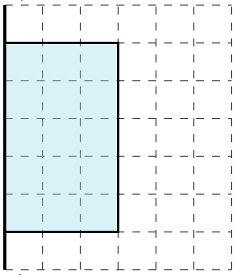
j) $a_1 = 6,1\,\text{cm}$; $b_1 = 2,4\,\text{cm}$; $b_2 = 1,6\,\text{cm}$; $h = 5,6\,\text{cm}$

k) $a_1 = 4,8\,\text{cm}$; $b_1 = 3,6\,\text{cm}$; $h_1 = 2,4\,\text{cm}$; $s = 6,7\,\text{cm}$

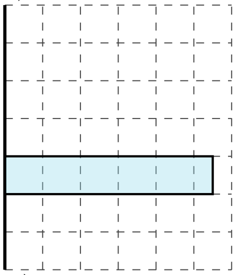
l) $a_1 = 3,4\,\text{cm}$; $b_1 = 5,2\,\text{cm}$; $h_2 = 3,8\,\text{cm}$; $s = 7,4\,\text{cm}$

Aufgabe 36: *Bestimme das Volumen des dargestellten Körpers, beachte dabei, dass der Körper um die eingezeichneten Achse herumgedreht wurde und lediglich ein einseitiger Querschnitt betrachtet wird. (Ein Kästchen soll hierbei* 1cm *entsprechen!)*

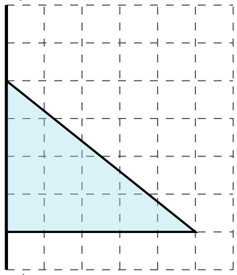
a)



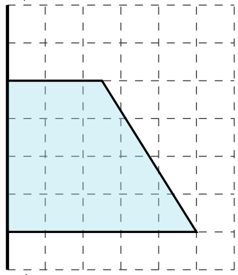
b)



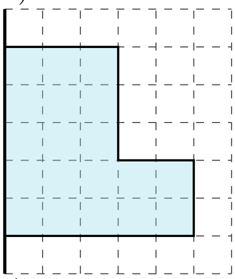
c)



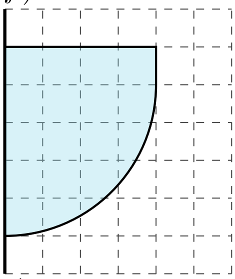
d)



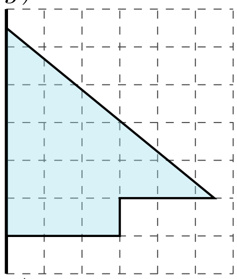
e)



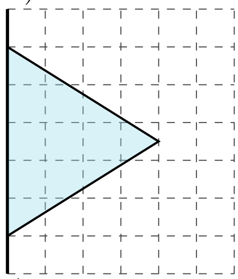
f)



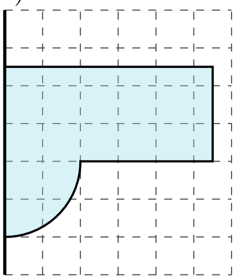
g)



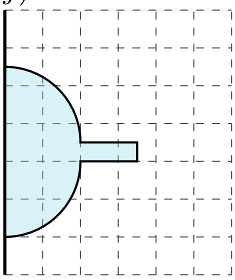
h)



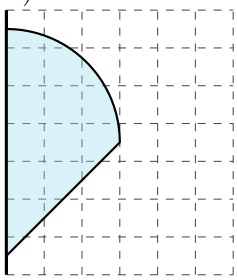
i)



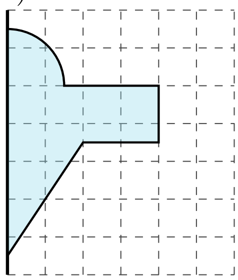
j)



k)

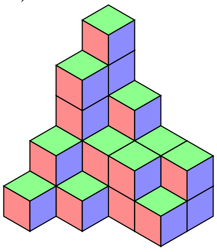


l)



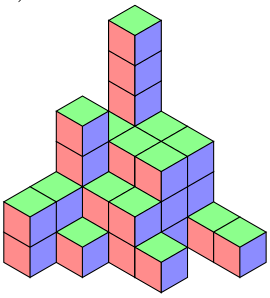
Aufgabe 37: *Schreibe in die Tabelle wie viele Würfel übereinander gestapelt sind, wie es in der Beispieltabelle bei a) dargestellt ist.*

a)

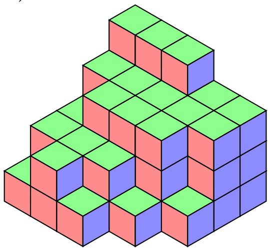


5	3	2	2	
4	2	2	1	
2	1			
1				

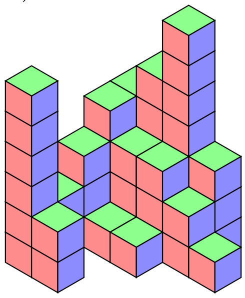
b)



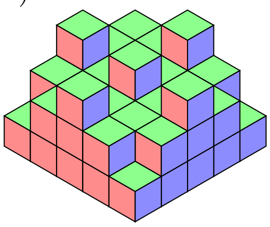
c)



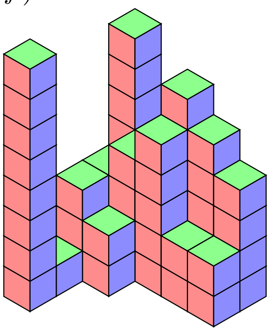
d)



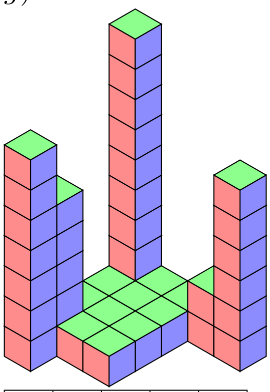
e)



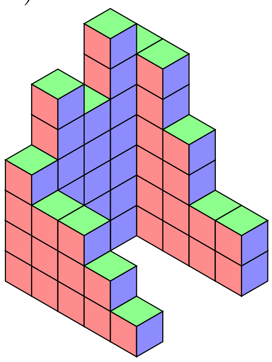
f)



g)



h)



Aufgabe 38: *Bestimme die Mantelfläche M für die gegebenen Werte der jeweiligen gleichmäßigen Prismen.*

a) gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = 7\,\text{cm}$ und $h = 3\,\text{cm}$

b) gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = 3\,\text{cm}$ und $h = 13\,\text{cm}$

c) gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = 4\,\text{cm}$ und $h = 6\,\text{cm}$

d) gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = 6\,\text{cm}$ und $h = 9\,\text{cm}$

e) gleichmäßiges Siebenecksprisma: $a = 11\,\text{cm}$ und $h = 13\,\text{cm}$

f) gleichmäßiges Achtecksprisma: $a = 17\,\text{cm}$ und $h = 31\,\text{cm}$

g) gleichmäßiges Dreiecksprisma: $a = \frac{4}{7}\,\text{cm}$ und $h = \frac{19}{4}\,\text{cm}$

h) gleichmäßiges Vierecksprisma: $a = \frac{13}{6}\,\text{cm}$ und $h = \frac{23}{8}\,\text{cm}$

i) gleichmäßiges Fünfecksprisma: $a = \frac{7}{3}\,\text{cm}$ und $h = \frac{19}{5}\,\text{cm}$

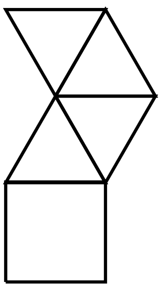
j) gleichmäßiges Sechsecksprisma: $a = \frac{25}{4}\,\text{cm}$ und $h = \frac{73}{9}\,\text{cm}$

k) gleichmäßiges Siebenecksprisma: $a = \frac{43}{5}\,\text{cm}$ und $h = \frac{27}{7}\,\text{cm}$

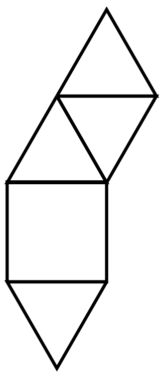
l) gleichmäßiges Achtecksprisma: $a = \frac{3}{8}\,\text{cm}$ und $h = \frac{383}{5}\,\text{cm}$

Aufgabe 40: *Bestimme ob aus dem dargestellten Netz eine Pyramide entstehen könnte.*

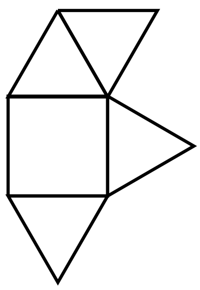
a)



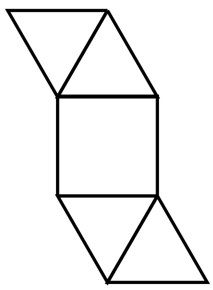
b)



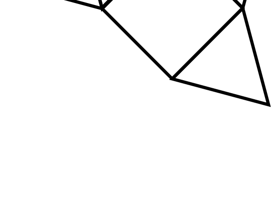
c)



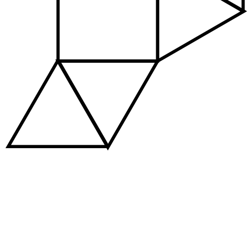
d)



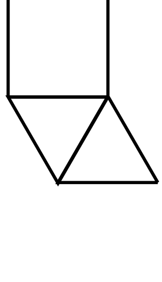
e)



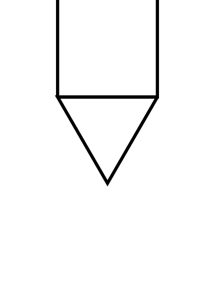
f)



g)

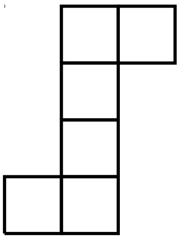


h)

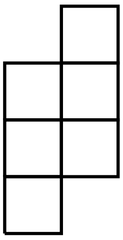


Aufgabe 41: *Bestimme ob aus dem dargestellten Netz ein Würfel entstehen könnte.*

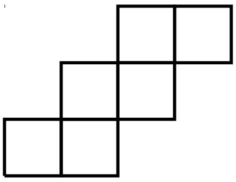
a)



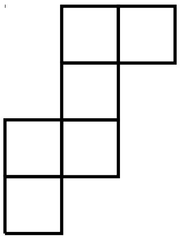
b)



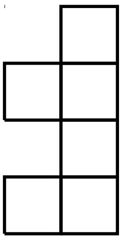
c)



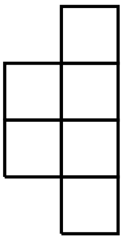
d)



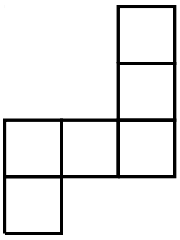
e)



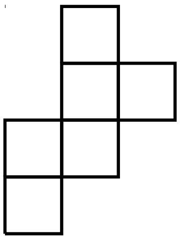
f)



g)

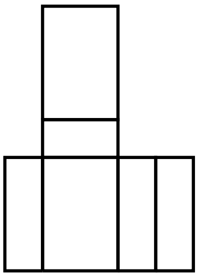


h)

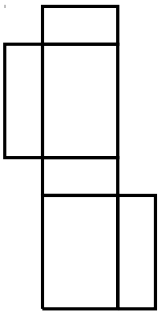


Aufgabe 42: *Bestimme ob aus dem dargestellten Netz ein Quader entstehen könnte.*

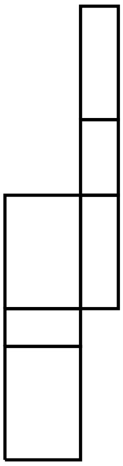
a)



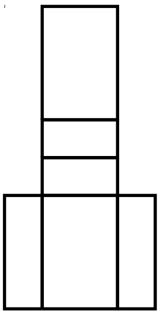
b)



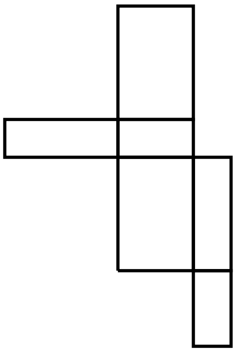
c)



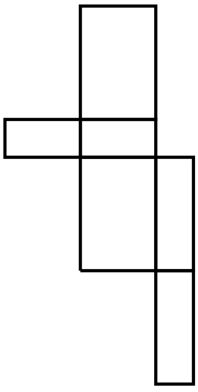
d)



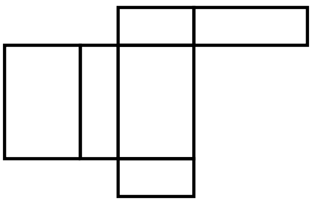
e)



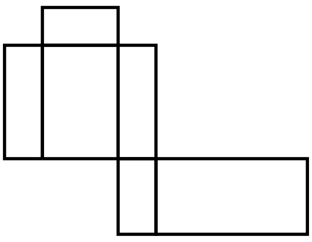
f)



g)



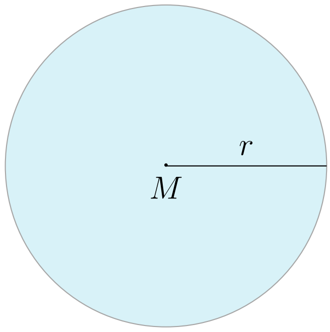
h)



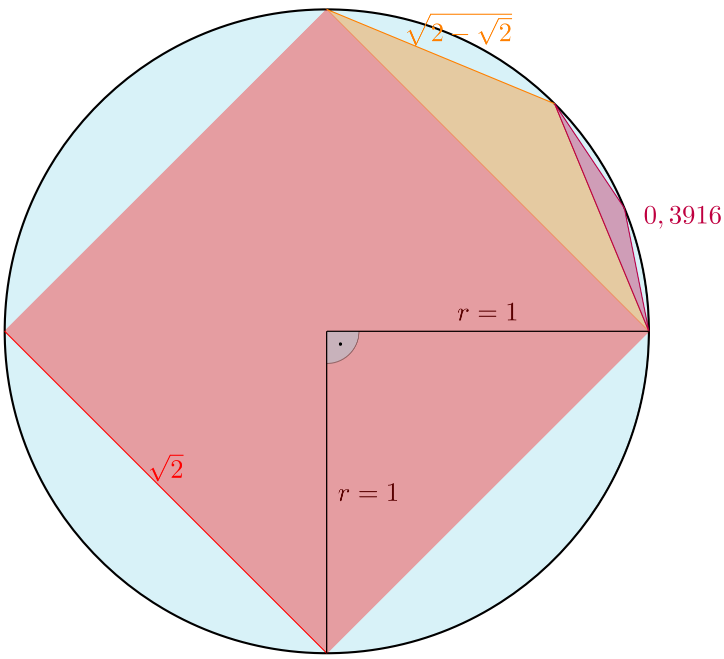
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.34) Lösungen zu mehrdimensionalen Vielecken.

4.12 Kreis

Ein *Kreis* zeichnet sich dadurch aus, dass er rund ist und der *Abstand* vom *Mittelpunkt* zum *Kreis* selbst immer gleich groß ist. Dieser *Abstand* wird *Radius* r genannt. Der doppelte *Radius* wird als *Durchmesser* $d = 2r$ bezeichnet.



Die Abbildung zeigt einen *Kreis* mit *Radius* r mit dem *Mittelpunkt* M. In der *Geometrie* sind grade die *Größen* des *Flächeninhalts* und des *Umfangs* interessant. Beide Werte sollen anhand eines *Kreises* mit *Radius* $r = 1$ ermittelt werden. Da wird zu nächst ein *Quadrat* in den *Kreis* gezeichnet, welches die *Seitenlänge* $a = \sqrt{2}$ besitzt. Dies wird offensichtlich durch die Verwendung des *Satz des Pythagoras*. Anschließend soll in der noch nicht vom roten *Quadrat* ein *gleichschenkliges Dreieck*, welches grün sein soll, eingezeichnet werden, sodass alle *Eckpunkte* sich auf dem schwarzen *Kreisbogen* befinden. Anschließend wird wieder ein *Dreieck*, das blau sein soll, so eingezeichnet, dass es im noch nicht erschlossenen Raum liegt und dazu wieder alle *Eckpunkte* sich auf dem *Kreisbogen* befinden.



Die Abbildung zeigt genau dieses Verfahren. Wenn diese Prozedur oft genug wiederholt wurde, soll der *Umfang* des eckigen Körpers und auch der *Flächeninhalt* bestimmt werden. Dies wird nun im Weiteren schrittweise geschehen.

Um den *Umfang* zu bestimmen, werden jeweils die *Schenkellängen* der *gleichschenkligen Dreiecke* benötigt, welche dann mit der Anzahl der *Ecken* des jeweiligen resultierenden Vielecks *multipliziert* wird. (Die genaue Berechnung der jeweiligen *Schenkellängen* und auch der *Höhen* für den *Flächeninhalt* soll hier nicht genauer erläutert werden, dies kann jeder Schüler nach Bearbeitung des Kapitels „Trigonometrie“ selbst nachrechnen.)

$$\begin{aligned} U_{\text{rot},4} &= 4 \cdot \sqrt{2} = 5,6568 \\ U_{\text{grün},8} &= 8 \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}} = 6,1229 \\ U_{\text{blau},16} &= 16 \cdot 0.3916 = 6,2656 \\ \vdots &= \vdots \\ U_\infty &= 6,2832 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Beim *Flächeninhalt A* müssen noch über den *Satz des Pythagoras* die jeweiligen *Höhen der Dreiecke* bestimmt werden. Sie sind immer gegeben als die *Wurzel* aus der neuen *Seitenlänge* zum *Quadrat subtrahiert* mit der halben alten *Seitenlänge* zum *Quadrat*.

$$\begin{aligned} A_4 &= A_{\text{rot}} = 2 \\ A_8 &= A_{\text{rot}} + 4A_{\text{grün}} = 2,82843 \\ A_{16} &= A_8 + 8A_{\text{blau}} = 3,07216 \\ \vdots &= \vdots \\ A_\infty &= 3,14159 := \pi \end{aligned} \tag{4.35}$$

Der *Flächeninhalt* A_∞ eines regelmäßigen Unendlichecks - einem *Kreis* -, dessen *Eckpunkte* alle auf dem *Kreisbogen* mit dem *Radius* $r = 1$ liegen beträgt genau π. π ist eine *irrationale Zahl*[3], welche nicht einer algebraischen Umformung entstammt, weswegen π auch als transzendente Zahl bezeichnet wird. π wird auch *Kreiszahl* genannt. Mittels dieser *Kreiszahl* π lassen sich die *Größen* eines *Kreises* mit beliebigen *Radius* r darstellen.

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ U &= 2\pi r \end{aligned} \tag{4.36}$$

Auch noch andere weitere *Größen* des *Kreises* lassen sich über π darstellen, dazu werden im nächsten Unterabschnitt Teile des *Kreises* berechnet und anschließend das *Bogenmaß* eingeführt.

[3]irrationale Zahlen können nicht durch Brüche dargestellt werden: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4.12.1 Bogenmaß

Da der *Kreis* mit dem *Radius* $r = 1$, der sogenannte *Einheitskreis*, einen *Umfang* von $U = 2\pi$ besitzt, kann ein Zusammenhang zwischen *Umfang* und einen *vollen Winkel* $360°$ gesehen werden. Der *Kreis* steht symbolisch für einen *vollen Winkel* und dadurch kann die Beziehung

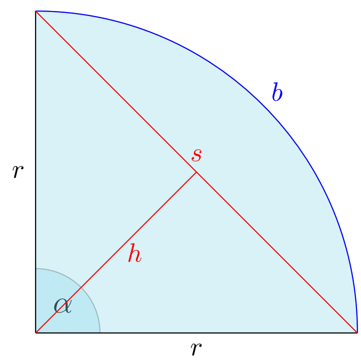
$$\begin{aligned} 2\pi\,\mathrm{rad} &= 360° \\ \Rightarrow 1° &= \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad} \\ \Leftrightarrow 1\,\mathrm{rad} &= \frac{180°}{\pi} \end{aligned} \tag{4.37}$$

aufgestellt werden. Dabei ist rad die *Einheit Radiant*, welche für die Länge des jeweiligen *Kreisbogen* steht. Oftmals empfiehlt es sich in *Radiant* zu rechnen, da dies nicht selten die Gleichungen erheblich vereinfachen würde. Je nach dem, ob *Grad* oder *Radiant* als *Einheit* gewählt wurde, muss diese auch im Taschenrechner verändert werden, da sonst die *Werte* nicht der Realität entsprechen. Die Umrechnung ist über den *Dreisatz* oder der folgenden *Gleichung* möglich:

$$\begin{aligned} \alpha\ [\mathrm{rad}] &= \frac{2\pi}{360°}\alpha\ [°] \quad , \\ \alpha\ [°] &= \frac{360°}{2\pi}\alpha\ [\mathrm{rad}] \quad . \end{aligned} \tag{4.38}$$

4.12.2 Kreisteile

Wie schon oben beschrieben, ist der *Umfang* des *Kreises* durch $U = 2\pi r$ und der *Flächeninhalt* durch $A = \pi r^2$ gegeben. Somit ergeben sich auch Teilgrößen wie der *Kreisbogen* b, der *Kreisausschnitt* und der *Kreisabschnitt*.



Die Abbildung zeigt einen *Kreisauschnitt* mit allen Unterteilungen für einen *Kreisabschnitt* sowie den *Kreisbogen*. Dabei ist der *Kreisbogen* b ein *Bruchteil* des *Umfangs*, der durch $2\pi r$

und 360° beschrieben wird. Somit ergibt sich, dass für einen *Winkel* α folgende *Bogenlänge* b ergibt:

$$b = \frac{2\pi r}{360}\alpha \quad . \tag{4.39}$$

Der *Flächeninhalt* des *Kreisausschnittes*, der durch die gesamte umrandete *Fläche* beschrieben wird, der anteilige *Flächeninhalt* eines ganzen *Kreises*:

$$A_{\text{Kreisausschnitt}} = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 = \frac{br}{2} \quad . \tag{4.40}$$

Der *Flächeninhalt* dieses *Kreisausschnittes* ohne die des *Dreiecks* mit der *Grundfläche* s und der *Höhe* h, wird *Kreisabschnitt* genannt. Durch die Beschreibung wird klar wie der *Flächeninhalt* eines *Kreisabschnittes* berechnet wird:

$$A_{\text{Kreisabschnitt}} = \frac{\pi\alpha}{360}r^2 - \frac{sh}{2} = \frac{br - sh}{2} \quad . \tag{4.41}$$

Mit diesen *Teilgrößen* des *Kreises* und dem Wissen über den ganzen *Kreis*, lassen sich nahezu alle Probleme berechnen.

4.12.3 Übungsaufgaben zu Kreisen

Aufgabe 1: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreise.*

$a)\ r = 3\,\text{cm},$	$b)\ r = 6\,\text{cm},$	$c)\ d = 11\,\text{cm},$
$d)\ r = \frac{2}{3}\,\text{mm},$	$e)\ r = \frac{5}{6}\,\text{dm},$	$f)\ d = \frac{7}{4}\,\text{m},$
$g)\ r = \frac{2}{7}\,\text{cm},$	$h)\ r = \frac{9}{5}\,\text{cm},$	$i)\ d = \frac{11}{3}\,\text{cm},$
$j)\ r = \sqrt{5}\,\text{cm},$	$k)\ r = \pi\,\text{cm},$	$l)\ d = \ln 6\,\text{cm},$
$m)\ d = 0,5\,\text{cm},$	$n)\ r = 2,718\,\text{cm},$	$o)\ d = \frac{6}{7}\,\text{cm}.$

Aufgabe 2: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreisausschnitt.*

$a)\ \alpha = 60°$	und $r = 5\,\text{cm}$	$b)\ \alpha = 230°$	und $r = 2\,\text{cm}$
$c)\ \alpha = 177°$	und $r = \sqrt{17}\,\text{cm}$	$d)\ \alpha = 55°$	und $r = 3\,\text{cm}$
$e)\ \alpha = 145°$	und $r = 7\,\text{cm}$	$f)\ \alpha = 310°$	und $r = 2,5\,\text{cm}$
$g)\ \alpha = 130,4°$	und $r = \frac{3}{4}\,\text{cm}$	$h)\ \alpha = \frac{145°}{6}$	und $r = \frac{7}{2}\,\text{cm}$
$i)\ \alpha = \frac{99°}{5}$	und $r = \frac{5}{3}\,\text{cm}$	$j)\ \alpha = \frac{189°}{7}$	und $r = \frac{9}{7}\,\text{cm}$
$k)\ \alpha = \frac{4°}{5}$	und $r = \frac{11}{12}\,\text{cm}$	$l)\ \alpha = \sqrt{3025}°$	und $r = \sqrt{111}\,\text{cm}$

Aufgabe 3: *Rechne die Einheiten um.*

$a)$ $180° =$	$b)$ $360° =$	$c)$ $90° =$
$d)$ $45° =$	$e)$ $30° =$	$f)$ $120° =$
$g)$ $36° =$	$h)$ $55° =$	$i)$ $193° =$
$j)$ $11° =$	$k)$ $466° =$	$l)$ $1643° =$
$m)$ $\frac{3\pi}{4}\,\mathrm{rad} =$	$n)$ $\frac{3\pi}{2}\mathrm{rad} =$	$o)$ $\frac{5\pi}{4}\,\mathrm{rad} =$
$p)$ $1{,}2\pi\,\mathrm{rad} =$	$q)$ $1{,}75\mathrm{rad} =$	$r)$ $0{,}\bar{3}\,\mathrm{rad} =$
$s)$ $\frac{4\pi}{5}\,\mathrm{rad} =$	$t)$ $\frac{\pi}{9}\,\mathrm{rad} =$	$u)$ $\frac{9\pi}{7}\,\mathrm{rad} =$
$v)$ $\frac{\pi}{12}\,\mathrm{rad} =$	$w)$ $\frac{7\pi}{3}\,\mathrm{rad} =$	$x)$ $\frac{11\pi}{9}\,\mathrm{rad} =$

Aufgabe 4: *Zeichne die angegebenen Kreismuster.*

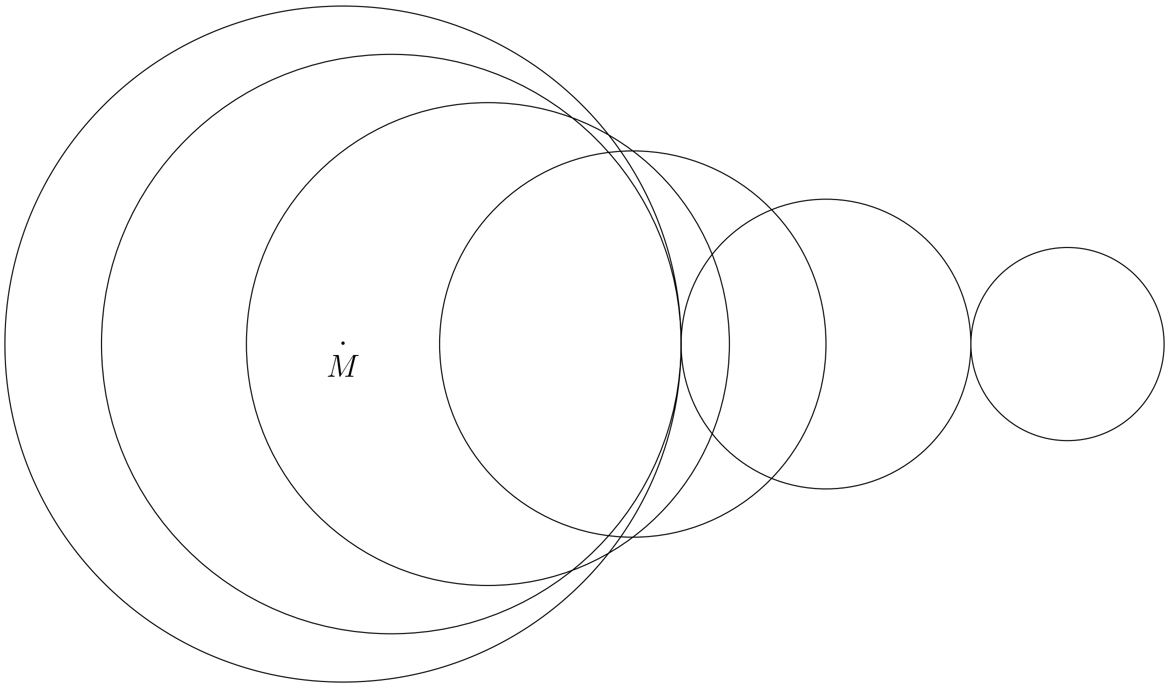
a) Alle Kreise mit geradem Radius sollen im Mittelpunkt M gezeichnet werden und alle mit ungeradem Radius im Mittelpunkt N. Dabei gilt, dass M 1 cm links von N ist. Zeichne für folgende Radien: $r = \{2\,\mathrm{cm}, 3\,\mathrm{cm}, 4\,\mathrm{cm}, 5\,\mathrm{cm}, 6\,\mathrm{cm}, 7\,\mathrm{cm}\}$.

b) Zeichne einen Kreis mit Radius $r = 7\mathrm{cm}$ im Mittelpunkt M, zeichne danach einen Kreis der einen Radius von einem Zentimeter weniger hat und sich der Mittelpunkt 1 cm weiter links befindet. Wiederhole dies bis du einen Kreis mit Radius $r = 2\mathrm{cm}$ gezeichnet hast.

c) Wähle einen Punkt P auf deinem Blatt, zeichne dann jeweils einen Kreisbogen mit 116°, sodass die Strecke vom jeweiligen Kreisbogenmittelpunkt zum Punkt P hin den Kreisbogen halbieren würde, mit Radius $r = 4\,\mathrm{cm}$ mit einem Abstand von 3 cm nach links, rechts, oben und unten zu P.

d) Wähle einen Punkt P und gehe von ihm aus $\sqrt{50}\,\mathrm{cm}$ diagonal nach links oben, rechts oben, links unten und rechts unten. Zeichne in diesen Punkten einen Viertelkreis, sodass die Linie zum Punkt P den Kreisbogen halbieren würde. Zeichne dann einen Kreis vom Punkt P aus, sodass dieser alle vier Viertelkreise berührt. Welchen Radius hat dieser innere Kreis?

Aufgabe 5: *Beschreibe das Schema der Zeichnung.*



Aufgabe 6: *Zeichne einen Halbkreis und verbinde die Enden des Kreisbogens. Zeichne anschließend vier beliebige Dreiecke in diesen Halbkreis unter der Bedingung, dass die Enden des Halbkreis zwei Eckpunkte der Dreiecke sind und der letzte Eckpunkt des jeweiligen Dreiecks sich auf dem Kreisbogen befindet. Messe anschließend den Winkel der Dreiecke beim jeweiligen Eckpunkt, der auf dem Kreisbogen und nicht an den Enden des Kreisbogens ist. Was auffällt wird „Satz des Thales“ genannt.*

Aufgabe 7: *Bestimme Umfang U und den Flächeninhalt A für die gegebenen Werte der Kreisabschnitt.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

$a)$ $r = 5\,\text{cm}$ und $\alpha = 90°$	$b)$ $r = 4\,\text{cm}$ und $\alpha = 75°$
$c)$ $r = 7{,}45\,\text{cm}$ und $\alpha = 122°$	$d)$ $r = \frac{9}{4}\,\text{cm}$ und $\alpha = 23°$
$e)$ $r = \frac{7}{13}\,\text{cm}$ und $\alpha = 95°$	$f)$ $r = \sqrt{7}\,\text{cm}$ und $\alpha = 146°$
$g)$ $r = \ln 4\,\text{cm}$ und $\alpha = \frac{3}{4}\pi\,\text{rad}$	$h)$ $r = e\,\text{cm}$ und $\alpha = \frac{1}{3}\pi\,\text{rad}$

Aufgabe 8: *Zeichne folgende Kreise.* (keine Lösung!)

$a)\ r = 3\,\text{cm}$ $b)\ r = 2\,\text{cm}$ $c)\ r = 4\,\text{cm}$

$d)\ r = 3,5\,\text{cm}$ $e)\ r = 2,3\,\text{cm}$ $f)\ r = 5\,\text{cm}$

$g)\ r = 2,8\,\text{cm}$ $h)\ r = 5,1\,\text{cm}$ $i)\ r = 1,9\,\text{cm}$

$j)\ r = 4,9\,\text{cm}$ $k)\ r = 4,3\,\text{cm}$ $l)\ r = 0,9\,\text{cm}$

Aufgabe 9: *Zeichne folgende Kreisausschnitte.* (keine Lösung!)

$a)\ r = 3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 90^\circ$ $b)\ r = 2\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 140^\circ$

$c)\ r = 5\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 40^\circ$ $d)\ r = 4\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 77^\circ$

$e)\ r = 5,3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 160^\circ$ $f)\ r = 4,4\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 240^\circ$

$g)\ r = 3,8\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 55^\circ$ $h)\ r = 6,2\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 127^\circ$

$i)\ r = 1,9\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 180^\circ$ $j)\ r = 5,6\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 16^\circ$

$k)\ r = 2,7\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 145^\circ$ $l)\ r = 4,3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 28^\circ$

Aufgabe 10: *Zeichne folgende Kreisabschnitte.* (keine Lösung!)

$a)\ r = 3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 90^\circ$ $b)\ r = 2\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 140^\circ$

$c)\ r = 5\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 40^\circ$ $d)\ r = 4\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 77^\circ$

$e)\ r = 5,3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 160^\circ$ $f)\ r = 4,4\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 240^\circ$

$g)\ r = 3,8\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 55^\circ$ $h)\ r = 6,2\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 127^\circ$

$i)\ r = 1,9\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 180^\circ$ $j)\ r = 5,6\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 16^\circ$

$k)\ r = 2,7\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 145^\circ$ $l)\ r = 4,3\,\text{cm}\ ;\ \alpha = 28^\circ$

Aufgabe 11: *Bestimme die fehlenden Größen (r, d, A, U) zum Kreis.*

a) $U = 36\,\text{cm}$, *b)* $A = 81\,\text{cm}^2$, *c)* $d = \dfrac{11}{4}\,\text{cm}$,

d) $r = \dfrac{17}{6}\,\text{dm}$, *e)* $A = \dfrac{13}{5}\,\text{m}^2$, *f)* $U = \dfrac{23}{3}\,\text{cm}$,

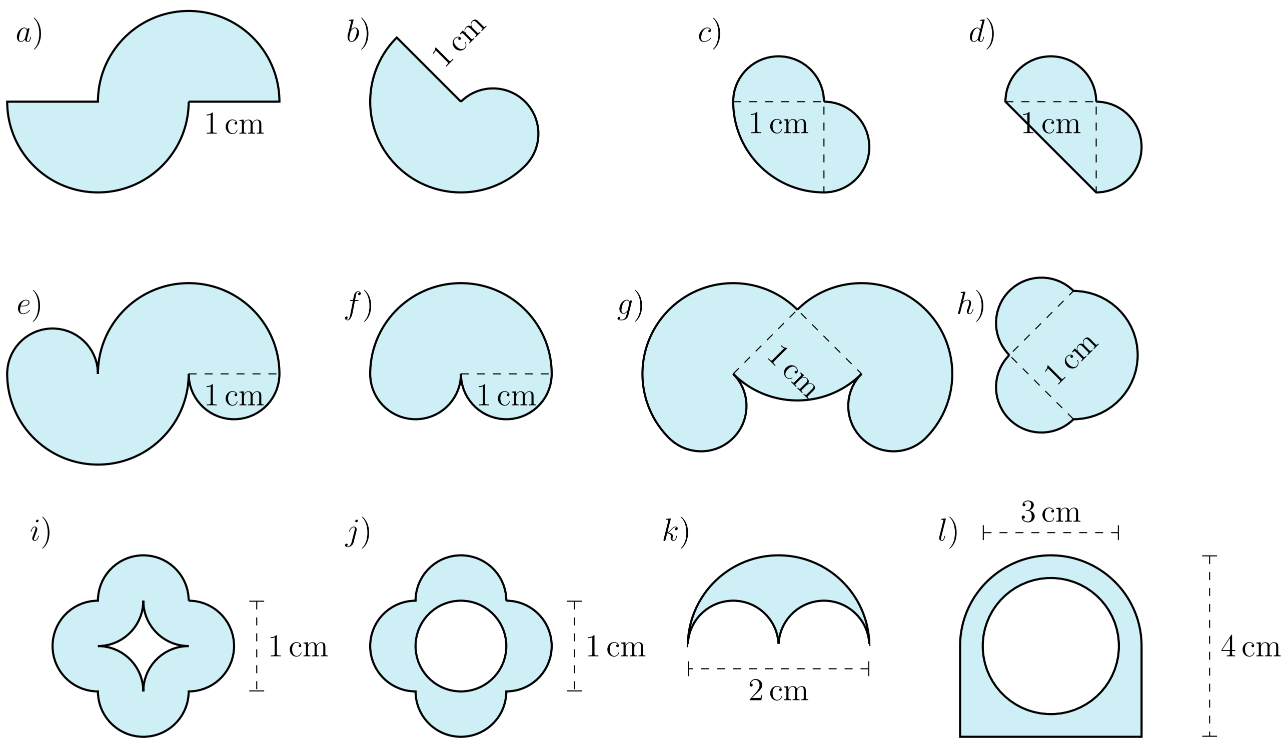
g) $A = 2{,}3\,\text{dm}^2$, *h)* $A = 12{,}5\,\text{cm}^2$, *i)* $r = \dfrac{21}{6}\,\text{cm}$,

j) $U = \dfrac{19}{4}\,\text{cm}$, *k)* $A = \dfrac{137}{100}\,\text{mm}^2$, *l)* $U = \dfrac{83}{3}\,\text{mm}$,

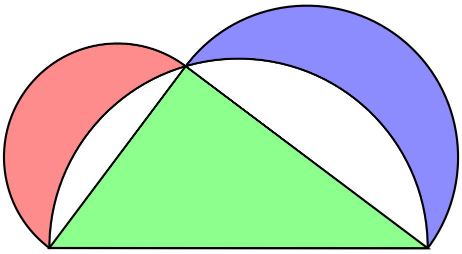
m) $U = \sqrt{17}\,\text{cm}$, *n)* $U = \sqrt[3]{55}\,\text{cm}$, *o)* $A = \dfrac{8}{\sqrt{2}}\,\text{cm}$,

p) $d = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\,\text{m}$, *q)* $A = \sqrt{\dfrac{29}{11}}\,\text{m}^2$, *r)* $A = \sqrt[5]{\dfrac{289}{4}}\,\text{dm}^2$,

Aufgabe 12: *Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der dargestellten Figuren.*



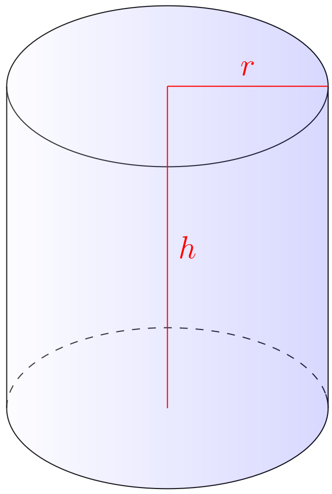
Aufgabe 13: *Zeige, dass die Summe der roten und blauen Flächeninhalte gleich dem Flächeninhalt das Dreiecks ist.*



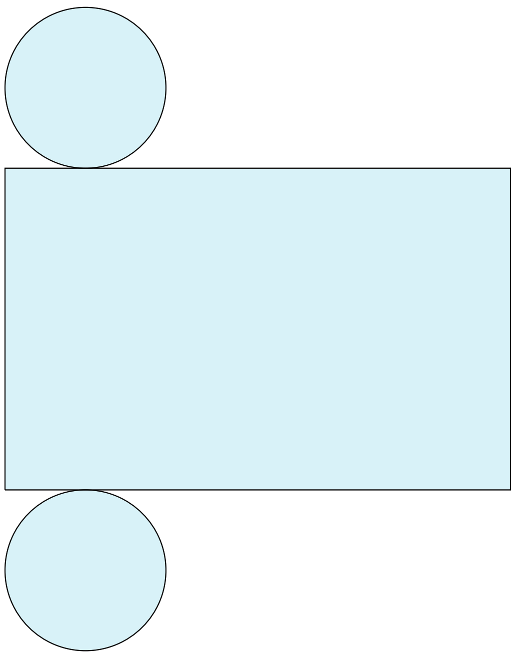
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.35) Lösungen zu Kreisen.

4.13 Zylinder und Kegel

Ein dreidimensionaler Körper, der einen *Kreis* als *Grundfläche* hat, welche gegenüberliegend mit einem *Abstand* einer *Höhe* h wieder vorzufinden ist, wird *Zylinder* genannt.



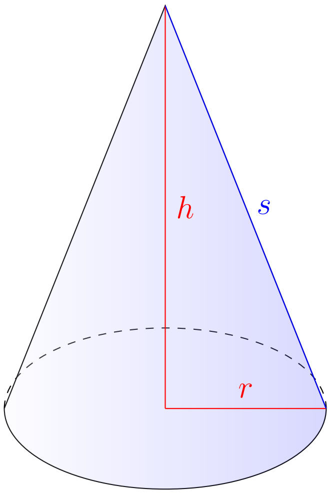
Die Abbildung zeigt, dass sich der *Zylinder* ähnlich wie das das *Prisma* behandeln lässt. Der einzige Unterschied ist dadurch gegeben, dass es sich um runde *Grundflächen* handelt und dass ein *Zylinder* nur zwei *Kanten*, drei *Flächen* und keinen *Eckpunkt* besitzt, wie das *Netz* offenbart:



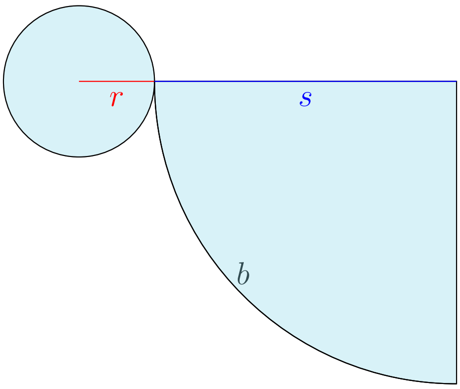
Das *Volumen* V ist erneut gegeben durch „*Grundfläche* G mal *Höhe* h" und am *Netz* aus der Abbildung ist erkennbar, dass die *Oberfläche* O sich aus zwei gleichen *Kreisen* und einem *Rechteck* mit den *Seitenlängen* $2\pi r$ und h zusammensetzt:

$$
\begin{aligned}
V &= Gh = \pi r^2 h \\
O &= 2 \cdot \pi r^2 + \pi r h \quad .
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Sobald der Körper in der *Höhe* h wieder zu einem *Punkt* wieder zusammenläuft und dabei als *Grundfläche* einen *Kreis* besitzt, wird dieser Körper als *Kegel* bezeichnet.



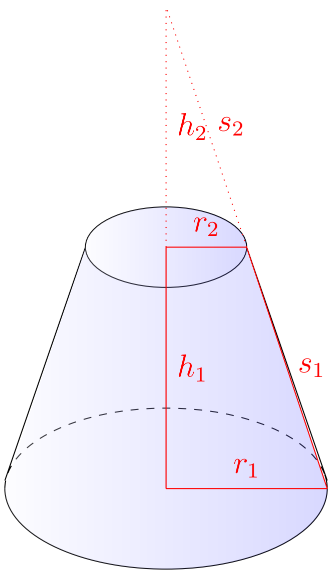
Der *Kegel* ist im Vergleich zum *Zylinder* genauso zu handhaben wie die *Pyramide* im Vergleich zum *Quader*. Somit ergibt sich das *Volumen* des *Kegels* V als ein Drittel des *Volumens* eines *Zylinders*. Bei der *Oberfläche* ist dies nicht so trivial, denn ein *Kreis* als *Grundfläche* wird mit einem *Kreisausschnitt addiert*. Dieses *Netz* könnte wie folgt visualisiert werden:

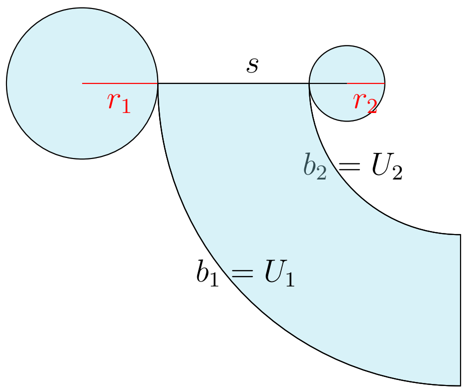


Dabei hat der *Kreisausschnitt* den *Radius* s und eine *Kreisbogenlänge* $b = 2\pi r$.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} Gh = \frac{1}{3} \pi r^2 h \\
O &= \pi r^2 + \pi r s = \pi r (r + s) \quad .
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

Falls ein *Zylinder* mit unterschiedlich großen *Kreisen* vorzufinden ist, wird im allgemeinen von einem *Kegelstumpf* gesprochen. Hierbei wurde lediglich ein Teil eines *Kegels* mit der *Höhe* $h = h_1 + h_2$ abgeschnitten.





Durch umstellen von Gleichungen ergibt sich das *Volumen* und die *Oberfläche* des *Kegelstumpfes* zu:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}G_1h_1 - \frac{1}{3}G_2h_2 = \frac{1}{3}\pi h_1\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right) \\ O &= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2 = \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + s_1(r_1 - r_2)\right) \quad . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Generell bleibt noch anzumerken, dass die *Mantelfläche* M immer gegeben ist als die *Oberfläche* ohne *Grund*- und Deckelfläche.

Informationen zu der Anzahl der *Ecken*, *Kanten* und *Flächen* eines Körpers sind im Anhang zu finden: 18.7 .

4.13.1 Übungsaufgaben zu Zylindern und Kegeln

Aufgabe 1: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Zylinder.*

a) $r = 5\,\text{cm}$ und $h = 11\,\text{cm}$, *b)* $r = 47\,\text{cm}$ und $h = 85\,\text{cm}$

c) $r = \frac{1}{4}\,\text{cm}$ und $h = \sqrt{9}\,\text{cm}$, *d)* $r = \sqrt{7}\,\text{cm}$ und $h = 2\,\text{cm}$

e) $r = \frac{7}{3}\,\text{cm}$ und $h = \sqrt{5}\,\text{cm}$, *f)* $r = \sqrt{50}\,\text{cm}$ und $h = \sqrt{\frac{3}{16}}\,\text{cm}$

Aufgabe 2: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kegel.*

a) $r = 4\,\text{cm}$ und $h = 2{,}7\,\text{cm}$, *b)* $r = \sqrt{2}\,\text{cm}$ und $h = \frac{2}{5}\,\text{cm}$

c) $r = 7\,\text{cm}$ und $h = 4{,}3\,\text{cm}$, *d)* $r = \frac{10}{7}\,\text{cm}$ und $h = 4\,\text{cm}$

e) $r = 5\,\text{cm}$ und $h = 1{,}4\,\text{cm}$, *f)* $r = \frac{1}{8}\,\text{cm}$ und $h = 9\,\text{cm}$

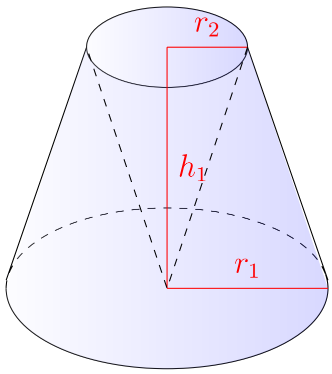
Aufgabe 3: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kegelstümpfe.*

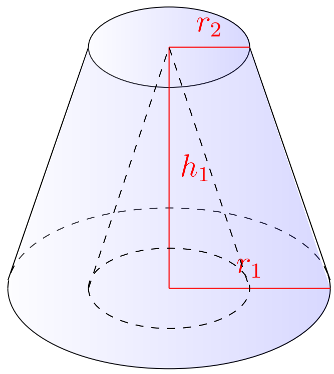
a) $r_1 = 4\,\text{cm}$, $r_2 = 2\,\text{cm}$ und $h_1 = 5\,\text{cm}$, *b)* $r_1 = 3{,}5\,\text{cm}$, $r_2 = 1{,}5\,\text{cm}$ und $h_1 = 7\,\text{cm}$,

c) $r_1 = 6\,\text{cm}$, $r_2 = 2\,\text{cm}$ und $h_1 = 9\,\text{cm}$, *d)* $r_1 = \frac{1}{3}\,\text{cm}$, $r_2 = \frac{9}{4}\,\text{cm}$ und $h_1 = \frac{13}{2}\,\text{cm}$,

e) $r_1 = 1\,\text{cm}$, $r_2 = 5\,\text{cm}$ und $h_1 = \frac{7}{4}\,\text{cm}$, *f)* $r_1 = \pi\,\text{cm}$, $r_2 = 2{,}718\,\text{cm}$ und $h_1 = \sqrt{2}\,\text{cm}$.

Aufgabe 4: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O der Körper. (Es handelt sich um einen Kegelstumpf mit $h_1 = h_2 = 4\,\text{cm}$ und $r_1 = 4\,\text{cm}$ aus dem ein Kegel der Höhe h_1 und Radius $r_2 = 2\,\text{cm}$ herausgeschnitten wurde.)*





Aufgabe 5: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Zylinder.*

	1	2	3	4	5	6
r	5	4		4		$\frac{17}{4}$
h	7		5		$\frac{7}{3}$	
V		9	12	24	$\frac{22}{5}$	
O						$\frac{999}{10}$

Aufgabe 6: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Kegel.*

	1	2	3	4	5	6
r	5	4				2
h	7		5		$\frac{7}{3}$	
s		7	9	5,6		
V					$\frac{22}{5}$	
O				15		$\frac{1544}{5}$

Aufgabe 7: *Beweise, dass die Gleichung für das Volumen eines Kegelstumpfes gilt. (Tipp: Benutze den Strahlensatz um einen Ausdruck für h_2 zu finden!)*

$$V = \frac{1}{3}G_1h - \frac{1}{3}G_2h_2 = \frac{1}{3}\pi h_1\left(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2\right)$$

Aufgabe 8: *Zeichne folgende Zylinder.* (keine Lösung!)

$a)$ $r = 3\,\text{cm}\ ;\ h = 4\,\text{cm}$ $b)$ $r = 2\,\text{cm}\ ;\ h = 2\,\text{cm}$

$c)$ $r = 4\,\text{cm}\ ;\ h = 6\,\text{cm}$ $d)$ $r = 3\,\text{cm}\ ;\ h = 7\,\text{cm}$

$e)$ $r = 3,5\,\text{cm}\ ;\ h = 5,4\,\text{cm}$ $f)$ $r = 3,3\,\text{cm}\ ;\ h = 4,5\,\text{cm}$

$g)$ $r = 2,8\,\text{cm}\ ;\ h = 3,4\,\text{cm}$ $h)$ $r = 3,2\,\text{cm}\ ;\ h = 8,2\,\text{cm}$

$i)$ $r = 3,6\,\text{cm}\ ;\ h = 7,2\,\text{cm}$ $j)$ $r = 4,1\,\text{cm}\ ;\ h = 1\,\text{cm}$

$k)$ $r = 5,4\,\text{cm}\ ;\ h = 2,5\,\text{cm}$ $l)$ $r = 3,7\,\text{cm}\ ;\ h = 2,7\,\text{cm}$

Aufgabe 9: *Zeichne folgende Kegel.* (keine Lösung!)

$a)$ $r = 3\,\text{cm}$; $h = 4\,\text{cm}$ $b)$ $r = 2\,\text{cm}$; $h = 2\,\text{cm}$

$c)$ $r = 4\,\text{cm}$; $h = 6\,\text{cm}$ $d)$ $r = 3\,\text{cm}$; $h = 7\,\text{cm}$

$e)$ $r = 3,5\,\text{cm}$; $h = 5,4\,\text{cm}$ $f)$ $r = 3,3\,\text{cm}$; $h = 4,5\,\text{cm}$

$g)$ $r = 2,8\,\text{cm}$; $h = 3,4\,\text{cm}$ $h)$ $r = 3,2\,\text{cm}$; $h = 8,2\,\text{cm}$

$i)$ $r = 3,6\,\text{cm}$; $s = 7,4\,\text{cm}$ $j)$ $r = 4,1\,\text{cm}$; $s = 3\,\text{cm}$

$k)$ $r = 5,4\,\text{cm}$; $s = 4,5\,\text{cm}$ $l)$ $r = 3,7\,\text{cm}$; $s = 6,7\,\text{cm}$

Aufgabe 10: *Zeichne folgende Kegelstümpfe.* (keine Lösung!)

$a)$ $r_1 = 3\,\text{cm}$; $h_1 = 4\,\text{cm}$; $h_2 = 3\,\text{cm}$ $b)$ $r_1 = 4\,\text{cm}$; $h_1 = 5\,\text{cm}$; $h_2 = 3\,\text{cm}$

$c)$ $r_1 = 2\,\text{cm}$; $h_1 = 5\,\text{cm}$; $h_2 = 1\,\text{cm}$ $d)$ $r_1 = 3\,\text{cm}$; $h_1 = 2\,\text{cm}$; $h_2 = 5\,\text{cm}$

$e)$ $r_1 = 2,3\,\text{cm}$; $h_1 = 3,5\,\text{cm}$; $h_2 = 4,1\,\text{cm}$ $f)$ $r_1 = 3,2\,\text{cm}$; $h_1 = 4,8\,\text{cm}$; $h_2 = 4,4\,\text{cm}$

$g)$ $r_1 = 3,4\,\text{cm}$; $h_1 = 3,9\,\text{cm}$; $h_2 = 3,4\,\text{cm}$ $h)$ $r_1 = 4,3\,\text{cm}$; $h_1 = 2,9\,\text{cm}$; $h_2 = 3,7\,\text{cm}$

$i)$ $r_1 = 4,2\,\text{cm}$; $h_1 = 6,2\,\text{cm}$; $r_2 = 2,6\,\text{cm}$ $j)$ $r_1 = 5,2\,\text{cm}$; $h_1 = 3,3\,\text{cm}$; $r_2 = 3,3\,\text{cm}$

$k)$ $r_1 = 1,9\,\text{cm}$; $h_1 = 3,2\,\text{cm}$; $s = 6,5\,\text{cm}$ $l)$ $r_1 = 2,3\,\text{cm}$; $s = 5,6\,\text{cm}$; $h_2 = 3,1\,\text{cm}$

Aufgabe 11: *Zeichne die Netze der folgenden Zylinder.* (keine Lösung!)

$a)$ $r = 3\,\text{cm}$; $h = 4\,\text{cm}$ $b)$ $r = 2\,\text{cm}$; $h = 2\,\text{cm}$

$c)$ $r = 4\,\text{cm}$; $h = 6\,\text{cm}$ $d)$ $r = 3\,\text{cm}$; $h = 7\,\text{cm}$

$e)$ $r = 3,5\,\text{cm}$; $h = 5,4\,\text{cm}$ $f)$ $r = 3,3\,\text{cm}$; $h = 4,5\,\text{cm}$

$g)$ $r = 2,8\,\text{cm}$; $h = 3,4\,\text{cm}$ $h)$ $r = 3,2\,\text{cm}$; $h = 8,2\,\text{cm}$

$i)$ $r = 3,6\,\text{cm}$; $h = 7,2\,\text{cm}$ $j)$ $r = 4,1\,\text{cm}$; $h = 1\,\text{cm}$

$k)$ $r = 5,4\,\text{cm}$; $h = 2,5\,\text{cm}$ $l)$ $r = 3,7\,\text{cm}$; $h = 2,7\,\text{cm}$

Aufgabe 12: *Zeichne die Netze der folgenden Kegel.* (keine Lösung!)

$a)$ $r = 3\,\text{cm}$; $h = 4\,\text{cm}$

$b)$ $r = 2\,\text{cm}$; $h = 2\,\text{cm}$

$c)$ $r = 4\,\text{cm}$; $h = 6\,\text{cm}$

$d)$ $r = 3\,\text{cm}$; $h = 7\,\text{cm}$

$e)$ $r = 3,5\,\text{cm}$; $h = 5,4\,\text{cm}$

$f)$ $r = 3,3\,\text{cm}$; $h = 4,5\,\text{cm}$

$g)$ $r = 2,8\,\text{cm}$; $h = 3,4\,\text{cm}$

$h)$ $r = 3,2\,\text{cm}$; $h = 8,2\,\text{cm}$

$i)$ $r = 3,6\,\text{cm}$; $s = 7,4\,\text{cm}$

$j)$ $r = 4,1\,\text{cm}$; $s = 3\,\text{cm}$

$k)$ $r = 5,4\,\text{cm}$; $s = 4,5\,\text{cm}$

$l)$ $r = 3,7\,\text{cm}$; $s = 6,7\,\text{cm}$

Aufgabe 13: *Zeichne die Netze der folgenden Kegelstümpfe.* (keine Lösung!)

$a)$ $r_1 = 3\,\text{cm}$; $h_1 = 4\,\text{cm}$; $h_2 = 3\,\text{cm}$

$b)$ $r_1 = 4\,\text{cm}$; $h_1 = 5\,\text{cm}$; $h_2 = 3\,\text{cm}$

$c)$ $r_1 = 2\,\text{cm}$; $h_1 = 5\,\text{cm}$; $h_2 = 1\,\text{cm}$

$d)$ $r_1 = 3\,\text{cm}$; $h_1 = 2\,\text{cm}$; $h_2 = 5\,\text{cm}$

$e)$ $r_1 = 2,3\,\text{cm}$; $h_1 = 3,5\,\text{cm}$; $h_2 = 4,1\,\text{cm}$

$f)$ $r_1 = 3,2\,\text{cm}$; $h_1 = 4,8\,\text{cm}$; $h_2 = 4,4\,\text{cm}$

$g)$ $r_1 = 3,4\,\text{cm}$; $h_1 = 3,9\,\text{cm}$; $h_2 = 3,4\,\text{cm}$

$h)$ $r_1 = 4,3\,\text{cm}$; $h_1 = 2,9\,\text{cm}$; $h_2 = 3,7\,\text{cm}$

$i)$ $r_1 = 4,2\,\text{cm}$; $h_1 = 6,2\,\text{cm}$; $r_2 = 2,6\,\text{cm}$

$j)$ $r_1 = 5,2\,\text{cm}$; $h_1 = 3,3\,\text{cm}$; $r_2 = 3,3\,\text{cm}$

$k)$ $r_1 = 1,9\,\text{cm}$; $h_1 = 3,2\,\text{cm}$; $s = 6,5\,\text{cm}$

$l)$ $r_1 = 2,3\,\text{cm}$; $s = 5,6\,\text{cm}$; $h_2 = 3,1\,\text{cm}$

Aufgabe 14: *Berechne die fehlenden Größen (V, G, h, r) für einen Zylinder.*

a) $h = 3\,\text{cm} \quad , \quad r = 2\,\text{cm}$

b) $h = 4\,\text{cm} \quad , \quad G = 1,6\,\text{cm}^2$

c) $r = 2,8\,\text{cm} \quad , \quad V = 159,4\,\text{cm}^3$

d) $V = 238,1\,\text{cm}^3 \quad , \quad G = 65,6\,\text{cm}^2$

e) $G = 27,4\,\text{cm}^2 \quad , \quad h = 6,73\,\text{cm}$

f) $r = 5,14\,\text{cm} \quad , \quad h = 7,54\,\text{cm}$

g) $V = \frac{367}{13}\,\text{cm}^3 \quad , \quad h = \frac{23}{3}\,\text{cm}$

h) $G = \frac{39}{5}\,\text{cm}^2 \quad , \quad V = \frac{97}{4}\,\text{cm}^3$

i) $r = \frac{7}{4}\,\text{cm} \quad , \quad V = \frac{127}{6}\,\text{cm}^3$

j) $h = \frac{19}{7}\,\text{cm} \quad , \quad G = \frac{155}{8}\,\text{cm}^2$

k) $r = \frac{65}{17}\,\text{cm} \quad , \quad V = \frac{71}{3}\,\text{cm}^3$

l) $V = \frac{745}{12}\,\text{cm}^3 \quad , \quad h = \frac{37}{11}\,\text{cm}$

m) $V = \sqrt{211}\,\text{cm}^3 \quad , \quad G = \sqrt{113}\,\text{cm}^2$

n) $G = \sqrt{167}\,\text{cm}^2 \quad , \quad h = \sqrt{79}\,\text{cm}$

o) $d = \sqrt{61}\,\text{cm} \quad , \quad V = \sqrt{727}\,\text{cm}^3$

p) $V = \frac{\sqrt{543}}{21}\,\text{cm}^3 \quad , \quad G = \frac{368}{\sqrt{383}}\,\text{cm}^2$

q) $d = \frac{535}{\sqrt{457}}\,\text{cm} \quad , \quad h = \frac{\sqrt{236}}{5}\,\text{cm}$

r) $V = \sqrt{\frac{569}{45}}\,\text{cm}^3 \quad , \quad h = \sqrt{\frac{11}{\pi}}\,\text{cm}$

Aufgabe 15: *Berechne die fehlenden Größen (V, G, h, r, s) für einen Kegel.*

a) $h = 5\,\text{cm} \quad , \quad r = 3\,\text{cm}$

b) $s = 7\,\text{cm} \quad , \quad G = 12\,\text{cm}^2$

c) $r = 3,4\,\text{cm} \quad , \quad V = 42,7\,\text{cm}^3$

d) $V = 58,7\,\text{cm}^3 \quad , \quad G = 17,6\,\text{cm}^2$

e) $G = 38,4\,\text{cm}^2 \quad , \quad h = 7,84\,\text{cm}$

f) $r = \frac{7}{3}\,\text{cm} \quad , \quad s = \frac{23}{7}\,\text{cm}$

g) $V = \frac{123}{8}\,\text{cm}^3 \quad , \quad h = \frac{37}{6}\,\text{cm}$

h) $G = \frac{144}{11}\,\text{cm}^2 \quad , \quad V = \frac{93}{5}\,\text{cm}^3$

i) $r = \frac{33}{7}\,\text{cm} \quad , \quad V = \frac{256}{9}\,\text{cm}^3$

j) $h = \frac{17}{6}\,\text{cm} \quad , \quad G = \frac{81}{4}\,\text{cm}^2$

k) $r = \frac{23}{10}\,\text{cm} \quad , \quad V = \frac{56}{3}\,\text{cm}^3$

l) $V = \frac{95}{2}\,\text{cm}^3 \quad , \quad h = \frac{17}{12}\,\text{cm}$

m) $V = \sqrt{674}\,\text{cm}^3 \quad , \quad G = \sqrt{304}\,\text{cm}^2$

n) $G = \sqrt{230}\,\text{cm}^2 \quad , \quad h = \sqrt{80}\,\text{cm}$

o) $d = \sqrt{13}\,\text{cm} \quad , \quad V = \sqrt{77}\,\text{cm}^3$

p) $V = \frac{\sqrt{251}}{6}\,\text{cm}^3 \quad , \quad G = \frac{47}{\sqrt{18}}\,\text{cm}^2$

q) $d = \frac{\sqrt{78}}{4}\,\text{cm} \quad , \quad s = \frac{\sqrt{159}}{7}\,\text{cm}$

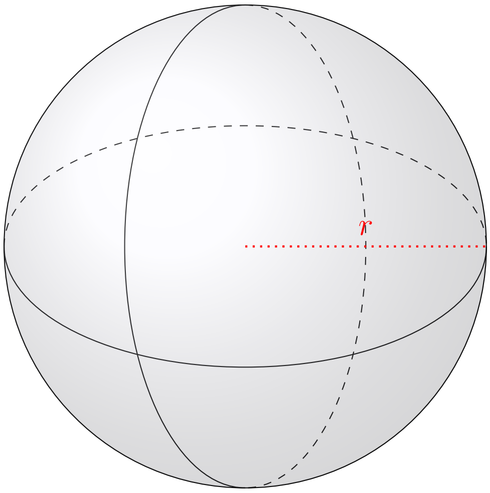
r) $G = \sqrt{\frac{3496}{261}}\,\text{cm}^3 \quad , \quad s = \sqrt{\frac{486}{37}}\,\text{cm}$

Aufgabe 16: *Ein zylindrischer Tank mit einer Höhe von* $2,4\,\mathrm{m}$ *und einem Durchmesser von* $3,3\,\mathrm{m}$ *soll mit Öl betankt werden. Wie viel Liter Öl sollten gestellt werden? Das Öl kostet* $0,70\,€$ *pro Liter und hat eine Dichte von* $786,2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*, berechne die Kosten für einen bis zu* 85% *gefüllten Tank und das Gewicht des Öls im Tank.*

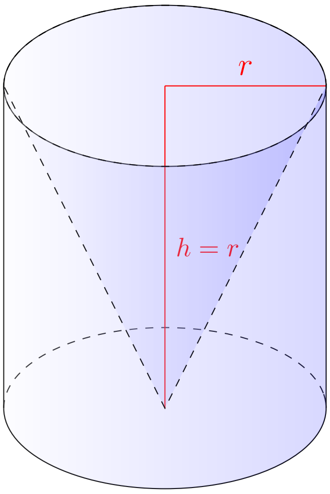
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.36) Lösungen zu Zylindern und Kegeln.

4.14 Kugeln

Ähnlich wie beim zweidimensionalen *Kreis* die *Größen* über ein Näherungsverfahren (ein *iteratives* Verfahren - also schrittweise) bestimmt wurden, kann auch das *Volumen* und die *Oberfläche* einer *Kugel* mit *iterativen* Methoden bestimmt werden. Dabei ist eine *Kugel* ein Objekt, dass von seinem *Mittelpunkt* ausgehend in drei *Raumdimensionen* immer den gleichen *Abstand* zu seiner *Oberfläche* besitzt.



Um das *Volumen* zu berechnen, wird der *Satz von Cavalieri* benutzt, welcher aussagt, dass Körper, die auf jeder *Höhe* den gleichen *Flächeninhalt* besitzen auch das gleiche *Volumen* haben müssen. Somit muss eine *Halbkugel* das gleiche *Volumen* haben wir ein *Zylinder* aus dem ein *Kegel* mit *Radius* r und *Höhe* $h = r$ herausgeschnitten wurde:



Da wie bereits anhand von *Pyramiden* und *Quadern* gezeigt, passen drei der *Kegel* aus der Abbildung in den *Zylinder*. Somit ist das *Volumen* einer *Halbkugel* gegeben als $\frac{2}{3}\pi r^3$ und folglich, dass einer *Kugel* durch:

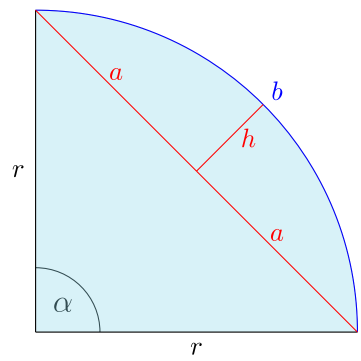
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{4.45}$$

Während bei der *Oberfläche* wieder ein *iteratives* Verfahren verwendet werden kann, sodass

$$O = 4\pi r^2 \tag{4.46}$$

gefunden werden kann.

Wie auch schon beim *Kreis* gibt es bei der *Kugel* sogenannte *Kugelabschnitte* und *Kugelausschnitte*. Für den *Kugelausschnitt* gilt erneut, dass es sich um einen *Bruchteil* einer *Kugel* handelt.



Die Abbildung ist auf zwei *Dimensionen* reduziert, zeigt aber die wichtigen *Größen* für die Berechnung. So ergibt sich für den *Kugelausschnitt*:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3}\pi r^2 h \\ O &= \pi r^2 \left(2h + a\right) \quad . \end{aligned} \tag{4.47}$$

Beim *Kugelabschnitt* muss der *Kegel* mit dem *Radius* a vom *Volumen subtrahiert* werden. Ebenso muss dies bei der *Oberfläche* berücksichtigt werden, sodass die *Grundfläche* des *Kegels* hinzu *addiert* werden muss, während die *Mantelfläche*[4] wegfällt. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi h^2 \left(3r - h\right) \\ O &= \pi \left(2rh + a^2\right) = \pi \left(4rh - h^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{4.48}$$

Da nun alle wichtigen *geometrischen* Körper und *Größen* eingeführt wurden, können diese nun auch alle vollständig berechnet werden. Um noch den Zusammenhang zwischen den *Winkeln* und den *Seitenlängen* eines Körpers in Verbindung zu bringen, wird im nachfolgenden Kapitel

[4]Die Mantelfläche ist die Oberfläche ohne Grund und Deckelfläche.

das Verständnis für *geometrische* Probleme weiter vertieft.

Informationen zu der Anzahl der *Ecken*, *Kanten* und *Flächen* eines Körpers sind im Anhang zu finden: 18.7 .

4.14.1 Übungsaufgaben zu Kugeln

Aufgabe 1: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugeln.*

$a)$ $r = 3\,\text{cm}$,	$b)$ $r = \pi\,\text{cm}$,	$c)$ $d = 4\,\text{cm}$,
$d)$ $d = 0,5\,\text{cm}$,	$e)$ $r = 2,718\,\text{cm}$,	$f)$ $d = \frac{6}{7}\,\text{cm}$.

Aufgabe 2: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelausschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

$a)$ $r = 4\,\text{cm}$	und	$\alpha = 90°$	$b)$ $r = 7\,\text{cm}$	und	$\alpha = 45°$
$c)$ $r = 3,33\,\text{cm}$	und	$\alpha = 100°$	$d)$ $r = \frac{32}{7}\,\text{cm}$	und	$\alpha = 12°$
$e)$ $r = \frac{23}{33}\,\text{cm}$	und	$\alpha = 88°$	$f)$ $r = \sqrt{8}\,\text{cm}$	und	$\alpha = 177°$
$g)$ $r = \ln 6\,\text{cm}$	und	$\alpha = \frac{5}{6}\pi\,\text{rad}$	$h)$ $r = e\,\text{cm}$	und	$\alpha = \frac{1}{7}\pi\,\text{rad}$

Aufgabe 3: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelabschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

$a)$ $r = 8\,\text{cm}$	und	$\alpha = 90°$	$b)$ $r = 3\,\text{cm}$	und	$\alpha = 33°$
$c)$ $r = 6,12\,\text{cm}$	und	$\alpha = 134°$	$d)$ $r = \frac{21}{4}\,\text{cm}$	und	$\alpha = 5°$
$e)$ $r = \frac{7}{13}\,\text{cm}$	und	$\alpha = 87°$	$f)$ $r = \sqrt{14}\,\text{cm}$	und	$\alpha = 2°$
$g)$ $r = \ln 5\,\text{cm}$	und	$\alpha = \frac{3}{11}\pi\,\text{rad}$	$h)$ $r = e\,\text{cm}$	und	$\alpha = \frac{1}{9}\pi\,\text{rad}$

Aufgabe 4: *Berechne alle Felder der Tabelle. Es handelt sich hierbei um verschiedene Kugeln.*

	1	2	3	4	5	6
r	11			8,62		
V		43			$\frac{137}{3}$	
O			541			$\frac{287}{5}$

Aufgabe 5: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelabschnitte.*

a) $r = 7\,\text{cm}$ und $a = 3\,\text{cm}$ *b)* $r = 3{,}4\,\text{cm}$ und $a = 1{,}1\,\text{cm}$

c) $r = 7{,}12\,\text{cm}$ und $a = 2{,}55\,\text{cm}$ *d)* $r = \dfrac{23}{4}\,\text{cm}$ und $a = \dfrac{7}{3}\,\text{cm}$

e) $r = \dfrac{17}{11}\,\text{cm}$ und $a = \dfrac{3}{5}\,\text{cm}$ *f)* $r = \sqrt{17}\,\text{cm}$ und $a = \dfrac{7}{6}\,\text{cm}$

g) $r = \pi\,\text{cm}$ und $a = \ln 6\,\text{cm}$ *h)* $r = e\,\text{cm}$ und $a = \sqrt{2}\,\text{cm}$

Aufgabe 6: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelabschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

a) $b = 9\,\text{cm}$ und $\alpha = 60°$ *b)* $b = 3{,}7\,\text{cm}$ und $\alpha = 44°$

c) $b = 6{,}6\,\text{cm}$ und $\alpha = 154°$ *d)* $b = \dfrac{22}{3}\,\text{cm}$ und $\alpha = 26°$

e) $b = \dfrac{7}{5}\,\text{cm}$ und $\alpha = 76°$ *f)* $b = \sqrt{22}\,\text{cm}$ und $\alpha = 64°$

g) $b = \ln 9\,\text{cm}$ und $\alpha = \dfrac{4}{5}\pi\,\text{rad}$ *h)* $b = e\,\text{cm}$ und $\alpha = \dfrac{4}{11}\pi\,\text{rad}$

Aufgabe 7: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelabschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

$a)$ $r = 7\,\text{cm}$	und $b = 5\,\text{cm}$	$b)$ $r = 3\,\text{cm}$	und $b = 5{,}4\,\text{cm}$
$c)$ $r = 6{,}42\,\text{cm}$	und $b = 8{,}7\,\text{cm}$	$d)$ $r = \frac{33}{4}\,\text{cm}$	und $b = 13{,}15\,\text{cm}$
$e)$ $r = \frac{13}{8}\,\text{cm}$	und $b = \frac{11}{4}\,\text{cm}$	$f)$ $r = \sqrt{18}\,\text{cm}$	und $b = \frac{35}{6}\,\text{cm}$
$g)$ $r = \ln 11\,\text{cm}$	und $b = \sqrt{23}\,\text{cm}$	$h)$ $r = e\,\text{cm}$	und $b = \ln 8\,\text{cm}$

Aufgabe 8: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelausschnitte.*

$a)$ $r = 5\,\text{cm}$	und $a = 2\,\text{cm}$	$b)$ $r = 3{,}9\,\text{cm}$	und $a = 1{,}6\,\text{cm}$
$c)$ $r = 6{,}62\,\text{cm}$	und $a = 2{,}85\,\text{cm}$	$d)$ $r = \frac{27}{4}\,\text{cm}$	und $a = \frac{5}{3}\,\text{cm}$
$e)$ $r = \frac{21}{9}\,\text{cm}$	und $a = \frac{8}{5}\,\text{cm}$	$f)$ $r = \sqrt{19}\,\text{cm}$	und $a = \frac{11}{8}\,\text{cm}$
$g)$ $r = 2\pi\,\text{cm}$	und $a = \ln 15\,\text{cm}$	$h)$ $r = e^2\,\text{cm}$	und $a = \ln(22)\,\text{cm}$

Aufgabe 9: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelausschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

$a)$ $b = 8\,\text{cm}$	und $\alpha = 100°$	$b)$ $b = 4{,}7\,\text{cm}$	und $\alpha = 83°$
$c)$ $b = 9{,}2\,\text{cm}$	und $\alpha = 139°$	$d)$ $b = \frac{55}{6}\,\text{cm}$	und $\alpha = 34°$
$e)$ $b = \frac{11}{5}\,\text{cm}$	und $\alpha = 111°$	$f)$ $b = \sqrt{26}\,\text{cm}$	und $\alpha = 72°$
$g)$ $b = \ln 11\,\text{cm}$	und $\alpha = \frac{6}{7}\pi\,\text{rad}$	$h)$ $b = e\,\text{cm}$	und $\alpha = \frac{11}{12}\pi\,\text{rad}$

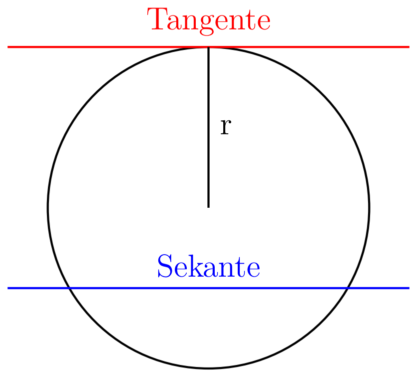
Aufgabe 10: *Bestimme das Volumen V und die Oberfläche O für die gegebenen Werte der Kugelausschnitte.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

$a)\ r = 6,5\,\text{cm}$	und $b = 11\,\text{cm}$	$b)\ r = 5\,\text{cm}$	und $b = 7,3\,\text{cm}$
$c)\ r = 5,9\,\text{cm}$	und $b = 8,73\,\text{cm}$	$d)\ r = \frac{28}{5}\,\text{cm}$	und $b = 11,6\,\text{cm}$
$e)\ r = \frac{12}{7}\,\text{cm}$	und $b = \frac{16}{9}\,\text{cm}$	$f)\ r = \sqrt{31}\,\text{cm}$	und $b = \frac{53}{7}\,\text{cm}$
$g)\ r = \ln 13\,\text{cm}$	und $b = \sqrt{27}\,\text{cm}$	$h)\ r = e\,\text{cm}$	und $b = \ln 12,3\,\text{cm}$

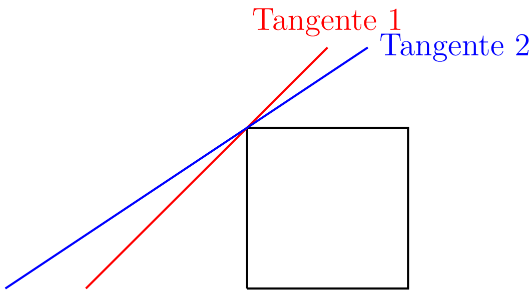
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.37) Lösungen zu Kugeln.

4.15 Tangenten und Sekanten

Am Ende dieses Kapitels werden noch zwei spezielle *Geraden* in Bezug auf andere Körper eingeführt. Die erste spezielle *Gerade* ist die *Sekante*, welche einen Körper schneidet. Dabei hat die *Sekante* oftmals mehr als nur einen *Schnittpunkt*, da ein *geometrisches* Objekt nach allen *Seiten* begrenzt ist. Die zweite spezielle *Geradenart* wird *Tangente* genannt, welche einen Körper nur **berührt** aber **nicht schneidet**. Somit hat eine *Tangente* nur einen *Berührpunkt* und steht bei einem *Kreis orthogonal* auf dem *Radius*.



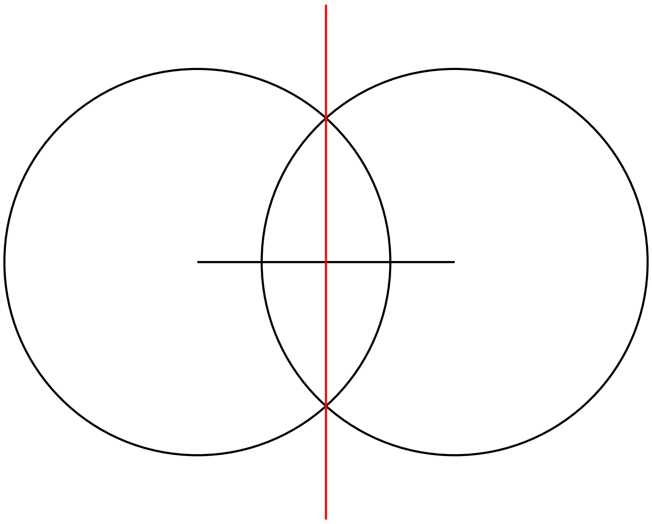
Die Abbildung zeigt anhand eines *Kreises* deutlich die Unterschiede dieser *Geradenarten*. Die *Tangente* ist dabei die wichtigere Art, da über diese in den nachfolgenden Kapiteln weitere mathematische Definitionen und Erkenntnisse gewonnen werden können. Bei Objekten oder Figuren, welche keine *Eckpunkte* verfügen, existiert zu jedem *Punkt* des Objekts oder der Figur nur eine einzige *Tangente*, während an *Eckpunkten* eine unendliche Anzahl an *Tangenten* existiert.



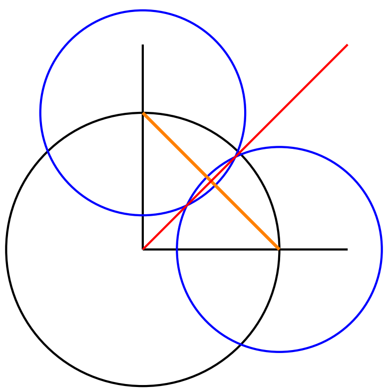
Die Abbildung zeigt, dass an jedem *Eckpunkt* mehrere *Tangenten* existieren. Der Unterschied zwischen *Eckpunkten* und „glatten“ Figuren wird im Kapitel „Differentiation und Integration“ eine entscheidende Bedeutung zukommen.

4.16 Zirkelkonstruktionen

Mit Hilfe des Zirkels können viele spezielle *Geraden* konstruiert werden. In diesem Abschnitt werden solche häufig vorkommende Konstruktionen vorgestellt. Zu erst wird die Konstruktion einer *Orthogonalen* besprochen - Hierbei wird eine *Strecke* gezeichnet und an deren Enden ein *Kreis* mit dem Zirkel gezogen, welcher einen *Radius* haben soll, welcher größer ist als die Hälfte der zuvor gezeichneten *Strecke*. Wenn die beiden *Schnittpunkte* der Kreise verbunden werden, entsteht dadurch eine *Orthogonale* zur *Strecke* (in rot).

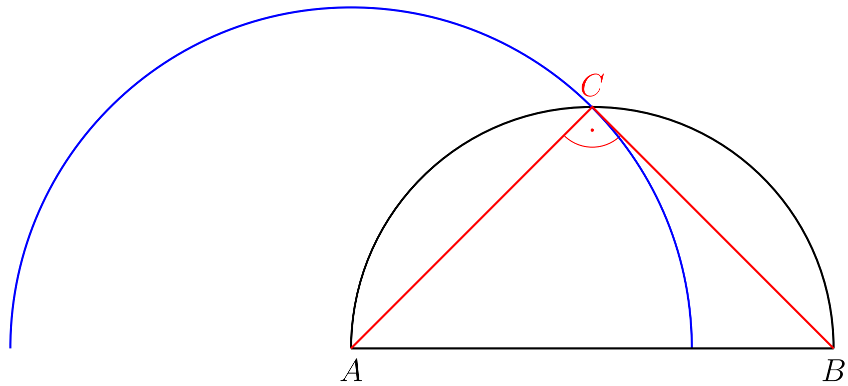


Wenn die beiden *Kreise* dabei den gleich großen *Radius* besitzen, wird damit eine spezielle *Orthogonale* gefunden, die sogenannte *Mittelsenkrechte*, welche die *Strecke* in zwei gleich lange *Teilstrecken* unterteilt.
Ebenso lässt sich ein *Winkel* mit dem Zirkel halbieren. Dazu wird im *Schnittpunkt* der *Schenkel* des *Winkels* ein *Kreis* mit dem Zirkel gezogen. An den *Schnittpunkten* des *Kreises* mit den *Schenkeln* werden zwei *Kreise* mit gleichem *Radius* (in blau) gezeichnet. Wenn die *Schnittpunkt* dieser *Kreise* mit einer *Geraden* verbunden werden, entsteht dadurch die *Winkelhalbierende* des Winkels (in rot).

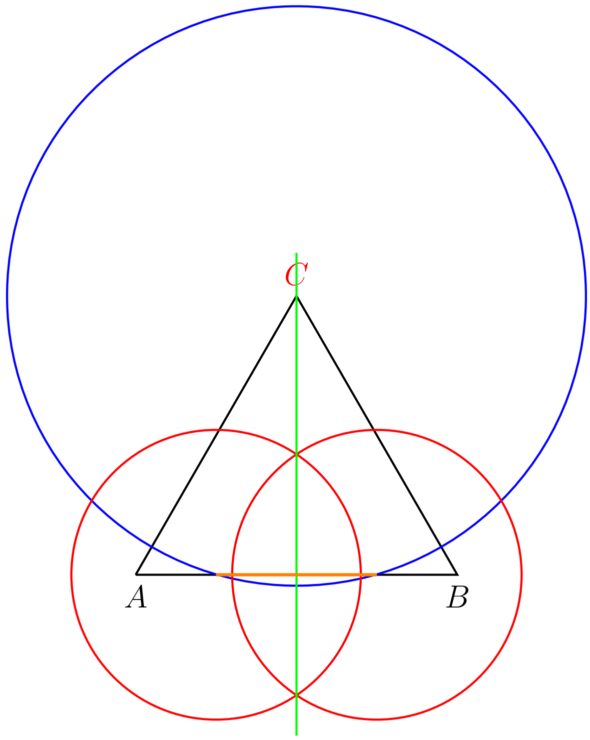


Es ist deutlich zu erkennen, dass die orange *Strecke* durch die *Winkelhalbierende* halbiert wird. Somit zeigt sich, dass die Konstruktion der *Winkelhalbierenden* auf einer *Mittelsenkrechten* beruhen.

Besonders für das *Dreieck* existieren viele Zirkelkonstruktionen für spezielle *Strecken*. So kann mit dem *Satz des Thales* immer ein *rechtwinkliges Dreieck* ohne großen Aufwand konstruiert werden. Dazu wird die längste Seite gezeichnet und in der Mitte dieser *Seite* des *Dreiecks* ein *Halbkreis* gezogen, sodass dieser bei den *Eckpunkten* der gezeichneten *Seite* endet. Anschließend kann eine Seite durch abmessen eines *Winkels* eingezeichnet werden bis diese den *Kreis* berührt, sodass alle *Eckpunkte* des *rechtwinkligen Dreiecks* somit ermittelt sind. Aber auch eine *Länge* der *Seite* kann eingezeichnet werden, indem diese *Länge* als *Zirkelradius* eingestellt und ein *Kreis* mit dem Mittelpunkt an dem zutreffenden *Eckpunkt* gezeichnet wird. Der *Schnittpunkt* der beiden *Kreise* ist dann der gesuchte *Eckpunkt* des *rechtwinkligen Dreieckes*.



In einem *Dreieck* können auch die *Höhen* mit Hilfe des Zirkels konstruiert werden. So wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt im *Eckpunkt* (in blau) zeichnet. An den *Schnittpunkten* des Kreises mit der gegenüberliegenden (manchmal verlängerten) *Seite* werden anschließend *Kreise* mit dem gleichen *Radius* (in rot) gezogen. Werden die *Schnittpunkte* der beiden *Kreisen* mit den gleichen *Radius* mit einer *Gerade* verbunden ist die *Höhe* (in grün) gefunden.



Es wird wieder deutlich, dass die orange *Strecke* durch die gesuchte *Strecke* halbiert wird. Somit zeigt sich auch, dass die Konstruktion der *Höhe* in einem *Dreieck* auf einer *Mittelsenkrechten* beruhen. Folglich bildet die *Mittelsenkrechte* das Fundament zu weiteren geometrischen Konstruktionen.

Mittels dieser Konstruktionen können über Kombination alle weiteren Größen konstruiert werden. So kann ein *Dreieck* gezeichnet werden, indem an den Enden einer *Seiten Kreise* mit jeweils des *Radius* mit der *Länge* der jeweiligen *Seiten* gezogen werden. Der *Schnittpunkt* dieser *Kreise* ergibt dann den letzten Eckpunkt. Auch ein *regelmäßiges Sechseck* kann leicht konstruiert werden, indem ein *Kreis* gezeichnet wird und anschließend an einem beliebigen Punkt auf dem *Kreis* als Mittelpunkt wieder ein *Kreis* mit gleichem *Radius* gezogen wird. Die beiden *Schnittpunkte* bilden dann wieder neue Mittelpunkt für weitere *Kreise* mit diesem *Radius*, solange bis sechs Punkte bestimmt wurden. Wenn diese Punkte verbunden werden, entsteht ein *regelmäßiges Sechseck*. Wenn jeweils ein Punkt ausgelassen wird, entsteht dadurch wiederum ein *gleichmäßiges Dreieck*.

4.16.1 Übungsaufgaben zu Zirkelkonstruktionen

Aufgabe 1: *Zeichne folgende Strecken s und halbiere diese mit einer orthogonalen Strecke mit Hilfe eines Zirkels.* (Keine Lösung!)

$a)$ $s = 4\,\text{cm}$	$b)$ $s = 6\,\text{cm}$	$c)$ $s = 8\,\text{cm}$
$d)$ $s = 5,5\,\text{cm}$	$e)$ $s = 4,8\,\text{cm}$	$f)$ $s = 6,1\,\text{cm}$
$g)$ $s = 8,2\,\text{cm}$	$h)$ $s = 5,9\,\text{cm}$	$i)$ $s = 6,4\,\text{cm}$
$j)$ $s = 4,7\,\text{cm}$	$k)$ $s = 5,3\,\text{cm}$	$l)$ $s = 7,2\,\text{cm}$

Aufgabe 2: *Zeichne folgende Winkel α und halbiere diese mit Hilfe eines Zirkels.* (Keine Lösung!)

$a)$ $\alpha = 90°$	$b)$ $\alpha = 45°$	$c)$ $\alpha = 120°$
$d)$ $\alpha = 55°$	$e)$ $\alpha = 110°$	$f)$ $\alpha = 160°$
$g)$ $\alpha = 20°$	$h)$ $\alpha = 10°$	$i)$ $\alpha = 80°$
$j)$ $\alpha = 33°$	$k)$ $\alpha = 142°$	$l)$ $\alpha = 7°$

Aufgabe 3: *Zeichne die Dreiecke und konstruiere alle Winkelhalbierenden, alle Höhen und alle Mittelsenkrechten. Verbinde und messe die Strecke zwischen ihren Schnittpunkten. Beschreibe dann die Auffälligkeit der Verhältnisse der Strecken zwischen den ermittelten Schnittpunkten. Konstruiere anschließend alle Winkelhalbierenden. Zeichne einen Kreis mit dem Schnittpunkt der Winkelhalbierenden als Mittelpunkt, der alle Seiten tangiert. Zeichne danach einen Kreis mit dem Schnittpunkt der Mittelsenkrechten als Mittelpunkt, der alle Ecken des Dreiecks berührt.* (Keine Lösung der Zeichnungen!)

$a)$ $a = 9\,\text{cm}$; $b = 8\,\text{cm}$ und $\gamma = 30°$	$b)$ $c = 10\,\text{cm}$; $b = 7\,\text{cm}$ und $\alpha = 50°$
$c)$ $a = 9\,\text{cm}$; $b = 11\,\text{cm}$ und $\gamma = 65°$	$d)$ $a = 8\,\text{cm}$; $c = 10\,\text{cm}$ und $\beta = 80°$
$e)$ $a = 7,5\,\text{cm}$; $c = 9\,\text{cm}$ und $b = 6\,\text{cm}$	$f)$ $a = 5\,\text{cm}$; $c = 8\,\text{cm}$ und $b = 5\,\text{cm}$

Aufgabe 4: *Zeichne die Kreise mit den Radien $r_1 = 3cm$ und $r_2 = 4cm$, sodass die Kreislinien genau zwei gemeinsame Punkte besitzen.*

Aufgabe 5: *Zeichne auf zwei komplett unterschiedliche Arten die Kreise mit den Radien $r_1 = 3cm$ und $r_2 = 4cm$, sodass die Kreislinien genau einen gemeinsamem Punkt besitzen.*

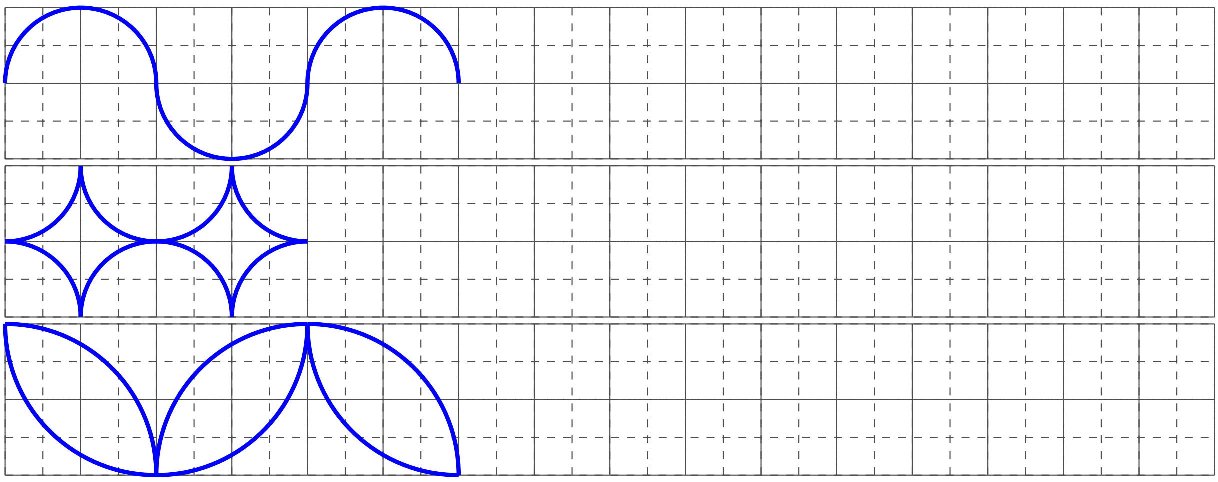
Aufgabe 6: *Zeichne auf zwei komplett unterschiedliche Arten die Kreise mit den Radien $r_1 = 3cm$ und $r_2 = 4cm$, sodass die Kreislinien keinen gemeinsamen Punkt besitzen.*

Aufgabe 7: *Zeichne die Kreise mit den Radien $r_1 = 3cm$ und $r_2 = 4cm$, sodass die Kreislinien keinen gemeinsamen Punkt und die Kreislinien überall den gleichen Abstand besitzen.*

Aufgabe 8: *Zeichne die Kreise mit den Radien $r_1 = 3cm$ und $r_2 = 4cm$ in ein Koordinatensystem (mit $1\,cm \mathrel{\hat{=}} 1$ Schritt), wobei der erste Kreis seinen Mittelpunkt bei $M_1(4|3)$ und der zweite Kreis seinen Mittelpunkt bei $M_2(8|\frac{15}{2})$ hat. Bestimme die Länge der Strecke $\overline{M_1M_2}$ und gib alle ganzzahlige Punkte an, die im Koordinatensystem von beiden Kreisen gleichzeitig eingeschlossen sind.*

Aufgabe 9: *Zeichne die Punkte $A(1|2)$, $B(3|4)$, $C(5|5)$ und $D(7|2)$ in ein Koordinatensystem (mit $1\,cm \mathrel{\hat{=}} 1$ Schritt). Die Länge der Strecke $\left|\overline{AB}\right|$ beschreibt den Radius r_1 des Kreises mit dem Mittelpunkt in B, während die Länge der Strecke $\left|\overline{CD}\right|$ den Radius r_2 des Kreises mit dem Mittelpunkt in C beschreibt. Gib alle ganzzahlige Punkte an, die im Koordinatensystem von beiden Kreisen gleichzeitig eingeschlossen sind.*

Aufgabe 10: *Setze die Kreismuster durch genaue Zeichnungen mit dem Zirkel fort.* (keine Lösungen!)

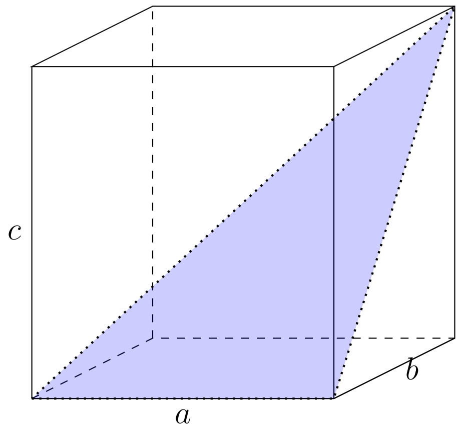


Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.37) Lösungen zu Zirkelkonstruktionen.

4.17 Gemischte Geometrieaufgaben

Weitere Behauptung zur Geometrie zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Aufgabe 1: *Berechne den Flächeninhalt und die Hypotenuse des markierten Dreieckes.*



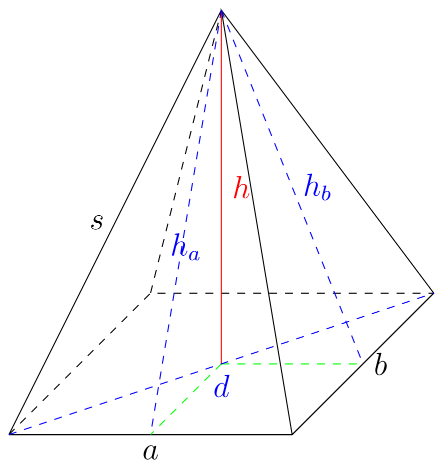
Der Quader besitzt

a) eine Länge a von 12 cm, eine Breite b von 7 cm und eine Höhe c von 15 cm.

b) eine Länge a von $13,3$ cm, eine Breite b von $6,24$ cm und eine Höhe c von $17,41$ cm.

c) eine Länge a von $24,73$ cm, eine Breite b von $\sqrt{42}$ cm und eine Höhe c von $0,214$ m.

Aufgabe 2: *Berechne das Volumen der Pyramide.*



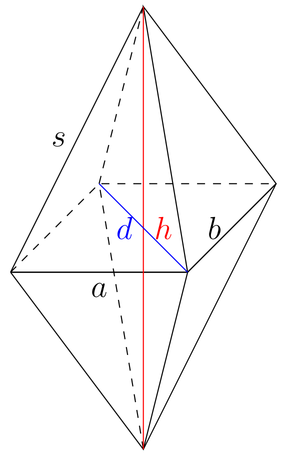
Die Pyramide besitzt

a) eine Seitenhöhe h_a von 8 cm, eine quadratische Grundfläche mit $a = b$ von $4,5$ cm.

b) eine Kantenlänge s von $11,3$ cm, eine Breite b von $5,17$ cm und eine Länge a von $7,65$ cm.

c) eine Kantenlänge s von $12,7$ cm, eine Breite b von $\sqrt{29}$ cm und eine Grunddiagonalenlänge d von $8,7$ cm.

Aufgabe 3: *Berechne das Volumen des Oktaeders.*



Das Oktaeder besitzt

$a)$ eine Höhe h von $9,25\,\text{cm}$, eine quadratische Grundfläche mit $a = b$ von $6,5\,\text{cm}$.

$b)$ eine Kantenlänge s von $12,7\,\text{cm}$, eine Breite b von $4,8\,\text{cm}$ und eine Länge a von $5,3\,\text{cm}$.

$c)$ eine Kantenlänge s von $8,93\,\text{cm}$, eine Breite b von $\sqrt{56}\,\text{cm}$ und eine Mitteldiagonalenlänge d von $0,136\,\text{m}$.

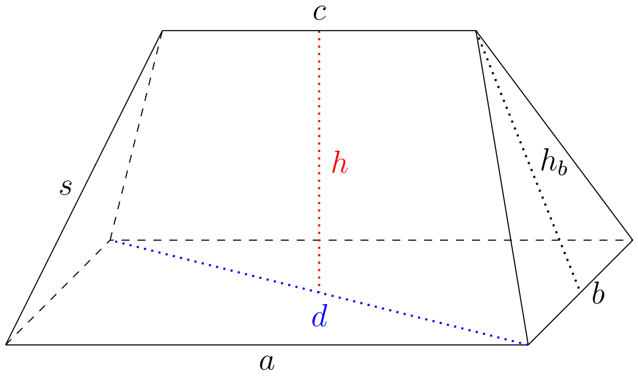
Aufgabe 4: *In eine Kugel mit dem Radius* $r = 14\,\text{cm}$ *soll ein Würfel positioniert werden, dessen Ecken die Kugeloberfläche tangieren. Der Würfel soll aus Iridium mit einer Dichte von* $\rho = 22,56\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ *gebaut werden. Bestimme die Kantenlänge des Würfels und bestimme sein Gewicht.*

Aufgabe 5: *Ein quaderförmiger Kuchenteig mit den Maßen* $a = 63\,\text{cm}$, $b = 31,5\,\text{cm}$ *und* $c = 2,25\,\text{cm}$ *soll aufgerollt entlang von b zu einem Zylinder aufgerollt werden. Welchen Radius r hat dann die Grundfläche des Zylinders?*

Aufgabe 6: *Ein zylinderförmige Kuchenteigrolle mit den Maßen* $r = 12\,\text{cm}$ *und* $h = 45\,\text{cm}$ *soll in 12 Teile zerschnitten werden. Aus diesen Stücken sollen Kugeln geformt werden. Welchen Radius r haben diese Kugeln?*

Aufgabe 7: *In eine quaderförmige Karton sollen 12 Kugel mit einem Radius von* $r = 3,5\,\text{cm}$ *verpackt werden. Berechne die Fläche, die minimal benötigt wird um 12 Kugeln zu verpacken und berechne wie viel Prozent Luftanteil sich der Verpackung befindet.*

Aufgabe 8: *Berechne das Volumen und die Oberfläche des Körpers.*



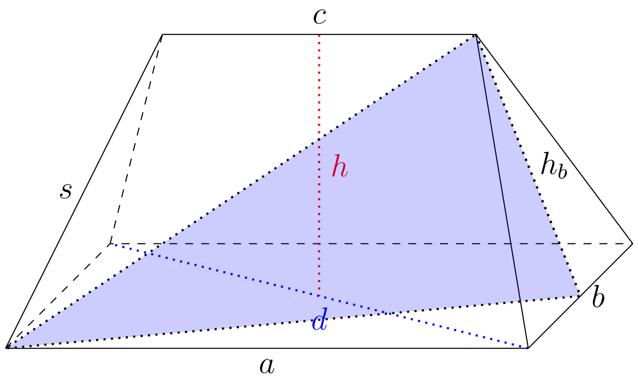
Der abgebildete Körper besitzt

a) eine Höhe h von $3,3\,\text{cm}$, eine Länge a von $6,5\,\text{cm}$ und eine Breite $4,2\,\text{cm}$ mit der Strecke $c = 2\,\text{cm}$.

b) eine Seitenhöhe h_b von $4\,\text{cm}$, eine Breite b von $4,8\,\text{cm}$ und eine Länge a von $5,3\,\text{cm}$ mit der Strecke $c = 3,2\,\text{cm}$.

c) eine Kantenlänge s von $7,27\,\text{cm}$, eine Breite b von $3,62\,\text{cm}$ und eine Diagonalenlänge d von $9,28\,\text{cm}$ mit der Strecke $c = 5,12\,\text{cm}$.

Aufgabe 9: *Berechne die Fläche des eingezeichneten Dreiecks.*



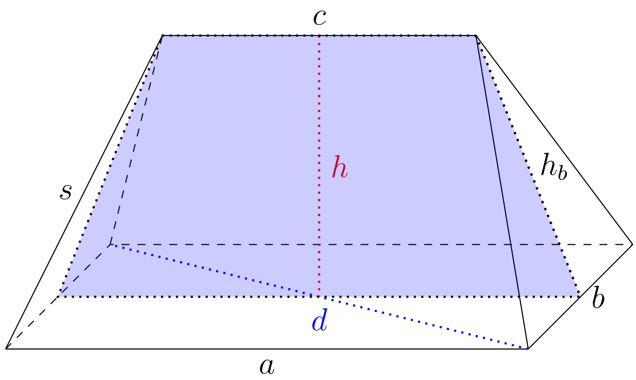
Der abgebildete Körper besitzt

a) eine Höhe h von $2,64\,\text{cm}$, eine Länge a von $5,65\,\text{cm}$ und eine Breite $4,06\,\text{cm}$ mit der Strecke $c = 3,94\,\text{cm}$.

b) eine Seitenhöhe s von $3,58\,\text{cm}$, eine Breite b von $2,58\,\text{cm}$ und eine Länge a von $6,21\,\text{cm}$ mit der Strecke $c = 4,52\,\text{cm}$.

c) eine Kantenlänge s von $\sqrt{50}\,\text{cm}$, eine Breite b von $\sqrt{13}\,\text{cm}$ und eine Diagonalenlänge d von $\sqrt{70}\,\text{cm}$ mit der Strecke $c = \sqrt{27}\,\text{cm}$.

Aufgabe 10: *Berechne die Fläche des eingezeichneten Trapez.*



Der abgebildete Körper besitzt

a) eine Höhe h von $3,74\,\text{cm}$, eine Länge a von $6,12\,\text{cm}$ und eine Breite $4,34\,\text{cm}$ mit der Strecke $c = 4,28\,\text{cm}$.

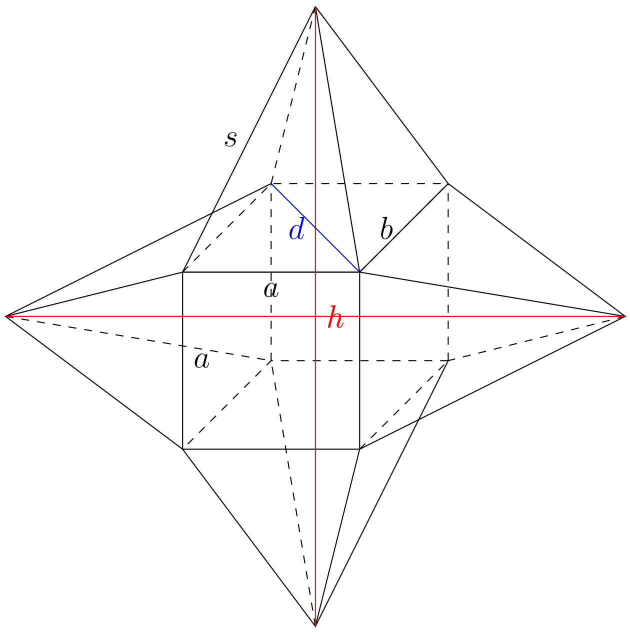
b) eine Seitenhöhe s von $3,77\,\text{cm}$, eine Breite b von $2,67\,\text{cm}$ und eine Länge a von $7,55\,\text{cm}$ mit der Strecke $c = 5,43\,\text{cm}$.

c) eine Kantenlänge s von $\sqrt{66}\,\text{cm}$, eine Breite b von $\sqrt{17}\,\text{cm}$ und eine Diagonalenlänge d von $\sqrt{83}\,\text{cm}$ mit der Strecke $c = 0,036m$.

Aufgabe 11: *Aus einem Zylinder mit dem Radius* $r = 4\,\text{cm}$ *und einer Höhe* $h = 9\,\text{cm}$ *soll an den Enden ein Kegelstumpf mit dem Grundflächenradius* $r_1 = 3\,\text{cm}$ *und Abschnittsradius* $r_2 = 2,33\,\text{cm}$ *mit einer Höhe von* $4,5\,\text{cm}$ *herausgeschnitten werden. Berechne das Volumen des resultierenden Körpers.*

Aufgabe 12: *Aus einem Zylinder mit dem Radius* $r = 5\,\text{cm}$ *und einer Höhe* $h = 12,7\,\text{cm}$ *soll an den Enden eine Halbkugel mit dem Radius von* $4,5\,\text{cm}$ *herausgeschnitten werden. Berechne das Volumen des resultierenden Körpers.*

Aufgabe 13: *Berechne das Volumen des abgebildeten Körpers.*



Der Körper besitzt

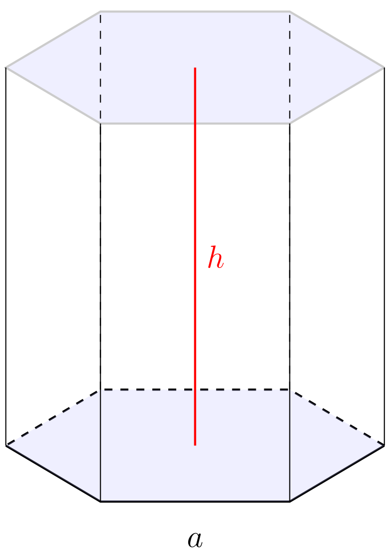
a) eine Kantenlänge s von $4,25\,\text{cm}$, eine quadratische Grundfläche mit $a = b$ von $5,1\,\text{cm}$.

b) eine Kantenlänge s von $9,42\,\text{cm}$, eine Breite b von $5,25\,\text{cm}$ und eine Länge a von $3,73\,\text{cm}$.

c) einen Würfel in der Mitte mit einer Kantenlänge von $3\,\text{cm}$ und einer Kantenlänge s von $0,061\,\text{m}$.

Aufgabe 14: *In einem Würfel mit der Kantenlänge* $a = 7,17\,\text{cm}$ *soll ein Oktaeder so gestellt werden, dass das Oktaeder mit seinen Ecken die Seiten des alten Würfels in der Mitte berührt. Wie groß ist das Volumen des Oktaeders? Welche Verhältnisse lassen sich aufstellen?*

Aufgabe 15: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Hexagonprisma.*



Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundfläche und

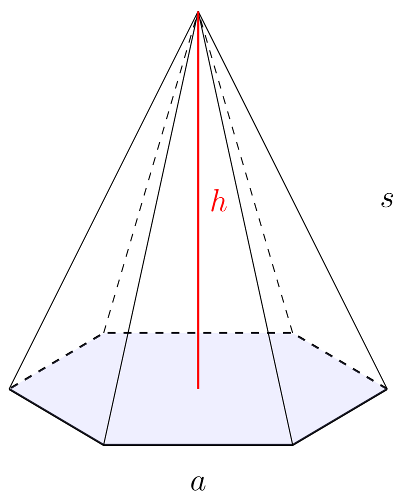
a) eine Höhe h von $7\,\text{cm}$ und eine Grundfläche G von $30\,\text{cm}^2$.

b) eine Höhe h von $3,4\,\text{cm}$ und eine Kantenlänge vom Hexagon a von $2,2\,\text{cm}$.

c) eine Höhe h von $6,4\,\text{cm}$ und eine Grundfläche G, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r = 5,5\,\text{cm}$ liegen.

d) eine Höhe h von $5,8\,\text{cm}$ und eine Grundfläche G, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 13\,\text{cm}$ liegen.

Aufgabe 16: *Berechne das Volumen und die Oberfläche von der Hexagonpyramide.*



Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundfläche und

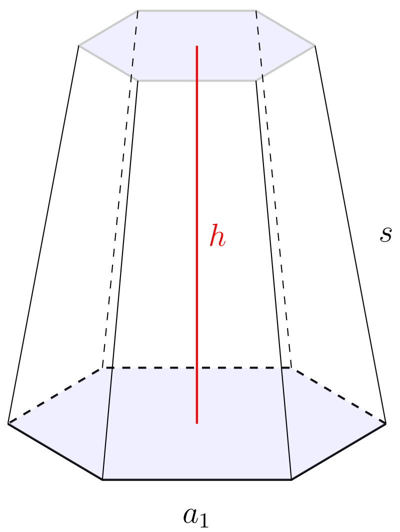
a) eine Höhe h von $4\,\text{cm}$ und eine Grundfläche G von $12\,\text{cm}^2$.

b) eine Höhe h von $6,2\,\text{cm}$ und eine Kantenlänge vom Hexagon a von $3\,\text{cm}$.

c) eine Höhe h von $78\,\text{mm}$ und eine Grundfläche G, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r = 2,4\,\text{cm}$ liegen.

d) eine Kante s von $1,25\,\text{dm}$ und eine Grundfläche G, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Durchmesser $d = 3,7\,\text{cm}$ liegen.

Aufgabe 17: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Hexagonpyramidenstumpf.*



Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grund- und Abschnittsfläche und

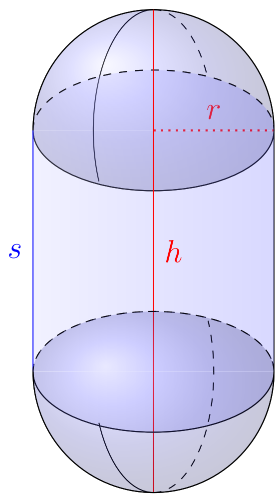
a) eine Höhe h von $3\,\text{cm}$, eine Grundfläche G_1 von $12\,\text{cm}^2$ und eine Abschnittsfläche G_2 von $6\,\text{cm}^2$.

b) eine Höhe h von $4\,\text{cm}$, eine Kantenlänge vom unteren Hexagon a_1 von $2\,\text{cm}$ und vom oberen Hexagon a_2 von $1,3\,\text{cm}$.

c) eine Höhe h von $6\,\text{cm}$ und eine Grundfläche G_1, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r_1 = 3,2\,\text{cm}$ liegen, während die Abschnittsfläche G_2 ein Hexagon aufweist mit einer Kantenlänge a_2 von $0,5\,\text{cm}$.

d) eine Kante s von $14,5\,\text{cm}$ und eine Grundfläche G_1, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Durchmesser $d_1 = 3,7\,\text{cm}$ liegen, während die Abschnittsfläche G_2 ein Hexagon besitzt, dessen Eckpunkte auf einen Kreis mit Radius $r_2 = 0,6\,\text{cm}$ liegen.

Aufgabe 18: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Körper.*



Der Körper besitzt

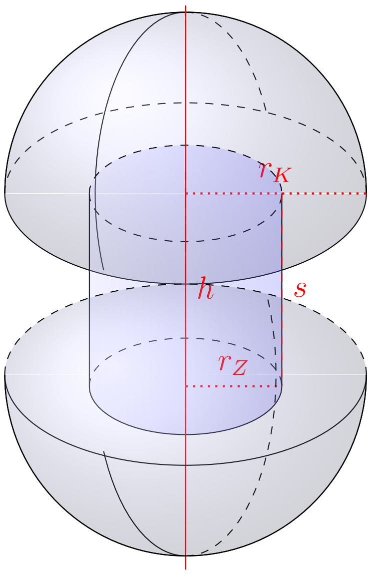
a) einen Radius r von 3 cm und einen Kantenlänge s von 4 cm.

b) einen Radius r von 5, 6 cm und einen Kantenlänge s von 3, 2 cm.

c) einen Radius r von 2, 6 cm und eine Höhe h von 9, 3 cm.

d) einen Kantenlänge s von 6, 74 cm und eine Höhe h von 11, 23 cm.

Aufgabe 19: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Körper.*



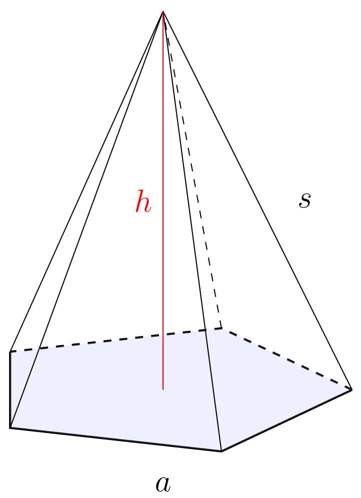
Der Körper besitzt

a) einen Zylinderradius r_Z von 2 cm, eine Zylinderhöhe s von 4 cm und einen Halbkugelradius r_K von 4, 5 cm.

b) einen Zylinderradius r_Z von 3, 3 cm, eine Höhe h von 10, 9 cm und einen Halbkugelradius r_K, der um ein Achtel größer ist als der Zylinderradius r_Z.

c) einen Zylinderradius r_Z, der dreimal kleiner ist als der Halbkugelradius r_K, der wiederum viermal kleiner ist als die Höhe h von 12, 45 cm.

Aufgabe 20: *Berechne das Volumen und die Oberfläche von der Pentagonpyramide.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)



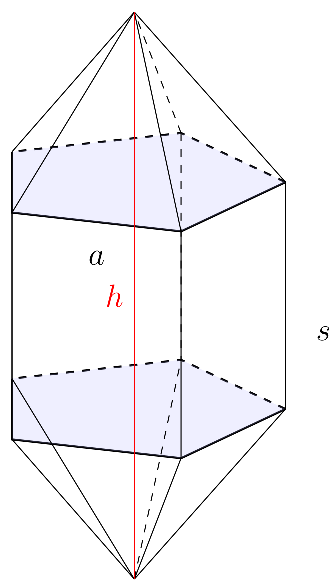
Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundseite

a) mit einer Kantenlänge a von $2\,\text{cm}$ und einer Höhe h von $6\,\text{cm}$.

b) mit einer Kantenlänge s von $7,3\,\text{cm}$ und einer Höhe h von $5,9\,\text{cm}$.

c) mit einer Kantenlänge s von $11,2\,\text{cm}$ und Grundfläche, deren Eckpunkte auf einen Kreis mit Radius $r = 1,7\,\text{cm}$ liegen.

Aufgabe 21: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom pentagonischen Körper.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)



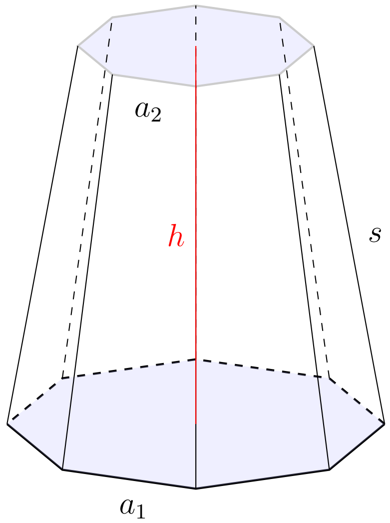
Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundfläche

a) mit einer Kantenlänge $a = 0,4\,\text{cm}$ und einer Höhe $h = 2,3\,\text{cm}$, welche zu gleichen Teilen in den Körpersegmenten aufgeteilt ist.

b) mit einer Kantenlänge $a = 1,05\,\text{cm}$ und einer Höhe $h = 7,34\,\text{cm}$ sowie einer Kantenlänge $s = 2,8\,\text{cm}$.

c) mit der Eigenschaft, dass die Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r = 4,3\,\text{cm}$ liegen. Außerdem besitzt der Körper einer Höhe $h = 5,8\,\text{cm}$ sowie eine Kantenlänge $s = 0,65\,\text{cm}$.

Aufgabe 22: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom Octagonpyramidenstumpf.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)



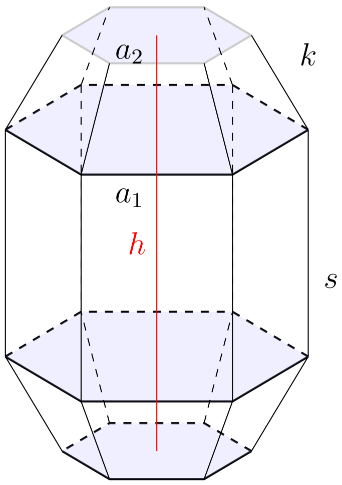
Der Körper besitzt eine gleichmäßige Grundfläche

$a)$ mit einer Kantenlänge $a_1 = 3,2\,\text{cm}$, einer Höhe $h = 11,1\,\text{cm}$ und eine Abschnittsfläche G_2 von $6,13cm^2$.

$b)$ mit einer Kantenlänge $a_1 = 6,72\,\text{cm}$, einer Höhe $h = 4,53\,\text{cm}$ sowie einer Kantenlänge $s = 5,18\,\text{cm}$.

$c)$ mit der Eigenschaft, dass die Eckpunkte auf einen Kreis mit dem Radius $r = 4,3\,\text{cm}$ liegen. Außerdem besitzt der Körper einer Höhe $h = 13,7\,\text{cm}$ sowie eine Kantenlänge der Abschnittsfläche $a_2 = 0,77\,\text{cm}$.

Aufgabe 23: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom hexagonischen Körper.*

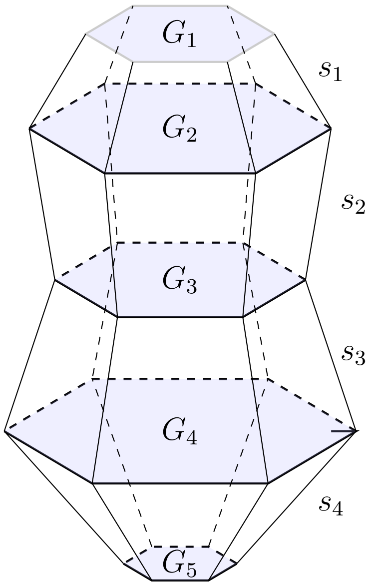


Der Körper besitzt gleichmäßige Querschnitts- und Abschnittsflächen und ist in horizontal symmetrisch.

$a)$ Die Kantenlänge a_1 beträgt $2,05\,\text{cm}$ und ist somit doppelt so lang wie die Kantenlänge a_2. Die Höhe h des Körpers ist doppelt so lang wie die Kante s, welche $3,3\,\text{cm}$ misst.

$b)$ Die Kantenlänge k beträgt $1,8\,\text{cm}$, während die Kante s eine Länge von $4,2\,\text{cm}$ hat. Die Querschnittsfläche G_1 besitzt einen Umkreis mit dem Radius $r_1 = 2,6\,\text{cm}$ und die Abschnittsfläche G_2 einen Umkreis mit dem Durchmesser $d_2 = 1,9\,\text{cm}$.

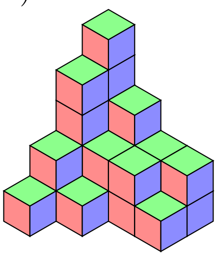
Aufgabe 24: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom hexagonischen Körper.*



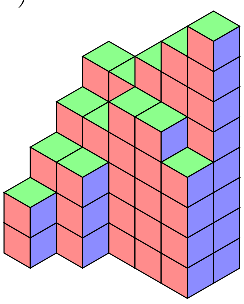
Der Körper besteht aus gleichmäßigen Querschnittsflächen, wobei lediglich die Kantenlängen durch Messungen bekannt sind. Die Messungen ergaben: $a_1 = 0,7\,\text{cm}$, $a_2 = 2,3\,\text{cm}$, $a_3 = 1,9\,\text{cm}$, $a_4 = 2,6\,\text{cm}$ und $a_5 = 0,3\,\text{cm}$. Die Kantenlängen konnten ebenfalls gemessen werden: $s_1 = 1,2\,\text{cm}$, $s_2 = 1,5\,\text{cm}$, $s_3 = 1,6\,\text{cm}$ und $s_4 = 1,1\,\text{cm}$.

Aufgabe 25: *Bestimme die Gesamtanzahl der Würfel der dargestellten Körper.*

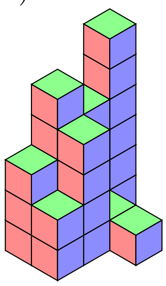
a)



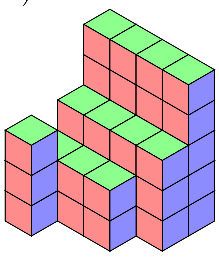
b)



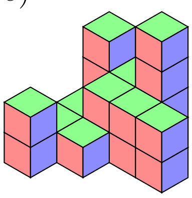
c)



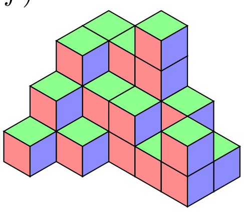
d)



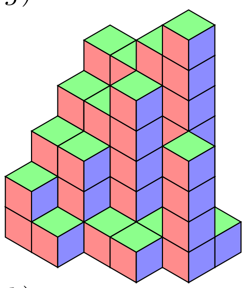
e)



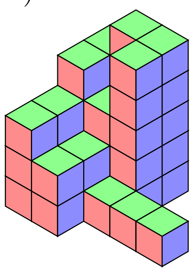
f)



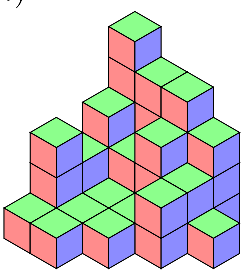
g)



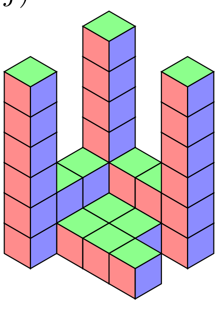
h)



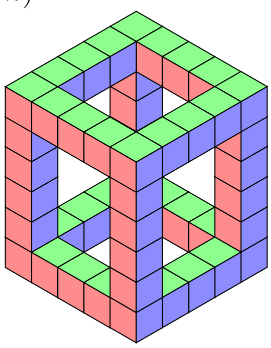
i)



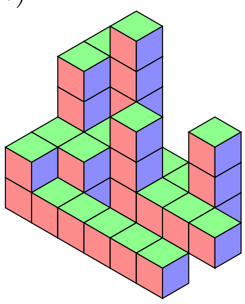
j)



k)



l)



Aufgabe 26: *Ein Körper mit dem Volumen von* $133\,\mathrm{cm}^3$ *wiegt* $405,9\,\mathrm{g}$. *Berechne die Dichte.*

Aufgabe 27: *Ein Zylinder mit dem Radius* $r = 2\,\mathrm{cm}$ *und einer Höhe von* $2,3\,\mathrm{dm}$ *besteht aus Beton mit einer Dichte* $\rho = 2337\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. *Berechne das Gewicht.*

Aufgabe 28: *In einem Würfel mit dem Volumen* $V = 244,140625\,\mathrm{cm}^3$ *befindet sich ein Zylinder, der die Seiten tangiert. Dieser Zylinder besteht aus Eisen mit einer Dichte von* $7874\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. *Berechne die Masse des Zylinders.*

Aufgabe 29: *Ein Quader mit der Länge von* $11\,\mathrm{cm}$, *Breite von* $5\,\mathrm{cm}$ *und einer Höhe von* $8\,\mathrm{cm}$ *ist zu* 66% *mit Isopentan* $\rho = 616\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ *gefüllt. Berechne die Masse der Füllung.*

Aufgabe 30: *Ein Kristall in der Form eines Fünfecksprisma mit der Masse von* $1,04\,\mathrm{kg}$ *besteht aus Lithium* $\rho = 534\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. *Berechne das Volumen.*

Aufgabe 31: *Das Gewicht einer Luftsäule über einen menschlichen Kopf soll ermittelt werden. Dabei hat Luft eine durchschnittliche Dichte von* $1,293\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. *Nimm an, dass die Luftsäule* $13\,\mathrm{km}$ *hoch ist und dass der Kopf einen Durchmesser von* $14\,\mathrm{cm}$ *besitzt und kreisförmig ist.*

Aufgabe 32: *Ein Zylinder ist mit einer Flüssigkeit bis zu* 85% *gefüllt, welche* $500\,\mathrm{g}$ *wiegt. Dabei besitzt der Zylinder eine Höhe von* $5\,\mathrm{cm}$ *und einem Radius von* $2,3\,\mathrm{cm}$. *Berechne die Dichte der Flüssigkeit.*

Aufgabe 33: *Ein Zylinder besitzt eine Höhe von* $4\,\mathrm{cm}$ *und ein Volumen* $57\,\mathrm{cm}^3$. *Bestimme den Radius der Grundfläche.*

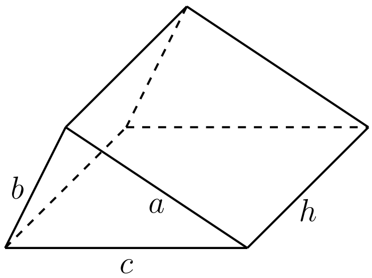
Aufgabe 34: *Bestimme die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines elfeckigen Prismas.*

Aufgabe 35: *Ein Prisma mit einer 99-eckigen Grundfläche von* $49cm^2$ *und einer Höhe von* $2,1dm$ *soll mit Wasser gefüllt werden. Berechne die Füllmenge in Litern.*

Aufgabe 36: *Ein Zylinder mit dem Umfang von $11,7cm$ und einer Höhe von $1,2dm$, soll verpackt werden. Bestimme die Fläche die minimal verwendet werden muss um alle Flächen zu verdecken.*

Aufgabe 37: *Ein quaderförmiges Aquarium mit den Maßen* $a = 30\,\text{cm}$, $b = 21\,\text{cm}$ *und* $c = 14,5\,\text{cm}$ *soll mit* $9\,\text{l}$ *Wasser gefüllt werden. Zu wie viel Prozent ist das Aquarium gefüllt?*

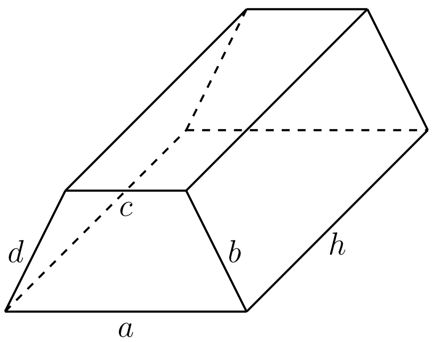
Aufgabe 38: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



$a)$ Das dreieckige Prisma besitzt eine Höhe $h = 7,6\,\text{cm}$. Dabei hat die Grundfläche einen Umfang von $12\,\text{cm}$, während $a = 4\,\text{cm}$ und $b = 3\,\text{cm}$. Die Strecke a steht orthogonal zur Strecke b.

$b)$ Die dreieckige Grundfläche hat eine Höhe $h_\Delta = 4\,\text{cm}$ und eine Grundseite $c = 6\,\text{cm}$, während die Höhe des Prismas $h = 7,1\,\text{cm}$ hat. Die Grundfläche ist durch ein gleichschenkliges Dreieck gegeben, wobei die Seite c die Länge von $5\,\text{cm}$ besitzt.

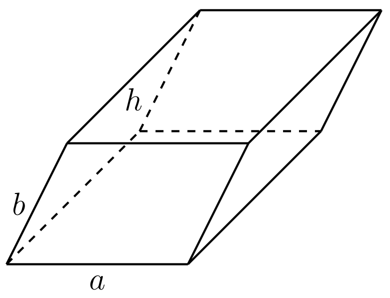
Aufgabe 39: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



$a)$ Die Grundfläche ist ein symmetrisches Trapez, welches einen Umfang von $16\,\text{cm}$ besitzt. Dabei ist die Seite $a = 6,6\,\text{cm}$ doppelt so lang wie die Seite c. Das Prisma hat eine Höhe von $8,9\,\text{cm}$

$b)$ Die Seite $a = 9\,\text{cm}$ ist doppelt so groß wie die Seite c, wobei wiederum die Seiten b und d $5,25\,\text{cm}$ lang sind. Das Prisma besitzt eine Höhe von $11,2\,\text{cm}$.

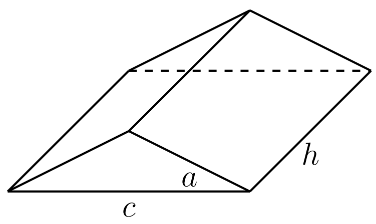
Aufgabe 40: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



a) Das gezeigte Prisma besitzt eine Höhe von $1,03\,\text{dm}$ und eine Raute als Grundfläche. Die Raute hat eine Kantenlänge von $5,1\,\text{cm}$ und einer Rautenhöhe von $h_R = 3,3\,\text{cm}$.

b) Als Grundfläche ist ein Parallelogramm mit den Seiten $a = 34\,\text{mm}$ und $b = 2,3\,\text{cm}$ sowie einer Höhe $h_P = 1,7\,\text{cm}$ zur Seite a gegeben. Das Prisma besitzt eine Höhe von $1,2\,\text{dm}$.

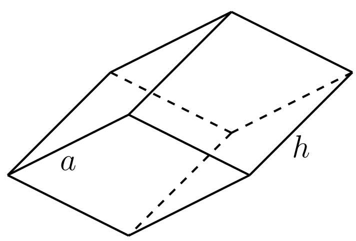
Aufgabe 41: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



a) Das Prisma besitzt eine Höhe von $7,3\,\text{cm}$ und eine Grundfläche mit dem Umfang von $1,1\,\text{dm}$, wobei die Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck ist und die Seite c eine Länge von $6,9\,\text{cm}$ besitzt.

b) Das Prisma besitzt eine Höhe von $5,23\,\text{cm}$ und eine Grundfläche mit der Seitenlänge $a = 31,3\,\text{mm}$, wobei die Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck ist und die Seite c eine Länge von $56,8\,\text{mm}$ besitzt.

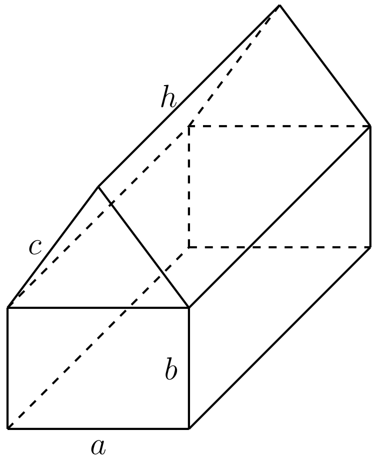
Aufgabe 42: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



a) Die rautenförmige Grundfläche besitzt eine Kantenlänge von $a = 4\,\text{cm}$, wobei die längere Diagonale eine Länge von $5,5\,\text{cm}$ hat. Die Höhe des Prismas beträgt $4,7\,\text{cm}$.

b) Die Diagonalen der rautenförmiger Grundfläche haben die Längen $4,3\,\text{cm}$ und $6,7\,\text{cm}$, während die Prismahöhe $7,2\,\text{cm}$ beträgt.

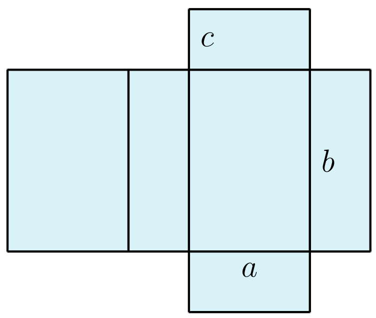
Aufgabe 43: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



a) Das Prisma hat eine Länge $h = 21\,\text{m}$, während die Grundfläche durch ein Fünfeck gegeben ist. Die Grundseite a beträgt $11,2\,\text{m}$, während die beiden anderen Seiten $b = 3\,\text{m}$ und $c = 7,2\,\text{m}$ symmetrisch zu einer mittelsenkrechten Achse zu a sind.

b) Die Grundfläche des Prismas mit der Höhe $h = 2,1\,\text{dm}$ ist beschrieben durch die Seiten $a = 6,2\,\text{cm}$, $b = 2,7\,\text{cm}$ und $c = 5,6\,\text{cm}$.

Aufgabe 44: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*

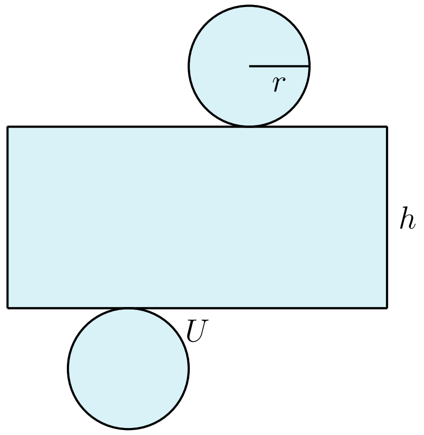


a) Das skizzierte Netz besitzt die Kantenlängen $a = 4,2\,\text{cm}$, $b = 7,8\,\text{cm}$ und $c = 2,1\,\text{cm}$.

b) Das skizzierte Netz besitzt die Kantenlängen $a = 3,3\,\text{cm}$, $b = 6,5\,\text{cm}$ und $c = 1,7\,\text{cm}$.

c) Das skizzierte Netz besitzt die Kantenlängen $a = 5,1\,\text{cm}$, $b = 9,2\,\text{cm}$ und $c = 3,3\,\text{cm}$.

Aufgabe 45: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*

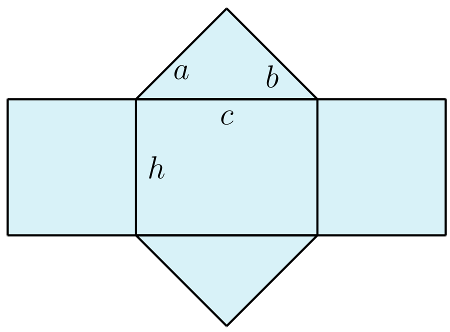


a) Das skizzierte Netz besitzt die Werte $r = 3,3\,\text{cm}$ und $h = 4,6\,\text{cm}$.

b) Das skizzierte Netz besitzt die Werte $d = 4,25\,\text{cm}$ und $h = 5,33\,\text{cm}$.

c) Das skizzierte Netz besitzt die Werte $U = 4,7\,\text{cm}$ und $h = 6,76\,\text{cm}$.

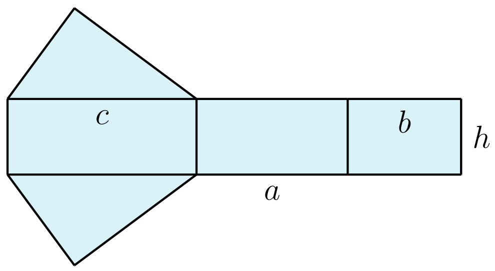
Aufgabe 46: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



a) Bei dem skizzierten Netz sind die Seiten a und b gleich lang mit einer Länge von $4,6\,\text{cm}$, während die Kanten $c = 6,7\,\text{cm}$ und $h = 7,3\,\text{cm}$ lang sind.

b) Das skizzierte Netz hat ein gleichschenkeliges Dreieck mit der Schenkellänge $3,7\,\text{cm}$ und einer Basis von $5,1\,\text{cm}$ Länge. Die Kantenlänge h beträgt $4,9\,\text{cm}$.

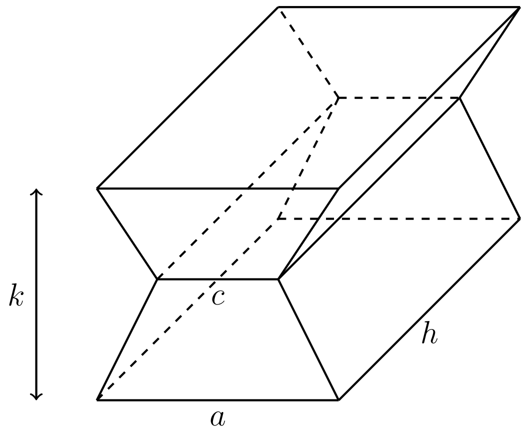
Aufgabe 47: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



a) Das Netz des Dreiecksprismas besitzt die folgenden Kantenlängen: $a = 6,7\,\text{cm}$, $b = 4,3\,\text{cm}$ und $h = 2,8\,\text{cm}$, wobei $\gamma = 90°$ ist.

b) Das Netz des Dreiecksprismas besitzt die folgenden Kantenlängen: $c = 9,2\,\text{cm}$, $b = 5,4\,\text{cm}$ und $h = 1,77\,\text{cm}$, wobei $\gamma = 90°$ ist.

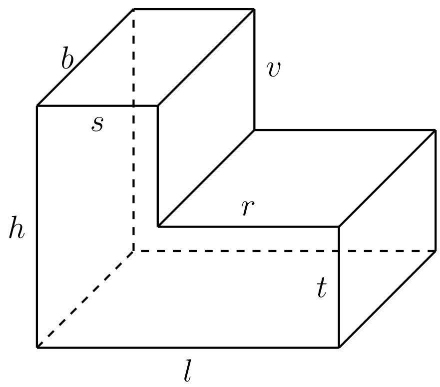
Aufgabe 48: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



a) Das skizzierte Prisma hat die Längen $a = 9,3\,\text{cm}$, $h = 1,74\,\text{dm}$ und $c = 5,6\,\text{cm}$ sowie $k = 8,6\,\text{cm}$. Die Grundfläche kann in zwei symmetrische Trapeze unterteilt werden, wobei die Trapezhöhen ein Verhältnis von $2 : 1$ haben.

b) Das skizzierte Prisma hat die Längen $a = 7,6\,\text{cm}$ und $h = 14\,\text{cm}$ sowie $k = 11,6\,\text{cm}$. Außerdem gilt, dass $2c = a$ ist. Die Grundfläche kann in zwei symmetrische Trapeze unterteilt werden, wobei die Trapezhöhen ein Verhältnis von $2 : 3$ haben.

Aufgabe 49: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*

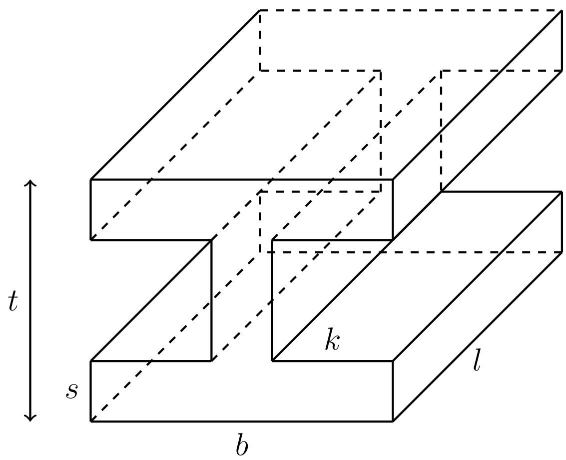


$a)$ $b = 4,3\,\text{cm}$, $l = 7,45\,\text{cm}$, $h = 6,6\,\text{cm}$, $v = 2,8\,\text{cm}$, $r = 5,3\,\text{cm}$

$b)$ $b = 7,7\,\text{cm}$, $l = 8,3\,\text{cm}$, $h = 8,76\,\text{cm}$, $s = 3,38\,\text{cm}$, $t = 4,43\,\text{cm}$

$c)$ $b = 5,6\,\text{cm}$, $l = 6,95\,\text{cm}$, $h = 9,16\,\text{cm}$, $v = 4,64\,\text{cm}$, $s = 3,86\,\text{cm}$

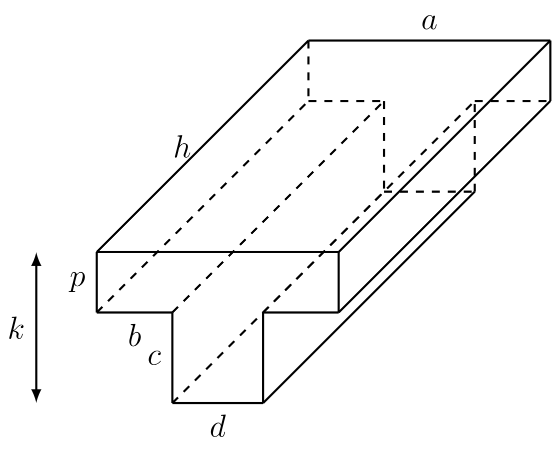
Aufgabe 50: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



$a)$ Der dargestellte Doppel-T-Träger besitzt zwei Symmetrieachsen und die Maße $t = 14,5\,\text{cm}$, $s = 1,6\,\text{cm}$, $b = 13\,\text{cm}$, $k = 5\,\text{cm}$, $l = 5,4\,\text{m}$.

$b)$ Der dargestellte Doppel-T-Träger besitzt zwei Symmetrieachsen und die Maße $t = 16,6\,\text{cm}$, $s = 2,2\,\text{cm}$, $b = 15,4\,\text{cm}$, $k = 6,7\,\text{cm}$, $l = 11,5\,\text{m}$.

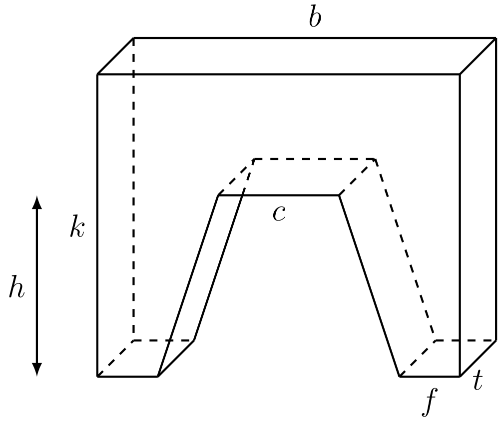
Aufgabe 51: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



$a)$ Der dargestellte T-Träger ist achsensymmetrisch und hat die Werte: $k = 8,9\,\text{cm}$, $c = 6,8\,\text{cm}$, $b = 5,3\,\text{cm}$, $a = 12,4\,\text{cm}$ und $h = 7,25\,\text{m}$

$b)$ Der dargestellte T-Träger ist achsensymmetrisch und hat die Werte: $k = 10,25\,\text{cm}$, $p = 1,9\,\text{cm}$, $d = 2,3\,\text{cm}$, $a = 11,4\,\text{cm}$ und $h = 10,75\,\text{m}$

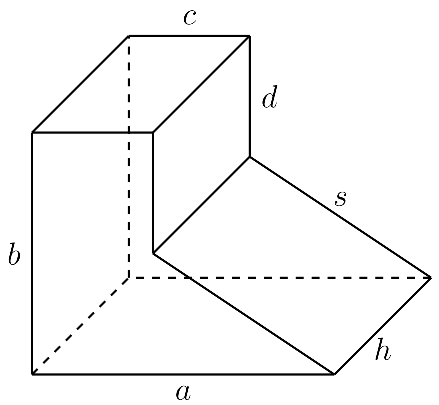
Aufgabe 52: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



$a)$ Das dargestellte Prisma hat die folgenden Maße: $b = 47\,\text{m}$, $k = 12\,\text{m}$, $c = 8\,\text{m}$, $f = 1\,\text{m}$, $h = 3{,}4\,\text{m}$ und $t = 4{,}5\,\text{m}$.

$b)$ Das dargestellte Prisma hat die folgenden Maße: $b = 33\,\text{m}$, $k = 8\,\text{m}$, $c = 25\,\text{m}$, $f = 2\,\text{m}$, $h = 4{,}2\,\text{m}$ und $t = 127{,}8\,\text{m}$.

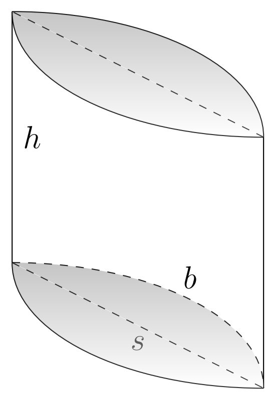
Aufgabe 53: *Bestimme Volumen V und Oberfläche O des Prismas.*



$a)$ Bei dem dargestellten Prisma sind die Seiten $a = 11{,}6\,\text{cm}$, $b = 7{,}3\,\text{cm}$, $c = 4{,}5\,\text{cm}$ und $d = 3{,}7\,\text{cm}$ sowie die Höhe $h = 6{,}7\,\text{cm}$ gegeben.

$b)$ Bei dem dargestellten Prisma sind die Seiten $a = 9{,}9\,\text{cm}$, $b = 6{,}6\,\text{cm}$, $c = 3{,}8\,\text{cm}$ und $s = 8{,}8\,\text{cm}$ sowie die Höhe $h = 5{,}5\,\text{cm}$ gegeben.

Aufgabe 54: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom bikonvexen Körper.*



a) Der gezeigte Körper besteht aus zwei Kreisabschnitten, welche einen 60°-Ausschnitts eines Kreises mit dem Radius von $4\,\mathrm{cm}$ entsprechen. Die Körperhöhe ist gegeben durch $h = 1,36\,\mathrm{dm}$.

b) Der gezeigte Körper besteht aus zwei Kreisabschnitten, welche einen 50°-Ausschnitts eines Kreises mit dem Radius von $3\,\mathrm{cm}$ entsprechen. Von diesem Ausschnitt wurde das gleichschenklige Dreieck mit der Höhe äquivalent zu $90,63\%$ des Radius abgeschnitten. Die Körperhöhe ist gegeben durch $h = 7,93\,\mathrm{cm}$.

Aufgabe 55: *Eine Pyramide besteht aus Titan mit einer Dichte von* $4,50\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$*. Die Kanten* $s = 8,2\,\mathrm{cm}$, $a = 3,5\,\mathrm{cm}$ *und* $b = 4,1\,\mathrm{cm}$ *wurden gemessen. Gib das Gewicht dieses Körpers an.*

Aufgabe 56: *Eine Kugel mit dem Radius* $r = 2\,\mathrm{cm}$ *soll in einen Zylinder verpackt werden. Gib die Oberfläche des benötigten Zylinders an.*

Aufgabe 57: *Aus einem Quader mit den Kantenlängen* $a = 5,6\,\mathrm{cm}$, $b = 3,7\,\mathrm{cm}$ *und* $c = 4,4\,\mathrm{cm}$ *soll in eine maximal große Kugel gefräst werden. Gib die Oberfläche und das Volumen der Kugel an.*

Aufgabe 58: *Aus einer Kugel aus Silber mit der Dichte* $\rho = 10,490\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ *mit einem Gewicht von* $0,560\,\mathrm{kg}$ *soll ein maximal großer Quader gefräst werden. Gib das maximale Volumen des gesuchten Quaders an. Was bedeutet diese Forderung für die Oberfläche?*

Aufgabe 59: *Aus einer quadratischen Pyramide mit den Werten* $h = 11,7\,\mathrm{cm}$ *und* $a = 6,7\,\mathrm{cm}$ *soll ein Kegel mit maximalem Volumen gefräst werden. Wie viel Prozent Verschnitt wird existieren? Wenn aus einem Kegel mit den Werten* $h = 11,7\,\mathrm{cm}$ *und* $r = 6,7\,\mathrm{cm}$ *eine quadratische Pyramide mit maximalem Volumen gefräst werden soll, wie groß ist dann hierbei der Verschnitt? Gib ein Verhältnis zwischen den prozentualen Verschnitten der beiden Szenarien an.*

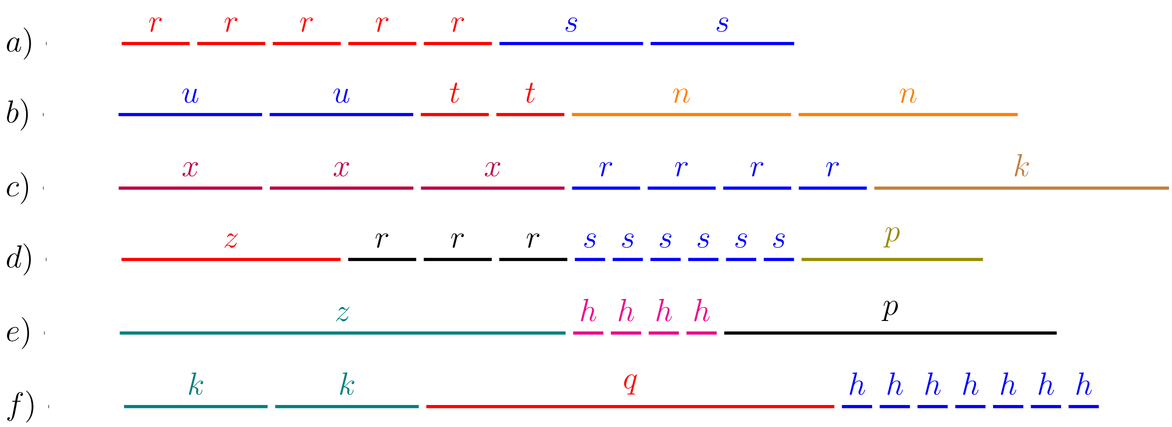
Aufgabe 60: *Ein Körper, der eine idealisierte Form einer Kugel Eis in einer kegelförmigen Waffel besitzt, besitzt eine Gesamthöhe von* $h = 9{,}2\,\text{cm}$ *und eine dazu maximale orthogonale Ausdehnung von* $4{,}2\,\text{cm}$*. Berechne das Volumen und die Oberfläche dieses Körpers.*

Aufgabe 61: *Fünf maximal symmetrische Pyramiden mit der Eigenschaft* $a = b = h = 4{,}25\,\text{cm}$ *sollen mit einer quaderförmigen Verpackung verpackt werden. Berechne den prozentualen Luftanteil in der Verpackung sowie die Oberfläche, wenn die Pyramiden mit ihren Grundflächen aneinander stehend verpackt werden und wiederhole diese Rechnung für den Fall einer maximal kleinen Oberfläche der Verpackung. Gib anschließend ein Verhältnis zwischen den beiden Szenarien an.*

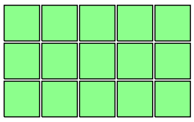
Aufgabe 62: *Gib die Lagebeziehung zwischen den Geraden* g *und* f *an.*

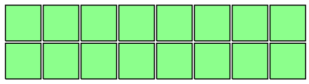
a) Es gilt: $h \perp g$ und $f || h$
b) Es gilt: $h \perp g$ und $f \perp h$
c) Es gilt: $h \perp k$ und $k \perp g$ und $f || h$
d) Es gilt: $h || k$ und $k \perp f$ und $g || k$

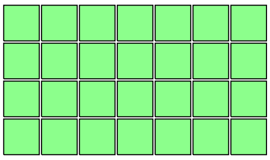
Aufgabe 63: *Schreibe die dargestellten Terme auf, um die gesamte Länge zu beschreiben.*

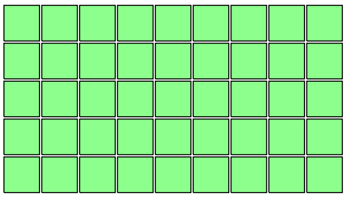


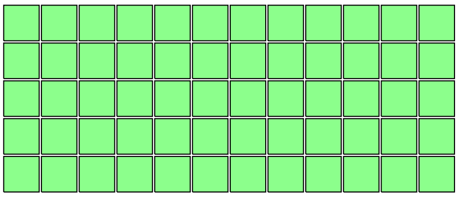
Aufgabe 64: *Bestimme die Gesamtanzahl der Flächen. Beschreibe dein Vorgehen.*

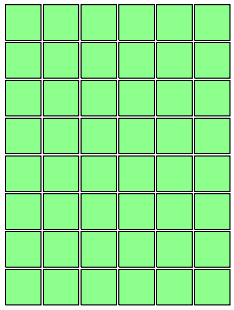
a)


b)


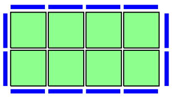
c)


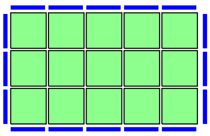
d)


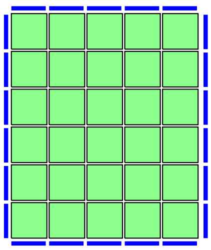
e)


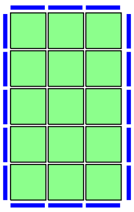
f)


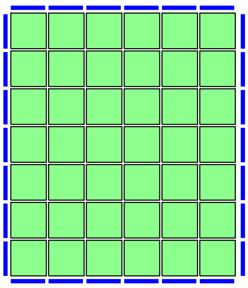
Aufgabe 65: *Bestimme die Gesamtanzahl der grünen Flächen und der blauen Strecken. Beschreibe dein Vorgehen.*

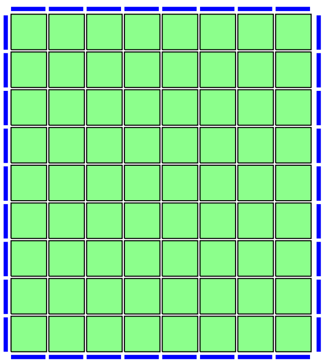
a)


b)


c)


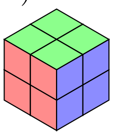
d)


e)


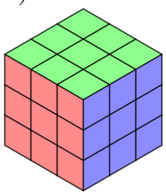
f)


Aufgabe 66: *Bestimme die Gesamtanzahl der Würfel der dargestellten Körper. Beschreibe dein Vorgehen.*

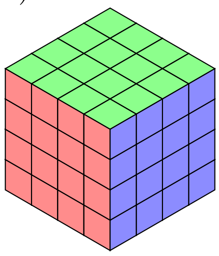
a)



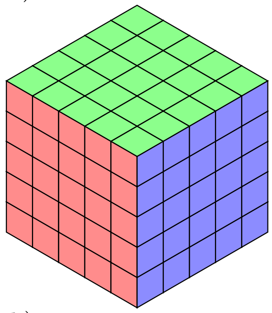
b)



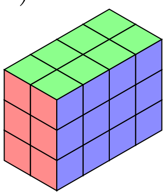
c)



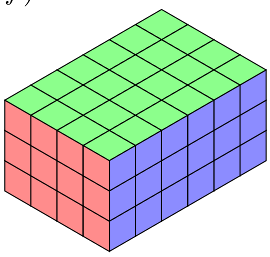
d)



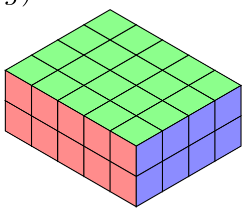
e)



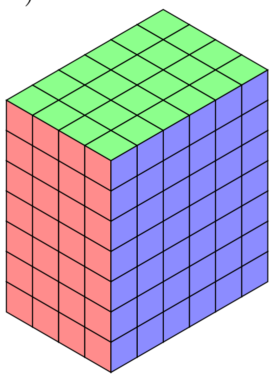
f)



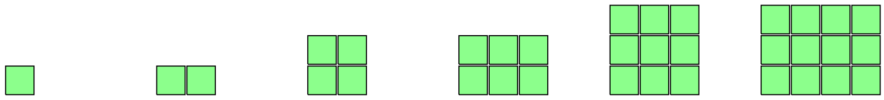
g)

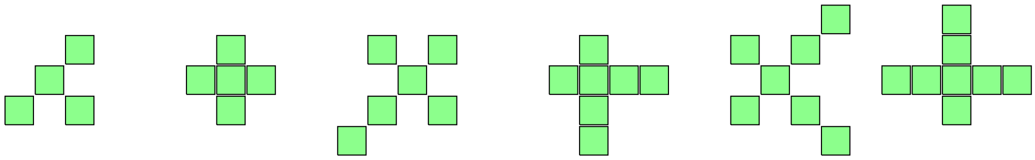


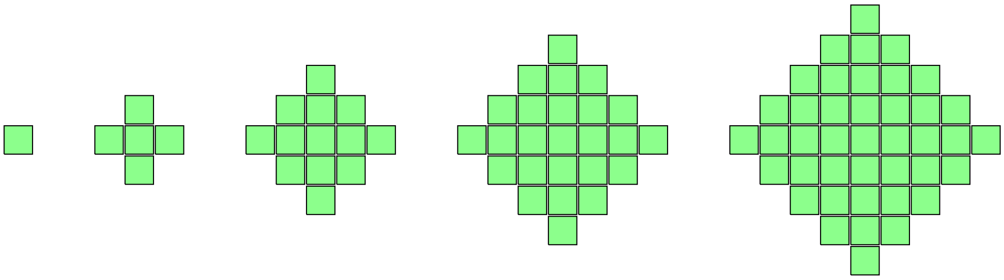
h)

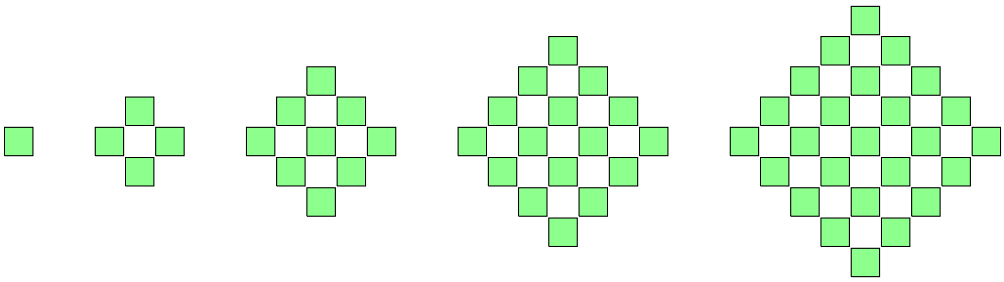


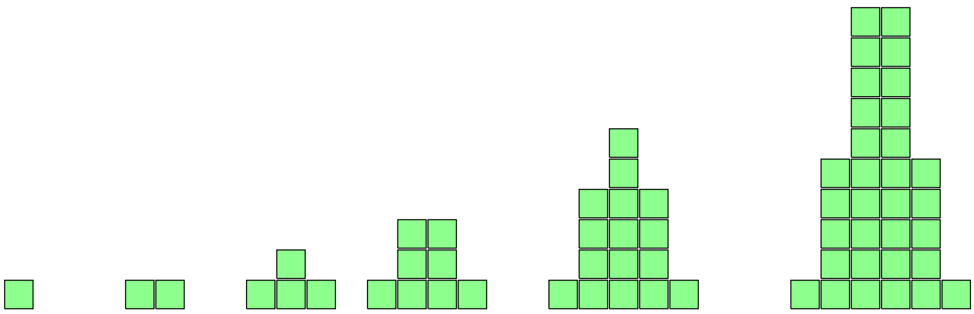
Aufgabe 67: *Beschreibe das Muster der Folge. Bestimme wie viele Flächen jeweils bei den nächsten drei Schritten gezeichnet werden müssten und zeichne den nächsten Schritt.*

a) 

b) 

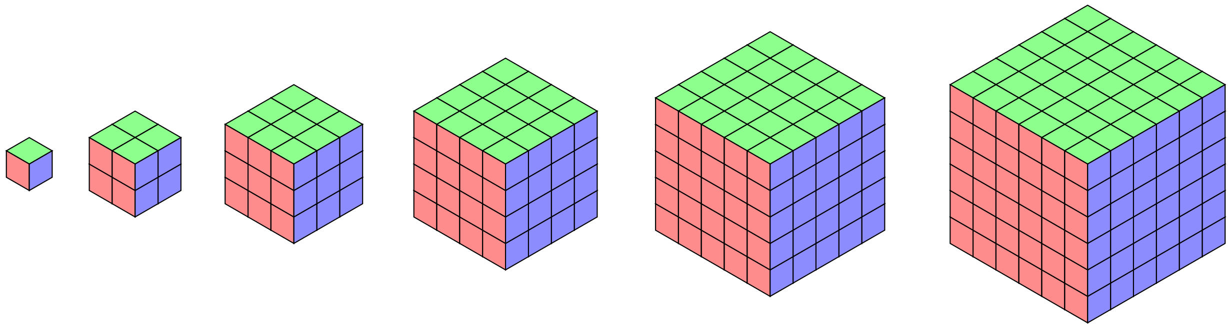
c) 

d) 

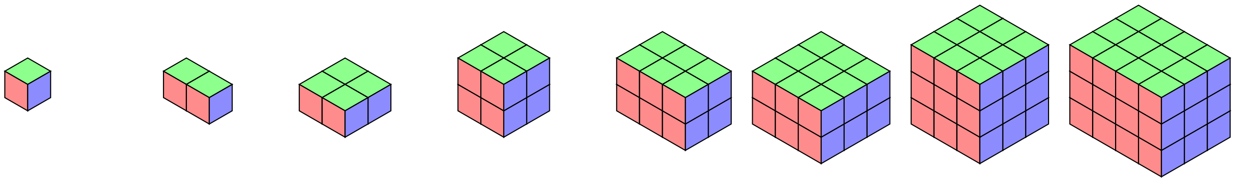
e) 

Aufgabe 68: *Beschreibe das Muster der Folge. Bestimme wie viele Würfel jeweils bei den nächsten drei Schritten gezeichnet werden müssten und zeichne den nächsten Schritt.*

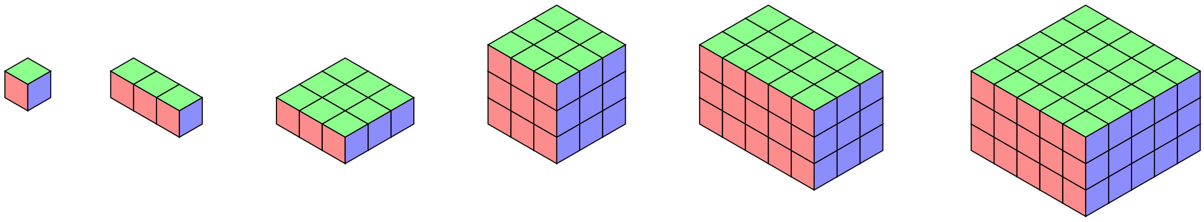
a)



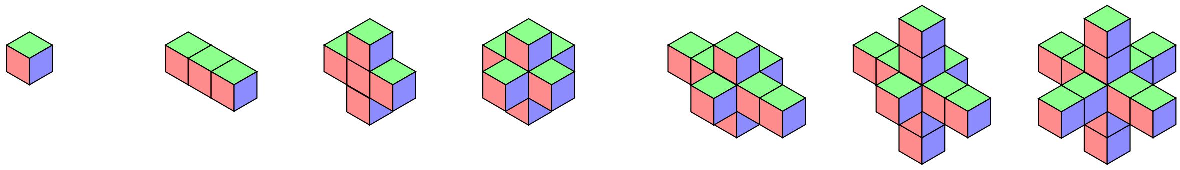
b)



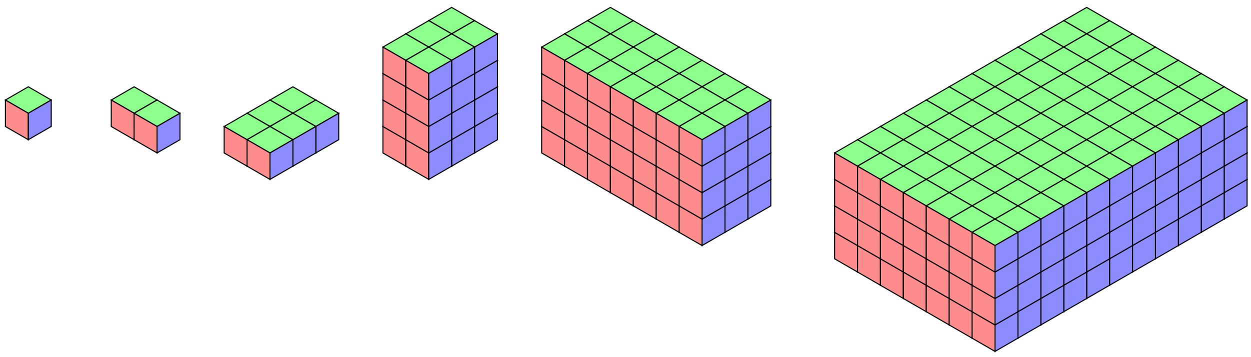
c)



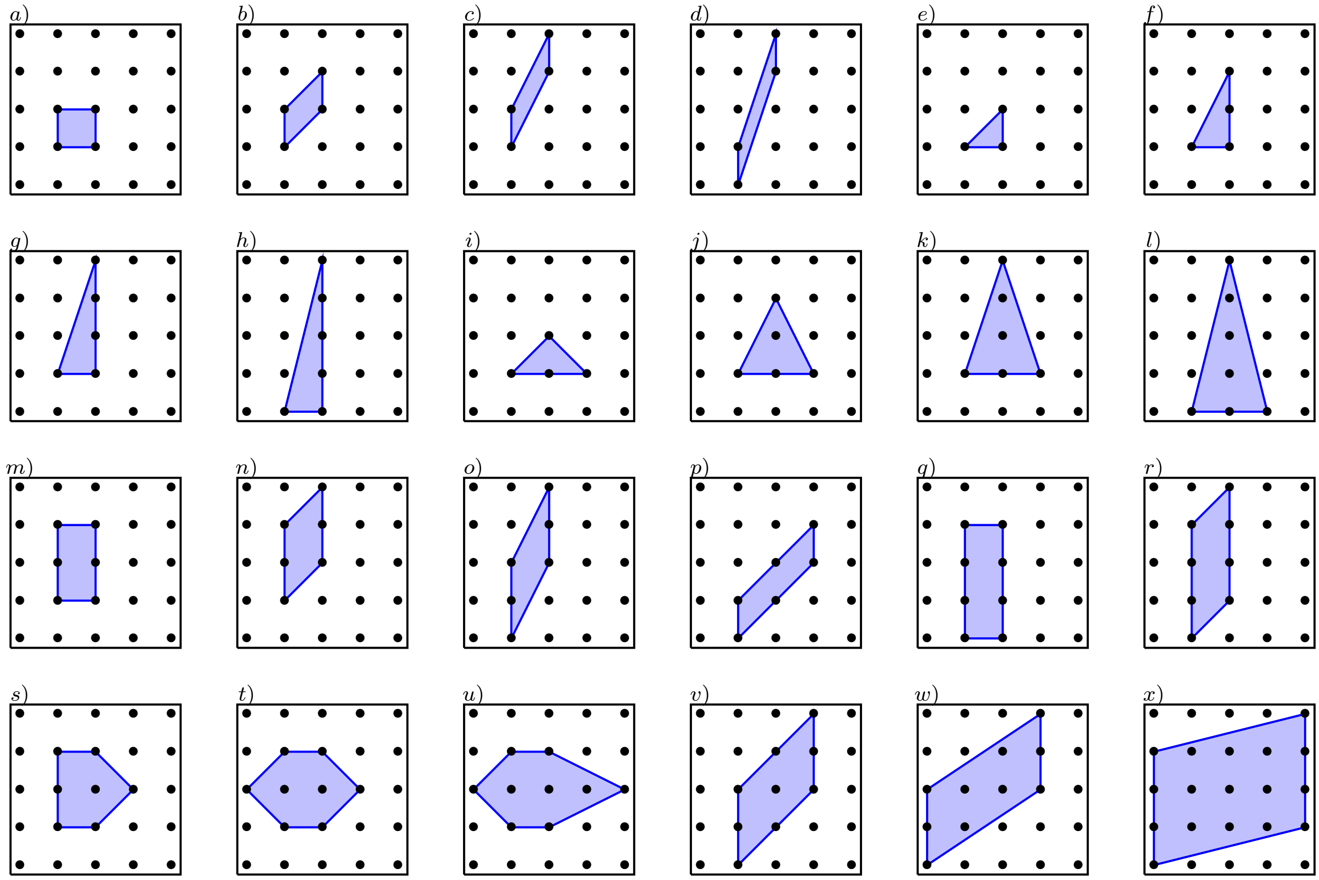
d)



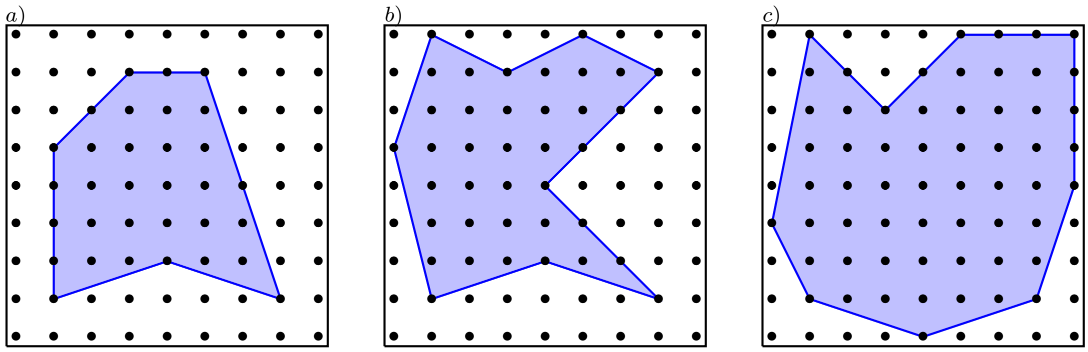
e)



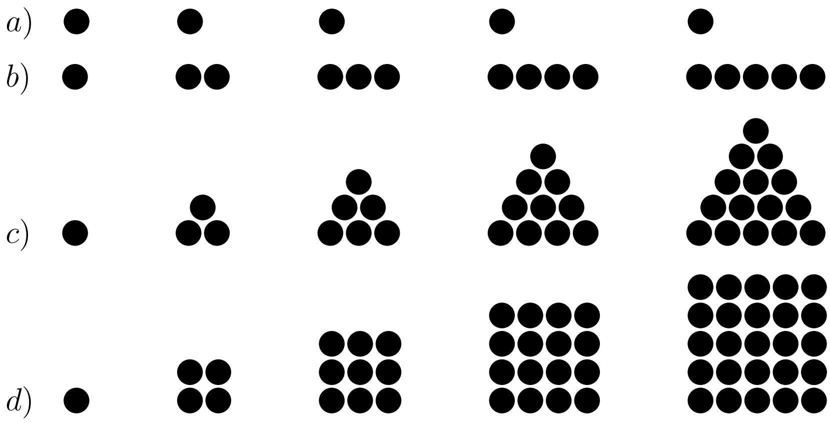
Aufgabe 69: *Bestimme den Flächeninhalt (Angaben in* cm^2*) von jeder Figur. Bestimme die Randpunkte R und die Innenpunkte I. Leite anschließend bestimmten Informationen eine allgemeine Gleichung her für den Wert des Flächeninhalts A her.*



Aufgabe 70: *Bestimme den Flächeninhalt (Angaben in* cm^2*) von jeder Figur. Benutze die hergeleitete Gleichung aus Aufgabe 69.*



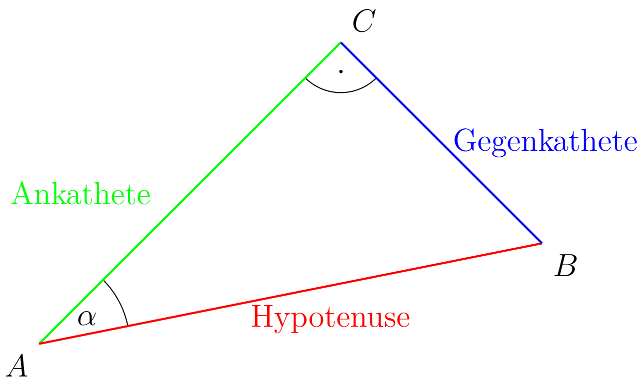
Aufgabe 71: *Gib jeweils die nächsten vier Anzahlen der Punkte an.*



Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.38) Lösungen zu den gemischten Geometrieaufgaben.

5 Trigonometrie

Die *Trigonometrie* beschreibt den Zusammenhang von *Winkeln* mit *Seitenlängen* von *geometrischen* Objekten. Dazu wird sich in erster Linie auf das *rechtwinklige Dreieck* konzentriert, da jede *Fläche* außer kreisartige Objekte durch *rechtwinklige Dreiecke darstellbar* sind. Dabei wird ein *rechtwinkliges Dreieck* betrachtet mit einem *Winkel* α.



Wie die Abbildung zeigt, werden dann die *Seiten* im Bezug auf den *Winkel* α benannt. Dabei ist die *Ankathete* immer die *Kathete* des *rechtwinkligen Dreiecks*, welche sich am zu untersuchenden *Winkel* befindet. Nun wird ein Verhältnis aufgestellt, *definiert* und mit einem Namen versehen:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Sinus vom Winkel } \alpha = \sin(\alpha) = \sin\alpha \tag{5.1}$$

Dabei kann auch der *Winkel* β um den Eckpunkt B über dieses Verhältnis bestimmt werden, da wegen der *Winkelsumme* es *Dreiecks* bei einem *rechtwinkligen Dreieck* die *Winkelbeziehung* $90° - \alpha = \beta$ gilt. Somit muss auch die folgende Beziehung gelten:

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Sinus vom Winkel } 90° - \beta = \sin(90° - \beta) \tag{5.2}$$

Allerdings wäre dann die *Gegenkathete* von α die *Ankathete* von β, sodass eine neue *Definition* getroffen werden kann:

$$\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} := \text{Kosinus vom Winkel } \alpha = \cos(\alpha) = \cos\alpha \quad , \tag{5.3}$$

wobei $\sin(90° + \delta) = \cos(\delta)$ gilt. Dies bedeutet, dass der *Kosinus* nur eine bequeme abkürzende Schreibweise und nichts weiter als ein *Sinus* ist, der um 90° verschoben wurde. Allerdings zeigt sich, dass sich diese Abkürzung lohnt, vor allem wenn der *Sinus* und der *Kosinus* genauer untersucht werden, was im Kapitel „Funktionen“ und auch „Differentation und Integration“ geschieht.

Wenn nun *Sinus* und *Kosinus* in ein Verhältnis gesetzt werden, ergeben sich weitere Abkürzungen, welche sich lohnen:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} : \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \cdot \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}} \\ &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \\ &:= \text{Tangens vom Winkel } \alpha = \tan(\alpha) = \tan\alpha \quad , \end{aligned} \tag{5.4}$$

wobei durch die *Umkehrung* des Verhältnisses der *Kotangens* zu definieren ist:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} := \cot(\alpha) = \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad . \tag{5.5}$$

Mit diesen *Definitionen* kann mit Hilfe eines *Winkels* und einer *Seitenlänge* alles in einem *rechtwinkligen Dreieck* berechnet werden. Da die *Hypotenuse* immer größer sein muss als die *Ankathete* ist der *Sinus* und somit auch der *Kosinus* bei der Betrachtung des *rechtwinkligen Dreiecks* zwischen den Zahlen 1 und 0 stets vorzufinden. Das wiederum bedeutet, dass die Werte vom *Tangens* und *Kotangens* bei der *geometrischen* Betrachtung eines *rechtwinkligen Dreiecks* zwischen 0 und ∞ liegen können.

Um einen *Winkel* mit diesen *trigonometrischen Funktionen* aus zwei *Seitenlängen* bestimmen zu können, muss auch die *Umkehrung* dieser *Funktion* eingeführt werden, welche in diesem Abschnitt gegeben sei als:

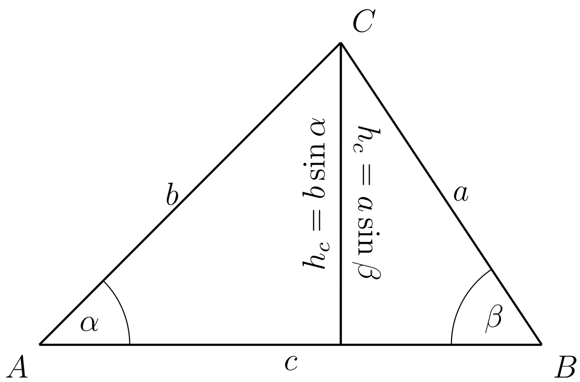
$$\begin{aligned}
\alpha &= \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \\
\alpha &= \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) = \arccos\left(\frac{b}{c}\right) \\
\alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \\
\alpha &= \cot^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{arccot}\left(\frac{b}{a}\right) \quad ,
\end{aligned} \tag{5.6}$$

wobei diese *Funktionen Arcussinus*, *Arcuskosinus*, *Arcustangens* und *Arcuskotangens* genannt werden. Für sie gilt für die *Äquivalenzumformung*:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{a}{c} \qquad |\arcsin \\
\arcsin(\sin\alpha) &= \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \\
\alpha &= \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Mehr Details zu diesen *Umkehrungen* der *trigonometrischen Funktionen* werden im Abschnitt „Umkehrfunktionen“ und „Trigonometrische Funktionen“ zu finden sein. Es genügt zu diesem Zeitpunkt das Wissen, dass *Arcus-Funktionen* die *trigonometrischen Funktionen* aufheben und wo sie auf dem Taschenrechner zu finden sind.

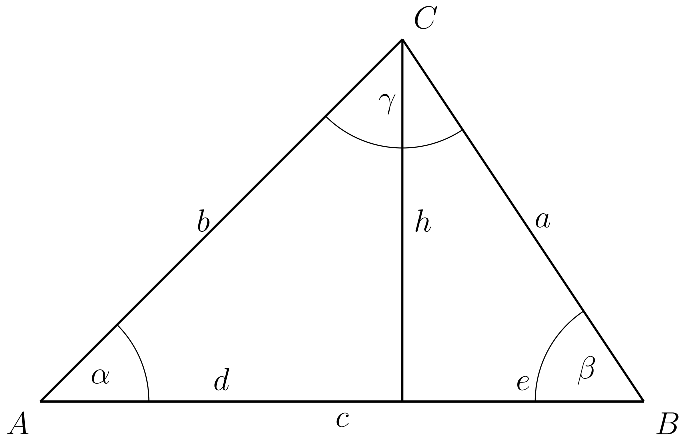
Mittels der *trigonometrischen Funktionen* kann auch bei einem beliebigen *Dreieck* jede *Seite* und jeder *Winkel* bestimmt werden. Dazu wird eine *Höhe* h_c konstruiert und diese dann über die *trigonometrischen Funktionen* anhand der beiden entstandenen *rechtwinkligen Dreiecke* berechnet.



Deutlich wird, dass die *Höhe* h_c über beide *Dreiecke* bestimmt werden kann. Daraus folgt, dass beide Ausdrücke gleichgesetzt werden können. Dies ist bekannt als der *Sinussatz*.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2A} \tag{5.8}$$

Ähnlich verhält sich dies beim so genannten *Kosinussatz*, welcher ebenso über ein beliebiges *Dreieck* mit einer *Höhe* h_c hergeleitet werden kann.



So kann die *Höhe* h über den *Satz des Pythagoras* bestimmt werden und gilt als Ausgangspunkt.

$$b^2 = d^2 + h^2 \tag{5.9}$$

Für d^2 und h^2 lassen sich dann die folgenden Ausdrücke finden:

$$\begin{aligned} d^2 &= (c-e)^2 = c^2 - 2ce + e^2 \\ h^2 &= a^2 - e^2 \quad , \end{aligned} \tag{5.10}$$

welche mit $a\cos\beta = e$ in die *Gleichung* für b^2 eingesetzt wird.

$$b^2 = d^2 + h^2 = c^2 - 2ce + e^2 + a^2 - e^2 = a^2 + c^2 - 2ce = a^2 + c^2 - 2ca\cos\beta \tag{5.11}$$

Diese Gleichung kann auch für die anderen *Seiten* beziehungsweise *Winkel* hergeleitet werden, sodass sich daraus die drei Versionen des *Kosinussatzes* ergeben.

$$
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 – 2bc \cos \alpha \\
b^2 &= a^2 + c^2 – 2ac \cos \beta \\
c^2 &= b^2 + a^2 – 2ba \cos \gamma
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Hierbei bleibt zu beachten, dass der *Winkel* α der *Seite* a gegenüberliegend ist. Generell kann der Schüler mit dem Wissen rund um das *rechtwinklige Dreieck* alle Probleme lösen und benötigt hierzu nicht den *Sinus*- und *Kosinussatz*. Allerdings ist es in Prüfungssituationen ratsam über diese *Sätze* zu kennen, da sie in seltenen Fällen zu einer Zeitersparnis führen.

5.0.1 Übungsaufgaben zur Trigonometrie

Aufgabe 1: *Bestimme alle Winkel und Seiten des jeweiligen rechtwinkligen Dreiecks. (Beachte, dass die Seite a gegenüberliegend vom Eckpunkt A und dem Winkel α ist.)*

a) $a = 7\,\text{cm}$ und $c = 11\,\text{cm}$

b) $a = 4\,\text{cm}$ und $b = 6\,\text{cm}$

c) $\alpha = 55°$ und $c = 9\,\text{cm}$

d) $a = 5,35\,\text{cm}$ und $\beta = 18°$

e) $b = 14\,\text{cm}$ und $\beta = 81°$

f) $a = \pi\,\text{cm}$ und $\alpha = 27,18°$

g) $c = \sqrt{60}\,\text{cm}$ und $\beta = \frac{1}{3}\pi\,\text{rad}$

h) $c = \frac{83}{17}\,\text{cm}$ und $\alpha = \frac{1}{7}\pi\,\text{rad}$

Aufgabe 2: *Bestimme alle Winkel und Seiten des jeweiligen Dreiecks. (Beachte, dass die Seite a gegenüberliegend vom Eckpunkt A und dem Winkel α ist.)*

a) $a = 4\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ und $\gamma = 60°$

b) $a = 5\,\text{cm}$, $c = 8\,\text{cm}$ und $\beta = 34°$

c) $c = 90\,\text{mm}$, $b = 0,6\,\text{dm}$ und $\alpha = 72°$

d) $a = \frac{3}{4}\,\text{dm}$, $b = \frac{50}{6}\,\text{cm}$ und $\gamma = 4°$

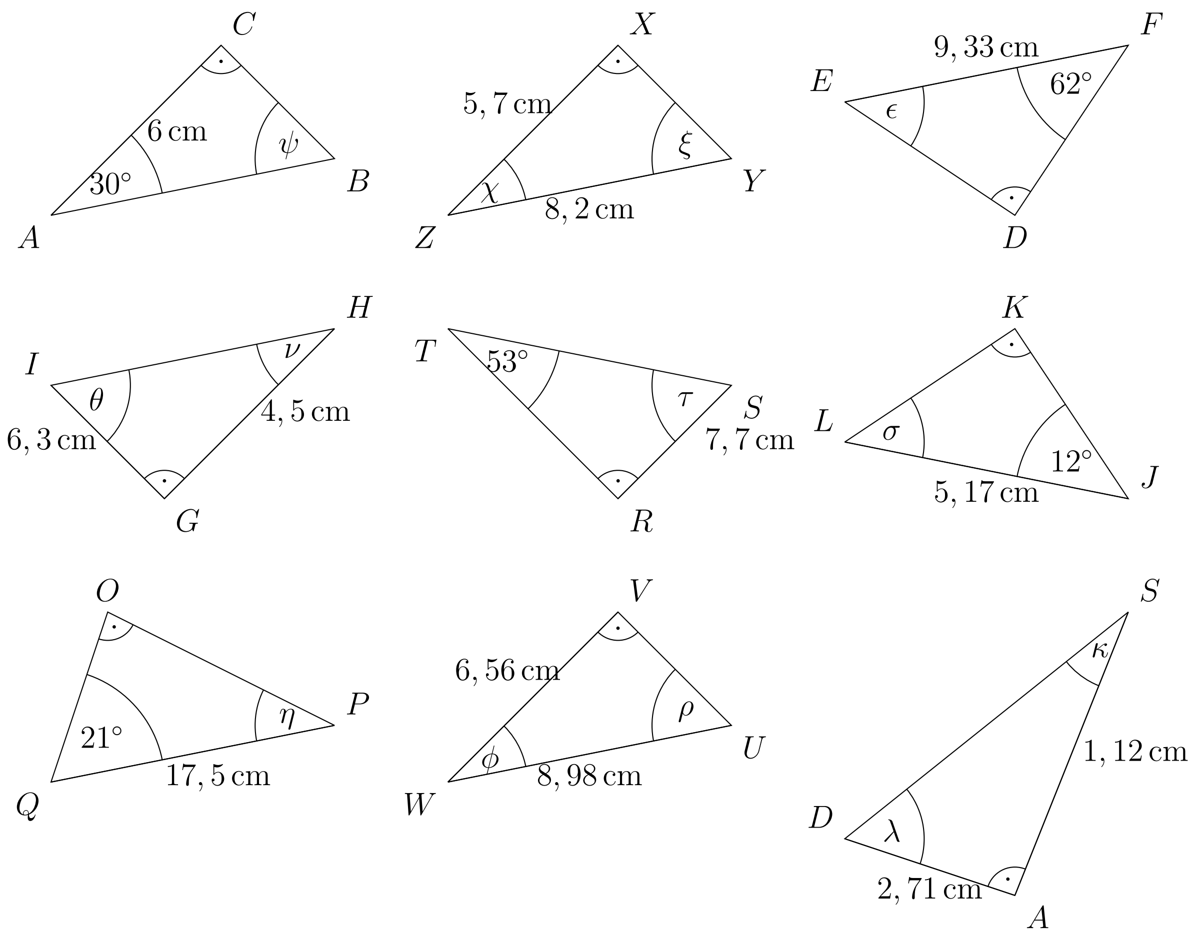
e) $b = 3\,\text{cm}$, $\gamma = 45°$ und $\beta = 23°$

f) $c = \frac{5}{4}\,\text{cm}$, $\alpha = 64°$ und $\gamma = 18°$

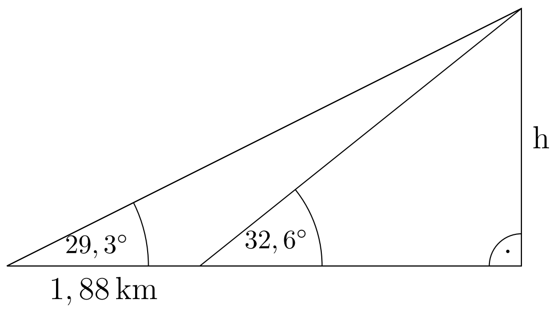
g) $a = 55,4\,\text{km}$, $\alpha = 86,3°$ und $\beta = 47°$

h) $c = \sqrt{17}$, $\gamma = 94,3°$ und $\beta = 36,6°$

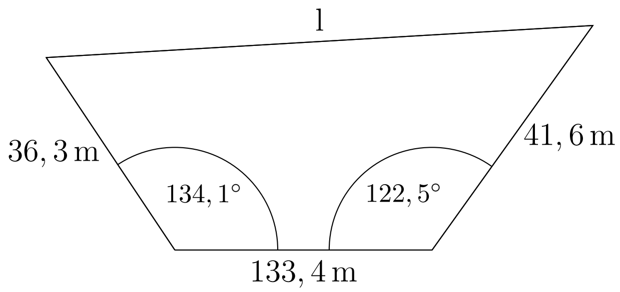
Aufgabe 3: *Bestimme alle unbekannten Winkel und Seiten. (Die Skizzen entsprechen nicht den realen Werten.) Beschrifte zu nächst das Dreieck komplett und finde für jeden Winkel die Bezeichnung der Katheten heraus.*



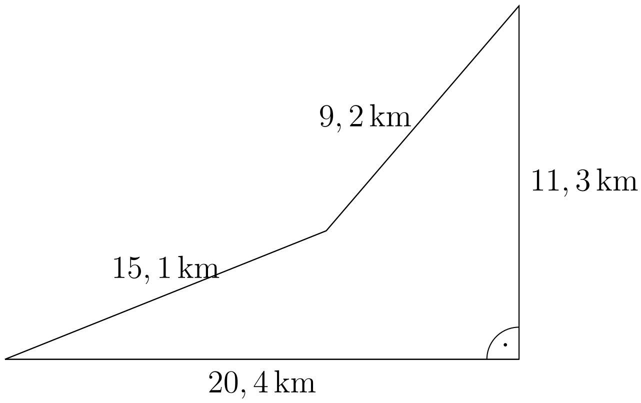
Aufgabe 4: *Nach einem Erdbeben veränderte sich ein Gebirgszug. Eine Gruppe von Landvermessern sollen die neue Höhe des größten Berges der Region messen und haben nach einigen Messungen eine Skizze mit ihren Messwerten angelegt. Wie hoch ist der Berg?*



Aufgabe 5: *Eine Autobahnbrücke soll über ein Flusstal gebaut werden. Nach einer neuen Verordnung darf eine Autobahn nicht mehr als 5% Steigung aufweisen. Die Ingenieure haben eine vereinfachte Skizze mit den bekannten Werten erstellt. Wie lang ist die Autobahnbrücke und darf sie gebaut werden?*

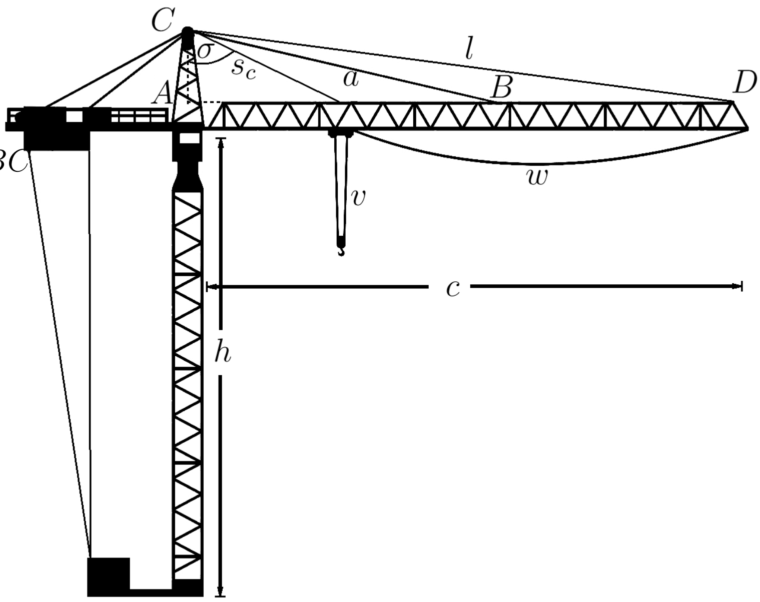


Aufgabe 6: *Ein Flugzeug hat zwei Phasen beim Aufstieg wie es in der Skizze dargestellt ist. Mit welchen Neigungswinkeln relativ zum Erdboden steigt das Flugzeug auf?*



Aufgabe 7: *Löse alle Teilaufgaben zum Kranaufbau.*

a) Bestimme die Länge des Tragseils a. Dabei besitzt das Tragseil s_c eine Länge von 11 m, welches eine Seitenhalbierende des Dreiecks ΔABC ist. Das Tragseil s_c steht dabei in einem Winkel σ von 55° zum Kranturm.



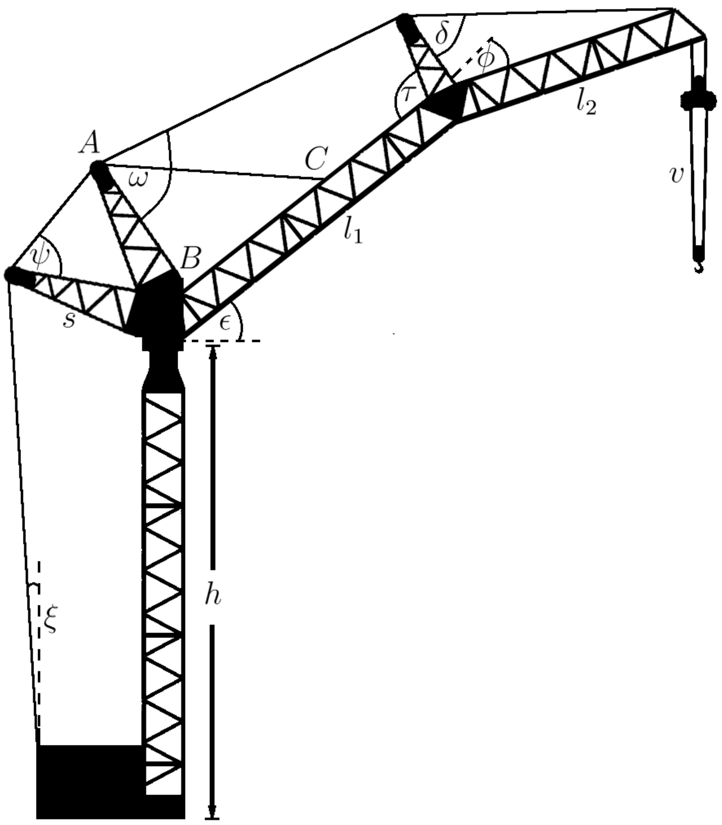
b) Bestimme die Länge des Auslegers $g = \left|\overline{AD}\right|$. Das Dreiecks ΔCBD besitzt einen Winkel δ am Punkt D von $6,5727°$.

c) Bestimme die Höhe des Auslegers h. Der Kran besitzt ein Gegengewicht, welches 5 m von der Mitte des Kranhäuschen entfernt ist. Die vertikale Stützstrebe ist mit Tragseilen an diesem Gewicht verbunden. Das Gegengewicht hat eine Länge von 2, 25 m. Das Gegengewicht ist zusätzlich mit einem Bodengewicht mit zwei Stahlseilen verbunden, die einen Winkel von $4,289°$ zu einander aufweisen. Dabei ist sind die Tragseile direkt am Boden beim Gewicht befestigt.

d) Bestimme die Gesamtlänge aller Seile mit Ausnahme der Seile v und w.

e) Neben dem Kran soll ein weiterer Kran gleicher Bauart errichtet werden, damit der Bau des Hauses schneller vonstatten gehen kann. Dieser Kran soll Objekte mit einer Höhe von bis zu 2, 75 m an seinem Haken tragen können. Die Seilestrecke vom Haken zum Ausleger kann bis auf 0, 725 m verkürzt werden. Wie hoch muss der zweite Kran mindestens sein, damit sich die Kräne nicht gegenseitig bei der Arbeit behindern? Beachte, dass der Ausleger aus Traversen aus insgesamt 30 gleichseitigen Dreiecken besteht.

Aufgabe 8: *Löse alle Teilaufgaben zum Kranaufbau.*



a) Bestimme die Längen der Auslegerteilstücke l_1 und l_2. Bekannt ist im Dreieck ΔABC, dass der Winkel zum Punkt B ein rechter Winkel ist und das der Betrag der Strecke $\overline{BC}$ halb so lang ist wie das Auslegerteilstück l_1. Die Stützstreben am ersten Gelenk haben eine Länge von $s = 3,125m$, während die Stützstrebe am zweiten Gelenk nur halb so lang ist. Der Winkel im Punkt C beträgt 38°.
Das Verhältnis von l_1 zu l_2 beträgt 3 : 2.

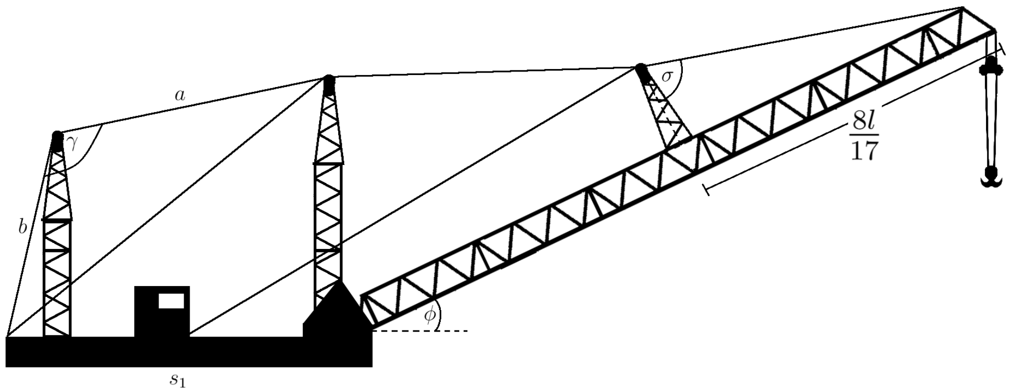
b) Am ersten Gelenk, kann der Winkel zum Boden ϵ minimal 15° und der Winkel ϕ, welcher sich relativ zum ersten Ausleger befindet, minimal 10° betragen. Welchen Aktionsradius hat der Kran maximal?

c) Maximal kann der Winkel $\epsilon = 75°$ und der Winkel $\phi = 45°$ sein. Bis zu welcher Höhe kann der Karn maximal benutzt werden, wenn das Hakenseil v maximal auf 0,4 m verkürzt werden kann? Die Höhe h vom Boden bis zum ersten Gelenk beträgt 12 m.

d) Im Normalbetrieb hat der Kran folgende Tragseilwinkel: $\delta = 65°$; $\omega = 85°$; $\psi = 60°$; $\tau = 90°$ und $\xi = 6°$. Dabei ist die Entfernung g von der äußeren Kante des Bodengewichtes bis zur ersten Stützstrebe gleich der Kranhöhe bis zum ersten Gelenk. Als Näherung soll hierbei angenommen werden, dass g orthogonal zur ersten Stützstrebe steht. Wie lang ist das gesamte äußere Tragseil?

e) Wie dicht kann der Kran maximal an einem Haus stehen, wenn dieses die maximale Bauhöhe haben soll?

Aufgabe 9: *Löse alle Teilaufgaben zum Kranaufbau.*



a) Bestimme die Gesamtlänge l des Auslegers des Schwimmkrans. Der Winkel σ beträgt dabei 72° und die Stützstrebe auf dem Ausleger hat eine Länge von 3 m. Beachte dass der Ausleger aus gleichseitigen Dreiecken besteht und die Länge der unteren Seite des Auslegers gesucht ist.

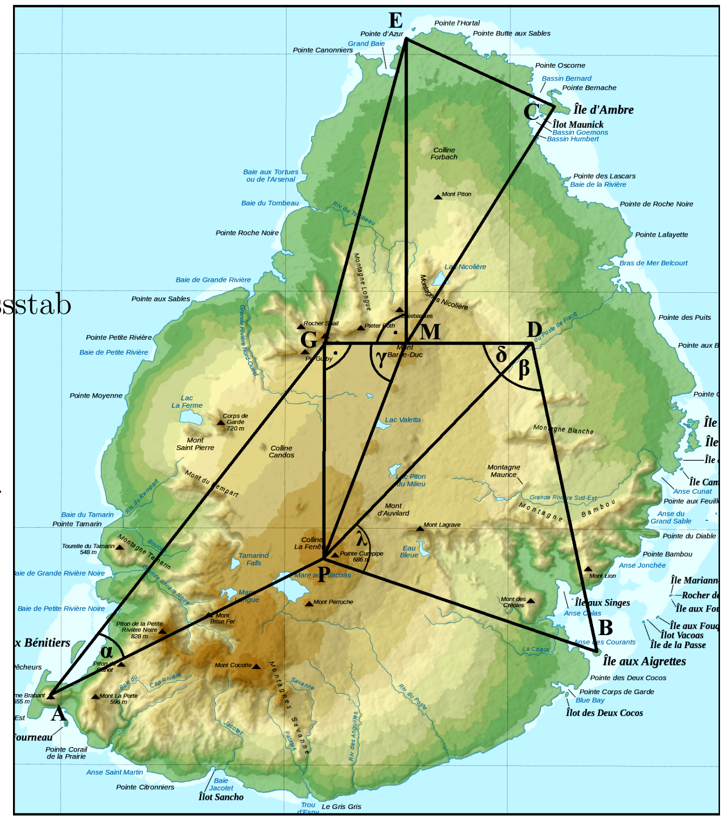
b) Der Ponton des Schwimmkrans ist $s_1 = 15\,\text{m}$ lang und sein Gewicht erzeugen eine Hebelkraft von $F_1 = 266000\,\text{N}$. Wie viel Gewicht kann der Kran maximal heben bevor er umkippen würde, wenn der Ausleger einen Winkel von $\phi = 20°$ zum Wasser vorweist. Beachte, dass die Kraft F_2 orthogonal zur betrachteten Länge s_2 beim Hebelgesetz $F_1 s_1 = F_2 s_2$ sein muss. Die Kraft F wird berechnet über das Produkt der Masse m in [kg] mit der Erdbeschleunigung $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

c) Der Schwimmkran muss eine Brücke passieren, welche allerdings nur 12 m hoch ist. Kann der Schwimmkran ungehindert passieren? Nenne eine Grenze für den Winkel ϕ und bestimmt die Höhe der höchsten Stützstrebe, welche sich einen Meter vom Rand des Ponton befindet. Allerdings sind nur die Länge der Stahlseile $a = 13{,}3\,\text{m}$ und $b = 8{,}5\,\text{m}$ sowie der Winkel $\gamma = 104°$ bekannt.

d) Damit der Schwimmkran auch im Binnenhafen eingesetzt werden kann, muss eine Klappbrücke der Länge $l = 30\,\text{m}$ unterschifft werden. Die Brücke hat eine Höhe von $5m$. Der Kran kann nur mittig unter dieser Brücke hindurch fahren, da das Wasser außerhalb der Fahrrinne zu seicht wäre. Die Bücke ist an einer Seite über ein hydraulisches Gelenk am Winkel χ hebbar und der Kran besitzt zwei Stützstreben im vorderen Bereich, die jeweils 3 m von der Mitte des Ponton entfernt sind. Berechne den Winkel χ um den die Klappbrücke mindestens angehoben werden muss und bestimme die gesamte Höhe der erhobenen Brückenseite für diesen Winkelwert. (Fertige vorher eine Skizze an!)

Aufgabe 10: *Löse alle Teilaufgaben zur Landkarte.*

a) Eine Gruppe von Wanderern ist auf Mauritius einen Fluss ins Inland gefolgt und haben beim Punkt D ihr Lager aufgeschlagen, um weitere Routen zu planen. Die Gruppe möchte unbedingt zum Berg im Punkt M, allerdings befindet sich auf der Karte ein Verhältnismassstab und somit sind keine Strecken-längen abzulesen. Die Strecke zwischen dem Berg und dem Lager $\overline{MD}$ beträgt dabei 14 km erinnert sich einer der Wanderer. Anschließend möchte die Gruppe über das Tal im Punkt G zum höchsten Berg der Insel im Punkt P vordringen. Berechne die Strecke $\overline{GP}$ und $\overline{GM}$ aus den bekannten Winkeln $\gamma = 68°$ und $\delta = 42°$.



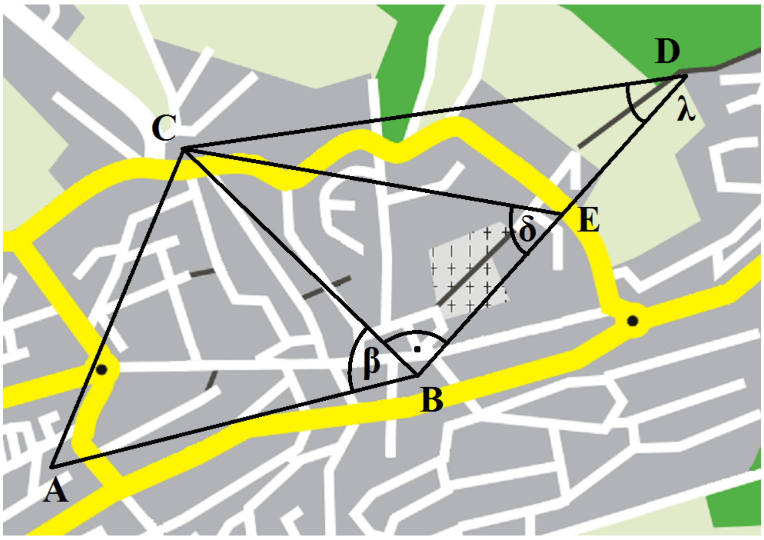
b) Die Wandergruppe möchte die Entfernung vom Lager D bis zum Berg P wissen, um den mehrtägigen Wanderausflug bei schlechtem Wetter eventuell abzukürzen.

c) Eine weitere mögliche Abkürzung für den Abbruch des Wanderausfluges wäre die Strecke $\overline{AG}$, welche berechnet werden muss. Auf der Karte konnte mit einem Winkelmesser die Winkel $\alpha = 27°$ und $\measuredangle\left(\overline{AG}, \overline{GP}\right) = 38°$ bestimmt werden.

d) Falls das Wetter gut bleiben sollte, möchte die Gruppe vom Berg P zur Insel in Punkt B wandern und übersetzen. Mit dem Winkelmesser konnten die Winkel $\beta = 58°$ und $\lambda = 56°$ bestimmt werden.

e) Als die Gruppe auf der Insel B ankam kam eine Vermisstenmeldung im Radio. Auch hieß es, dass eine Suchmannschaft ausgesandt wurde, welche am Tag $20 km^2$ absuchen konnte. Die Vermissten werden im Dreieck $\varDelta ECM$ vermutet. Wie lange müsste maximal gesucht werden? Die Gruppe misst folgende Winkel: $\measuredangle\left(\overline{MG}, \overline{GE}\right) = 69°$, $\measuredangle\left(\overline{ME}, \overline{MC}\right) = 29°$ und $\measuredangle\left(\overline{EC}, \overline{GE}\right) = 88°$.

Aufgabe 11: *Löse alle Teilaufgaben zur Ortung.*



a) Bei einem Wettkampf, der von Mathematiklehrern organisiert wurde, sollen Schüler einen kleinen Funksender innerhalb der Stadt finden. Als Belohnung für die Findergruppe wurden zwei Wochen ohne Hausaufgaben ausgeschrieben. Die Schüler wissen nur, dass sich der Sender irgendwo im Dreieck ΔABC befinden muss. Eine Schülergruppe will tatsächlich mathematisch vorgehen und nutzt die bekannten Informationen, wie zum Beispiel die Entfernung von der Schuleingangstür im Punkt D bis zum Supermarkt im Punkt E, welche 875 m beträgt. Von diesen beiden Punkten aus messen die Schüler mit einem Geodreieck zwischen den Funkmasten in C und B die Winkel $\lambda = 36°$ und $\delta = 57°$ und wollen aus diesen Informationen die Strecke $\overline{BC}$ bestimmen.

b) Da die Schüler gerade im Unterricht die speziellen Formen und Punkte des Dreiecks behandelt hatten, fällt einem der Schüler auf, dass es sich beim Dreieck ΔABC um ein gleichschenkliges Dreieck handelt mit der Basis $\overline{AB}$. Nutze diese Information aus um so viele Informationen über das Dreieck ΔABC zu erfahren.

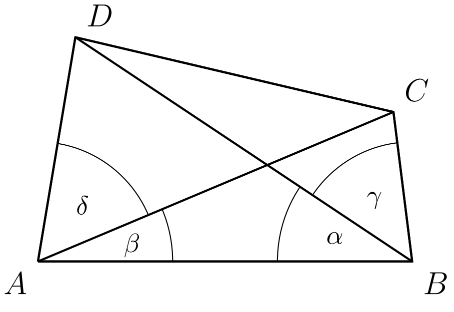
c) Die Schüler versuchen sich genauer an die letzten Mathematikschulstunden zu erinnern und kommen auf die Idee, dass der Sender sich in einem speziellen Punkt des Dreiecks befinden muss. Aus diesem Grund wollen die Schüler den Schnittpunkt der Höhen bestimmen. Berechne die Längen aller Höhen und die Länge der Basis. Benutze dafür den Winkel $\beta = 55°$ den die Schüler mit ihrem Geodreieck bestimmt haben.

d) Um ihre These zu prüfen, müssen die Schüler von jedem Punkt die Höhe bis zum Schnittpunkt entlang laufen. Um die Genauigkeit zu erhöhen, wollen die Schüler wissen, wie lang die Strecken zwischen den Funkmasten und Höhenschnittpunkten sind. (Die Gruppe fand den Sender und bekam die Belohnung.) Wie groß war die Fläche, die abzusuchen war?

Aufgabe 12: *Lies die Behauptung und kreuze an, ob diese wahr oder falsch ist.*

Behauptung	wahr	falsch
Man kann die Kosinusfunktion durch die Sinusfunktion ausdrücken.		
Gegenkathete durch Hypotenuse ist gleich der Kosinus des Winkels.		
Der Tangens ist der invertierte Kotangens.		
Der Sinus von 180° ist gleich 1.		
Der minimale Funktionswert vom Kosinus ist 0.		
Tangens ist der Quotient aus Sinus und Kosinus.		
Der Kosinus ist der um 90° verschobene Sinus.		
Da der Tangens von 90° nicht definiert ist, ist auch der Kotangens von 90° nicht definiert.		
$\cos(180°) = \cos(\pi\,\mathrm{rad})$.		
$\sin^{-1}(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x)) = x$		
Der Kosinus wiederholt sich nach 4π rad.		

Aufgabe 13: *Bei einer Landschaftsvermessung wurden an den Punkten A und B Theodoliten aufgestellt. Mit den Theodoliten wurden die Winkelmaße* $\alpha = 37°$, $\beta = 26°$, $\gamma = 49°$ *und* $\delta = 58°$. *Außerdem wurde eine Strecke von* 45 m *zwischen den Theodoliten gemessen. Berechne die Streckenlänge von* $\overline{DC}$.



Weitere Übungen zur Trigonometrie zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.38) Lösungen zur Trigonometrie.

5.1 Gemischte Trigonometrieaufgaben

Aufgabe 1: *Fülle die Tabelle aus.*

	1	2	3	4	5	6
a	2	4	6	4,7	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$
b	3	6	9	7,05	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{20}$
c						
$\frac{a}{b}$						
$\frac{b}{a}$						
$\frac{a}{c}$						
$\frac{b}{c}$						

Aufgabe 2: *Fülle die Tabelle aus.*

	1	2	3	4	5	6
α in [°]	5	11	30	45	60	90
α in $[rad]$						
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\tan\alpha$						
$\cot\alpha$						

	1	2	3	4	5	6
α in [°]	120	135	210	240	300	315
α in $[rad]$						
$\sin\alpha$						
$\cos\alpha$						
$\tan\alpha$						
$\cot\alpha$						

Aufgabe 3: *Fülle die Tabelle aus.*

	1	2	3	4	5	6
a	4	7	3,4	5,35	$\frac{7}{3}$	$\sqrt{10}$
b	5	9	7,2	8,31	$\frac{8}{5}$	$\sqrt{15}$
c						
$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$ in [°]						
$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$ in [°]						
$\alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$ in [°]						
$\beta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ in [°]						
$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$ in [°]						
$\beta = \arccos\left(\frac{a}{c}\right)$ in [°]						

Aufgabe 4: *Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit dem angegeben Winkel.* (Keine Lösung!)

$a)\ \alpha = 25°$ $b)\ \beta = 55°$ $c)\ \alpha = 17°$ $d)\ \alpha = 63°$ $e)\ \alpha = 37°$
$f)\ \alpha = 45°$ $g)\ \beta = 74°$ $h)\ \beta = 27°$ $i)\ \alpha = 69°$ $j)\ \alpha = 5°$

Aufgabe 5: *Berechne alle fehlenden Größen mit maximaler Genauigkeit. (Benutze folglich nur die gegebenen oder ungerundete Werte!)*

a) $\gamma = 90^\circ$; $c = 13cm$ und $a = 2cm$

b) $\gamma = 90^\circ$; $c = 5km$ und $b = 2m$

c) $\gamma = 90^\circ$; $b = 6,3cm$ und $a = 7,8cm$

d) $\gamma = 90^\circ$; $\alpha = 34,6^\circ$ und $b = 11dm$

e) $\beta = 90^\circ$; $a = 2,567dm$ und $b = 63,41cm$

f) $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 59,18^\circ$ und $b = 14,4cm$

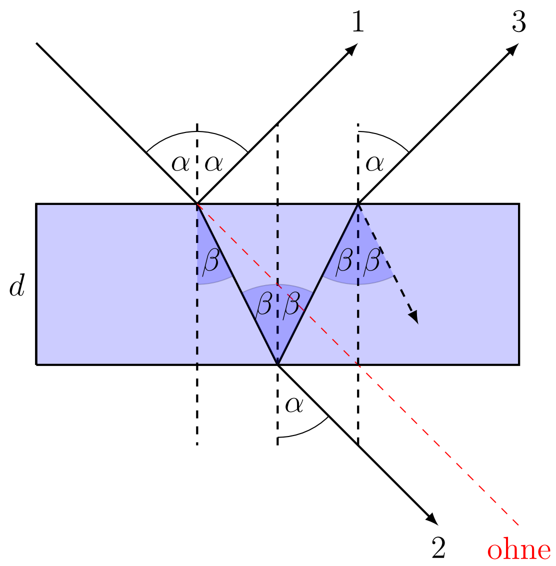
Aufgabe 6: *In einem Glasfaserkabel können Lichtimpulse über Reflexion geleitet werden. In einem solchen Kabel werden alle Lichtimpulse weitergeleitet, die einen Einfallswinkel zum Lot (orthogonale Linie zur Spiegelfläche) von* 63° *nicht unterschreitet. Dadurch benötigt das Licht mehr Zeit als wenn dieses gradlinig durch den Leiter transportiert werden würde. Ein solches Glasfaserkabel hat zum Beispiel einen Querschnittsdurchmesser d von* $1,5\,\mathrm{mm}$. *Wie lange braucht das Licht maximal, um die Erde in einem solchen Kabel zu umrunden? Ignoriere die Krümmung des Kabels um die Erde. (Lichtgeschwindigkeit* $c = 299792458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ *und Erdradius* $R = 6371\,\mathrm{km}$.*) Um wie viel Prozent ist dies langsamer als die minimale Umlaufzeit?*

Aufgabe 7: *Berechne Aufgabe 6 erneut unter der Bedingung, dass die Lichtgeschwindigkeit im Glasfaserkabel durch den Brechungsindex n reduziert wird:* $c_n = \frac{c_0}{n}$*. Dabei ist der Brechungsindex dieses Mediums als* $n = 1,458$ *gegeben. Stelle ein Verhältnis zwischen den Ergebnissen aus Aufgabe 6 und 7 auf.*

Aufgabe 8: *Leite eine allgemeine Gleichung für das Volumen von gleichmäßigen* n*-eckige Prismen her. Benutze anschließend diese Gleichung, um eine allgemeine Gleichung für gleichmäßigen schiefe* n*-eckige Prismen zu finden. Übersetze abschließend die gefundenen Gleichungen auf Spitzkörper (Pyramiden, Kegel, ...).*

Aufgabe 9: *Leite eine allgemeine Gleichung für die Oberfläche von gleichmäßigen* n*-eckige Prismen her. Benutze anschließend diese Gleichung, um eine allgemeine Gleichung für gleichmäßigen schiefe* n*-eckige Prismen zu finden.*

Aufgabe 10: *Beantworte die Fragen zur Brechung des Lichtes.*



a) Unter der Berücksichtigung des Snellius'schen Gesetzes verändert sich der Winkel zum Lot eines Lichtstrahls, wenn dieser in ein dichteres Medium eindringt $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$. Außerdem ist der Brechungsindex von Luft $n_1 = 1$. Berechne den Berechungsindex n_2, wenn die Winkel $\alpha = 54°$ und $\beta = 39°$ gemessen wurden.

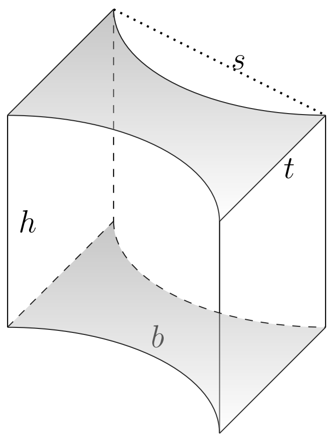
b) Durch die Brechung wird der Weg des Lichtes im Medium kürzer als wenn das Licht ohne Brechung den Körper passieren müsste. Berechne um wie viel Prozent der Weg kürzer wird, wenn der Körper eine Dicke von $d = 4\,\text{cm}$ besitzt.

c) Berechne die Distanz zwischen den Lichtstrahlen 1 und 3. Gib auch an wie groß der Wegunterschied der Lichtstrahlen ist.

d) Da sich Licht in einem Medium langsamer ausdehnt als mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ist auch die zeitliche Differenz interessant. Berechne die Zeit, die der Lichtstrahl vom Eintritt bis zum Austritt (1 nach 2) benötigt. Beachte, dass $c_n = \frac{c_0}{n}$ gilt.

e) Licht breitet sich gradlinig in einer sinusförmigen Welle aus, dabei besitzt das eingestrahlte Licht eine Wellenlänge von $\lambda = 450\,\text{nm}$. Wie groß ist der Abstand von zwischen den Wellenbergen, wenn Lichtstrahl 1 und 3 nach der Brechung übereinander gelegt werden würden?

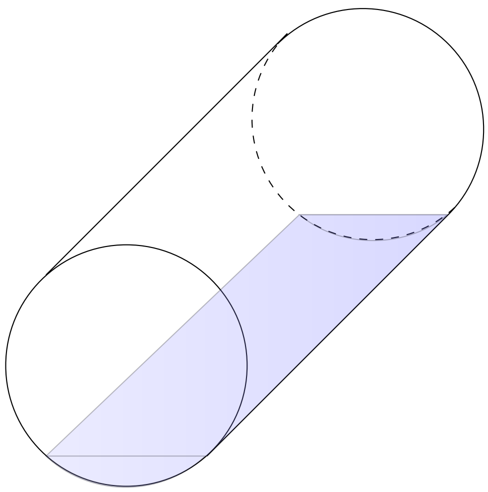
Aufgabe 11: *Berechne das Volumen und die Oberfläche vom bikonkaven Körper.*



a) Der abgebildete Körper hat die Maße $h = 11\,\text{cm}$, $t = 5\,\text{cm}$ und $s = 6\,\text{cm}$. Aus dem Quader wurden zwei gleiche Zylinderabschnitte herausgeschnitten. Dabei wurde ein Ausschnitt der Grundfläche des Zylinders verwendet, der 12% der gesamten Grundfläche beschreibt.

b) Von dem abgebildeten Körper sind folgende Maße bekannt: $h = 4,5\,\text{cm}$, $t = 7,2\,\text{cm}$ und $s = 5\,\text{cm}$. Außerdem ist der Radius des Zylinderabschnittes mit $r = 9,1\,\text{cm}$ bekannt.

Aufgabe 12: *Löse alle Teilaufgaben.*



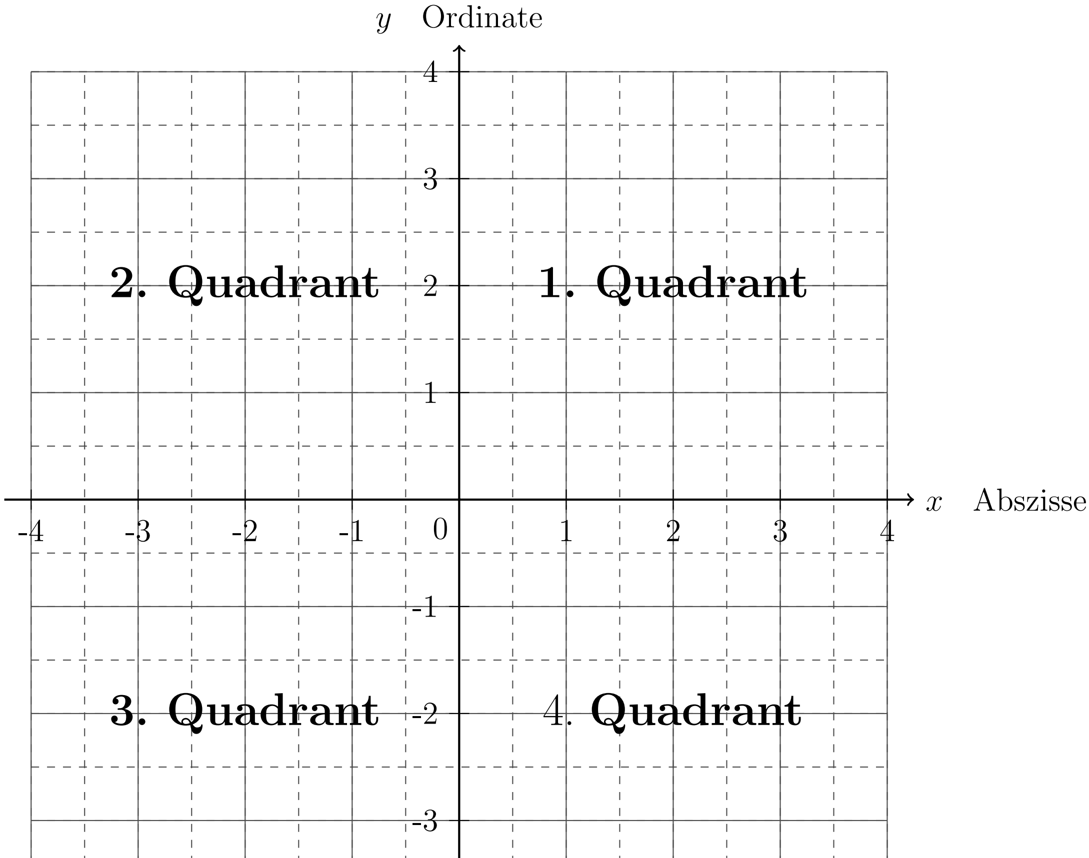
a) Ein Tankanhänger in Zylinderform mit dem Durchmesser von $4\,\text{m}$ und einer Länge von $13\,\text{m}$ ist so gefüllt, dass die Wasseroberfläche eine Strecke in der Breite von $1,7m$ aufspannt. Berechne die Wassermenge und gib diese in Litern an.

b) Ein Tankanhänger in Zylinderform mit dem Durchmesser von $3,75\,\text{m}$ und einer Länge von $12,7\,\text{m}$ wurde gewogen, dabei wurde festgestellt, dass der Wagen rund $3,125\,\text{t}$ schwerer ist als im leeren Zustand. Berechne die prozentualen Füllmengen des Zylinders für Wasser $1\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, Öl $0,991\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und Milch $1,032\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.39) Lösungen zu den gemischten Trigonometrie.

6 Funktionen

Um *Funktionen* verstehen zu können, müssen zunächst Begrifflichkeiten des sogenannten *Koordinatensystems* besprochen und verinnerlicht werden. Ein *Koordinatensystem* in zwei *Dimensionen* ist ein *Zahlenstrahl* mit den sogenannten *Variablenwerten* x und einem darauf *orthogonalen Zahlenstrahl*, der den Variablenzahlenstrahl bei Null schneidet und auf dem die sogenannten *Funktionswerte* $f(x)$ aufgetragen sind. Dabei wird $f(x)$ gelesen als „f von x“. Der Variablenzahlenstrahl wird *Abszisse* genannt (oftmals auch x-Achse, was zu Verwirrungen führen kann, wenn die Variable einen anderen Namen als x hat), während der darauf *orthogonale Zahlenstrahl Ordinate* genannt wird. Ein *Koordinatensystem* ist somit in vier Bereiche aufgeteilt, welche *Quadranten* genannt werden. Die Reihenfolge der Benennung wird offensichtlicher nach der Besprechung einiger *Funktionen*.



Ein *Koordinatensystem* stellt also eine zweidimensionale *Fläche* dar, welche keine Umrandung besitzt - eine sogenannte *Ebene*.

Eine *Funktion* ist dabei eine Vorschrift, die fordert, dass für eine *Variable* ein Wert in eine Gleichung eingesetzt wird. Der resultierende Wert wird dann *Funktionswert* genannt. Somit entsteht immer ein *Wertepaar*, welches dann im *Koordinatensystem* eingesetzt wird. Mathematisch würde dies so formuliert werden: Eine *Funktion* f bildet Zahlen x einer *Zahlenmenge* auf eine andere *Zahlenmenge* ab. Dabei darf für jeden Wert von x nur ein abgebildeter Wert existieren. Diese Forderung wird *Eindeutigkeit* genannt.

$$f : x \mapsto y \tag{6.1}$$

Ein Beispiel für eine solche *Funktion* wäre:

$$f(x) = 2x \tag{6.2}$$

Dabei wird das Doppelte der in die *Variable* x eingesetzten Zahl auf den *Funktionswert* $f(x)$ *abgebildet*.

Eine *Funktion* kann auch *punkt-* oder *achsensymmetrisch* sein. Dazu werden über das *Einsetzverfahren* folgende Gleichungen überprüft:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(-x) \qquad \text{Achsensymmetrie} \\ f(x) &= -f(-x) \qquad \text{Punktsymmetrie} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Bei der *Achsensymmetrie* ist die *Funktion* nach einer *Spiegelung* an der *Ordinate*, während bei der *Punktsymmetrie* die *Funktion* nach einer 180° *Drehung* um den *Koordinatenursprung* identisch ist. Die *Achse* der *Symmetrie* sowie der kann sich auch verschieben, allerdings kann dann das *Koordinatensystem* so verschoben werden, dass diese *Symmetrien* doch wieder mit der Gleichung (6.3) überprüft werden können. Hierzu zwei Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 6 \\ f(x) &= f(-x) \\ \Rightarrow 3x^2 - 6 &= 3(-x)^2 - 6 \quad \text{mit: } (-1)^2 = 1 \\ 3x^2 - 6 &= 3x^2 - 6 \Rightarrow \text{achsensymmetrisch!} \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 - 3x \\
f(x) &= -f(-x) \\
\Rightarrow 2x^3 - 3x &= -\left(2(-x)^3 - 3(-x)\right) \quad \text{mit: } (-1)^3 = -1 \text{ und: } (-1)\cdot(-1) = 1 \\
\Rightarrow 2x^3 - 3x &= -\left(-2x^3 + 3x\right) \\
\Rightarrow 2x^3 - 3x &= 2x^3 - 3x \Rightarrow \text{punktsymmetrisch!}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Wie bereits schon aus den vorherigen Kapiteln bekannt ist, sind nicht alle Rechenoperationen zulässig, wie zum Beispiel die *Division* durch Null oder noch nicht zulässig, wie die *Wurzel* einer negativen Zahl. Deswegen besitzt jede *Funktion* einen sogenannten *Definitionsbereich*, welche Zahlen in eine *Funktion* eingesetzt werden können und durch die *Definitionsmenge* $\mathbb{D}$ beschrieben wird. Bei einer *Abbildung* des *Variablenwertes* auf einen *Funktionswert*, sind auch nicht alle Bereiche auf der *Ordinate* betroffen. Alle möglichen Zahlen des *Funktionswertes*, werden in der *Wertemenge* $\mathbb{W}$ beschrieben. Für das Beispiel auf Gleichung (6.2) wäre die *Definitions-* und *Wertemenge* gegeben als:

$$\begin{aligned}
\mathbb{D} &= \{x \in \mathbb{R}\} \\
\mathbb{W} &= \{f(x) \in \mathbb{R}\}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Dabei kann jede *Definitionsmenge* berechnet werden, indem die Region die einen bestimmten Wert nicht erreichen darf mit diesem gleichgesetzt wird. So sei zum Beispiel $f(x) = \frac{1}{2x-2}$ gegeben. Folglich darf für dieses Beispiel der *Nenner* nicht Null werden und somit wird der *Nenner* alleine behandelt und gleich Null gesetzt $0 = 2x - 2$. Anschließend wird diese aufgestellte Gleichung nach x aufgelöst. Das resultierende Ergebnis ist die Zahl, für die die *Funktion* $f(x)$ nicht *definiert* ist.
Anzumerken bleibt, dass nicht jede *Funktion* mit dem Buchstaben f und nicht jede *Variable* mit x betitelt sein muss, so gilt zum Beispiel in der Physik die Strecke x als *Funktion* der Zeit t, also $x(t)$. Im Allgemeinen können alle Reaktionen auf etwas in *Variablen-* und *Funktionswert* übersetzt werden, sodass bei genügend Informationen daraus die *Funktion* ersichtlich wird. Mit dieser *Funktion* ist es möglich die Zukunft auszurechnen, wie zum Beispiel bei der physikalischen *Funktion* $x(t) = vt$, wobei v eine konstante Geschwindigkeit ist. Somit kann vorherbestimmt werden, welche Strecke x nach einer beliebigen Zeit t für die Geschwindigkeit v zurückgelegt wurde. Dies ist auch bei wesentlich komplexeren Zusammenhängen möglich, sodass gilt, dass alles berechnet werden kann. Jedoch müssen immer Vereinfachungen angenommen werden, da die Gleichungen sonst zu unübersichtlich und nicht mal von Hochleistungscomputern in annehmbarer Zeit berechnet werden können. Wie solche Methoden im Detail funktionieren, wird im Kapitel „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und „Physikalische Anwendungen“ skizziert.

Nachdem die Grundbegrifflichkeiten einer *Funktion* erläutert wurden, soll das Arbeiten mit *Funktionen* erschlossen werden.

6.1 Wertetabellen und Punkte

Um *Funktionen* zeichnen und dann später ihre Form ausnutzen zu können, bedarf es sogenannter *Wertetabellen*. Dabei werden verschiedene Werte für die *Variable* x eingesetzt und dann verrechnet. Der resultierende *Funktionswert* $f(x)$ wird dann so notiert, dass der Zusammenhang zwischen der eingesetzten Zahl für die *Variable* und dem *Funktionswert* erkennbar wird.

An zwei Beispielen soll das Prinzip der *Wertetabelle* erläutert werden - hierbei kann die Spalte mit „Rechnung“ und „Punkte“ beim Erstellen einer *Wertetabelle* weggelassen werden, welche hier lediglich für die Erklärung dient:

- Die erste Funktion die untersucht wird, sei die folgende:

$$f(x) = 2x + 1 \tag{6.7}$$

  Für die *Variable* werden nun verschiedene Zahlen eingesetzt und der *Funktionswert* dann berechnet.

Punkte	P_{-2}	P_{-1}	P_0	P_1	P_2	P_3
x	-2	-1	0	1	2	3
Rechnung	$2\cdot(-2)+1$	$2\cdot(-1)+1$	$2\cdot 0+1$	$2\cdot 1+1$	$2\cdot 2+1$	$2\cdot 3+1$
$f(x)$	-3	-1	1	3	5	7

- Die zweite *Funktion* die untersucht wird, sei die folgende:

$$g(x) = x^2 - 1 \tag{6.8}$$

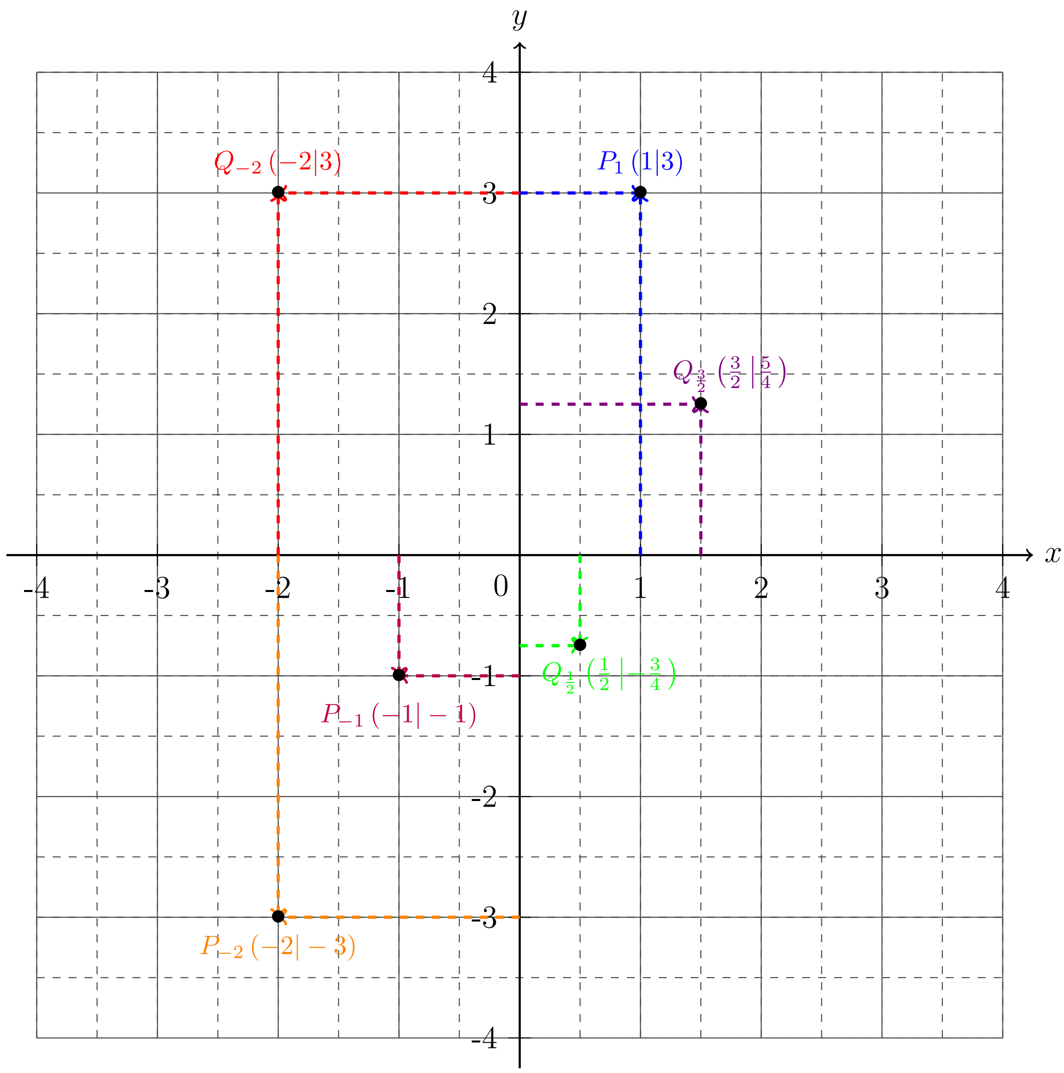
  Für die *Variable* werden nun verschiedene Zahlen eingesetzt und der *Funktionswert* dann berechnet.

Die *Wertetabellen* zeigen, dass immer für die *Variable* x die entsprechende Zahl eingesetzt wurde. Dabei sind diese Zahlen frei zu wählen.
Die jeweiligen *Variablen-* und *Funktionswerte* bilden Paare, welche auch *Wertepaare* genannt werden. Diese symbolisieren einen *Punkt* im *Koordinatensystem*. Dabei wird bei einem *Punkt* P immer zu erst der *Variablenwert* x und anschließend der *Funktionswert* $f(x)$ genannt

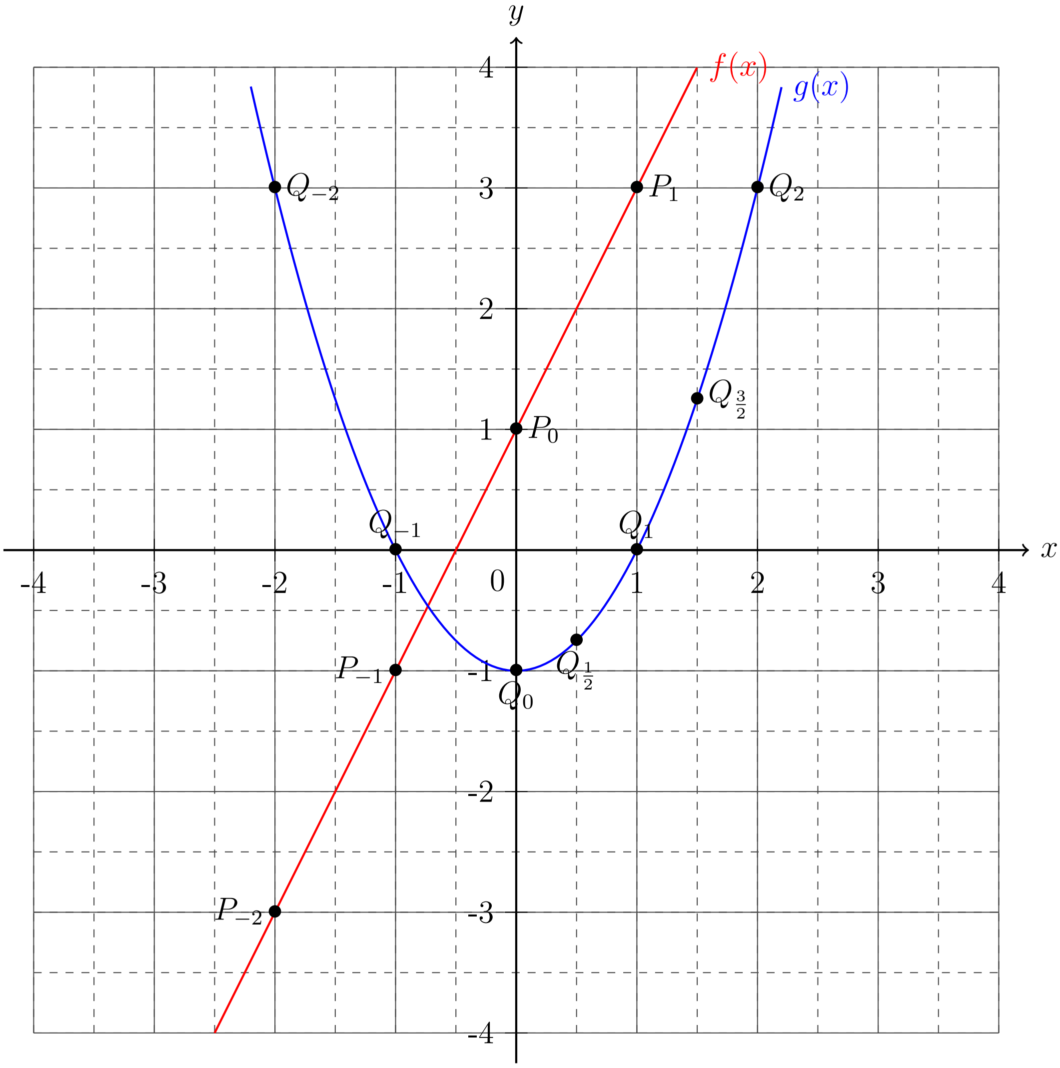
$$P\left(x|f(x)\right) \quad . \tag{6.9}$$

Punkte	Q_{-2}	Q_{-1}	Q_0	$Q_{\frac{1}{2}}$	Q_1	$Q_{\frac{3}{2}}$	Q_2
x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
Rechnung	$(-2)^2-1$	$(-1)^2-1$	0^2-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^2-1$	1^2-1	$\left(\frac{3}{2}\right)^2-1$	2^2-1
$g(x)$	3	0	-1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

Diese *Punkte* geben an, wie viele Schritte (den *Variablenwert*) auf der *Abszisse* zurückgelegt werden müssen, um dann anschließend die Anzahl der Schritte des *Funktionswertes* auf der *Ordinate* zu gehen. Im folgenden *Koordinatensystem* sind einige *Punkte* aus den beiden *Wertetabellenbeispielen* nach diesem Schema eingezeichnet.



Die *Punkte* der jeweiligen *Wertetabellen* können verbunden werden, sodass sich das Muster der *Punkte* zeigt. Dieses Muster wird *Graph* der *Funktion* genannt und bietet Aufschluss zu den Eigenschaften der *Funktion*.



Das Ziel einer *Wertetabelle* ist es den *Graphen* einer *Funktion* zeichnen zu können, um daraus und der Struktur der *Funktion* den *Werte-* und *Definitionsbereich* sowie weitere Eigenschaften bestimmen zu können. Im Kapitel „Differentiation und Integration“ wird auf dieses zeichnerische Element vollständig verzichtet, sodass alle Informationen einer *Funktion* errechnet werden können. In den weiteren Abschnitten dieses Kapitels werden spezielle Arten von *Funktionen* analysiert.

6.1.1 Übungsaufgaben zu Wertetabellen und Punkte

Aufgabe 1: *Zeichne die Punkte in ein Koordinatensystem.*

$A\,(1\,|6\,)$ $\quad B\,(-2\,|4\,)$ $\quad C\,(6\,|0\,)$ $\quad D\,(-7,5\,|-1\,)$

$E\left(\frac{1}{2}\,|3\right)$ $\quad F\left(-\frac{7}{4}\,|-6,25\right)$ $\quad G\,(8\,|-8\,)$ $\quad H\left(\sqrt{6,25}\,\middle|-\frac{3}{4}\right)$

$I\,(7,25\,|-6,75\,)$ $\quad J\left(-4\,\middle|-\frac{33}{4}\right)$ $\quad K\left(-5\,\middle|\sqrt{2}\right)$ $\quad L\left(2\,|-2^3\right)$

$M\left(289^0\,\middle|\ln e^{1,5}\right)$ $\quad N\left(-3!\,\middle|\frac{5!}{4!}\right)$ $\quad O\left(-\sqrt[4]{81}\,\middle|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right)$ $\quad P\,(\pi\,|e\,)$

Aufgabe 2: *Berechne die angegebenen Wertetabellen für die jeweiligen Funktionen.*

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$							

x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$							

a) $f(x) = x + 1$ $\quad$ *b)* $f(x) = -2x + 3$

c) $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ $\quad$ *d)* $f(x) = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{5}$

e) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ $\quad$ *f)* $f(x) = 3x^2 - 6x - 2$

g) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2$ $\quad$ *h)* $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$

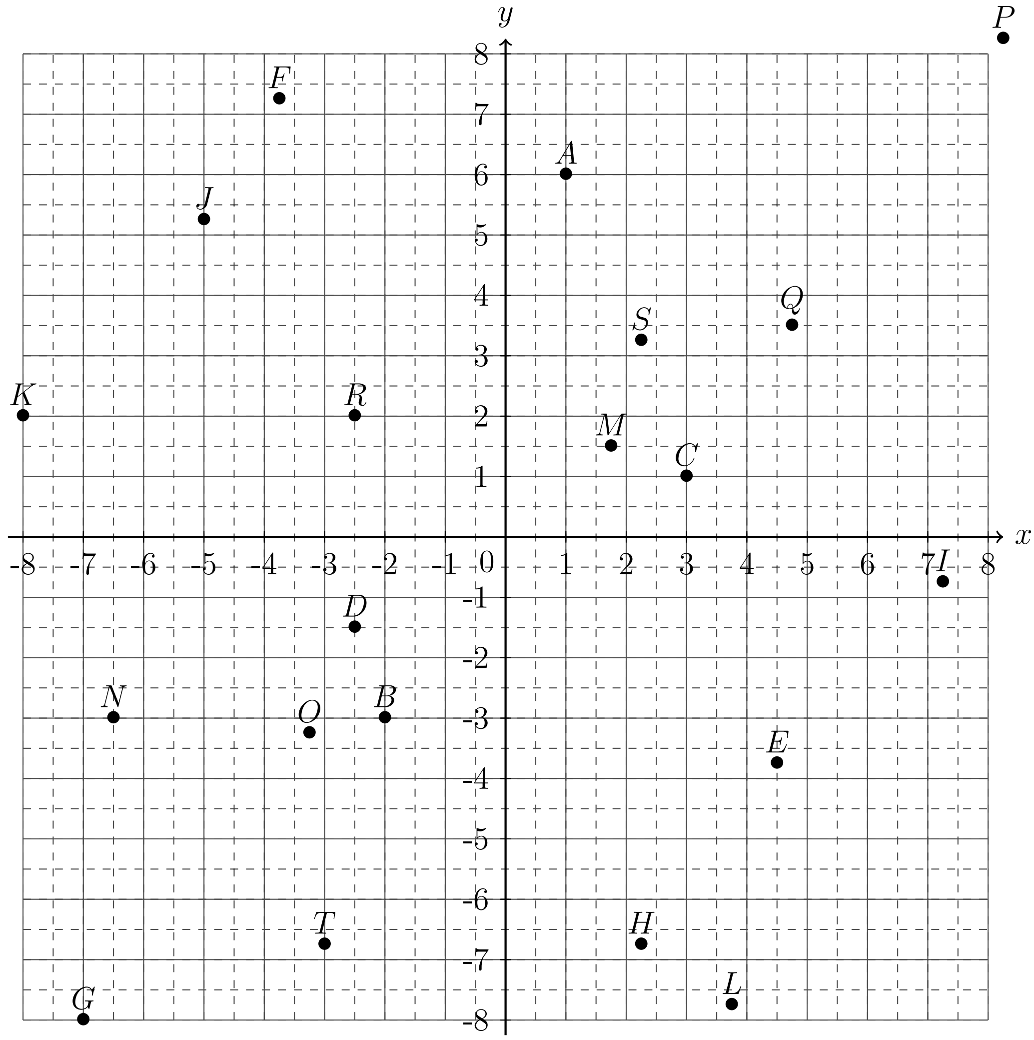
Aufgabe 3: *Zeichne die Funktionen und bestimme die Definitions- und Wertebereiche.*

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ *b)* $g(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $h(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ *d)* $l(x) = -x^2 + 3x - 2$

e) $k(x) = -\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ *f)* $m(x) = -4x^{-1}$

Aufgabe 4: *Bestimme alle Punkte.*



Aufgabe 5: *Zeichne ein Koordinatensystem in den Grenzen von $x \in [0, 10]$ und $y \in [0, 10]$ und zeichne die angegebenen Strecken, Halbgeraden oder Geraden ein.*

a) $A(4|3)$ und $B(7|1)$ Strecke $\overline{AB}$

b) $C(1|1)$ und $D(4|9)$ Gerade g

c) $E(0|8)$ und $F(5|3)$ Strecke $\overline{EF}$

d) $G(6|6)$ und $H(4|7)$ Halbgerade $[HG$

e) $I(2|1)$ und $J(8|9)$ Halbgerade $[JI$

f) $K(5|10)$ und $L(4|2)$ Gerade h

g) $M(9|2)$ und $N(10|8)$ Gerade k

h) $O(5|0)$ und $P(0|4)$ Strecke $\overline{OP}$

Aufgabe 6: *Zeichne ein Koordinatensystem in den begrenzt durch die Koordinaten des Punktes $P(10, 10)$ und zeichne die angegebenen Strecken ein. Gib an um welche geometrische Flächenform es sich handelt.*

a) $A(2|2) \wedge B(6|2) \wedge C(6|6) \wedge D(2|6) \quad : \quad \overline{AB} \wedge \overline{BC} \wedge \overline{CD} \wedge \overline{DA}$

b) $A(1|2) \wedge B(2|7) \wedge C(7|7) \wedge D(6|2) \quad : \quad \overline{AB} \wedge \overline{BC} \wedge \overline{CD} \wedge \overline{DA}$

c) $A(3|2) \wedge B(3|9) \wedge C(7|8) \wedge D(7|5) \quad : \quad \overline{AB} \wedge \overline{BC} \wedge \overline{CD} \wedge \overline{DA}$

d) $A(4|1) \wedge B(1|4) \wedge C(6|9) \wedge D(9|6) \quad : \quad \overline{AB} \wedge \overline{BC} \wedge \overline{CD} \wedge \overline{DA}$

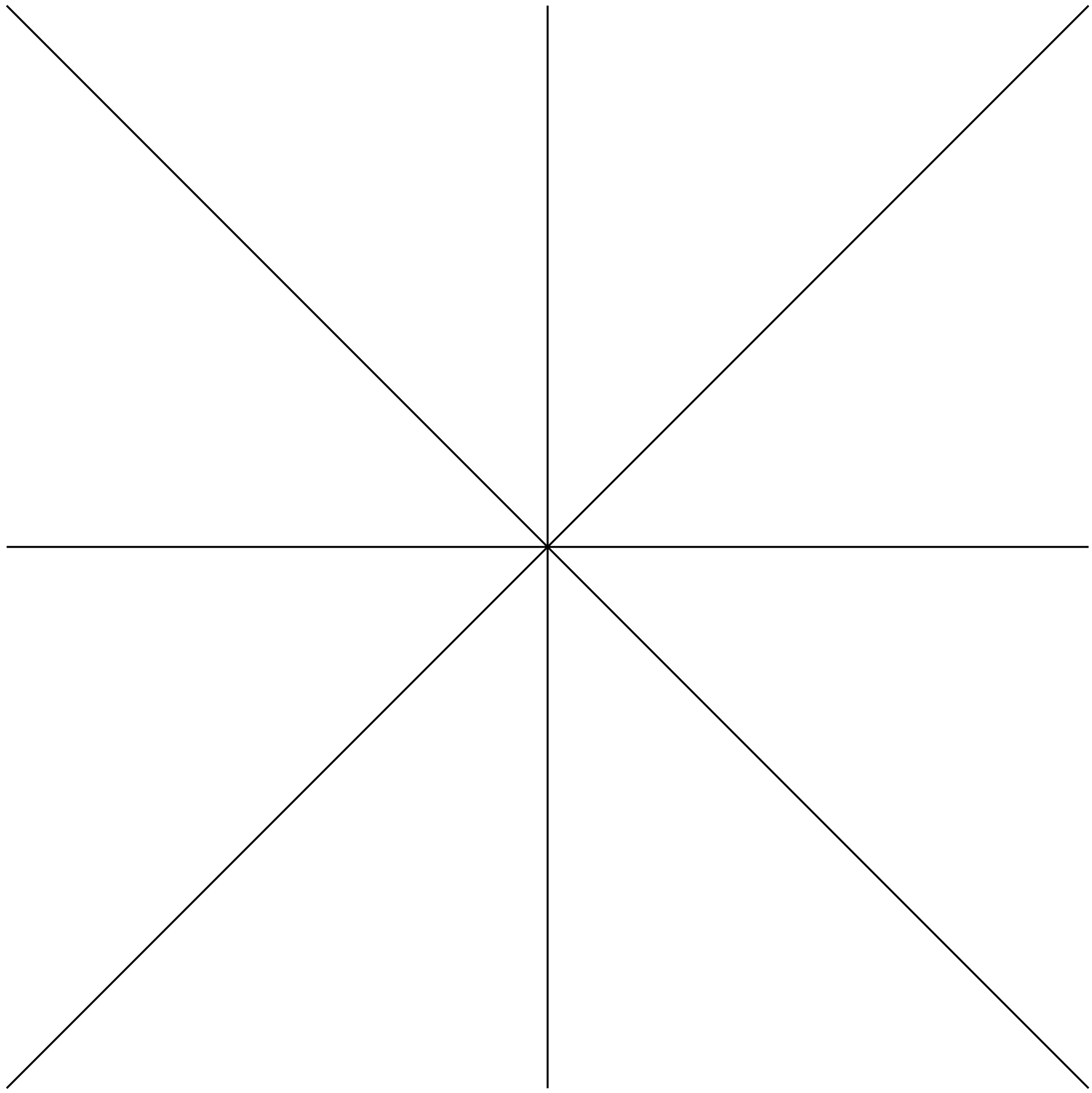
e) $A(5|0) \wedge B(1|4) \wedge C(5|8) \wedge D(8|4) \quad : \quad \overline{AB} \wedge \overline{BC} \wedge \overline{CD} \wedge \overline{DA}$

f) $A(4|2) \wedge B(0|5) \wedge C(4|8) \wedge D(8|5) \quad : \quad \overline{AB} \wedge \overline{BC} \wedge \overline{CD} \wedge \overline{DA}$

Aufgabe 7: *Zeichne* 3 *Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Wie viele verschiedenen Strecken zwischen den Punkten können gezeichnet werden? Wiederhole diese Aufgabe mit* 4 *und* 5 *Punkten und fülle die Tabelle aus.*

Anzahl der Punkte	3	4	5	6	7	8	13	22	50
Anzahl der Strecken									

Aufgabe 8: *Beginne am Punkt* $P(1cm|0cm)$, $Q(0cm|1cm)$, $R(-1cm|0cm)$, $S(0cm|-1cm)$, $T(1cm|1cm)$, $U(-1cm|1cm)$, $V(-1cm|-1cm)$ *sowie* $W(-1cm|1cm)$ *und zeichne eine orthogonale Strecke bis zur nächsten Gerade, zeichne von diesem neu gefundenen Punkt wieder orthogonale Strecke und setze dieses Prinzip fort bis ein eine weitere Strecke nicht mehr aufs Blatt passen würde. Starte gegen den Uhrzeigersinn.* (keine Lösung!)



Aufgabe 9: *Zeichne ein vollständig beschriftetes Koordinatensystem und trage die gegebenen Punkte ein.*

a) $A(1\|2)$	*b)* $B(5\|3)$	*c)* $C(7\|2)$	*d)* $D(3\|8)$
e) $E(5\|2)$	*f)* $F(6\|7)$	*g)* $G(7\|0)$	*h)* $H(0\|4)$
i) $I(4\|1)$	*j)* $J(1\|8)$	*k)* $K(5\|0)$	*l)* $L(6\|6)$

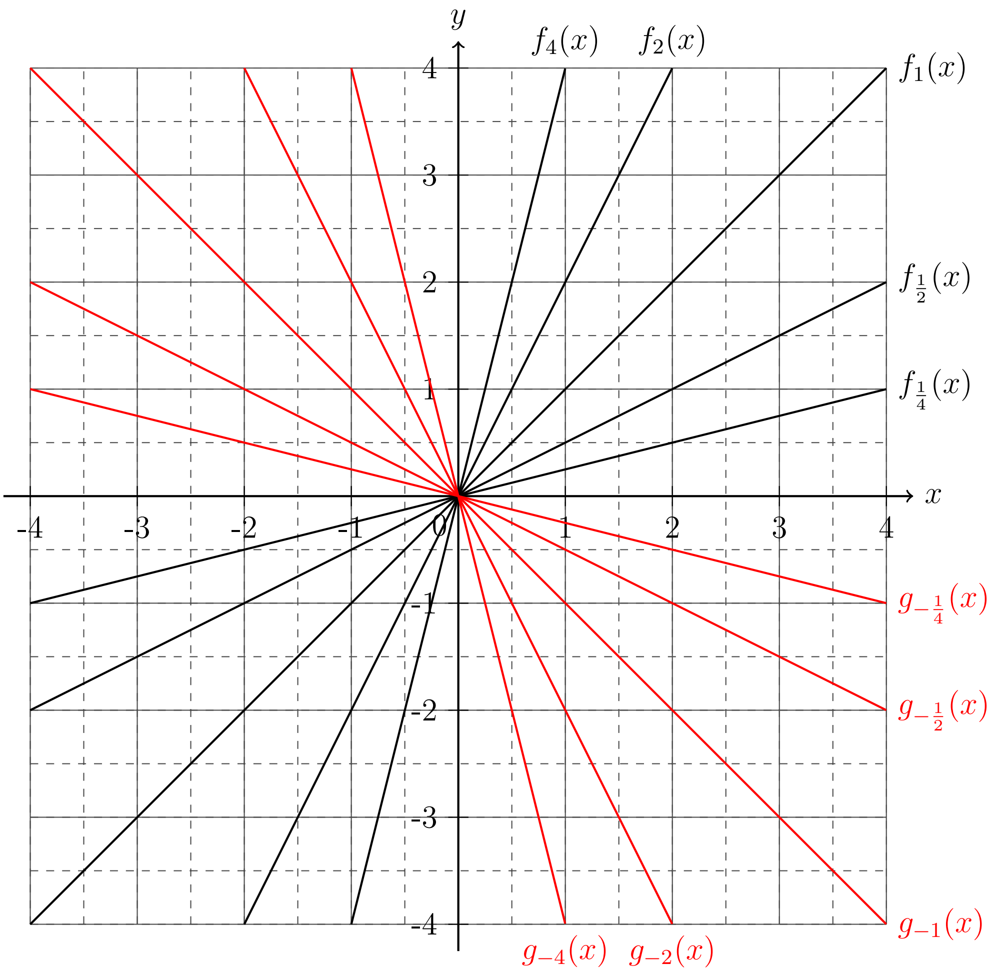
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.40) Lösungen zu Wertetabellen und Punkte.

6.2 Geraden

Geraden sind die simpelsten *Funktionen*. Sie sind *definiert* durch die allgemeine *Geradenfunktionsgleichung*:

$$f(x) = mx + b \ , \tag{6.10}$$

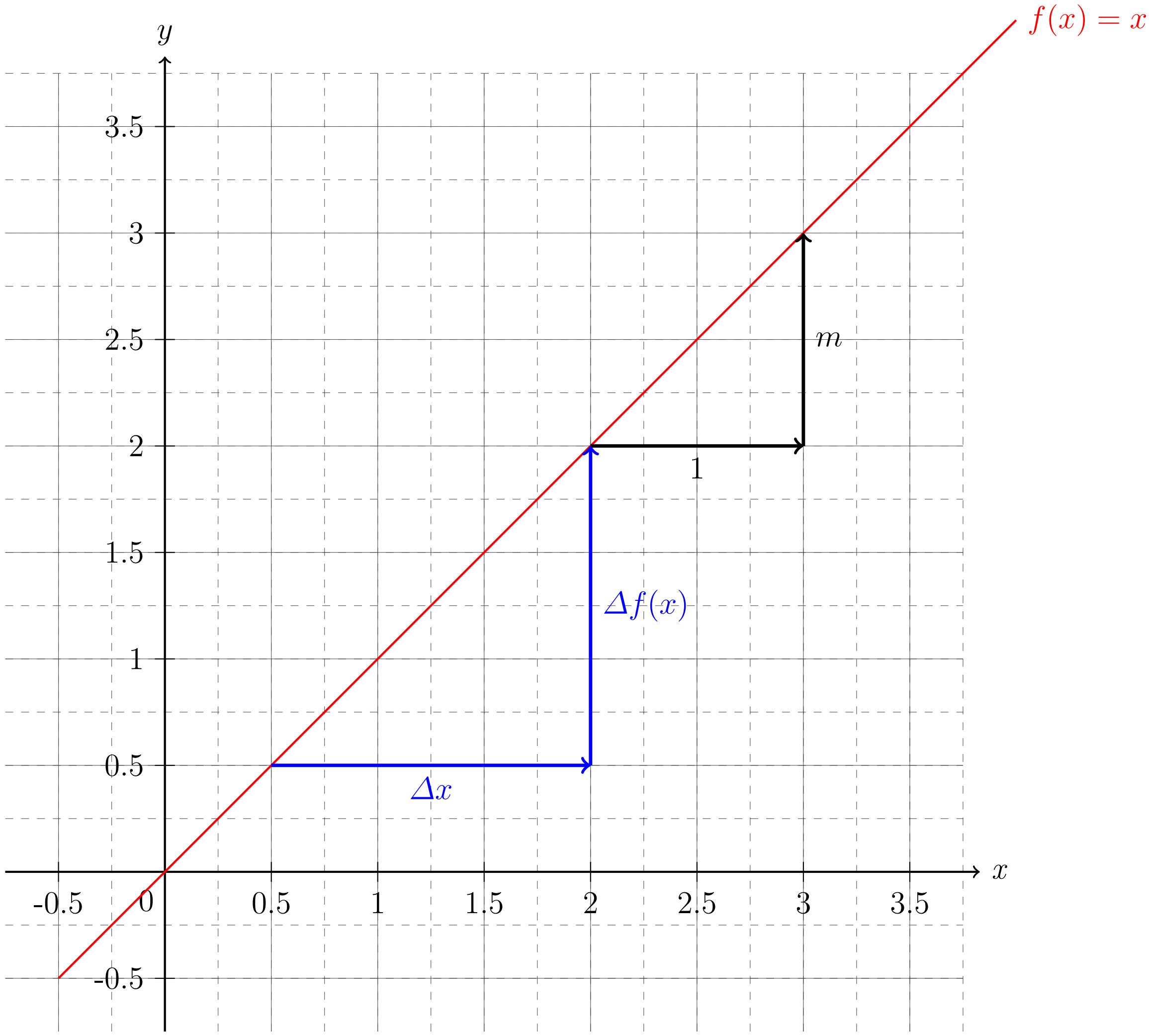
wobei x die *Variable* der *Funktion* $f(x)$ ist und m und b *Parameter* sind. Eine *Gerade* ist eine *lineare Funktion*, oder auch eine *Funktion erster Ordnung*, da der *Term* mit der höchsten *Potenz* als mx^1 gegeben ist. Da eine *Funktion* immer einen *Parameter* mehr besitzt als die Zahl ihrer *Ordnung*, werden für eine *Funktion erster Ordnung* zwei Informationen benötigt, um alle Eigenschaften der *Funktion* bestimmen und den *Graphen* zeichnen zu können. Diese Informationen können *Punkte* sein oder Angaben der *Parameter* m und b. Zu nächst wird sich auf die Bedeutung der *Parameter* beschränkt. Dazu werden für m verschiedene *Geraden* gezeichnet unter der Bedingung, dass $b = 0$ ist, wobei für positive Werte von m die *Funktion* f und für negative Werte g genannt wird.



Die Abbildung zeigt deutlich, dass die *Geraden* mit positiven Werten von m von links unten nach rechts oben gehen und je höher der Wert ist, desto stärker ist die *Steigung* der *Geraden*.

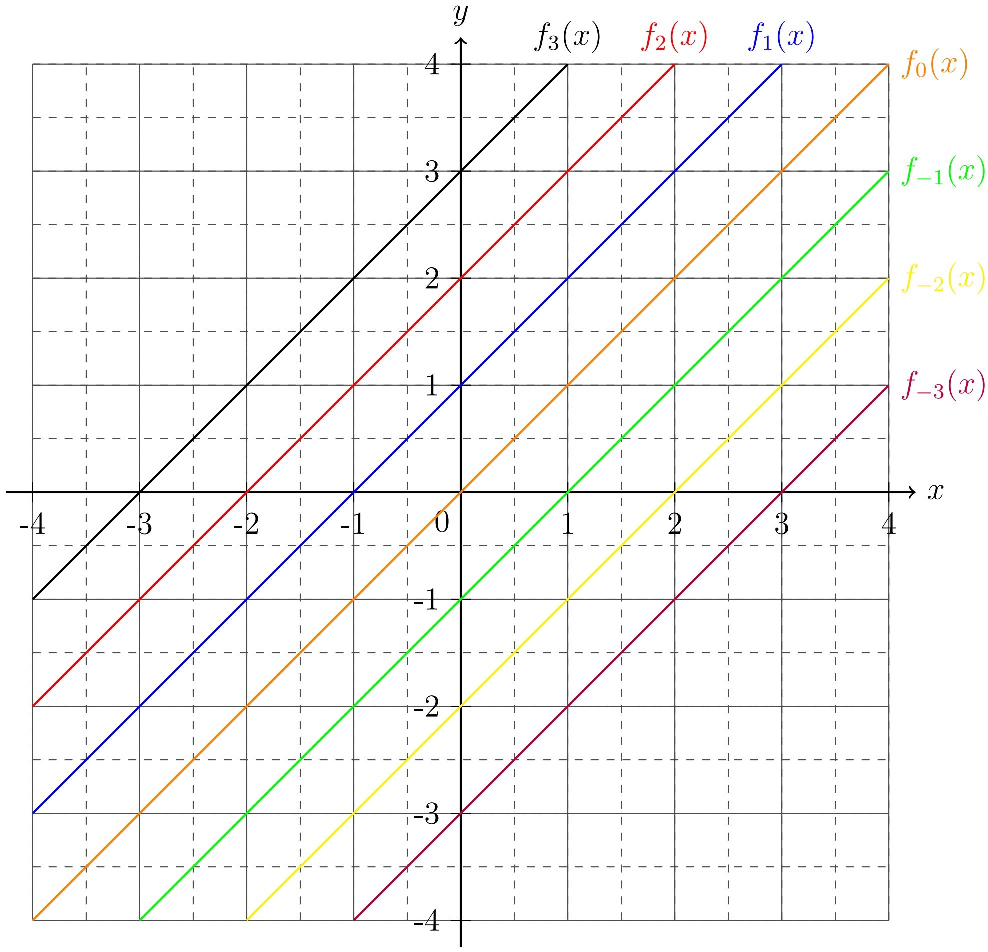
Für negative Werte von m sinken die *Geraden* von links oben nach rechts unten. Auch hier nimmt die *Steigung* zu je größer der *Betrag* von m wird. Somit kann festgehalten werden, dass m die *Steigung* der *Geraden* symbolisiert.

Die Steigung einer *Geraden* kann auch gemessen werden. Dabei wird auf der *Abszisse* einen Einheitenschritt nach rechts gegangen und dann *orthogonal* dazu wieder zur *Funktion parallel* zur *Ordinate*. Die Strecke die *parallel* zur *Ordinate* ist, ist der Wert des *Steigungsparameters* m.



Dies nennt man das *Steigungsdreieck*, dabei können auch mehrere Schritte entlang der *Abszisse* zurückgelegt werden, sodass im Allgemeinen $m = \frac{\text{Ordinatenschritte}}{\text{Koordinatenschritte}} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, wobei Δx die *Differenz* zwischen zwei Werten von x also $\Delta x = x_2 - x_1$ für $x_2 > x_1$ und $\Delta f(x)$ die *Differenz* zwischen zwei Werten von $f(x)$ folglich $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ beschreibt.

Im nächsten Fall soll die *Steigung* m auf 1 festgelegt werden und der *Parameter* b variiert werden. Dabei wandern die Werte von b von -3 bis 3.



Im *Koordinatensystem* ist deutlich zu erkennen, dass der Wert von b mit dem Wert der *Ordinate* übereinstimmt, wenn sich *Ordinate* und die *Gerade* treffen, somit wird b auch der *Ordinatenschnittwert* oder *Offset* der *Funktion* genannt.

Da die *Parameter* diskutiert wurden, wird nun das Verfahren beschrieben wie aus zwei *Punkten* diese *Parameter* berechnet werden können. Dazu seien die beiden *Punkte* zum Beispiel: $P(-1|-4)$ und $Q(2|3)$. Diese *Punkte* werden in die allgemeine *Geradengleichung* eingesetzt

$$\begin{aligned} P: \qquad -4 &= m \cdot (-1) + b \\ Q: \qquad 3 &= m \cdot 2 + b \end{aligned} \tag{6.11}$$

und dann eine der beiden *Gleichungen* nach einem unbekannten *Parameter* aufgelöst.

$$P: \qquad m - 4 = b \tag{6.12}$$

Diese Gleichung für den *Parameter* b wird nun in die zweite *Gleichung* eingesetzt und anschließend nach m aufgelöst:

$$
\begin{aligned}
P \text{ in } Q: \qquad 3 &= 2m + (m-4) \\
3 &= 3m - 4 \qquad |+4 \\
7 &= 3m \qquad |:3 \\
\frac{7}{3} &= m \qquad .
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Der berechnete *Wert* für m wird dann wieder in die *Gleichung* (6.12) eingesetzt um b zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
P \text{ mit } m: \qquad \frac{7}{3} - 4 &= b \\
-\frac{5}{3} &= b \quad .
\end{aligned}
\tag{6.14}
$$

Somit ergibt sich *Geradengleichung* mit den *Werten* von m und b zu:

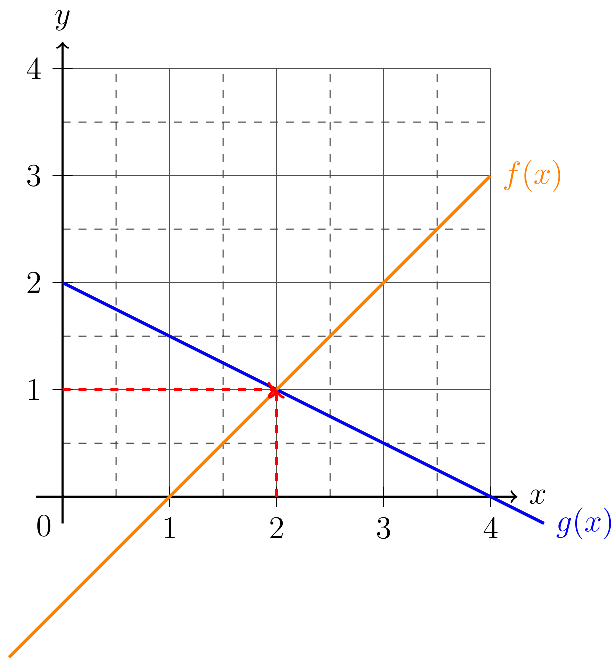
$$
\begin{aligned}
f(x) &= mx + b \\
\Rightarrow f(x) &= \frac{7}{3}x - \frac{5}{3} \quad .
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

Mittels dieses Verfahrens ist nun die *Geradenfunktionsgleichung* berechnet. Auch für komplexere *Funktionen* kann genau dieses Verfahren angewendet werden, allerdings erhöht sich die Anzahl der *Parameter* und der Gleichungen, sodass es eher zu einer Übersichtsaufgabe wird. Wenn die *Steigung* einer *Geraden* gleich Null (m=0) ist, dann wird von einer *Konstanten* gesprochen.

Aber auch noch ein anderer Wert ist interessant, nämlich der *Variablenwert* für den *Schnittpunkt* mit der *Abszisse*. Dieser Wert wird *Nullstelle* genannt und kann berechnet werden, indem man den *Funktionswert* $f(x) \stackrel{!}{=} 0$ setzt, da der *Ordinatenwert* beim schneiden der *Abszisse* Null ist. Somit folgt eine kurze *Äquivalenzumformung* nach x und die *Nullstelle* x_N ist berechnet:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\stackrel{!}{=} 0 = mx + b \\
\Rightarrow -\frac{b}{m} &= x_N \quad .
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

Aber nicht nur die *Nullstellen* sind im Umgang mit *Funktionen* interessant, sondern auch die *Punkte* in denen sich die *Funktionen* schneiden.



Wie die Abbildung zeigt, besitzen die *Graphen* von $f(x)$ und $g(x)$ in dem *Punkt* $P(1|2)$ den gleichen *Variablen-* und *Funktionswerte*. Um diesen *Punkt* im Allgemeinen zu berechnen, können beide *Funktionen* gleichgesetzt werden und anschließend nach x aufgelöst werden. Für *Geraden* würde dies eine kleine *Äquivalenzumformung* bedeuten, während für höhere *Funktionen* sich die Techniken der *Äquivalenzumformung* wie zum Beispiel durch *quadratische Ergänzung* erweitern würden.

$$\begin{aligned} g(x) &\stackrel{!}{=} f(x) \\ -\frac{1}{2}x + 2 &= x - 1 && \Big| + \frac{1}{2}x + 1 \\ 3 &= \frac{3}{2}x && \Big| \cdot \frac{2}{3} \\ \Rightarrow 2 &= x_\times && \Big| \cdot \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{6.17}$$

In Gleichung (6.17) wird die Berechnung der *Schnittstelle* $x_\times$ gezeigt. Anschließend muss noch $x_\times$ in $f(x)$ oder $g(x)$ eingesetzt und das Ergebnis berechnet werden:

$$\begin{aligned} f(x_\times) &= x_\times - 1 \\ &= 2 - 1 = 1 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Somit ist, wie im *Koordinatensystem* zu sehen war, der *Schnittpunkt* der *Funktionen* $P_\times = (x_\times \,|f(x_\times)) = (2|1)$.

6.2.1 Übungsaufgaben zu Geraden

Aufgabe 1: *Bestimme aus den gegebenen Punkte die Geradenfunktionsgleichung, bestimme anschließend die Nullstelle und zeichne den Graphen.*

a) $P_a\left(-2\,|-2\right)$ und $Q_a\left(0\,|4\right)$

b) $P_b\left(\frac{1}{2}\,|1\right)$ und $Q_b\left(-1\,|-4\right)$

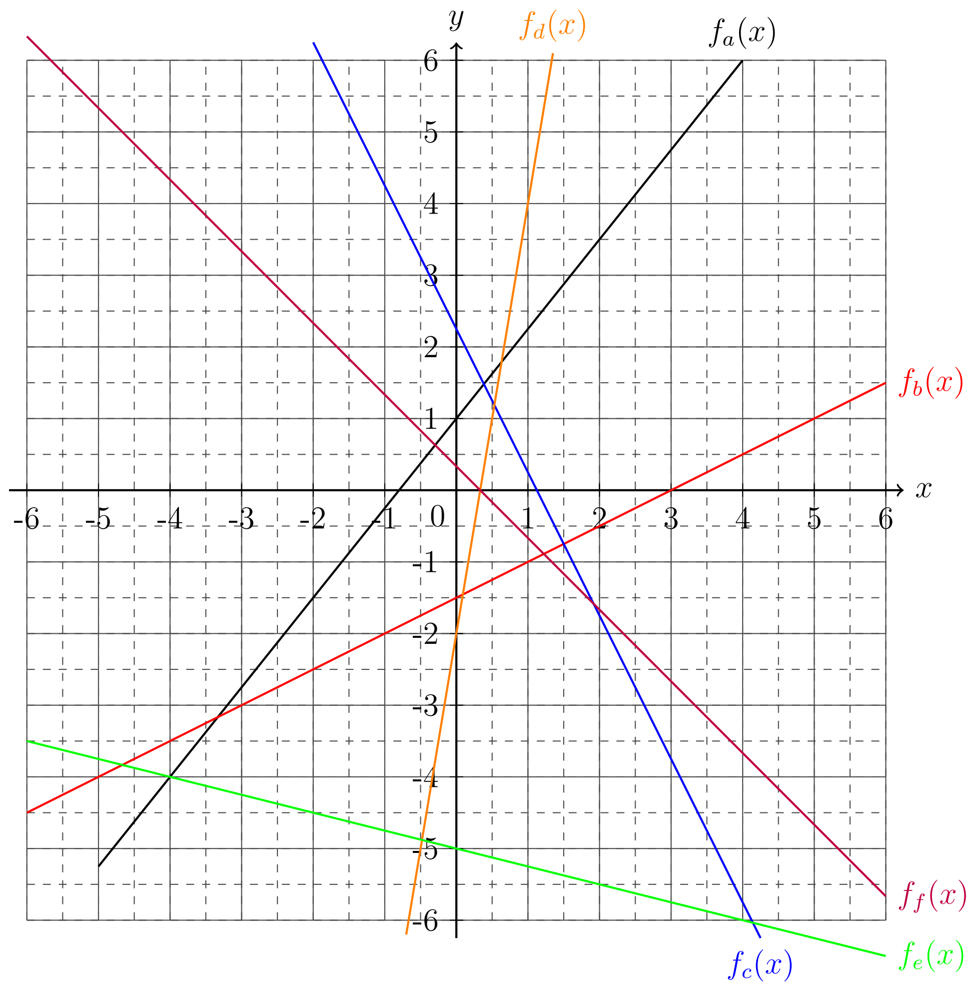
c) $P_c\left(-4\,|2\right)$ und $Q_c\left(4\,|5\right)$

d) $P_d\left(-3\,|-5\right)$ und $Q_d\left(5\,|2\right)$

e) $P_e\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{2}{3}\right)$ und $Q_e\left(-\frac{1}{6}\,|-3\right)$

f) $P_f\left(\sqrt{2}\,\middle|\,\sqrt{3}\right)$ und $Q_f\left(e\,|\pi\right)$

Aufgabe 2: *Bestimme den Steigungsparameter m und den Ordinatenschnittwert b aus den dargestellten Graphen. Gib die Geradenfunktionsgleichung an.*



Aufgabe 3: *Bestimme den Schnittpunkt* $P_\times\left(x_\times\,|f(x_\times)\right)$ *der beiden Geraden.*

a) $f(x) = 3x - 2$ und $g(x) = x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x + 2$ und $g(x) = -3x + \frac{4}{5}$

c) $f(x) = -3x$ und $g(x) = 2x - 6$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{7}$ und $g(x) = \frac{7}{3}x - 3$

e) $f(x) = 9x - e^2$ und $g(x) = \pi x + \frac{1}{4}$

f) $f(x) = -\sqrt{2}x$ und $g(x) = x\ln 2 - 6$

Aufgabe 4: *Bestimme die Nullstellen der Geraden* x_N.

a) $f(x) = 5x - 9$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x - 6$

c) $f(x) = -3x + 4$

d) $f(x) = -12x + \frac{8}{17}$

e) $f(x) = 9x + 4$

f) $f(x) = 15x + \sqrt{2}$

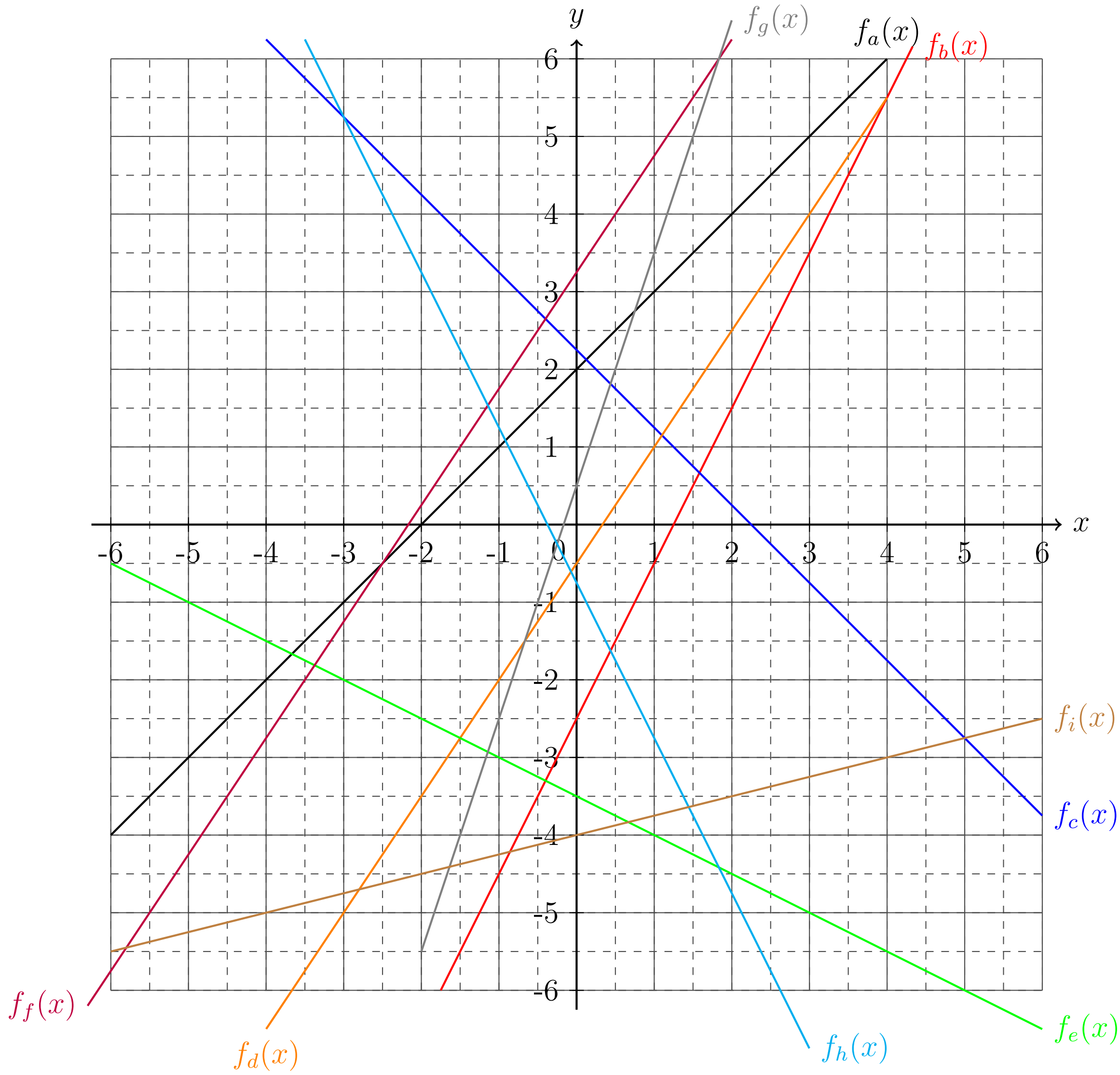
g) $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{5}$

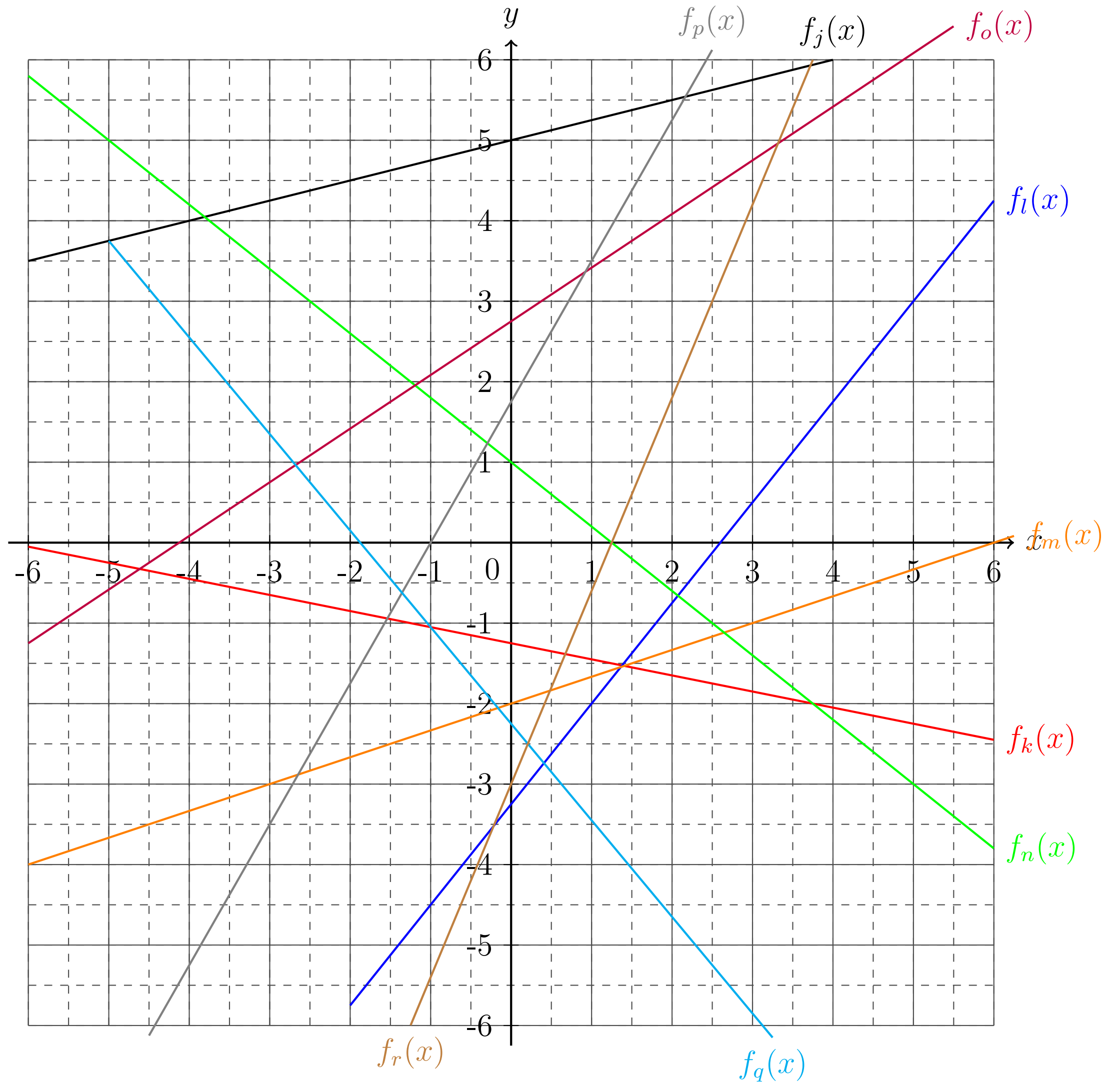
h) $f(x) = 3x - \frac{5}{6}$

i) $f(x) = -\sqrt{2}x - 45$

j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \ln 4$

Aufgabe 5: *Bestimme den Steigungsparameter m und den Ordinatenschnittwert b aus den dargestellten Graphen. Gibt die Geradenfunktionsgleichung an.*





Aufgabe 6: *Bestimme die Nullstellen der Funktionen.*

a) $f(x) = 3x - 9$	*b)* $f(x) = 2x - 3$	*c)* $f(x) = 3x + 2$
d) $f(x) = -x + 2$	*e)* $f(x) = -4x + 9$	*f)* $f(x) = \frac{x}{2} - 7$
g) $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$	*h)* $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}$	*i)* $f(x) = \frac{5x}{7} - \frac{6}{5}$
j) $f(x) = -\frac{3}{8}x - \frac{4}{5}$	*k)* $f(x) = -\frac{4}{7}x + \frac{9}{10}$	*l)* $f(x) = \frac{5x}{6} - \frac{7}{9}$
m) $f(x) = 0,75x - 4,3$	*n)* $f(x) = 1,36x + 3,45$	*o)* $f(x) = 4,27x - 0,53$
p) $f(x) = 12,4x - 34,5$	*q)* $f(x) = 0,05x + 0,23$	*r)* $f(x) = 1,12x - 1,92$

Aufgabe 7: *Bestimme die Schnittpunkte zwischen den Funktionen. Welche Bedeutung hat das Ergebnis?*

a) $f(x) = 3x - 9$ und $g(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$ und $g(x) = 0,75x - 4,3$

Aufgabe 8: *Bestimme die Schnittpunkte zwischen den Funktionen.*

a) $f(x) = 2x - 5$ und $g(x) = x + 2$

b) $f(x) = -2x - 5$ und $g(x) = 3x - 8$

c) $f(x) = -x + 4$ und $g(x) = 5x - 3$

d) $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = -2x + 1$

e) $f(x) = \frac{2}{3}x + 3$ und $g(x) = -x + \frac{5}{4}$

f) $f(x) = -\frac{6}{7}x - \frac{3}{8}$ und $g(x) = -7x + 6$

g) $f(x) = \frac{4}{7}x + \frac{6}{5}$ und $g(x) = -\frac{8}{3}x + \frac{4}{5}$

h) $f(x) = \frac{7}{10}x - \frac{5}{6}$ und $g(x) = 5,2x - 7,8$

i) $f(x) = -\frac{7}{2}x - \frac{4}{9}$ und $g(x) = -\frac{7}{4}x + 5,1$

j) $f(x) = 4,3x - \frac{3}{7}$ und $g(x) = -5,09x + 3,45$

k) $f(x) = -3,23x + 0,18$ und $g(x) = -0,003x + \frac{4}{5}$

l) $f(x) = \frac{8}{9}x - 4,3$ und $g(x) = -0,623x + 35,623$

Aufgabe 9: *Zeichne die Graphen der Funktionen.*

a) $f(x) = x - 3$	*b)* $f(x) = 2x + 1$	*c)* $f(x) = -x + 4$
d) $f(x) = \frac{x}{3} - 3$	*e)* $f(x) = -\frac{4}{5}x + 2$	*f)* $f(x) = -2x + \frac{6}{5}$
g) $f(x) = \frac{7}{6}x - \frac{3}{4}$	*h)* $f(x) = -\frac{3}{8}x - \frac{7}{4}$	*i)* $f(x) = 0,7x + \frac{8}{3}$
j) $f(x) = -\frac{8}{11}x - 4,3$	*k)* $f(x) = -0,3x + 3,7$	*l)* $f(x) = 2,4x + 1,4$

Aufgabe 10: *Bestimme die Umkehrfunktionen.* (Benötigt Abschnitt „Umkehrfunktionen“!)

a) $f(x) = 3x - 9$	*b)* $f(x) = 2x - 3$	*c)* $f(x) = 3x + 2$
d) $f(x) = -x + 2$	*e)* $f(x) = -4x + 9$	*f)* $f(x) = \frac{x}{2} - 7$
g) $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$	*h)* $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}$	*i)* $f(x) = \frac{5x}{7} - \frac{6}{5}$
j) $f(x) = -\frac{3}{8}x - \frac{4}{5}$	*k)* $f(x) = -\frac{4}{7}x + \frac{9}{10}$	*l)* $f(x) = \frac{5x}{6} - \frac{7}{9}$
m) $f(x) = 0,75x - 4,3$	*n)* $f(x) = 1,36x + 3,45$	*o)* $f(x) = 4,27x - 0,53$
p) $f(x) = 12,4x - 34,5$	*q)* $f(x) = 0,05x + 0,23$	*r)* $f(x) = 1,12x - 1,92$

Aufgabe 11: *Bestimme ob der Punkt auf dem Graphen der Funktion liegt.*

a) $P\,(7\,|11)$ und $f(x) = 2x - 3$

b) $P\,(2\,|9)$ und $f(x) = 4x + 1$

c) $P\,(-3\,|1)$ und $f(x) = -x + 4$

d) $P\,(-4\,|-13)$ und $f(x) = 3x - 1$

e) $P\,(6\,|-2,5)$ und $f(x) = \frac{1}{4}x - 5$

f) $P\left(\frac{3}{4}\middle|\frac{51}{12}\right)$ und $f(x) = 2x + \frac{5}{3}$

g) $P\left(\frac{4}{3}\middle|-\frac{119}{40}\right)$ und $f(x) = -\frac{6}{5}x - \frac{11}{8}$

h) $P\left(\frac{2}{5}\middle|\frac{251}{60}\right)$ und $f(x) = \frac{7}{3}x + \frac{13}{4}$

i) $P\left(-\frac{5}{6}\middle|-\frac{246}{135}\right)$ und $f(x) = -\frac{5}{9}x - 2,3$

j) $P\,(0,45\,|0,82)$ und $f(x) = 0,22x + \frac{5}{7}$

k) $P\,(1,7\,|-0,022)$ und $f(x) = 1,37x - 2,35$

l) $P\,(1,94\,|2,9798)$ und $f(x) = -1,83x + 6,53$

Aufgabe 12: *Bestimme die fehlenden Komponenten der Punkte.*

a) $P\,(5\,|\quad)$ und $f(x) = x - 4$

b) $P\,(-3\,|\quad)$ und $f(x) = 3x - 6$

c) $P\,(\quad|19)$ und $f(x) = 2x + 5$

d) $P\,(\quad|-1)$ und $f(x) = -2x + 3$

e) $P\left(\frac{4}{5}\,|\quad\right)$ und $f(x) = -x - \frac{4}{5}$

f) $P\left(\quad\middle|-\frac{9}{4}\right)$ und $f(x) = \frac{7}{4}x + \frac{9}{8}$

g) $P\left(\quad\middle|\frac{9}{11}\right)$ und $f(x) = \frac{8}{3}x - \frac{20}{7}$

h) $P\left(\frac{8}{7}\,|\quad\right)$ und $f(x) = -\frac{7}{8}x - \frac{5}{2}$

i) $P\left(-\frac{11}{3}\,|\quad\right)$ und $f(x) = \frac{11}{6}x + \frac{7}{4}$

j) $P\,(\quad|4,52)$ und $f(x) = 0,9x - 3,4$

k) $P\,(32,4\,|\quad)$ und $f(x) = -1,63x + \frac{6}{5}$

l) $P\,(\quad|-12,4)$ und $f(x) = -1,94x + 23,85$

Aufgabe 13: *Prüfe, ob der gegebene Punkte ein Punkt der gegebenen Funktion ist.*

a) $f(x) = -2x + 3 \quad \wedge \quad P\,(3\,|{-3})$

b) $f(x) = 3x - 5 \quad \wedge \quad P\,(-6,5\,|{-23,5})$

c) $f(x) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{4}{5}x \quad \wedge \quad P\left(-\dfrac{3}{2}\,\middle|\,-\dfrac{39}{20}\right)$

d) $f(x) = \dfrac{9}{5}x - \dfrac{1}{3} \quad \wedge \quad P\left(\dfrac{5}{6}\,\middle|\,\dfrac{7}{6}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{11}{8}x + \dfrac{14}{5} \quad \wedge \quad P\left(\dfrac{8}{5}\,|4\right)$

f) $f(x) = -\dfrac{14}{11}x + \dfrac{13}{3} \quad \wedge \quad P\left(-\dfrac{5}{6}\,\middle|\,\dfrac{178}{33}\right)$

Weitere Bruchrechnungsübungen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden: leichteres Niveau, mittleres Niveau oder schwereres Niveau

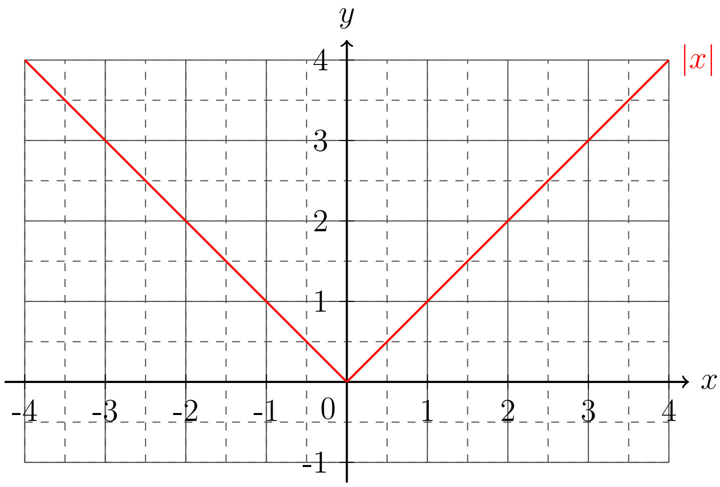
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.41) Lösungen zu Geraden.

6.3 Stufenfunktionen

Die *Betragsfunktion* ist die bekannteste Stufenfunktion und im Wesentlichen eine *Gerade* mit der *Steigung* $m = 1$, die an der *Ordinate* gespiegelt ist. Durch diesen Sprung im *Koordinatenursprung* wird die *Betragsfunktion* in zwei Bereiche unterteilt und da diese *Funktionstyp* öfter vorkommt wird diese spezielle Form abgekürzt:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ,\forall x \geq 0 \\ -x & ,\forall x < 0 \end{cases} \tag{6.19}$$

Wie an Gleichung (6.19) zu erkennen ist, ist die *Betragsfunktion* in zwei Bereiche geteilt. Dabei ist für negative Werte der *Variable* ein *Subtraktionsoperator* vorgestellt. Dies bedeutet, dass die negativen *Variablenwerte* zu positiven *Funktionswerten* umgewandelt werden. Für positive *Variablenwerte* hat die *Variable* ein Vorzeichen, sodass auch in diesem Bereich positive *Funktionswerte* resultieren. Der *Graph* dieser *Funktion* ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



An der Abbildung ist zu erkennen, dass die *Betragsfunktion* einen Knick im *Koordinatenursprung* besitzt und dass die *Funktion achsensymmetrisch* bezüglich der *Ordinate* ist. Die *Achse* der *Symmetrie* sowie der Knick der *Funktion* kann verschoben werden, indem in den *Betragsstrichen* eine Zahl *addiert* wird.

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x & ,\forall x \geq 2 \\ -x & ,\forall x < 2 \end{cases} \tag{6.20}$$

Um den *Funktionswert* der *Betragsfunktion* eines beliebigen *Variablenwertes* zu bestimmen, kann in nahezu allen Fällen, die in der Schule diskutiert werden, die Zahl *quadriert* und anschließend die *Wurzel* daraus gezogen werden.

$$|a| = \sqrt{a^2} \tag{6.21}$$

Dieses Verfahren wird oftmals dazu verwendet um *Längen* zu bestimmen und findet seine Anwendung zum Beispiel im Kapitel „*Vektoren*". Aber es existieren neben der Betragsfunktion auch noch andere *Stufenfunktionen*. Generell lässt sich festhalten, dass *Stufenfunktionen* immer für spezielle *Intervalle* definiert sind.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & ,\forall x \geq q \\ mx + b & ,\forall p < x < q \\ nx + d & ,\forall x \leq p \end{cases} \tag{6.22}$$

Somit ist die Funktion aus Gleichung (6.22) in drei *Intervalle* unterteilt. Stufenfunktionen kommen in vielen Bereichen der Naturwissenschaften öfters vor. Zwei weitere speziellen *Stufenfunktionen* werden im Abschnitt „*Distributionen*" vorgestellt.

6.3.1 Übungsaufgaben zu Stufenfunktionen

Aufgabe 1: *Zeichne die Stufenfunktionen.*

a) $f(x) = |x-3|$

b) $f(x) = |x+1| - 3$

c) $f(x) = -|2x-2| + 2$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & , \forall x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + 1 & , \forall x > 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & , \forall x \leq 2 \\ 2x-3 & , \forall x > 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2 & , \forall x \leq -1 \\ x-1 & , \forall x > -1 \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} x-2 & , \forall x \leq -2 \\ -x+3 & , \forall -2 < x \leq 2 \\ 2x-4 & , \forall x > 2 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} -5,5 & , \forall x \leq -3,5 \\ -2x & , \forall -3,5 < x \leq -1,25 \\ x^2 - 2,5 & , \forall -1,25 < x \leq 2,75 \\ \sqrt{x} & , \forall x > 2,75 \end{cases}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.42) Lösungen zu Stufenfunktionen.

6.4 Parabeln

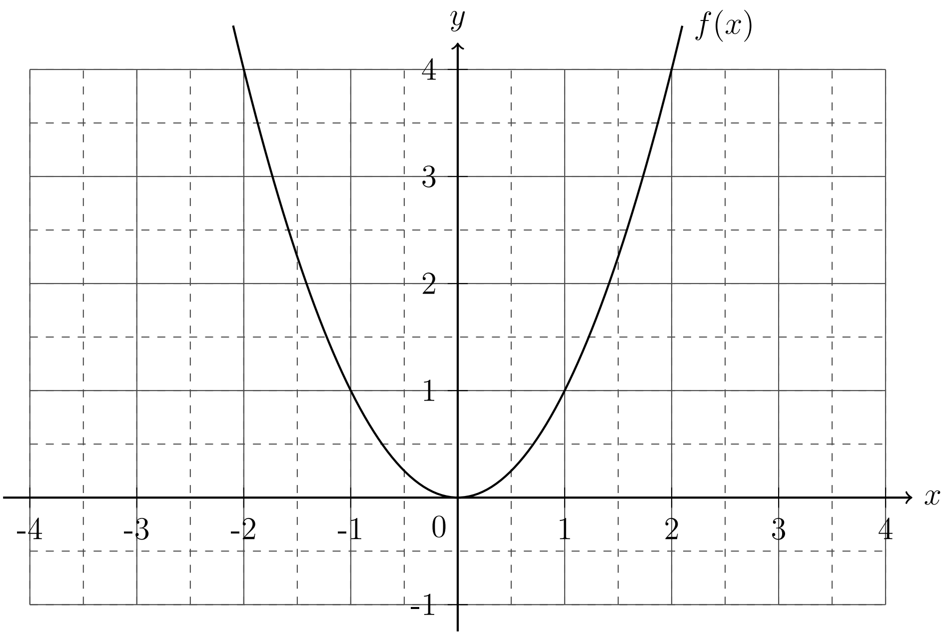
Nach den *Geraden* sind die *Parabeln* die nächst komplexere Form der *Funktionen*. *Parabeln* sind *Funktionen zweiter Ordnung* und werden auch *quadratische Funktionen* genannt.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{6.23}$$

Wie die Gleichung (6.23) zeigt, besitzt eine *Parabel* drei *Parameter*. Diese *Darstellung* der *Parabel* wird auch *Parameterdarstellung* genannt. Da die *quadratische Ergänzung* schon eingeführt wurde, kann dieser Gleichung auch so umgeformt werden, dass sich eine *binomische Formel* offenbart (dabei wurden die *Parameter umdefiniert*):

$$f(x) = a(x-d)^2 + e \quad . \tag{6.24}$$

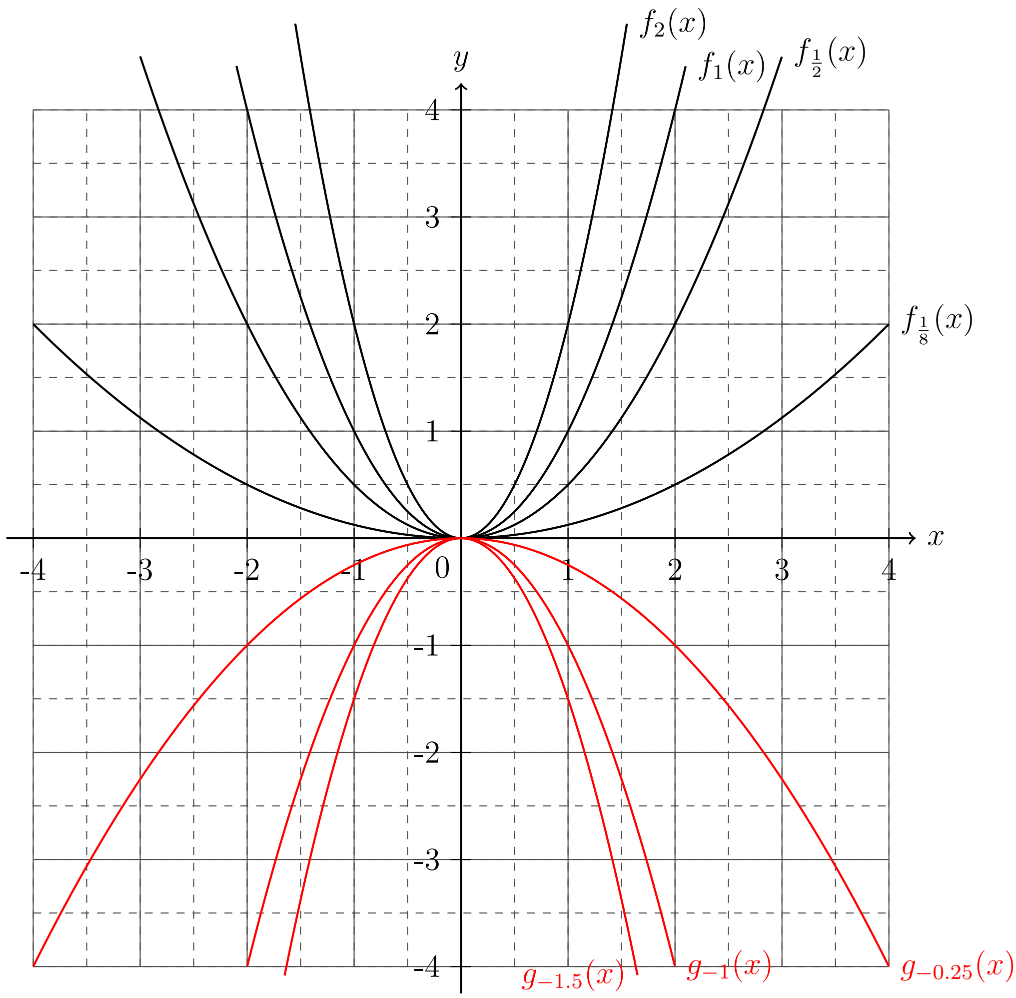
Diese *Darstellung* der *Parabel* wird *Scheitelpunktsform* genannt. Durch das Auflösen der *binomischen Formel* und einer Vereinfachung kann die Gleichung (6.24) auf die die Gleichung (6.23) gebracht werden. Anhand der *Scheitelpunktsform* werden im Folgenden die Eigenschaften der *Parabel* erläutert. Sei zu erst $a = 1$, $d = 0$ und $e = 0$.



Aus dem *Graphen* wird ersichtlich, dass die *Parabel achsensymmetrisch* ist, da sie an der *Ordinate gespiegelt* wieder sich selbst ergibt. Auch zu erkennen ist, dass die *Funktionswerte* der vereinfachten *Parabel* $f(x) = x^2$ immer stärker zunehmen je weiter ein *Variablenwert* x vom *Koordinatenursprung* $x = 0$ entfernt ist. Außerdem sind alle *Funktionswerte* positiv, da das *Quadrat* das Vorzeichen aufhebt. Der *Scheitelpunkt* der *Parabel* ist der *Punkt* an dem sich die

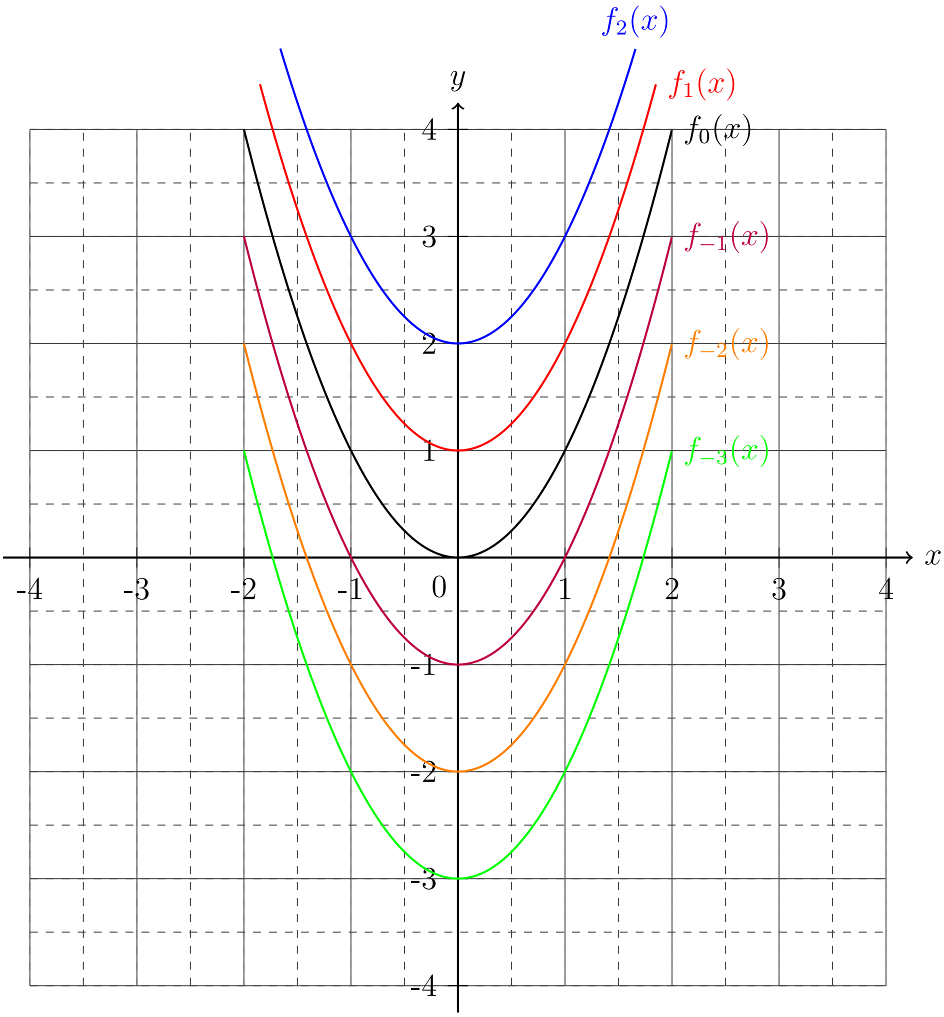
Richtung der *Funktion* umdreht. Hier wäre es das *Minimum* der *Funktion* im *Punkt* $S(0|0)$.

Sei nun im folgenden *Koordinatensystem* $d = 0$ und $e = 0$, während a variiert wird. Dabei soll wieder gelten, dass die *Funktion* für positive Werte von a den Namen f und für negative Werte den Namen g trägt.



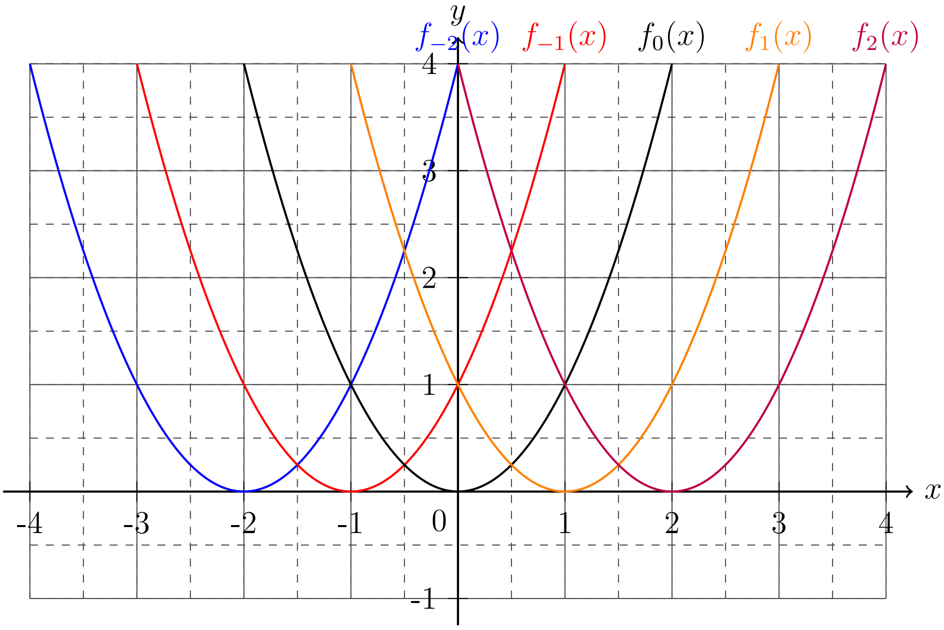
Die *Graphen* für verschiedene Werte von a zeigen deutlich, dass die *Parabeln* für Werte unter 1 gestreckt und für über 1 gestaucht sind. Aus diesem Grund heißt a auch *Stauchungsparameter*. Der Wert von a kann abgelesen werden, indem das Verhältnis $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ bestimmt wird, wobei $\Delta x = 1$ gewählt und vom *Scheitelpunkt* aus *parallel* zur *Abszisse* gegangen werden sollte. Der Wert des Verhältnisses ist gleichzusetzen mit a. Des Weiteren fällt auf, dass die *Parabel* für positive a nach oben und für negative a nach unten geöffnet ist. Folglich entscheidet das Vorzeichen des *Stauchungsparameters* über die Öffnung der *Parabel*.

Nun soll der *Parameter* e variiert werden, dazu wird der *Stauchungsparameter* $a = 1$ und $d = 0$ gewählt.



Die *Graphen* zeigen, dass e den *Offset* des *Scheitelpunkts* in *Ordinatenrichtung*.

Zu Letzt soll d variiert werden, dafür wird der *Stauchungsparameter* a und der *Offset* des *Scheitelpunkts* in *Ordinatenrichtung* $e = 0$ gewählt.



Durch die *Graphen* wird deutlich, dass der *Parameter* d den Versatz des *Scheitelpunktes* der *Parabel* auf der *Abszisse* beschreibt.
Aus dieser *Darstellung* der *Parabel* wird deutlich, welche Macht die *quadratische Ergänzung* innewohnt, da aus einer *Parameterdarstellung* schnell eine *Scheitelpunktsform* gewonnen und somit die Position des *Scheitelpunkts* und die *Stauchung* abgelesen werden kann. Dabei gilt generell, dass der *Scheitelpunkt* S durch $S(d|e)$ gegeben ist. Der *Scheitelpunkt* S würde in der *Parameterdarstellung* durch $S\left(-\frac{b}{2a}\middle|c-\frac{b^2}{4a}\right)$ gegeben sein.

Die Nullstellen von *quadratischen Funktionen* lassen sich über die *quadratische Ergänzung* berechnen. Da es sich um eine *Funktion zweiter Ordnung* handelt werden auch zwei *Nullstellen* zu berechnen sein, wie bei den *Graphen* $f_{-3}(x)$, $f_{-2}(x)$ und $f_{-1}(x)$ bei der Variation von e schon zu erkennen war und schon im Abschnitt zur *quadratischen Ergänzung* thematisiert wurde.

Des Weiteren bleibt zu erwähnen, dass eine *Funktion zweiter Ordnung* insgesamt drei *Parameter* besitzt, folglich werden drei Informationen benötigt, um alle drei *Parameter* bestimmen zu können. Dies geschieht über das gleiche Verfahren wie bei den *Geradenfunktionen*, nur dass ein *Parameter* und eine Gleichung hinzu kommt.

6.4.1 Übungsaufgaben zu Parabeln

Aufgabe 1: *Zeichne die Graphen der quadratischen Funktionen, bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen, falls sie vorhanden sind. Stelle die Funktion anschließend zur Scheitelpunktsform um.*

a) $f_a(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $f_b(x) = x^2 - 8x + 16$

c) $f_c(x) = 2x^2 + 8x + 32$

d) $f_d(x) = 4x^2 - 8x + 8$

e) $f_e(x) = x^2 + 8x - 1$

f) $f_f(x) = x^2 - 6x - 7$

g) $f_g(x) = 3x^2 + 6x - 15$

h) $f_h(x) = 2x^2 - 8x - 14$

i) $f_i(x) = -2x^2 + 5x - 3$

j) $f_j(x) = -2x^2 - 12x - 14$

k) $f_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{8}$

l) $f_l(x) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{60}$

m) $f_m(x) = \frac{4}{3}x^2 + \frac{64}{21}x + \frac{256}{147} - \ln 2$

n) $f_n(x) = \sqrt{2}x^2 - 2e\sqrt{2}x + \sqrt{2}e^2 + \pi$

o) $f_o(x) = -x^2 + 2\sqrt{3}x - \sqrt{5} - 3$

p) $f_p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{4}x - \sqrt{17} - \frac{27}{32}$

Aufgabe 2: *Berechne die Schnittpunkte zwischen den gegebenen Funktionen falls welche vorhanden sind.*

a) $f_a(x) = x^2 - 3x - 5$ und: $g_a(x) = x + 1$

b) $f_b(x) = x^2 + 7x - \frac{4}{5}$ und: $g_b(x) = 5x + \frac{3}{5}$

c) $f_c(x) = 2x^2 - \frac{5}{2}x - 7$ und: $g_c(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

d) $f_d(x) = -\frac{1}{3}(x-9)^2 + 6$ und: $g_d(x) = 2(x+3)^2 - \frac{5}{6}$

Aufgabe 3: *Zeichne die Graphen der quadratischen Funktionen, bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen, falls sie vorhanden sind. Stelle die Funktion anschließend zur Parameterform um.*

a) $f_a(x) = (x-3)^2 - 4$

b) $f_b(x) = (x+2)^2 - 1$

c) $f_c(x) = (x-2)^2 + 8$

d) $f_d(x) = 2\,(x-1)^2 - 7$

e) $f_e(x) = -\,(x+2)^2 - \dfrac{1}{2}$

f) $f_f(x) = 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{4}{3}$

g) $f_g(x) = -2\left(x + \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{8}$

h) $f_h(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{4}{3}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$

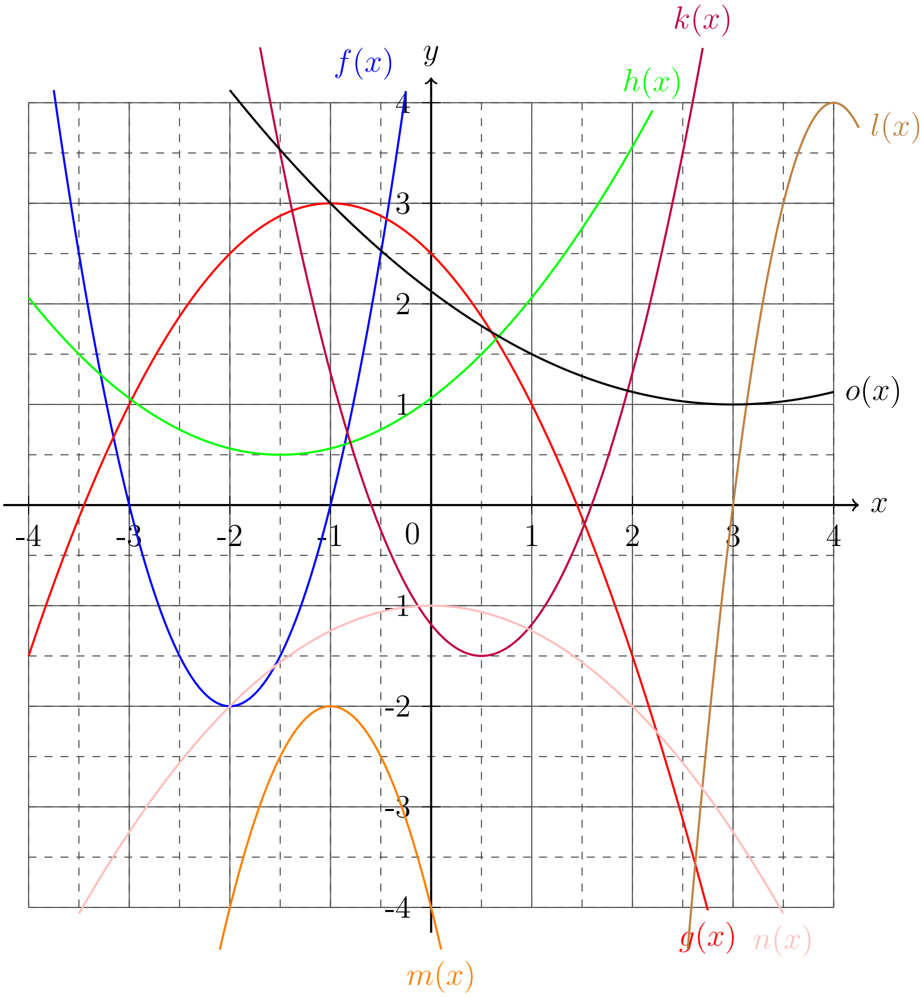
i) $f_i(x) = -\dfrac{5}{3}\left(x + \dfrac{53}{34}\right)^2 - \dfrac{9}{8}$

j) $f_j(x) = \dfrac{9}{7}\left(x - \dfrac{11}{13}\right)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

k) $f_k(x) = -\sqrt{5}\left(x + \sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{8}$

l) $f_l(x) = \ln 2\,(x-e)^2 + \pi$

Aufgabe 4: *Bestimme die Funktionsgleichungen der quadratischen Funktionen.*



Aufgabe 5: *Teste auf Achsensymmetrie.*

a) $f_a(x) = 6x^2 + 4$

b) $f_b(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 3$

c) $f_c(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2x + 3$

d) $f_d(x) = \pi (x-e)^2 + 2ex + \sqrt{2}$

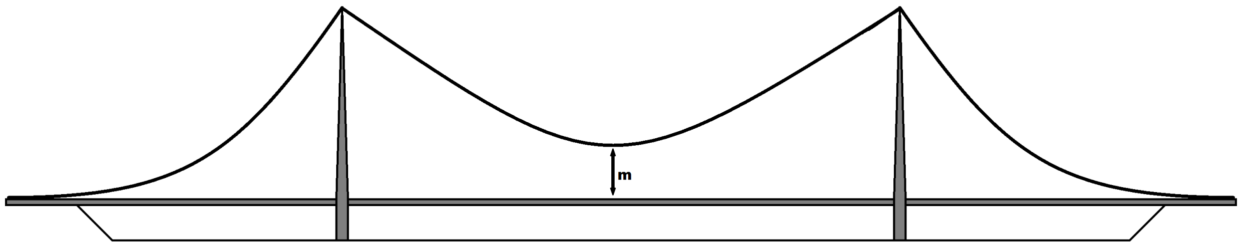
Aufgabe 6: *Löse alle Teilaufgaben zum Hangar.*

a) Der Hangar ist insgesamt 54 m breit und 12 m hoch. Konstruiere die Funktionsgleichung für das Hangardach.

b) In einer Höhe von $9m$ befindet sich eine Querstrebe, die zur Hangertorführung benötigt wird. Das Hangartor besteht aus zwei Segmenten, welche im geschlossenen Zustand die Funktion zum Hangardach berühren. Bestimme die Glasfläche des Hangartores.

c) Die Sportflugzeuge im Hangar besitzen eine Höhe von 3 m, eine Flügelspannweite von 11 m und eine Länge von 8,2 m. Der Hangar hat eine Länge von 112 m, bestimme die Anzahl der Sportflugzeuge, die maximal im Hangar abgestellt werden könnten.

Aufgabe 7: *Löse alle Teilaufgaben zur Hängebrücke.*



a) Eine Hängebrücke soll konstruiert werden. Dabei wurden die folgenden Gleichungen aus der Funktionsrekonstruktion ermittelt.

$f(x) = 0,00005x^2 - 0,17x + 146,5$
$g(x) = 0,0000625x^2 + 0,0625x + 15,625$
$h(x) = 0,0000625x^2 - 0,4875x + 950,625$

Ordne die Funktionen den jeweiligen Teilstücken der Brückenskizze zu und überführe die Funktionen in die Scheitelpunktsform.

b) Bestimme die Höhe der Stützpfeiler, an denen die Tragseile befestigt werden.

c) An den Brückenenden sind die Tragseile am Boden verankert. Bestimme die Distanz zwischen den Brückenenden sowie zwischen den Brückenpfeilern.

d) Bestimme die Höhe m am Scheitelpunkt der Tragseile.

e) Die Straße soll mit sechs Fahrspuren mit jeweils einer Breite von $2,6\,\text{m}$ gebaut werden. Die Asphaltdecke soll $9\,\text{cm}$ hoch sein, bestimme die Menge an Asphalt, die mindestens bestellt werden muss. Der Asphalt besitzt eine Dichte von $1433\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, wie viele Lastwagen mit einer Transportmenge von $44\,\text{t}$ müssen geordert werden?

Aufgabe 8: *Löse alle Teilaufgaben zur Hängebrücke.*

$a)$ Das Mittelstück der Hängebrücke, die über eine Flussmündung führt, kann durch die Funktionsgleichung

$f(x) = 0,00025x^2 - 0,3x + 97$

beschrieben werden. Überführe die Funktion in die Scheitelpunktsform.

$b)$ Die Brückenpfeiler sollen 97 m höher als die Fahrbahndecke sein. Bestimme die Länge des Mittelstücks.

$c)$ Die nahezu geraden Befestigungsseile der Brückenpfeiler haben eine Steigung von 18%. Bestimme die Funktionsgleichungen der beiden Geraden.

$d)$ Bestimme die Gesamtlänge der Brücke.

$e)$ Um die Stabilität der Brückenfahrbahn zu erhöhen, wurde die Fahrbahn ebenfalls parabelförmig gebaut. Die Brückenpfeiler haben eine gesamte Höhe von 140 m. Bestimme die maximale Distanz von der Wasseroberfläche. Die parabelförmige Funktion kann durch die folgenden Gleichung beschrieben werden:

$b(x) = -0,000003x^2 - 0,0036x + 0,92$.

Aufgabe 9: *Löse alle Teilaufgaben zum Gateway Arch.*

a) Der Innenbogen des Gateway Arch in St. Louis hat eine Breite von 171 m und eine Höhe von 183 m. Bestimme eine quadratische Funktionsgleichung.

b) Der Außenbogen des Gateway Arch hat eine Breite von 192 m und eine Höhe von 192 m. Bestimme eine quadratische Funktionsgleichung.

c) Zeichne die Funktionen in ein geeignetes Koordinatensystem. Zeichne zusätzlich die folgende Funktion ein:

$$f(x) = 189 - 0,0158x^2 - 0,0000005x^4$$

d) Berechne die Breite und Höhe zur gegebenen Funktion aus dem Aufgabenteil *c*):

Aufgabe 10: *Löse alle Teilaufgaben zur Wushan-Brücke.*

a) Die Wushan-Brücke besitzt eine Fahrbahn, die 76,4 m über dem Wasser des Jangtsekiang befindet. Die Strecke von der Wasseroberfläche bis zum höchsten Punkt der Brücke entspricht 130 m. Die Brückenfahrbahn ist 612 m lang, während die Stützweite (Bogen oberhalb der Fahrbahn) 460 m beträgt. Wähle ein geschicktes Koordinatensystem und bestimme die Parabelgleichung der äußeren Kante des Stützbogens.

b) Der Stützbogen berührt den linken Berghang bei 280 m von der Mitte der Brücke, während auf der anderen Seite der Stützbogen erst bei 290 m Entfernung von der Brückenmitte den Berghang berührt. Am Ende der Brückenfahrbahn befinden sich Tunnel, welche durch die Berge führen. Bevor die Brücke in betrieb genommen werden kann, muss geprüft werden, ob über den Tunneleingängen verstärkte Netze gegen Steinschlag gespannt werden müssen. Das Kriterium hierfür ist eine Hangneigung mit einem Winkel über 50° zu Fahrbahn. Bestimme ob verstärkte Netze gespannt werden müssen. (Runde auf ganze Meter zur Beschreibung der bekannten Punkte der Berghänge.)

Aufgabe 11: *Prüfe, ob der gegebene Punkte ein Punkt der gegebenen Funktion ist.*

a) $f(x) = (x-3)^2 + 2 \quad \wedge \quad P\left(5\,|4\right)$

b) $f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad \wedge \quad P\left(-3\,|14\right)$

c) $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \wedge \quad P\left(-\frac{3}{4}\middle|-\frac{9}{8}\right)$

d) $f(x) = -x^2 - 1,5x + \frac{6}{5} \quad \wedge \quad P\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{5}\right)$

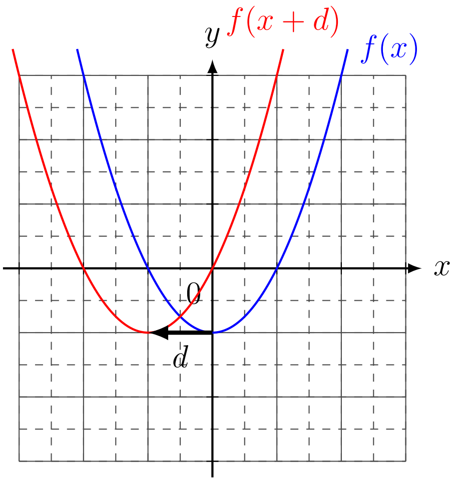
e) $f(x) = -\frac{8}{3}\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{9}{7} \quad \wedge \quad P\left(-\frac{2}{3}\middle|-\frac{8869}{1350}\right)$

f) $f(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{6} \quad \wedge \quad P\left(-1\middle|-\frac{7}{24}\right)$

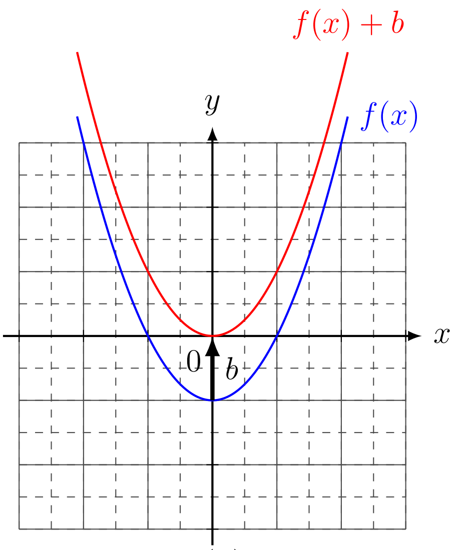
Weitere Übungen zu Parabeln zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.43) Lösungen zu Parabeln.

6.5 Parametereinflüsse auf Funktionen

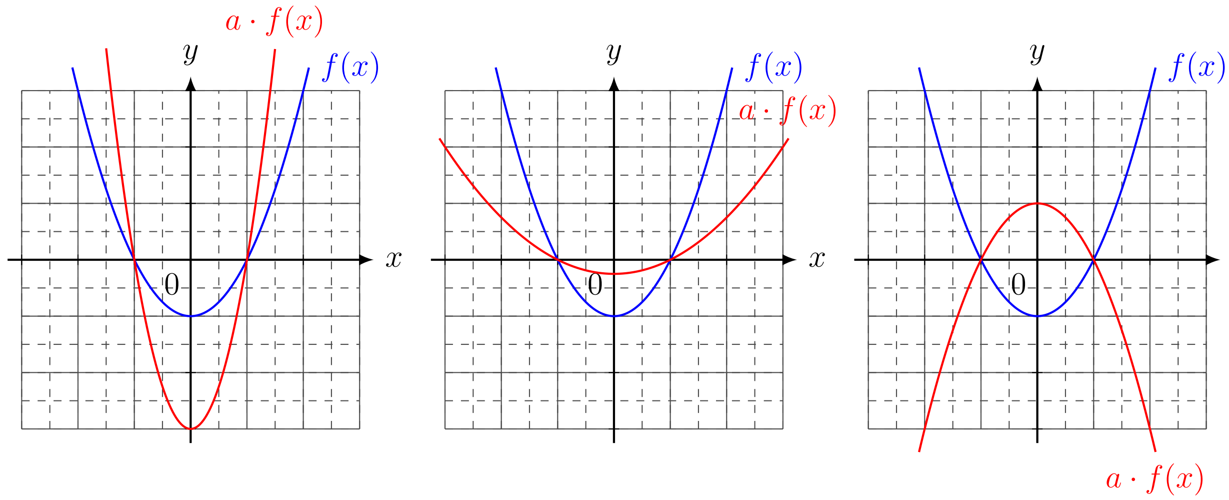


Funktionen werden durch verschiedene Parameter charakterisiert. Alle Funktionsklassen besitzen hierbei Parameter, die stets die selbe Wirkung haben. So kann eine Funktion $f(x)$ verschoben werden, wenn im Argument der Funktion eine Zahl $d \in \mathbb{R}$ addiert wird, sodass die neue Funktion $f(x+d)$ entsteht. Wird eine Zahl im Argument addiert, dann wird der Funktionsgraph im Koordinatensystem nach links verschoben - wie im linken Koordinatensystem dargestellt. Wird allerdings im Argument eine Zahl subtrahiert, wird der Funktionsgraph im Koordinatensystem nach rechts verschoben.

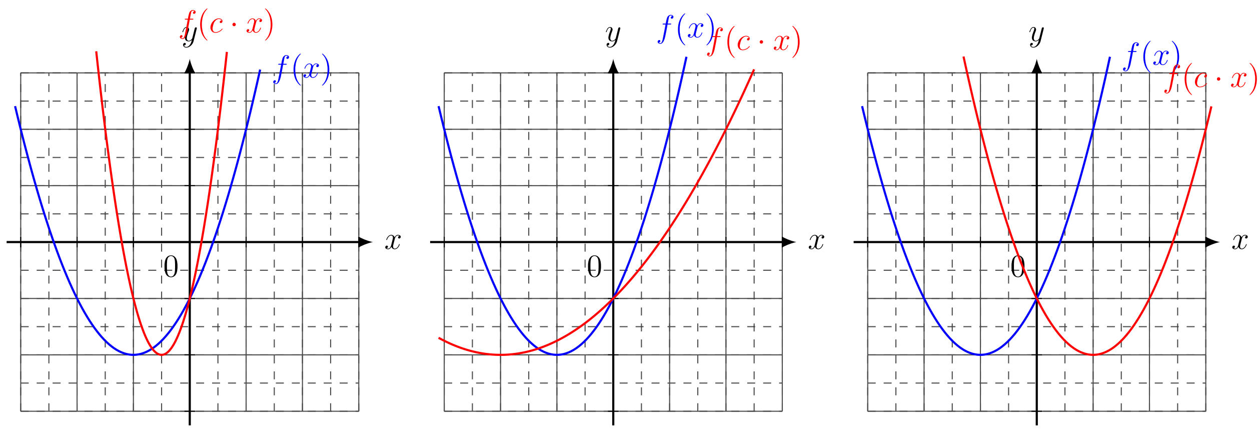


Wird eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ zu einer Funktion $f(x)$ addiert, so verändert sich der Schnittpunkt mit der Ordinate. Die daraus resultierende Funktion $g(x) = f(x) + b$ wurde nach oben verschoben, während die Subtraktion des Parameters $f(x) - b$ eine Verschiebung nach unten nach sich zieht.

Wird eine Funktion $f(x)$ mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$ multipliziert, dann kann je nach Wert des Parameters a eine Stauchung beziehungsweise Streckung vorgefunden werden. In den folgenden Koordinatensystemen ist links der Fall der Streckung dargestellt, dass der Parameter $a > 1$ ist, während in der Mitte die Stauchung abgebildet ist, wobei der Parameter $0 < a < 1$ ist. Im rechten Koordinatensystem kommt es zur Spiegelung des Graphens an der Abszisse, da der Parameter a negativ ist. Zu erkennen ist auch, dass die Nullstellen der Funktion unverändert bleiben.



Wird das Argument der Funktion $f(x)$ mit einer Zahl $c \in \mathbb{R}$ multipliziert, bleibt der Ordinatenschnittpunkt unverändert. Im ersten Fall für $c > 1$ kommt es zu einer Streckung, während sich alle charakteristischen Werte, wie der Scheitelpunkt, sich zur Ordinate hin bewegen. Der gegensätzliche Fall wird erzeugt, wenn der Parameter $0 < c < 1$ ist. Falls der Parameter c negativ ist, wird die Funktion, wie im rechten Koordinatensystem dargestellt, an der Ordinate gespiegelt.



6.5.1 Übungsaufgaben zu den Parametereinflüssen auf Funktionen

Aufgabe 1: *Beschriebe die Verschiebungen der Funktion.*

a) $f(x+1)$	*b)* $f(x)-4$	*c)* $f(x-2)-2$
d) $3f(x)$	*e)* $-f(x)+1$	*f)* $-f(-x)$
g) $\frac{1}{5}f(x)$	*h)* $f(x-3)-4$	*i)* $-2f(x-7)+3$

Aufgabe 2: *Gib die Funktionsgleichung jeweils um den angegebenen Wert v verschoben in die jeweiligen Abszissen- und Ordinatenrichtungen in Parameterdarstellung an.*

a) $f(x) = (x+1)^2 - 2 \quad \text{mit:} \quad v = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 5 \quad \text{mit:} \quad v = -3$

c) $f(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{6} \quad \text{mit:} \quad v = \frac{2}{3}$

d) $f(x) = -\frac{3}{8}\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{5}{7} \quad \text{mit:} \quad v = -\frac{5}{4}$

Aufgabe 3: *Bestimme den gemeinsamen Funktionswerte der Funktion mit der verschobenen Funktion.*

a) $f(x) = f(x-2)$ für: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = -2f(x) + 6$ für: $f(x) = -x^2 + 2x - 4$

c) $f(x) = f(x+4) - 2$ für: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

d) $f\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right) - 2 = -\frac{1}{2}f\left(x - \frac{1}{2}\right)$ für: $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{8}{5}x - 2$

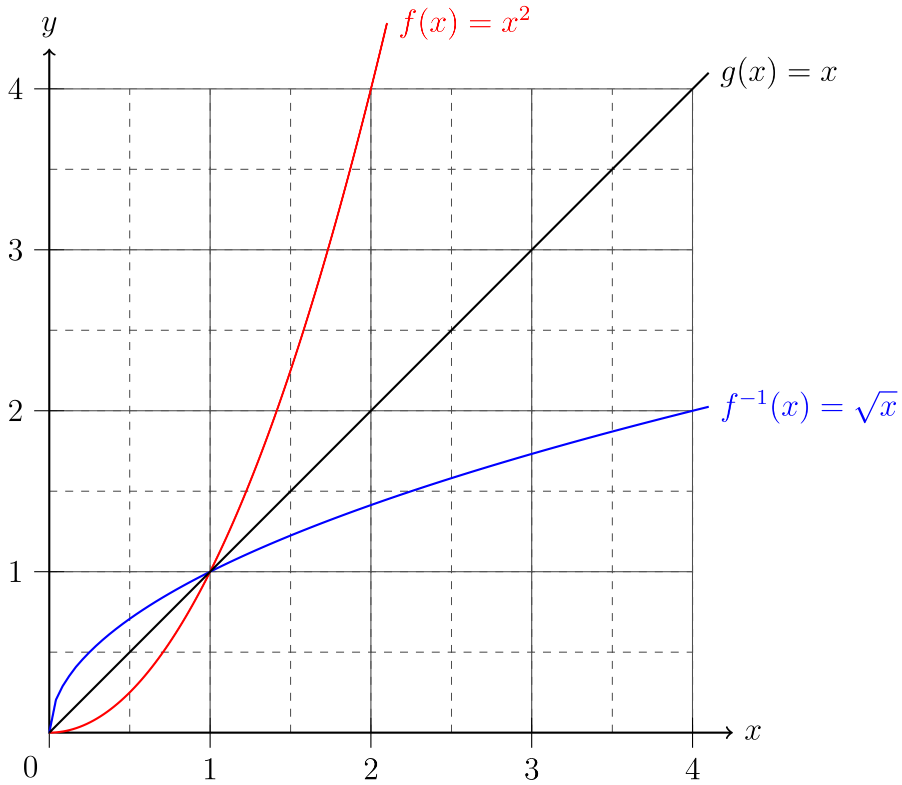
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.44) Lösungen zu den Parametereinflüssen auf Funktionen.

6.6 Umkehrfunktionen

Wie schon bei den Grundlagen der *Algebra* eingeführt wurde, existiert zu jeder *Rechenoperation* eine *Umkehrung*. Folglich existiert zu jeder *Funktion* eine *Umkehrfunktion*. Die Unterschiede der *Funktion* zur *Umkehrfunktion* sind andere *Werte-* und *Definitionsbereiche*. Sei eine *Funktion* $f(x)$ gegeben, dann beschreibt $f^{-1}(x)$ die *Umkehrfunktion* und es gilt dabei immer:

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x \quad . \tag{6.25}$$

Die Gleichung (6.25) sagt aus, dass die *Funktion* $f(x)$ von der *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ und die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ von der *Funktion* $f(x)$ gleich der *Variable* x ist. Folglich kann die *Funktion* $f(x)$ statt x in die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ eingesetzt werden und das Ergebnis ist stets x - das gleiche gilt auch für die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ eingesetzt in die *Funktion* $f(x)$. So ist zum Beispiel die *Umkehrfunktion* der *Funktion* $f(x) = x^2$ gegeben als $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$,



wobei die *Graphen* im *ersten Quadranten* im *Koordinatensystem* zu sehen sind. Auch zu sehen ist, dass $f(x)$ *gespiegelt* an der *Geraden* $g(x) = x$ die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ ergibt. So die *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ zu bestimmen ist graphisch immer möglich. Allerdings gibt es auch ein *algebraisches* Verfahren[1]. Zur Verdeutlichung sei die *Funktion* $f(x) = -\frac{1}{2}9,81x^2 + 5$ gegeben.

[1]Verfahren durch Umstellungen von Gleichungen.

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) &= -\frac{1}{2}9,81x^2+5 \quad |-5 \\
f\left(x\right)-5 &= -\frac{1}{2}9,81x^2 \quad \Bigg|:\left(\frac{9,81}{2}\right) \\
\frac{2\left(5-f\left(x\right)\right)}{9,81} &= x^2 \\
\sqrt{\frac{2\left(5-f\left(x\right)\right)}{9,81}} &= x \quad |\text{Umbenennung} \\
\Rightarrow f^{-1}(x) &= \sqrt{\frac{2\left(5-x\right)}{9,81}}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Die Gleichung (6.26) zeigt, dass die *Umkehrfunktion* berechnet werden kann, indem nach der *Variable* aufgelöst wird. Als abschließender Schritt werden $f(x)$ in x und x in $f^{-1}(x)$ umbenannt. Über dieses Verfahren lassen sich alle *Umkehrfunktionen* bestimmen. Wichtig ist hierbei, dass die unterschiedlichen *Definitions*- und *Wertebereiche* berücksichtigt und niedergeschrieben werden. So unterscheiden sich diese bei der *Beispielfunktion* zu ihrer *Umkehrfunktion* stark:

$$\begin{aligned}
f\left(x\right): &\quad \mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}\} \qquad \mathbb{W}=\{x\in\mathbb{R}|x\leq 5\} \\
\Rightarrow f^{-1}(x): &\quad \mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}|x\leq 5\} \qquad \mathbb{W}=\left\{x\in\mathbb{R}^+\right\}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

In den folgenden Abschnitten werden die *Funktionen* analysiert und ihre *Umkehrfunktionen* vorgestellt.

6.6.1 Übungsaufgaben zu Umkehrfunktionen

Aufgabe 1: *Bestimme die Umkehrfunktionen.*

a) $f(x) = x + 6$

b) $f(x) = 3x - 9$

c) $f(x) = x^2 - 64$

d) $f(x) = -x^2 + 3x + 8$

e) $f(x) = 4x^2 + 8x - 6$

f) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$

Aufgabe 2: *Zeichne den Graphen der Funktion und der Umkehrfunktion in ein Koordinatensystem.*

a) $f(x) = x - 1$

b) $f(x) = 2x + 2$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$

d) $f(x) = 2x^2 - 6$

e) $f(x) = x^2 - 4x - 4$

f) $f(x) = 2x^2 - 4x + 8$

g) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{4}{5}$

h) $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{5}{6}$

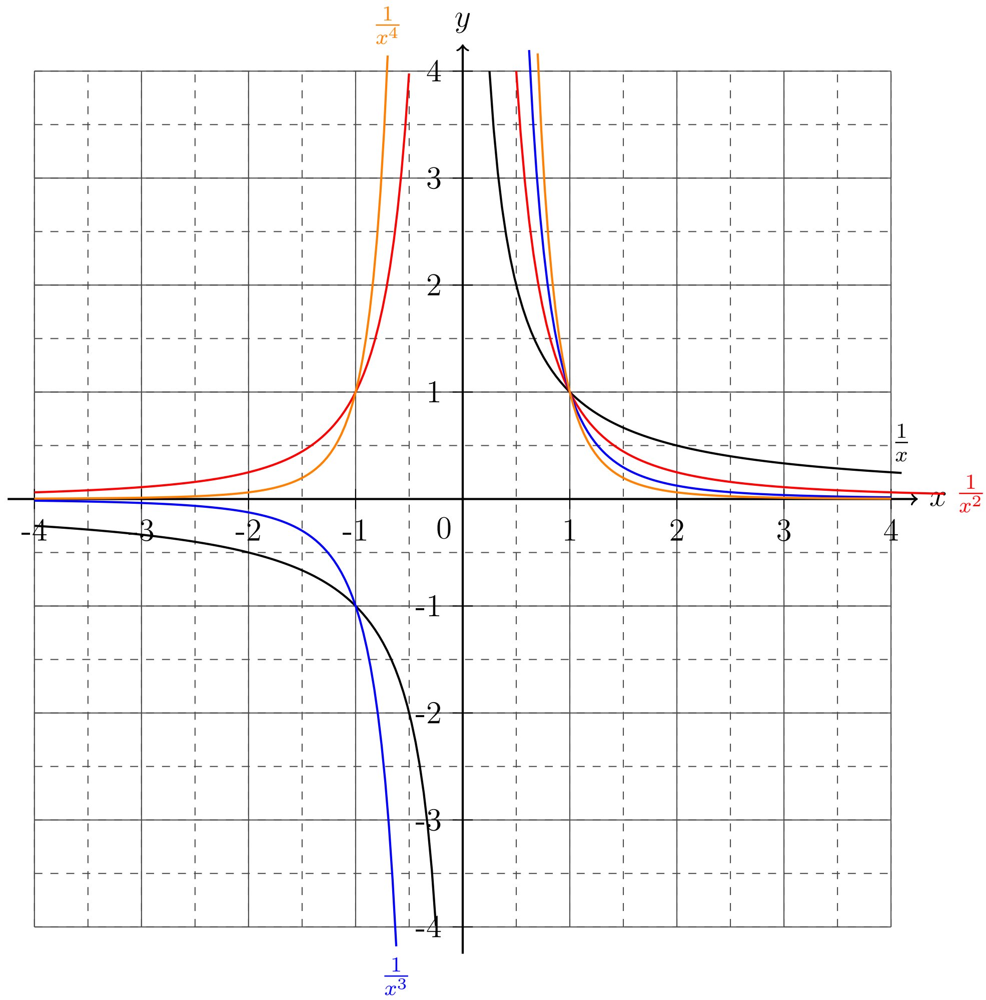
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.45) Lösungen zu Umkehrfunktionen.

6.7 Hyperbeln

Nachdem die *Gerade* und *Parabel* vorgestellt wurde, soll in diesem Abschnitt die *Hyperbel* besprochen werden. Eine *Hyperbel* ist definiert durch:

$$f(x) = \frac{1}{x} \tag{6.28}$$

Wie schon in der Einleitung des Kapitels erwähnt wurde, muss bei einer *Funktion* die *Definitionsmenge* bestimmt werden, welche bei einer *Hyperbel* durch die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ ohne 0 gegeben ist. Die *Hyperbel* beschreibt die Grundform aller *Funktionen* mit negativer *Potenz*.



Wie die Abbildung zeigt, dass die *Hyperbel* und höhere *Potenzen* der selben bei $x = 0$ von rechts gegen ∞ und von links gegen $-\infty$ gehen. Dabei steigen die *Funktionen* stärker an je höher die *Potenz* ist. Je weiter sich die *Funktionen* vom *Koordinatenursprung* entfernen, desto weiter schmiegen sich die *Funktionen* der *Abszisse* an. Dabei ist dieses Verhalten der *Funktionen* auch stärker je höher die *Potenz* ist. Auch zu erkennen ist, dass alle *Graphen* durch den *Punkt* $P(1|1)$ gehen. Gerade *Potenzen* sind an der *Ordinate* gespielt in den *zweiten Quadranten*, während ungerade *Potenzen* im *Koordinatenursprung* in den *dritten Quadranten* gespiegelt werden.

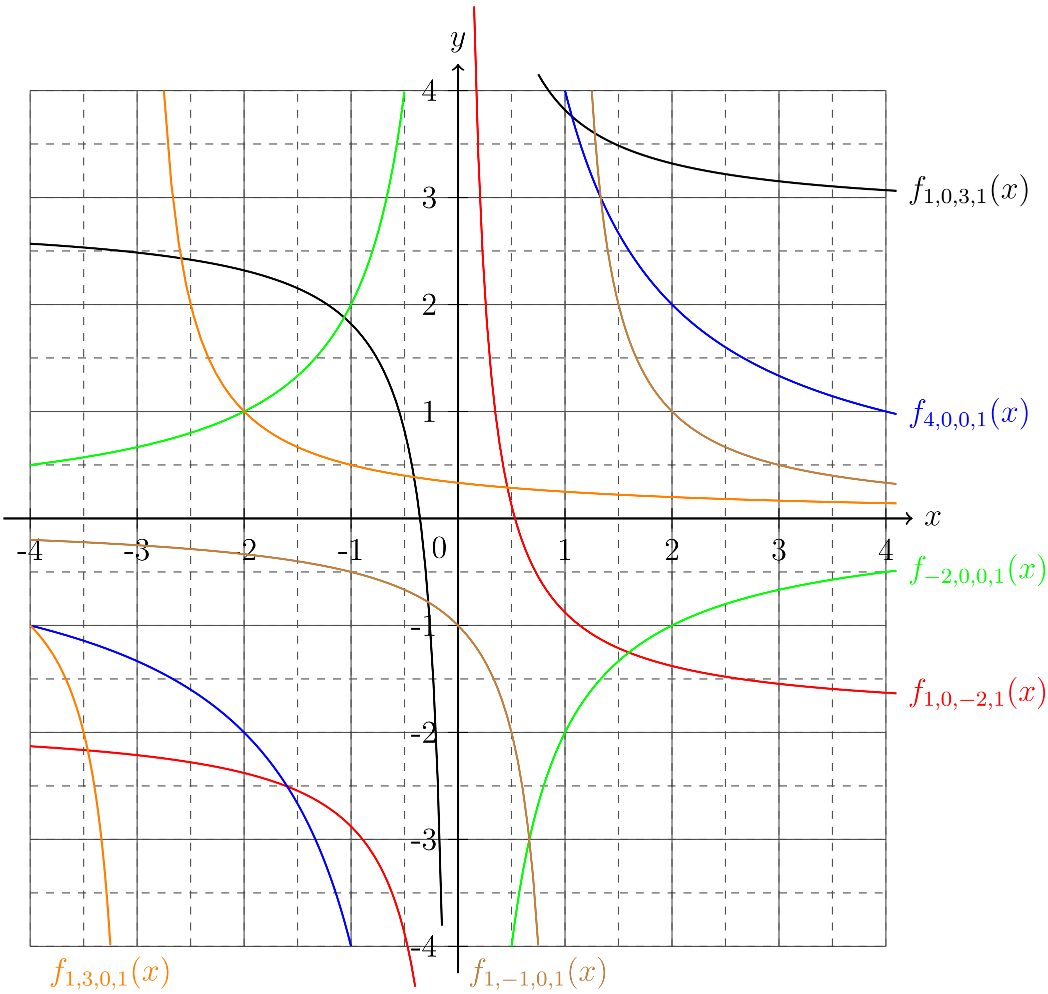
Die *Umkehrfunktion* der *Hyperbel* ist wieder eine *Hyperbel*. Für höhere *Potenzen* gilt:

$$f\left(x\right) = \frac{1}{x^n} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \tag{6.29}$$

Wenn die *Hyperbel* um eine Zahl c *addiert* wird, dann wird diese auf der *Ordinate* verschoben, sodass eine *Nullstelle* entsteht. Würde eine Zahl b im *Nenner addiert* werden, verschiebt sich die *Hyperbel* entlang der *Abszisse* und eine in den *Zähler multiplizierte* Zahl a würden den *Punkt* verschieben an dem sich alle weiteren *Potenzen* von x schneiden würden. Dabei bestimmt das Vorzeichen von a ob sich die *Hyperbel* hauptsächlich im ersten und dritten oder im zweiten und vierten *Quadranten* aufhält. Der *Punkt* an dem sich alle höheren *Potenzen* schneiden würden, ist gegeben als $P(\sqrt{a}|\sqrt{a})$, wenn die anderen *Parameter* gleich Null gesetzt würden.

$$f_{a,b,c,n}\left(x\right) = \frac{a}{x^n + b} + c \tag{6.30}$$

Im folgenden *Koordinatensystem* sind für $n = 1$ jeweils zwei Variationen der *Parameter* als *Graph* dargestellt.



y
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
$f_{1,0,3,1}(x)$
$f_{4,0,0,1}(x)$
$f_{-2,0,0,1}(x)$
$f_{1,0,-2,1}(x)$
$f_{1,3,0,1}(x)$
$f_{1,-1,0,1}(x)$

6.7.1 Übungsaufgaben zu Hyperbeln

Aufgabe 1: *Bestimme die Nullstelle x_n und die Definitionsmenge $\mathbb{D}$.*

a) $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ b) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{4}$

c) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ d) $f(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{x+5} - 3$

e) $f(x) = \frac{2}{x-\frac{2}{3}} + \sqrt{5}$ f) $f(x) = \frac{\pi}{x-\sqrt{2}} + e$

Aufgabe 2: *Bestimme die Umkehrfunktionen.*

a) $f(x) = \frac{1}{x-3}$ b) $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3}$

c) $f(x) = \frac{9}{4x-2} + 3$ d) $f(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{x^2-6} + 4$

e) $f(x) = \frac{2}{3x^2-27} + \frac{7}{8}$ f) $f(x) = \frac{e}{x^3 \ln 2 - \pi} + \sqrt{2}$

Aufgabe 3: *Zeichne folgende Hyperbeln*

a) $f_a(x) = \frac{1}{x} + 1$ b) $f_b(x) = \frac{1}{2x} - 1$

c) $f_c(x) = \frac{1}{2x-3}$ d) $f_d(x) = \frac{6}{0,5x^2}$

e) $f_e(x) = \frac{2}{3x+1,5} - 1,5$ f) $f_f(x) = \frac{1,15}{x-3} + 0,5$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.46) Lösungen zu Hyperbeln.

6.8 Grenzwerte

Wie schon beim *Graphen* der *Hyperbel* zu sehen war, haben einige *Funktionen* Lücken in der *Definitionsmenge* x_L. Dabei zeigen die *Funktionen* oftmals ein interessantes Verhalten an diesen Stellen. So ist bei der *Hyperbel* ein Sprung von $-\infty$ zu ∞ zu sehen. Diese Stelle wird dann *Polstelle mit Vorzeichenwechsel*. Bei der *Funktion* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ war kein Sprung festzustellen, sodass lediglich von einer *Polstelle* gesprochen wird. Von einer *Definitionslücke* ist die Rede, wenn eine *Funktion* in einem *Punkt* nicht *definiert* ist, allerdings kein Verhalten festzustellen ist, dass nicht zu einer *Polstelle* passt. Solche *Funktionen* werden später im Abschnitt „gebrochen rationale Funktionen“ behandelt.

Um das Verhalten um solche Lücken in der *Definitionsmenge* oder für besonders große oder kleine Zahlen zu beschreiben, dient der sogenannte *Grenzwert*. Dabei wird zwischen einem *linksseitige* und einem *rechtsseitigen Grenzwert* - also ob von den kleineren Zahlen oder von den größeren Zahlen aus zur Lücke gegangen wird.

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow x_L} f(x) &\qquad \text{linksseitiger Grenzwert} \\ \lim_{x \searrow x_L} f(x) &\qquad \text{rechtsseitiger Grenzwert} \end{aligned} \tag{6.31}$$

Für die *Hyperbel* $\frac{1}{x}$ existieren folgende *Grenzwerte*:

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow 0} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x \searrow 0} f(x) &= \infty \\ \lim_{x \to \infty} f(x) &= 0 \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= 0 \end{aligned} \tag{6.32}$$

Generell kann bei jeder *Funktion* der *Grenzwert* gegen ∞ und $-\infty$ bestimmt werden. Dabei sind die *Grenzwerte* in der Schule von relativ trivialer Natur, sodass sich das *Verhalten* offenbart, indem Zahlen nahe der Zielzahl einsetzt. Für das Verhalten einer *Funktion* gegen besonders große oder kleine Zahlen zu bestimmen reicht es aus zwei besonders große oder kleine Zahl einzusetzen und die *Funktionswerte* zu vergleichen. Für die *Hyperbel* ergibt sich daraus, dass die *Funktionswerte* gegen Null gehen. Dabei bedeutet „gegen Null“, dass die Erreichung dieses *Funktionswertes* unerreichbar ist. Die *Funktion*, die diese nicht erreichbaren *Funktionswerte* beschreibt, wird *Asymptote* genannt. Aus diesem Grund wird von einem *asymptotischen Verhalten* gegen Null für große Zahlen bei einer *Hyperbel* gesprochen.

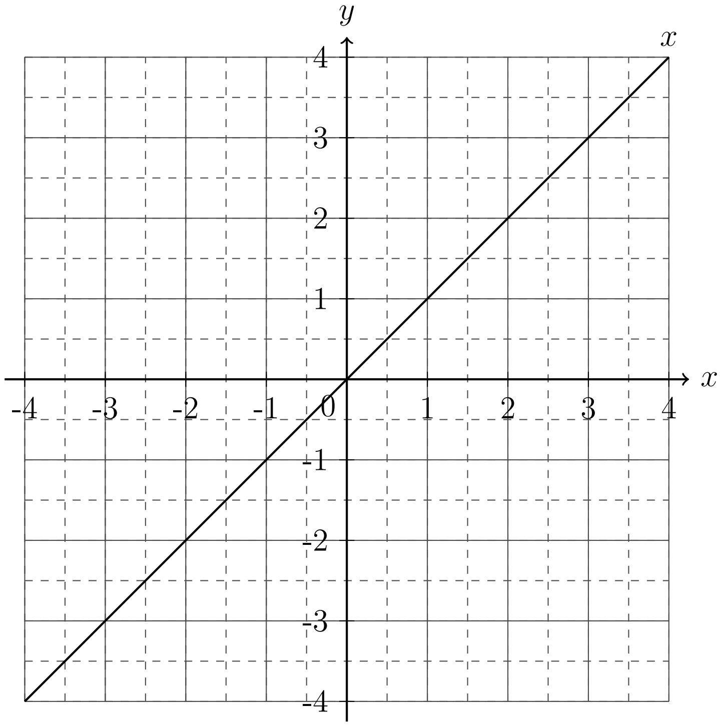
Einige wichtige *Grenzwerte*:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} &= 1 \\
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} &= \infty \\
\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= e \\
\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= e^x \\
\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) &= \ln a
\end{aligned} \tag{6.33}$$

Mittels des Grenzwertes kann auch bewiesen werden, dass $0,\bar{9} = 1$ ist.

$$\begin{aligned}
0,\bar{9} &= 0,999\ldots \\
&= \lim_{n\to\infty} 0,\underbrace{99\ldots9}_{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{10^n}\right) \\
&= 1-\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} \\
&= 1
\end{aligned} \tag{6.34}$$

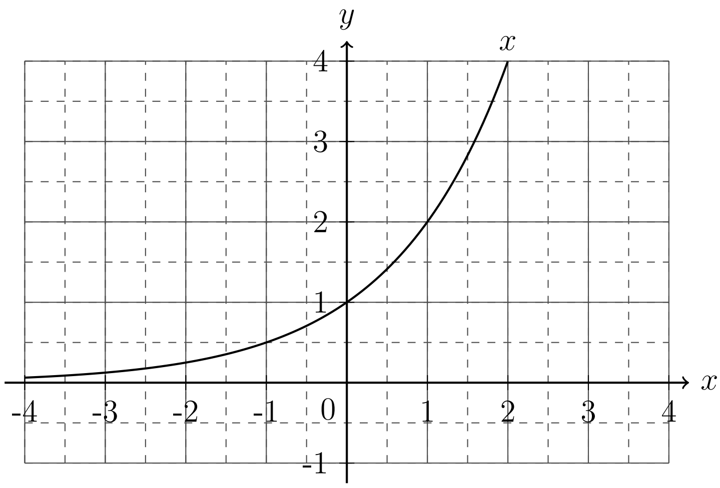
Grenzwerte werden unter anderen benutzt, um das Verhalten von Funktionen um Punkten, die von Interesse sind, oder im Unendlichen zu beschreiben. Hierbei werden viele Eigenschaften einer Funktion sichtbar, welche oft in diversen Rechnungen ausgenutzt werden können. Um dies gewährleisten zu können, sollte jeder Schüler eine grundlegende Vorstellung von den jeweiligen Funktionsklassen besitzen. So werden hier im Beispiel eine Gerade und eine Exponentialfunktion bezüglich ihres Verhaltens verglichen. Zunächst wird die Gerade mit der Geradengleichung $f(x) = x$ betrachtet, welche folgenden Graphen besitzt:



Der Graph zeigt, dass die Funktion für niedrigere Werte von x auch immer niedrigere Wert von $f(x)$ annimmt, welchen bei wachsenden Werten von x auch die Funktionswerte $f(x)$ anwachsen. Dieses Verhalten setzt sich kontinuierlich fort, was durch die Grenzwerte beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} x &= \infty \quad , \\ \lim_{x\to-\infty} x &= -\infty \quad . \end{aligned} \tag{6.35}$$

Wird eine Exponentialfunktion wie $g(x) = 2^x$ betrachtet, zeigt sich folgender Graph:



Der Graph zeigt, dass die Funktion sich im negativen Zahlenbereich von x sich langsam aber stettig an die Abszisse annähert, dieser aber dennoch nie erreicht, da die Steigung immer weiter abnimmt. Währenddessen steigt die Funktion mit wachsendem x immer stärker an. Dies kann durch die folgenden Grenzwerte beschreiben werden:

$$\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty \quad ,$$
$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0 \quad . \tag{6.36}$$

Diese Grenzwerte zeigen, dass ein solcher Exponentialterm niemals Null werden kann, aus diesem Grund darf auch durch solche Terme dividiert werden. Hierbei bildet die Abszisse eine sogenannt Asymptote, was eine Funktion ist, der sich die betrachtete Funktion annähert.

Somit zeigt sich, dass eine Grundvorstellung von Funktionsgraphen eine Verhaltensbestimmung stark erleichtert. Für detailliertere Betrachtungen wird unter anderem der Satz von l'Hopital benötigt, welche in einem späteren Abschnitt diskutiert wird.

6.8.1 Übungsaufgaben zu Grenzwerte

Aufgabe 1: *Bestimme die links- und rechtsseitigen Grenzwerte.*

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{x-6}$

$b)\ f(x) = \dfrac{1}{2x-8}$

$c)\ f(x) = \dfrac{1}{5x-2}$

$d)\ f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

$e)\ f(x) = \dfrac{1}{2x^2-4}$

$f)\ f(x) = \dfrac{1}{4x^2-1}$

Aufgabe 2: *Bestimme das Verhalten der Funktionen im Unendlichen.*

$a)\ f(x) = x^2$	$b)\ f(x) = x^3$	$c)\ f(x) = -x^4$
$d)\ f(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$e)\ f(x) = \dfrac{1}{x^3}$	$f)\ f(x) = -\dfrac{1}{x^4}$
$g)\ f(x) = 3^x$	$h)\ f(x) = 4^{-x}$	$i)\ f(x) = -\dfrac{1}{2^x}$

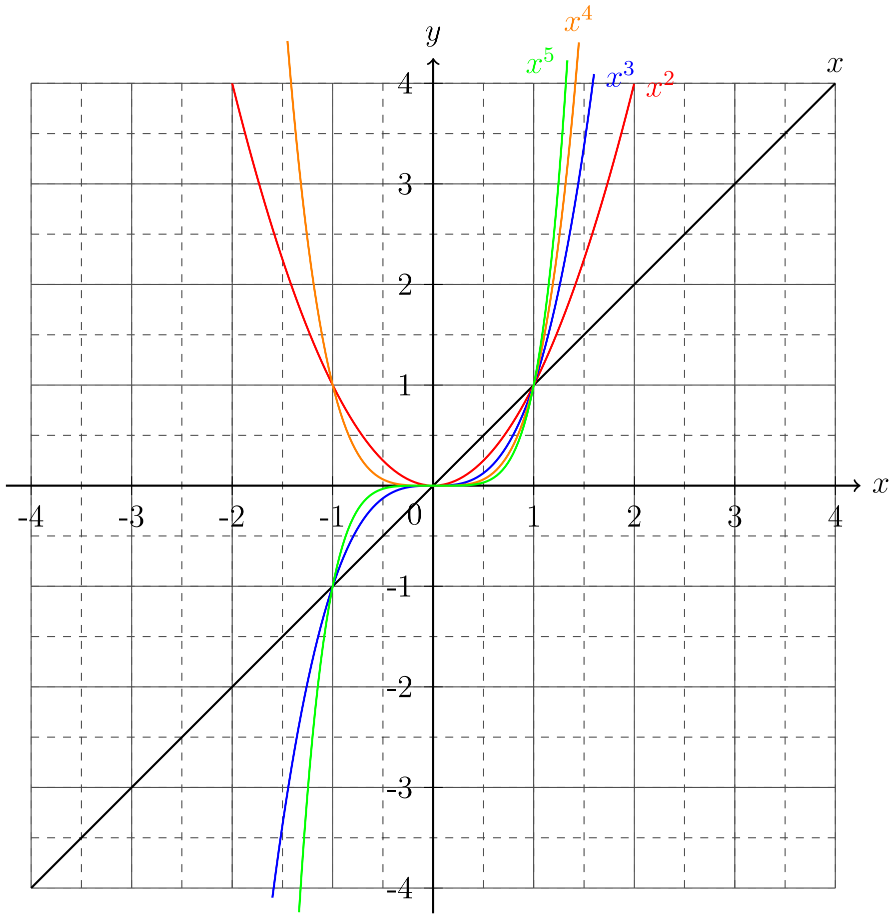
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.47) Lösungen zu Grenzwerte.

6.9 Polynomfunktionen

Nach der Diskussion der *Geraden* und der *Parabeln* kann ein Zusammenhang zwischen diesen festgestellt werden. Dabei lohnt sich eine Gegenüberstellung der *linearen* und *quadratischen Funktion* mit höheren *Funktionen*:

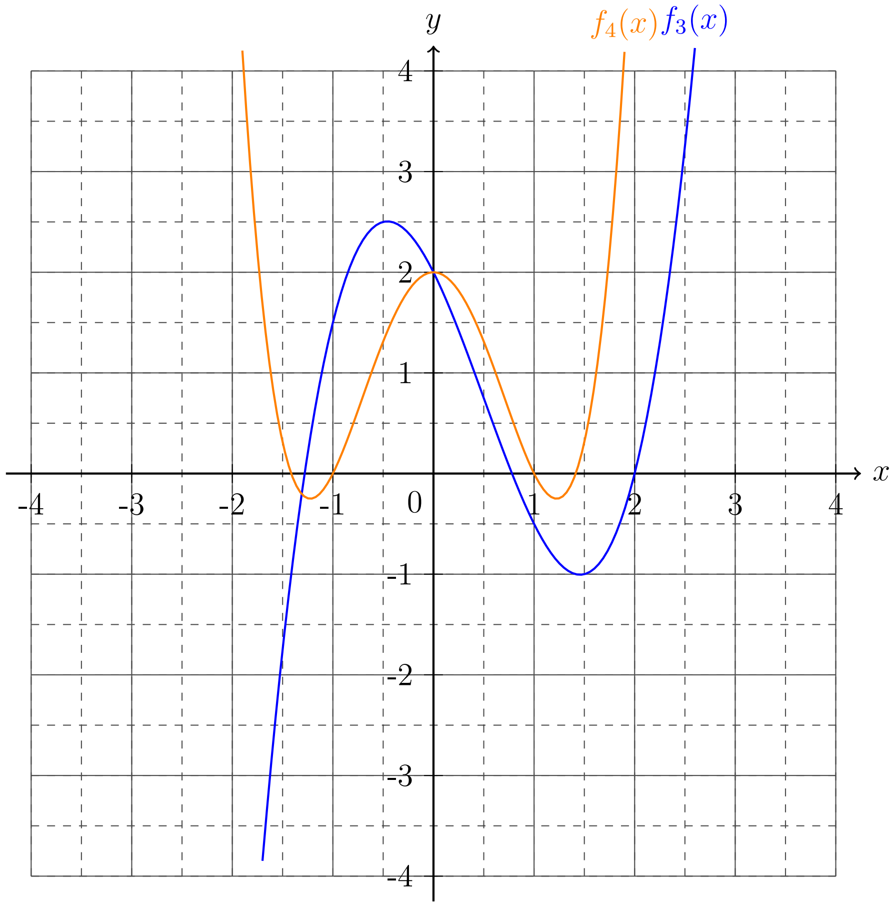
$$\begin{aligned}
f_1(x) &= a_1x + a_0 \qquad \text{1. Ordnung}\\
f_2(x) &= a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{2. Ordnung}\\
f_3(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{3. Ordnung}\\
f_4(x) &= a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{4. Ordnung}\\
f_5(x) &= a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad \text{5. Ordnung}\\
&\vdots
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Deutlich an der Gleichung (6.37) ist zu erkennen, dass durch die Höhe der *Potenzen* die Anzahl der *Terme* und der *Parameter* zunimmt. Die rechte Seite der *Funktionsgleichungen* werden *Polynome* genannt. *Polynome* zeichnen sich dadurch aus, dass die *Potenzen* der *Variablen aufaddiert* werden und dabei jeweils ihren spezifische *Vorfaktoren* besitzen.
Dabei unterscheiden sich die Eigenschaften der *Polynomfunktionen* je nach Ordnung. Um diese vergleichen zu können, werden nur die höchsten *Terme* der *Polynome* berücksichtigt.



Ungerade *Potenzen* sind dabei *symmetrisch* in einem *Punkt*, während gerade *Potenzen symmetrisch* zu einer Linie *parallel* zur *Ordinate* sind. Außerdem zeigt die Abbildung auch, dass mit steigender *Potenz* die *Funktionen* nach dem *Punkt* $P(1|1)$ einen stärkeren Anstieg zeigen und vor diesem *Punkt* schneller gegen Null gehen.

Um mehr Eigenschaften der *Polynomfunktionen* in den dazugehörigen *Graphen* ablesen zu können, werden nun beliebige Beispiele von *Polynomen* dritter und vierter *Ordnung* graphisch dargestellt.



Aus dem *Koordinatensystem* ist das charakteristisch Bild der *Graphen* von *Polynomfunktionen* dritter und vierter *Ordnung* zu erkennen. Dabei fällt auf, dass eine *Funktion* eines *Polynom* dritter *Ordnung* zwei Stellen besitzt, die dem *Scheitelpunkt* der *Parabel* ähneln. Diese Stellen werden werden *Extremstellen* und die dazu gehörigen *Punkte* werden *Extrempunkte* genannt. Dabei wird unterschieden zwischen *Minima* und *Maxima*. Eine *Polynomfunktion* vierter *Ordnung* besitzt drei *Extrempunkte*.

Die Berechnung der *Nullstellen* wird in einer späteren Version des Buches an dieser *Stelle* vorgestellt.

6.9.1 Übungsaufgaben zu Polynomfunktionen

Aufgabe 1: *Zeichne den Graphen der jeweiligen Funktion.*

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

b) $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

c) $h(x) = 2x^4 - 3x^3 - 2x$

d) $k(x) = x^5 - 3x^3 - 2$

e) $l(x) = 2x^4 - 4x + 2$

f) $m(x) = -x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x + 4$

g) $n(x) = -\frac{1}{2}x^4 - x^3 - 5x$

h) $o(x) = -x^5 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{6}{5}x^2$

Aufgabe 2: *Bestimme die Nullstellen der Funktionen.*

a) $f(x) = 2x^4 - 8x^2 + 32$

b) $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 7x$

c) $f(x) = -x^4 + 4x^2 + 7$

d) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 6x^2 + 18$

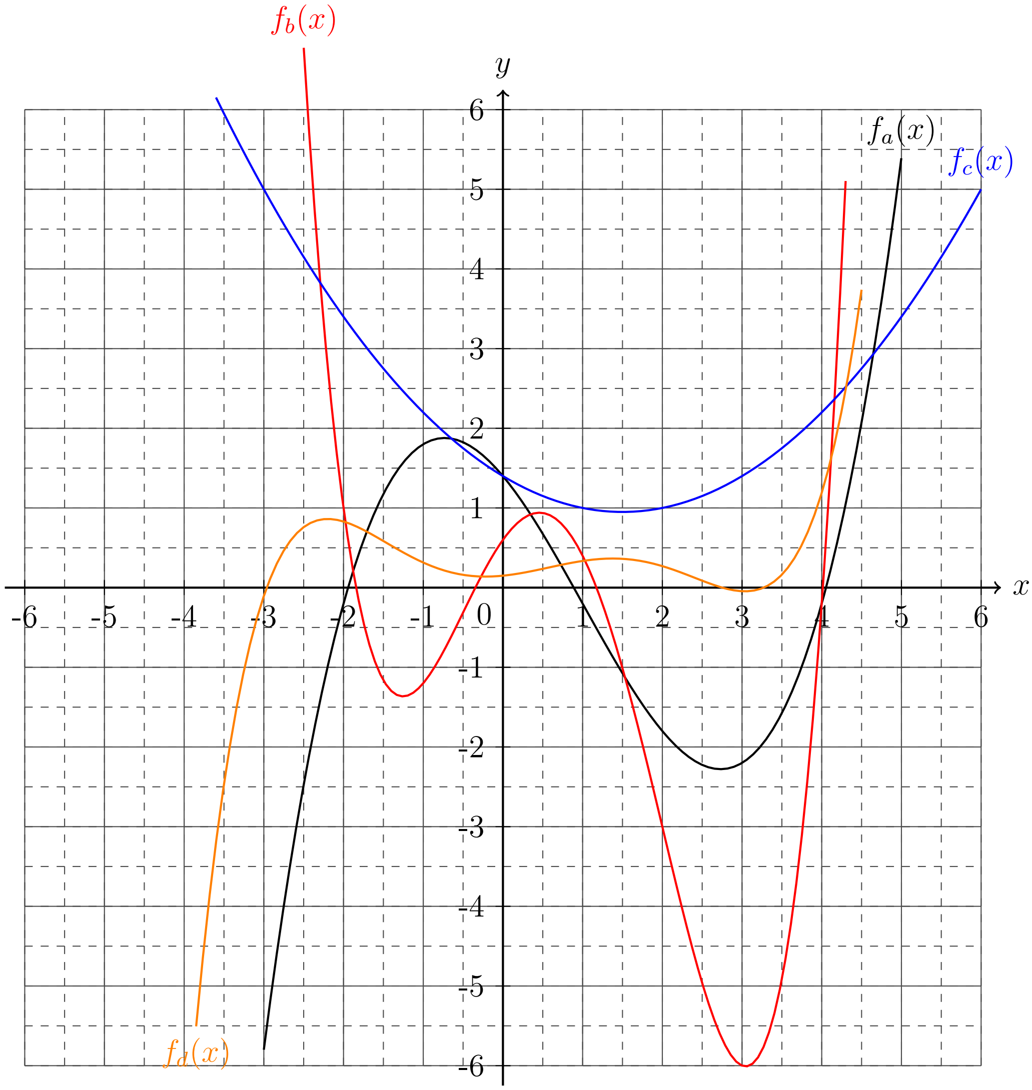
e) $f(x) = 5x^5 + 15x^4$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{9}{2}x$

g) $f(x) = -2x^6 + 8x^5 + 4x^4$

h) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{8}x$

Aufgabe 3: *Bestimme die Ordnung der dargestellten Funktionen.*



Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.48) Lösungen zu Polynomfunktionen.

6.10 Reihen

Da oftmals viele ähnliche *Terme aufaddiert* oder *-multipliziert* werden, gibt es auch für dieses Prozedere eine abkürzende Schreibweise. Zu nächst wird die Abkürzung für die *Addition* eingeführt - die *Summenreihe* $\sum$. Dabei sei als Beispiel $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ gegeben. Die abkürzende Schreibweise würde wie folgt aussehen:

$$\sum_{n=0}^{5} x^n = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad , \tag{6.38}$$

wobei die Gleichung (6.38) als „Die *Summe* über x^n von $n = 0$ bis $n = 5$“ gesprochen wird. Somit wird unter dem *Summenzeichen* $\sum$ den durchlaufenden *Parameter* (hier n) und den Startwert an. Über dem *Summenzeichen* $\sum$ ist der maximale Wert des *Parameters* bei der *Addition* angegeben. Für komplexere *addierte Terme* könnte eine solche *Summe* zum Beispiel so aussehen:

$$\sum_{n=2}^{4} \frac{1}{n!} \cdot \log_n \left(\sqrt[n]{x} \right) = \frac{1}{2!} \cdot \log_2 \left(\sqrt[2]{x} \right) + \frac{1}{3!} \cdot \log_3 \left(\sqrt[3]{x} \right) + \frac{1}{4!} \cdot \log_4 \left(\sqrt[4]{x} \right) \quad . \tag{6.39}$$

Viele komplexere *Summen* sind schon bekannt, allerdings wurden sie noch nicht in ihrer *Summenform* vorgestellt. Da diese *Summen* besonders oft vorkommen, wurden für diese *Summen* wiederum Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n &= e^x \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} &= \sin x \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} &= \cos x \end{aligned} \tag{6.40}$$

Auch das Beispiel aus Gleichung (6.38) ist eine besondere *Summenreihe* - die sogenannte *geometrische Reihe*:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= \frac{1}{1-x} \\ \sum_{n=0}^{k} x^n &= \frac{1-x^{k+1}}{1-x} \end{aligned} \tag{6.41}$$

Aber auch die *Vorfaktoren* der *binomischen Formeln* für höhere *Potenzen* k lassen sich über *Reihen* darstellen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} = (1+x)^k \tag{6.42}$$

Für *Polynome* wird oftmals auch eine *Summenreihe* verwendet

$$\sum_{n=0}^{k} c_n x^n \quad , \tag{6.43}$$

wobei c_n für jede *Potenz* von x einen anderen Wert haben kann und sind *Koeffizienten*, also *Vorfaktoren*.

Eine weitere wichtige Eigenschaft von *Summen* ist die Aufsummierung über eine *Konstante*:

$$\sum_{k=0}^{n} x = nx \quad . \tag{6.44}$$

Wesentlich seltener kommen *Produktreihen* $\prod$ vor, welche nur kurz vorgestellt werden sollen.

$$\prod_{n=0}^{4} x^n = x^0 \cdot x^1 \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \tag{6.45}$$

Dabei ist die *Fakultät* eine oft vorkommende *Produktreihe* und wird durch den *Fakultätsoperator* ! abgekürzt.

$$\prod_{n=0}^{k} n = k! \tag{6.46}$$

Wichtig für jeden Schüler ist es zu wissen was sich hinter diesen Symbolen verbirgt, sodass weiterführende Zusammenhänge hergestellt werden können und Gleichungen mit komplexer Struktur den Schüler nicht abschrecken lassen, da bekannt ist, dass es sich lediglich um eine abkürzende Schreibweise handelt. Hierbei sollte auch beachtet werden, dass *Reihen* mit *Summanden* beziehungsweise *Faktoren* oftmals nicht vollständig ausgeschrieben werden können.

Allerdings werden in einigen Rechnungen zur Verdeutlichung Teile der *Reihe* benötigt, sodass eine korrekte Schreibweise hierfür noch eingeführt werden muss.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \mathcal{O}\left(x^5\right) \tag{6.47}$$

Wobei in der Gleichung (6.47) das $\mathcal{O}\left(x^5\right)$ die Bedeutung besitzt, dass alle *Terme* mit der *Ordnung* fünf oder größer in x nicht ausgeschrieben werden, aber dennoch vorhanden sind. Dieses Überbleibsel der restlichen *Ordnungen* muss in jeder Rechnung mit getragen werden, solange ein *Äquivalenzzeichen* verwendet wird.

6.10.1 Übungsaufgaben zu Reihen

Aufgabe 1: *Schreibe die Reihe aus.*

a) $\sum\limits_{n=0}^{6} n$

b) $\sum\limits_{n=0}^{6} n!$

c) $\sum\limits_{n=0}^{6} x^n$

d) $\sum\limits_{n=1}^{6} \frac{x^n}{n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{6} \sqrt[n]{nx}$

f) $\sum\limits_{n=3}^{6} \frac{nx^n}{n!-n}$

g) $\prod\limits_{n=1}^{6} \sqrt[n]{x}$

h) $\prod\limits_{n=1}^{6} \sqrt[n]{n!}$

i) $\prod\limits_{n=0}^{6} n!x^n$

j) $\prod\limits_{n=0}^{6} (x-n)$

k) $\sum\limits_{n=0}^{6} \frac{(-1)^n}{x^n}$

l) $\sum\limits_{n=0}^{6} (-1)^n \frac{n}{n!} x^n$

m) $\sum\limits_{n=1}^{7} (-1)^n \binom{n+2}{n}$

n) $\prod\limits_{n=1}^{4} \binom{n+1}{n-1}!$

o) $\sum\limits_{n=3}^{6} \sqrt[n]{\binom{n}{n-3}} x^n$

p) $\sum\limits_{n=1}^{5} \left((-1)^{n+1} \sum\limits_{k=1}^{3} n^k \right)$

Aufgabe 2: *Schreibe die Summe beziehungsweise das Produkt als Reihe auf.*

a) $1+2+3+4+5+6+7+8$

b) $1+2+6+24+120$

c) $x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4 \cdot x^5 \cdot x^6 \cdot x^7 \cdot x^8$

d) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4(x-5)^5(x-6)^6$

e) $x - 2x + 3x - 4x + 5x - 6x + 7x - 8x + 9x$

f) $x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{12}}{6}$

g) $\frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^{-1}}{6} + \frac{1}{24} + \frac{x}{120} + \frac{x^2}{720}$

h) $-x + 2x^3 - 6x^5 + 24x^7 - 120x^9$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.49) Lösungen zu Reihen.

6.11 Gebrochen rationale Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen sind *Funktionen*, die im *Nenner* und im *Zähler* ein *Polynom* vorzuweisen haben. Dabei wird zwischen *echten* und *unechten gebrochen rationalen Funktionen* unterschieden. Eine *echt gebrochen rationale Funktion* wäre zum Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 25} \quad , \tag{6.48}$$

wobei der *Nenner* nicht wegzudiskutieren ist. Anders sieht dies bei den *unecht gebrochen rationalen Funktionen* aus, welche oftmals in Verbindung mit den *binomischen Formeln* vorzufinden sind.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3} = x - 3 \quad , \tag{6.49}$$

Gleichung (6.49) zeigt, dass die *Funktion* bei $x = -3$ aufgrund der Bruchschreibweise nicht definiert ist, allerdings kann durch Anwendung der *binomischen Formeln* gezeigt werden, dass es sich bei dieser Struktur der *Funktion* lediglich um eine *Gerade* handelt. Allerdings sind einige *Brüche* nicht so einfach zu kürzen wie in diesem Beispiel. Hierfür bedarf es der sogenannten *Polynomdivision*, also der *Division* durch ein *Polynom*. Dabei wird wie bei der schriftlichen *Division* der *Grundrechenarten* gerechnet, allerdings statt durch Zahlen zu *dividieren*, wird durch einen *Funktionsterm* dividiert. Um die *Polynomdivision* zu demonstrieren sei folgende *Funktion* gegeben:

$$f(x) = \frac{2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x - 48}{x - 2} \quad , \tag{6.50}$$

wobei durch die *Polynomdivision* überprüft werden kann ob es sich um eine *echte* oder *unechte gebrochen rationale Funktion* handelt.

$$
\begin{array}{rrrrrl}
(2x^4 & +2x^3 & -4x^2 & +8x & -48) & : (x-2) = 2x^3 + 6x^2 + 8x + 24 \\
-(2x^4 & -4x^3) & & & & \\
\hline
& 6x^3 & -4x^2 & +8x & -48 & \\
& -(6x^3 & -12x^2) & & & \\
\hline
& & 8x^2 & +8x & -48 & \\
& & -(8x^2 & -16x) & & \\
\hline
& & & 24x & -48 & \\
& & & -(24x & -48) & \\
\hline
& & & & 0 &
\end{array}
$$

Bei der *Polynomdivision* ist kein *Restterm* vorhanden, sodass der Schluss gezogen werden kann, dass es sich um eine *unechte gebrochen rationale Funktion* handelt. Das Verfahren der *Polynomdivision* ist auch nützlich wenn *Null-* oder andere *Stellen* bei höheren *Polynomfunktionen* bestimmt werden sollen.

Insgesamt zeigt sich durch diese Unterscheidung, dass *unechte gebrochen rationale Funktionen* keine *Polstelle* sondern eine *Definitionslücke* besitzen, wobei bei komplexeren *Funktionen* lediglich sich nur die *Polstellenanzahl* reduziert.

6.11.1 Übungsaufgaben zu gebrochen rationalen Funktionen

Aufgabe 1: *Führe die Polynomdivision durch.*

a) $\left(x^3 - x^2 - 5x - 3\right) : (x - 3)$

b) $\left(x^5 + x^3 + 5x^2 - 2x + 10\right) : \left(x^2 + 2\right)$

c) $\left(\frac{25}{2}x^5 - \frac{35}{2}x^3 + 15x^2 - 21\right) : \left(x^2 + \frac{5}{2}x + 3\right)$

d) $\left(x^4 - 25\right) : \left(x^2 + 5\right)$

e) $\left(x^5 + x^4 + x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}\right) : \left(x^2 + x + 1\right)$

f) $\left(-9x^3 - 60x^2 + 48x - 9\right) : (9x - 3)$

g) $\left(-\frac{\ln 2 \cdot x^3}{3} - \frac{\ln 2 \cdot x^2}{7} - \frac{e^\pi x}{3} - \frac{e^\pi}{7}\right) : \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{7}\right)$

h) $\left(-\sqrt{2}x^4 + \sqrt{34}x^3 + ex^2 - e\sqrt{17}x - \pi x + \pi\sqrt{17}\right) : \left(-x + \sqrt{17}\right)$

Aufgabe 2: *Führe die Polynomdivision durch und addiere den Rest dividiert durch den Divisor zum Ergebnis.*

a) $\left(x^2 - 4x + 2\right) : (x + 5)$

b) $\left(x^3 + 3x^2 - 5\right) : \left(x^2 - 2\right)$

c) $\left(6x^4 + x^2 - 15\right) : (x - 1)$

d) $\left(\frac{2}{3}x^6 - 3x^4 + 8\right) : \left(4x^2 + 2\right)$

e) $\left(-7x^3 - 9x + 2\right) : \left(\frac{1}{5}x - 3\right)$

f) $\left(x^9 - x^4 + x^2 + 1\right) : \left(x^2 - 3\right)$

Aufgabe 3: *Überprüfe mit der Polynomdivision welche Funktion eine echte und welche eine unechte gebrochen rationale Funktion ist.*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$

b) $f(x) = \dfrac{9x^2 - 15x + 6}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{8x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{x + 2}$

d) $f(x) = \dfrac{10x^3 - 17x^2 + 12x - 3}{2x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^4 + 256}{x^2 + 4}$

f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}x^3 - ex^2 + \pi\sqrt{2}x - e\pi}{x^2 + \pi}$

Aufgabe 4: *Zeichne den Graphen der jeweiligen Funktion.*

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

b) $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{1}{x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 4x - 7}{x - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{3x^3 - x + 4}{x^2 - 4}$

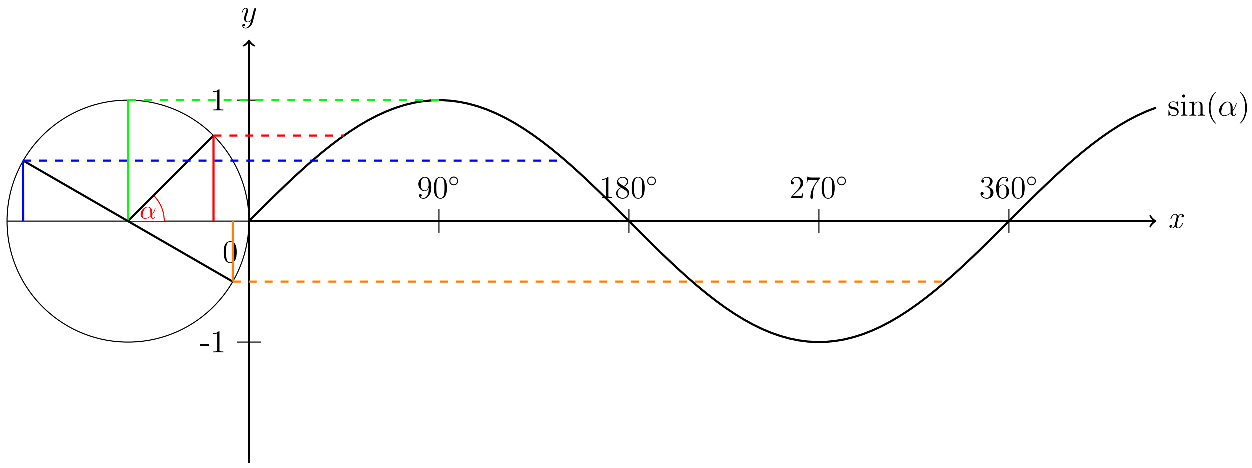
e) $f(x) = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x - 3}$

f) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x - 2 + \dfrac{1}{x^2 - 2}$

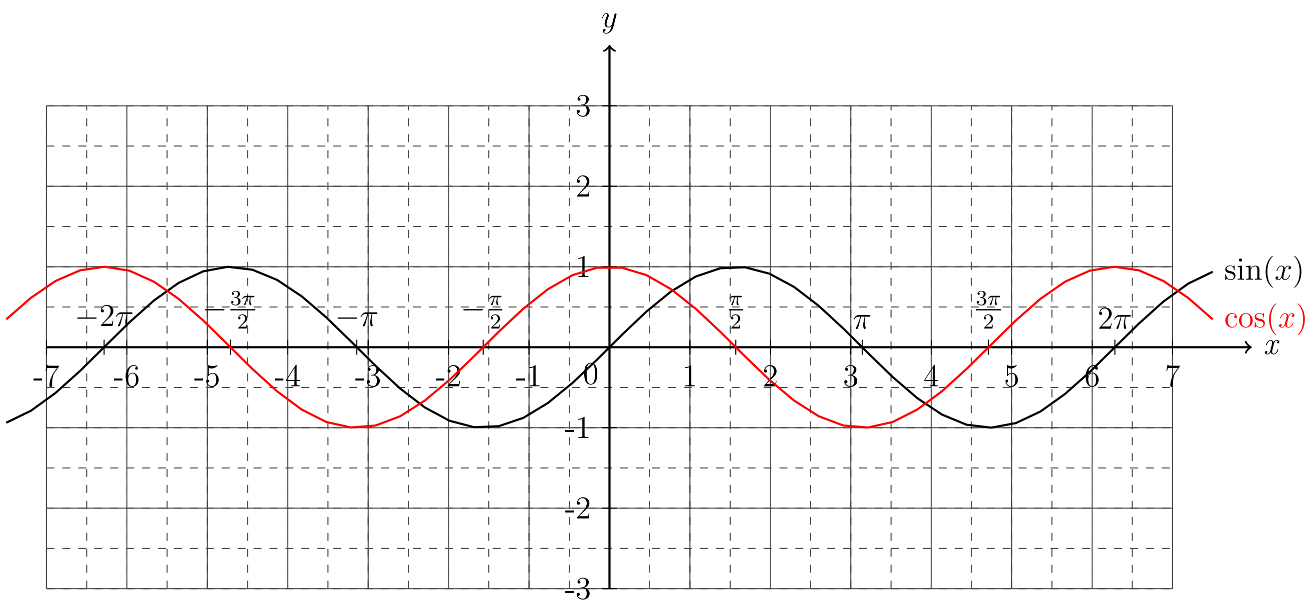
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.50) Lösungen zu gebrochen rationalen Funktionen.

6.12 Trigonometrische Funktionen

Als die *Trigonometrie* eingeführt wurde, wurden auch schon die *trigonometrischen Funktionen* eingeführt, da $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sowie $\tan(x)$ und $\cot(x)$ sind bereits *Funktionen*, wie auch an der sprachlichen Übersetzung zu erahnen war: „Sinus von x“. Um den *Graphen* der *Sinus-Funktion* zu veranschaulichen, wird ein *Kreis* mit *Radius* $r = 1$ gewählt, sodass die *Hypotenuse* auch immer gleich 1 ist. Daraus folgt, dass die *Gegenkathete* zum Winkel α, welcher sich am *Kreismittelpunkt* befindet, den *Sinus-Funktionswert* entspricht.



Durch den *Graphen* und den sogenannten *Einheitskreis* wird auch ersichtlich, dass sich die *Sinusfunktion* sich nach $360° = 2\pi\mathrm{rad}$ wiederholt. Diese *periodische* Eigenschaft der *Funktion* ist besonders oft in den Naturwissenschaften zur Beschreibung der Natur vorzufinden.
Da der *Kosinus* nur ein um 90° verschobener *Sinus* ist ähneln sich auch die *Funktionsgraphen*.



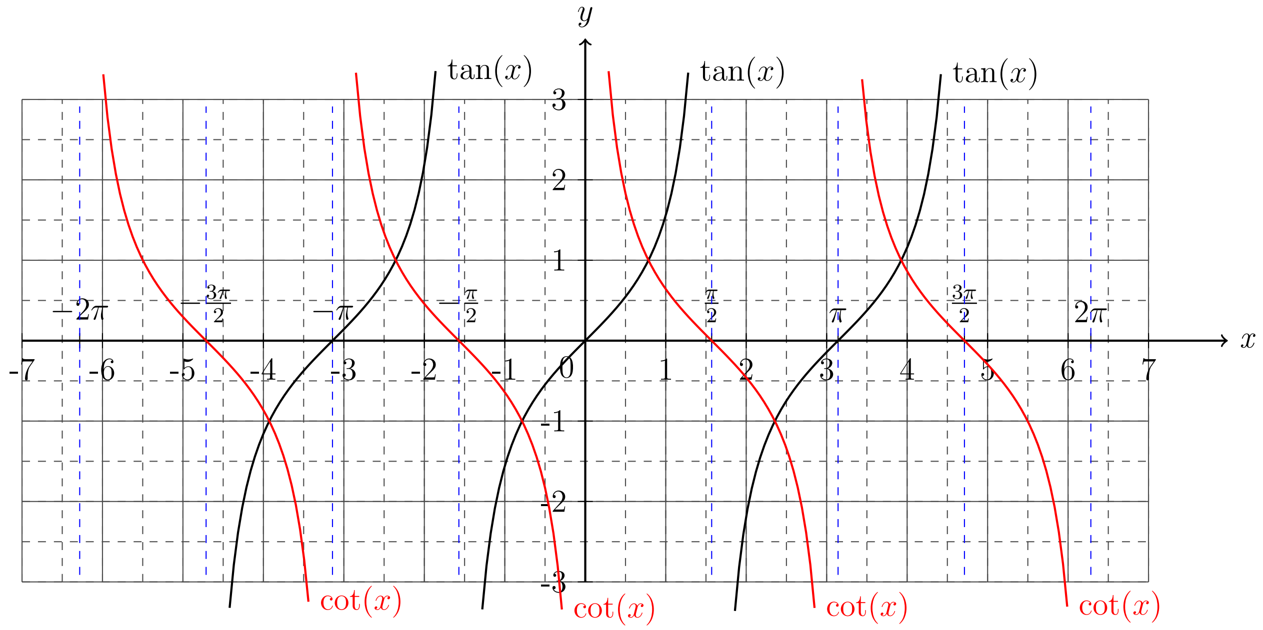
Durch die *Graphen* zeigen sich die wichtigen Eigenschaften, dass die *Funktionen* sich zwischen dem *Supremum* 1 und dem *Infimum* -1 bewegt und dass

$$\begin{aligned} \sin 0 &= 0 \quad \text{und} \\ \cos 0 &= 1 \end{aligned} \tag{6.51}$$

gilt. Außerdem ist zu erkennen, dass der *Kosinus symmetrisch* zur *Ordinate* und dass der *Sinus punktsymmetrisch* zum *Koordinatenursprung* ist.

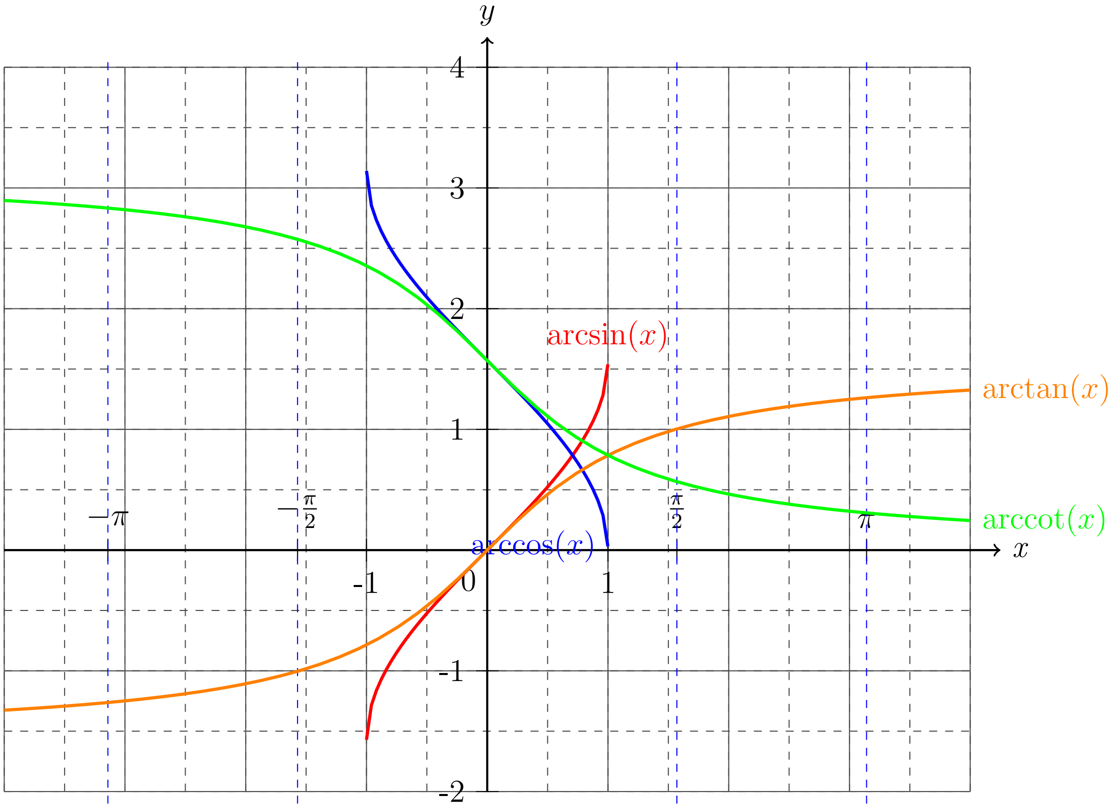
$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \quad \text{und} \\ \cos(-x) &= \cos x \end{aligned} \tag{6.52}$$

Der *Tangens* und der *Kotangens* sind *Brüche* aus *Sinus* und *Kosinus*, was wiederum bedeutet, dass es *periodische* Lücken in der *Definitionsmenge* muss. Dies zeigt sich auch in der Darstellung der *Graphen*.



Die *Graphen* zeigen, dass bei der *Tangens-* und der *Kotangens-Funktion* in *periodischen Abständen* zu *Polstellen* vorzufinden sind. Dabei ist die *Polstelle* des *Tangens* die *Nullstelle* des *Kotangens* und anders herum.

Die *Graphen* der *Umkehrfunktionen* sind im folgenden *Koordinatensystem* veranschaulicht.



6.13 Trigonometrische Identitäten

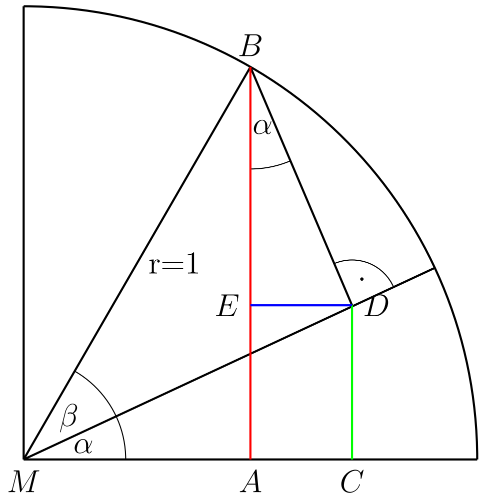
Wie schon im vorigen Abschnitt zu sehen war, gibt es Beziehungen zwischen *Sinus*, *Kosinus*, *Tangens* und *Kotangens*, den sogenannten *trigonometrischen Funktionen*. Diese Beziehungen können hergeleitet und bewiesen werden. Die wichtigste *trigonometrische Identität* ist der *Satz des Pythagoras* an einem *rechtwinkligen Dreieck* mit der *Hypotenusenlänge* von 1. Somit ergeben sich die *Katheten* zur Länge $\sin x$ und $\cos x$, sodass daraus die folgende *Identität* folgt:

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x \quad , \tag{6.53}$$

wobei $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ ist.
Des Weiteren gelten noch die sogenannten *Additionstheoreme*:

$$\begin{aligned} \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad , \\ \sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \quad , \end{aligned} \tag{6.54}$$

welche anhand des *Einheitskreises* bewiesen werden können.



Dabei ist die *Strecke* $\overline{AB} = \sin(\alpha+\beta)$ sowie die *Strecke* $\overline{BD} = \sin\beta$. Der *Kosinus* für den *Winkel* α wäre dann $\cos\alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$, sodass dann $\overline{BE} = \cos\alpha\sin\beta$ ist. Da der *Sinus* von α durch das Verhältnis $\frac{\overline{CD}}{\overline{MD}}$ gegeben ist, ergibt sich mit $\cos\beta = \overline{MD}$ ein Ausdruck für die *Strecke* $\overline{BE} = \cos\alpha\sin\beta$. Die *Strecke* $\overline{AB}$ besteht aus der *Summe* der *Strecken* $\overline{BE}$ und $\overline{EA}$ und somit wäre das *Additionstheorem* für den *Sinus* bewiesen. Für die *Differenz* der *Winkel* werden die *Symmetrieeigenschaften* der *trigonometrischen Funktionen* ausgenutzt. Auch für den *Kosinus* kann eine ähnliche Herleitung aus dieser Abbildung beschrieben werden.

Aus dieser Beziehung und den anderen vorgestellten Eigenschaften aus dem vorherigen Abschnitt können noch weitere *Identitäten*.

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x \quad , \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \quad , \\
\cos^2 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \quad , \\
\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad .
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Die ersten beiden *Identitäten* können mit den *Additionstheoremen* schnell gezeigt werden, da $\sin 2x = \sin(x+x)$ und $\cos 2x = \cos(x+x)$. Mit Hilfe dieser Beiden *Identitäten* können schnell die beiden weiteren bewiesen werden.

All diese *Identität* können genutzt werden um weitere zu bewiesen und sind oft in Aufgaben sowie in der Beschreibung der Natur nützlich.

6.13.1 Übungsaufgaben zu trigonometrischen Funktionen.

Aufgabe 1: *Zeichne folgende Funktionen in ein Koordinatensystem für $x \in [-7, 7]$ und schreibe die Definitions- und Wertemenge auf.*

a) $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{6}) + 5$

b) $g(x) = 2\cos(x - \frac{\pi}{6}) - 3$

c) $h(x) = 4 + \sin(2x)$

d) $l(x) = x + \cos(x)$

e) $k(x) = \cos(2x) - 5$

f) $m(x) = \sin(2x) - x$

g) $n(x) = \tan(2x)$

h) $o(x) = x\sin(x)$

Aufgabe 2: *Beweise folgende Identitäten. Verwende dabei nur die schon bewiesenen Identitäten (Die Additionstheoreme, den trigonometrischen Satz des Pythagoras und die vorherigen Unteraufgaben. Beispiel: Bei Aufgabe b ist die Identität aus Aufgabe a erlaubt).*

a) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

b) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$

c) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

d) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

Aufgabe 3: *Bestimme alle Nullstellen.*

a) $f(x) = \sin(x)$

b) $f(x) = \cos(x)$

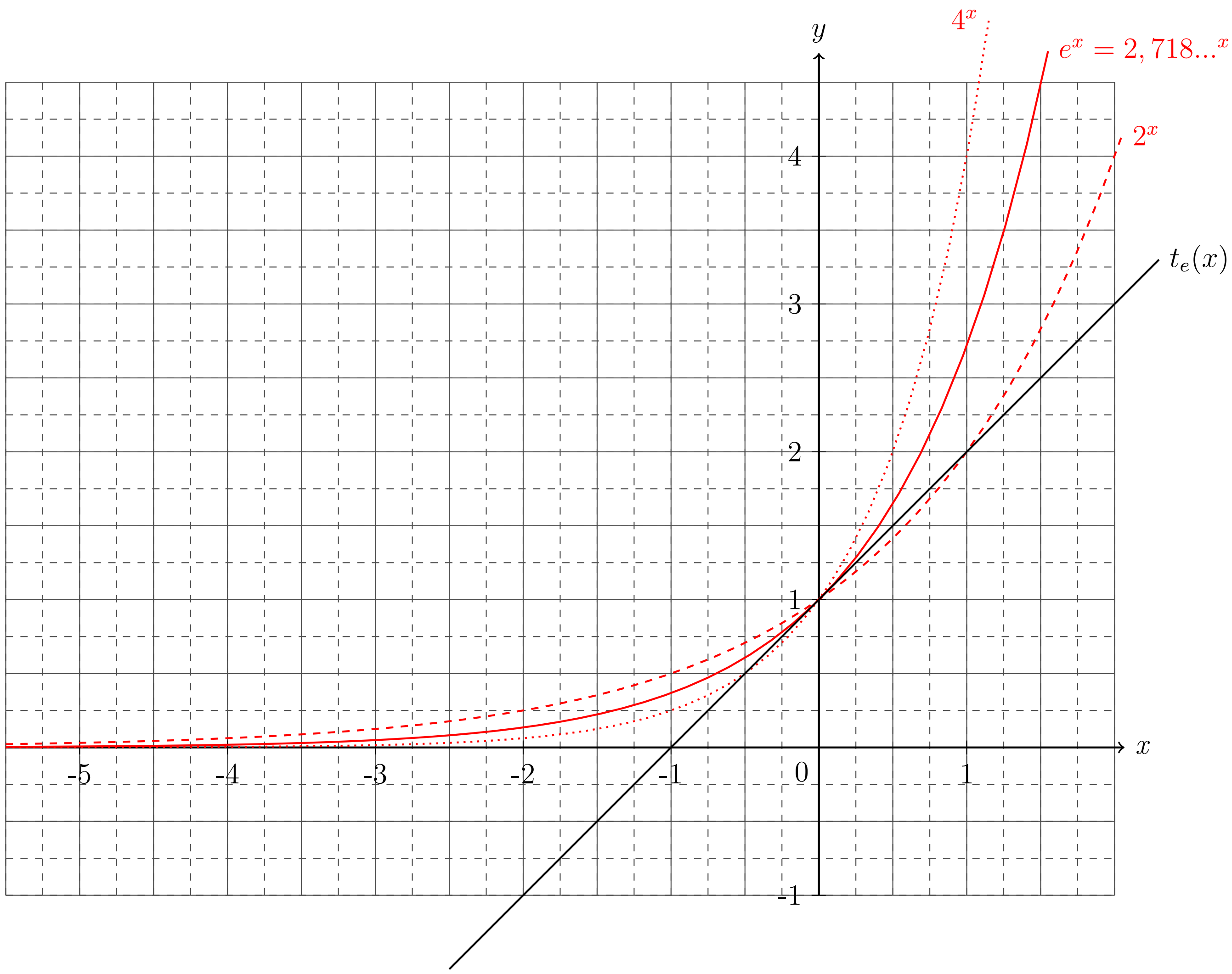
c) $f(x) = \tan(x)$

d) $f(x) = \cot(x)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.51) Lösungen zu trigonometrischen Funktionen.

6.14 Exponentialfunktion

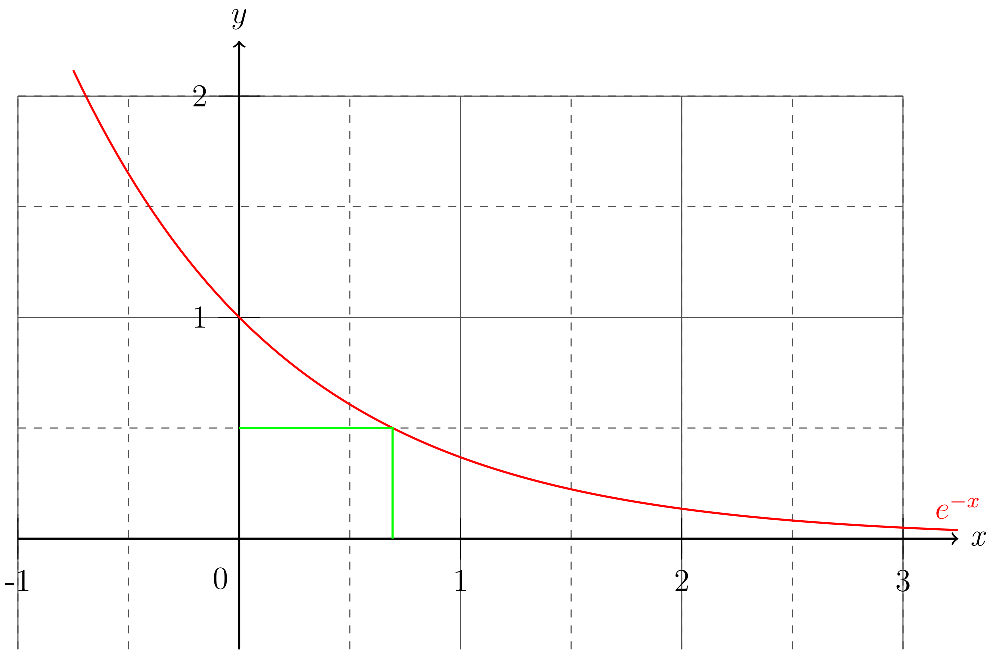
Zu guter Letzt wird noch die *Exponentialfunktionen* thematisiert. Dabei steht eine Zahl als *Basis* und im *Exponenten* die *Variable*. Dabei wurde schon im Abschnitt der *Logarithmen* die Zahl e eingeführt. Ihre besondere Rolle in der Mathematik hat sich im Laufe der Kapitel dabei schon wie bei den *Reihen* herauskristallisiert. Allerdings kann die große Bedeutung dieser Zahl in der *Basis* erst vollständig verstanden werden, wenn das Kapitel „Differentiation und Integration" behandelt wurde. Für diesen Abschnitt ist die Wirkungsweise der *Exponentialfunktionen* von Bedeutung. Dazu finden sich im folgenden *Koordinatensystem* einige *Exponentialfunktionen* mit unterschiedlicher *Basis* wieder.



Dabei kann den *Graphen* entnommen werden, dass sich alle *exponentiellen Funktionen* für hohe negative Zahlen *asymptotisch* gegen Null bewegen, während die *Funktionswerte* für hohe positive Zahlen gegen Unendlich laufen. Diese Eigenschaft gilt es in sehr vielen Fällen, besonders in der Physik, auszunutzen, da die *Division* durch eine *Exponentialfunktion* bedenkenlos durchgeführt werden kann. Im *Koordinatensystem* befindet sich auch die *Funktion* $t_e(x)$, welche eine *Gerade* mit *Steigungsparameter* $m = 1$ ist. Diese spezielle *Gerade* ist eine *Tangente* der *Exponentialfunktion* mit der *Basis* e. Diese besondere Eigenschaft wird sich im späteren Verlaufes des Buches offenbaren.

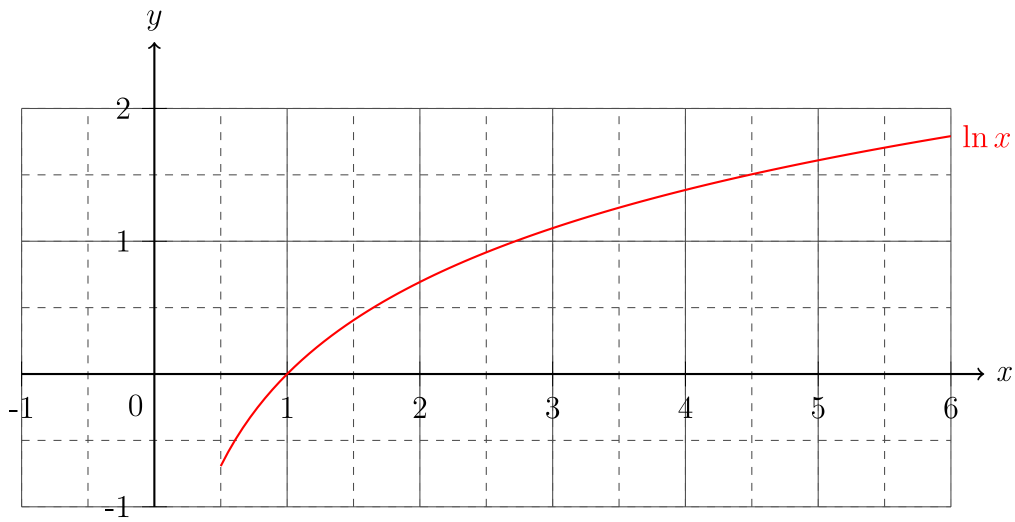
Eine weitere Eigenschaft die aus dem *Koordinatensystem* abzulesen ist, ist die Tatsache, dass sich der *Funktionswert* bei einem Schritt auf der *Abszisse* mit dem Wert der *Basis* der *Exponentialfunktion multipliziert*. So entwickeln sich die *Funktionswerte* für $f(x) = 2^x$ mit dem wachsenden *Exponenten*: $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 8$, $f(4) = 16$, und so weiter.

Wenn die Rede vom *exponentiellen Zerfall* ist, dann wird die *Funktion* $e^{-\lambda x}$ betrachtet. Dabei gibt der *Parameter* λ an wie stark der Zerfall von statten geht.

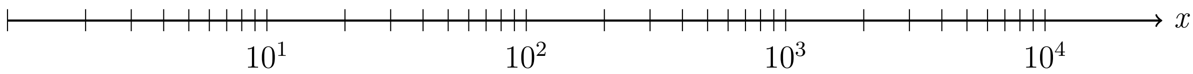


Im *Koordinatensystem* wurde für den *Parameter* $\lambda = 1$ gewählt. Ebenso wurde ins *Koordinatensystem* die Stelle eingetragen, an der sich der *Funktionswert* um die Hälfte reduziert hat. Dieser Wert wird in den Naturwissenschaften oftmals mit Halbwertszeit betitelt.

Die *Umkehrfunktion* der *Exponentialfunktion* ist der *Logarithmus*, dessen *Graph* wie folgt aussieht:



Um die Auswirkungen der *Exponentialfunktion* auf die anderen *Funktionen* zu verdeutlichen, wird zu Letzt noch das *logarithmische Koordinatensystem* vorgestellt. Dabei wird auf eine oder beide *Achsen* des *Koordinatensystems* eine *logarithmische Skala* aufgetragen,

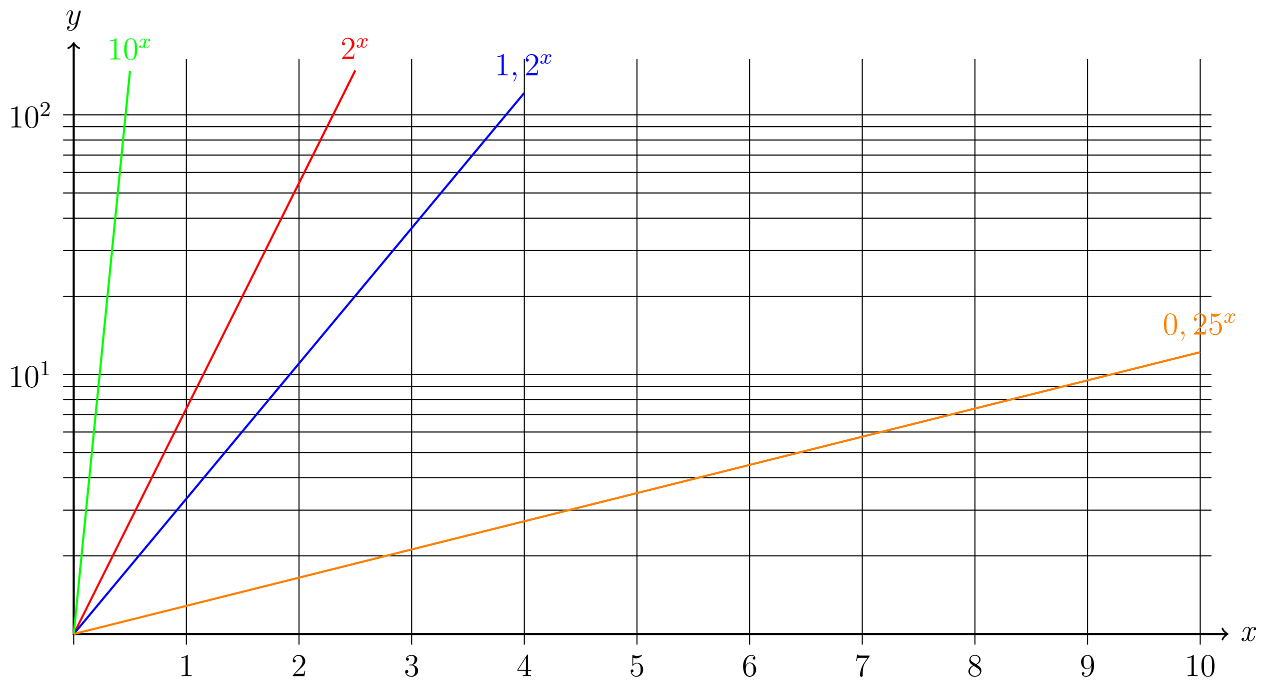


welche ihre *Werte* über den *Logarithmus* bekommen:

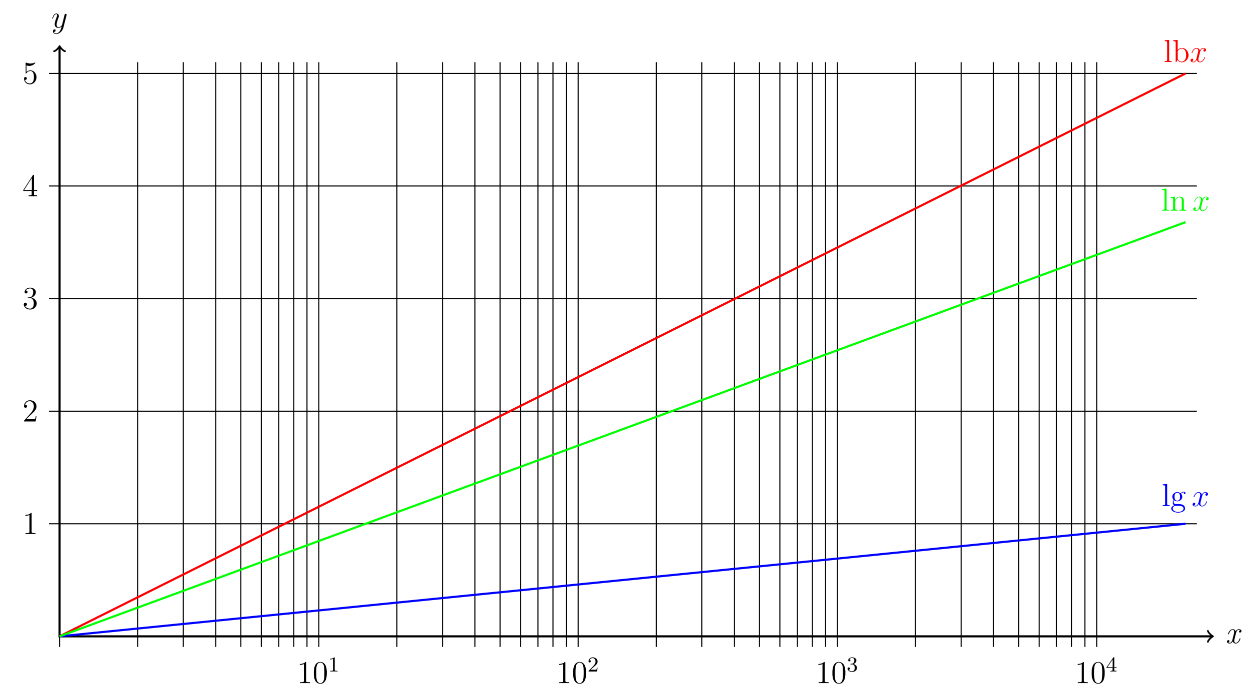
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
$\ln x$	0	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,94	2,08	2,20	2,30	2,30+0,69

Folglich gibt es insgesamt drei Arten von *logarithmischem Koordinatensystemen*:

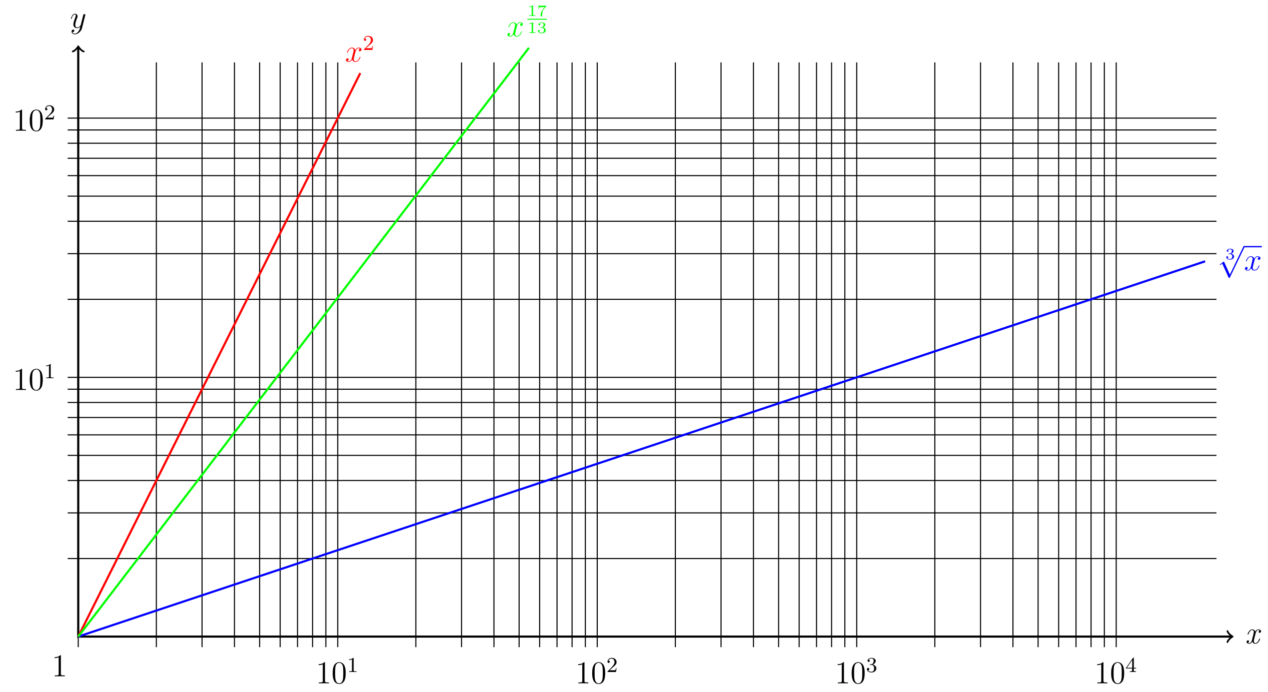
Auf der *Abszisse* befindet sich eine *logarithmische Skala* und auf der *Ordinate* eine normale *Skala*. Wenn auf diesem Papier *Werte* einer *exponentielle Funktion* eingetragen werden, ergeben sie sich zu einer *Geraden*. Dabei gibt die *Steigung* der *Geraden* den *Wert* der *Basis* der *exponentiellen Funktion* an.



Auf der *Abszisse* befindet sich eine normale *Skala* und auf der *Ordinate* eine *logarithmische Skala*. Wenn in dieses *Koordinatensystem Werte* einer *logarithmische Funktion* eingetragen werden, ergeben sie sich zu einer *Geraden*. Dabei gibt die *Steigung* der *Geraden* den *Kehrwert* der *Basis* der *logarithmischen Funktion* an.



Auf der *Abszisse* und der *Ordinate* befindet sich eine *logarithmische Skala*. Wenn in dieses *Koordinatensystem Werte* einer *Potenzfunktion* eingetragen werden, ergeben sie sich zu einer *Geraden*. Dabei gibt die *Steigung* der *Geraden* den *Wert* der *Potenz* der *Funktion* an.



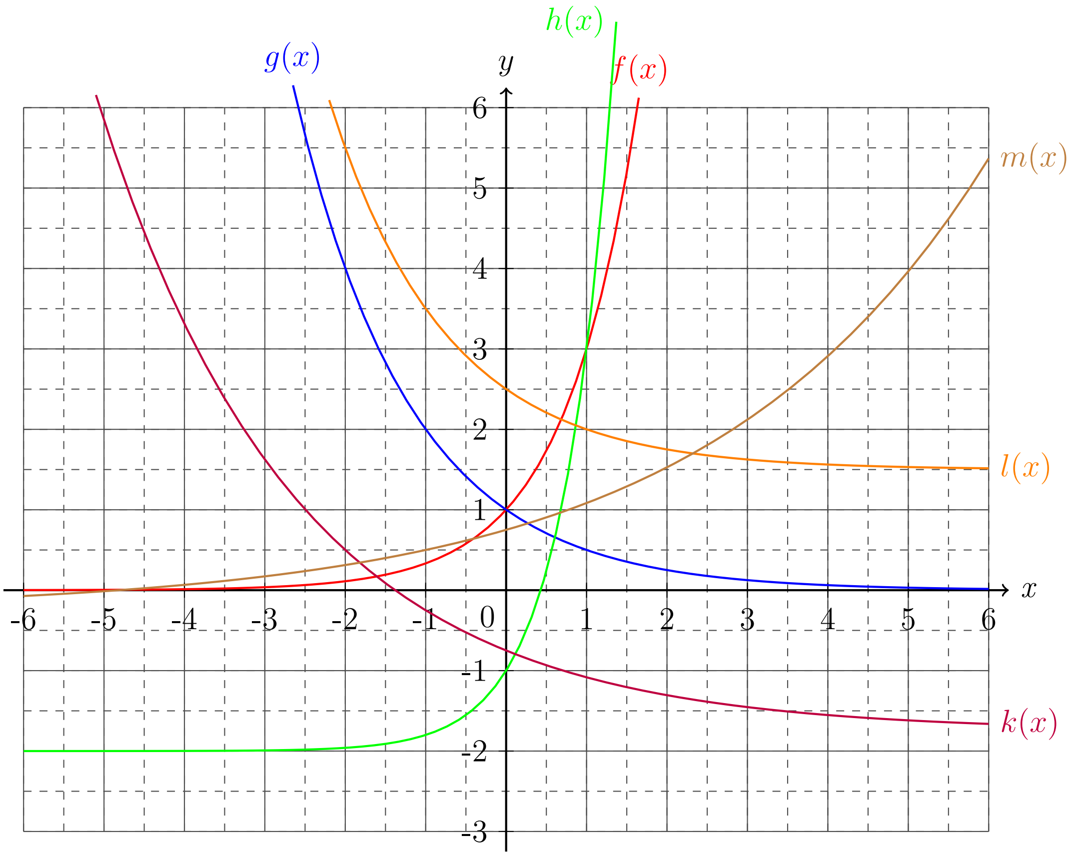
Für ein tieferes Verständnis von *Funktionen* sollte das Kapitel „Differentiation und Integration“ sowie „Komplexe Zahlen“ bearbeitet werden, da viele Zusammenhänge zwischen den Arten der *Funktionen* und ihren Eigenschaften dadurch besonders deutlich erkennbar werden.

6.14.1 Übungsaufgaben zu Exponentialfunktionen.

Aufgabe 1: *Zeichne die Funktionen für die Funktionswerte $f(x) \in [-5, 5]$ und berechne die Nullstelle.*

a) $f(x) = 2^x - 1$	b) $g(x) = 3^{-x} - 2$
c) $h(x) = 1,5^x - 0,5$	d) $k(x) = 0,4^x - 4$
e) $l(x) = 0,2^x - 2,25$	f) $m(x) = 0,75^x - 3$
g) $n(x) = 2^{\frac{1}{2}x} - 3,6$	h) $o(x) = 3^{\frac{1}{6}x^2} - 5$

Aufgabe 2: *Bestimme die Funktionsgleichung der exponentiellen Funktionsgraphen.*



Aufgabe 3: *Beantworte die Fragen zu den radioaktiven Zerfällen* $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ *mit* $\lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$.

a) *Berechne die Zerfallsrate* λ *für Uran*-235 *(U).* $\tau = 7,038 \cdot 10^8$ *a.*

b) *Berechne die Zerfallsrate* λ *für Plutonium*-243 *(Pu).* $\tau = 4,956\,h$.

c) *Berechne die Stoffmenge von* $N_0 = 25000$ *Atomen von Kohlenstoff*-14 *(C) nach* 15300 *Jahren.* $\tau = 5730$ *a.*

d) *Berechne die Stoffmenge von* $N_0 = 214000$ *Atomen von Rubidium*-75 *(Rb) nach* 45 *Minuten (=2700s).* $\tau = 19$ *s.*

e) *Nach welcher Zeit existieren nur noch* 25% *der ursprünglichen Stoffmenge von Cäsium*-136 *(Cs).* $\tau = 13,16$ *d.*

f) *Nach welcher Zeit existieren nur noch* 5% *der ursprünglichen Stoffmenge von Polonium*-208 *(Po).* $\tau = 2,898$ *a.*

g) *Von* 43688 *Technetium*-96-*Atomen (Tc) existieren nur noch* 14578*, wie viel Zeit ist vergangen?* $\tau = 4,28$ *d.*

h) *Von* $5,346 \cdot 10^{12}$ *Wasserstoff*-3-*Atomen (H) existieren nur noch* $2,454 \cdot 10^4$*, wie viel Zeit ist vergangen?* $\tau = 12,33$ *a.*

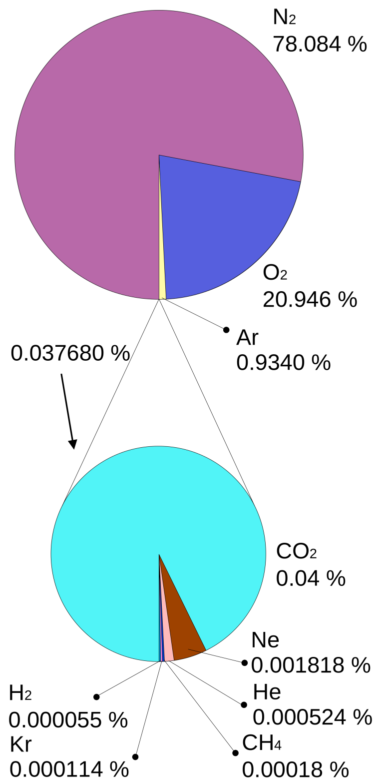
Aufgabe 4: *Löse alle Teilaufgaben zur Luftfeuchtigkeitsfunktion.*

a) Durch Messungen konnte festgestellt werden, dass die absolute Sättigung von Wassermolekülen in der Luft eine exponentielle Funktion sein muss. Dabei ist die absolute Sättigung F eine Funktion der Temperatur T. Bei den Messungen wurde eine Wertetabelle erstellt.

Messung	1	2	3	4	5	6
T in [°C]	0	-10	10	15	20	30
$F(T)$ in $\left[\frac{\text{g}}{\text{m}^3}\right]$	4,8	2	10	13,5	15,5	30,1

Übertrage diese Wertepaare in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Bestimme aus den Werten der ersten und letzten Messung die Funktionsgleichung.



c) Erstelle eine Wertetabelle für die gefundene Funktion und zeichne diese in das Koordinatensystem aus dem ersten Aufgabenteil. Beschreibe, was dir auffällt und versuche dies zu erklären.

d) Ein Kubikmeter Luft wiegt unter Normalbedingungen ($T = 20\,°\text{C}, P = 1013\,\text{hPa}$) rund 1293 g. Unter der Annahme von Homogenität der Atmosphäre und dass sich dieses Gewicht nicht durch Temperaturveränderungen verändert, soll nun der maximale prozentuale Anteil von Wasserdampf an der Luft für die Temperaturen $T = \{-10\,°\text{C}, -5\,°\text{C}, 0\,°\text{C}, 5\,°\text{C}, 10\,°\text{C}, 15\,°\text{C}, 20\,°\text{C}, 25\,°\text{C}, 30\,°\text{C}, 35\,°\text{C}, 40\,°\text{C}\}$ berechnet werden.

e) Im Durchschnitt ist die Luft zu 73% in Hamburg gesättigt bei einer Durchschnittstemperatur $T = 15\,°\text{C}$. Bestimme den prozentualen Anteil des Wasserdampfes H_2O an der Luft und vergleiche diesen mit dem Kohlenstoffdioxidanteil CO_2. Stelle ein Verhältnis auf. Stelle ebenso ein Verhältnis zwischen Methan CH_4 und CO_2 sowie zwischen CH_4 und H_2O auf.

Aufgabe 5: *Löse alle Teilaufgaben zur C14-Methode.*

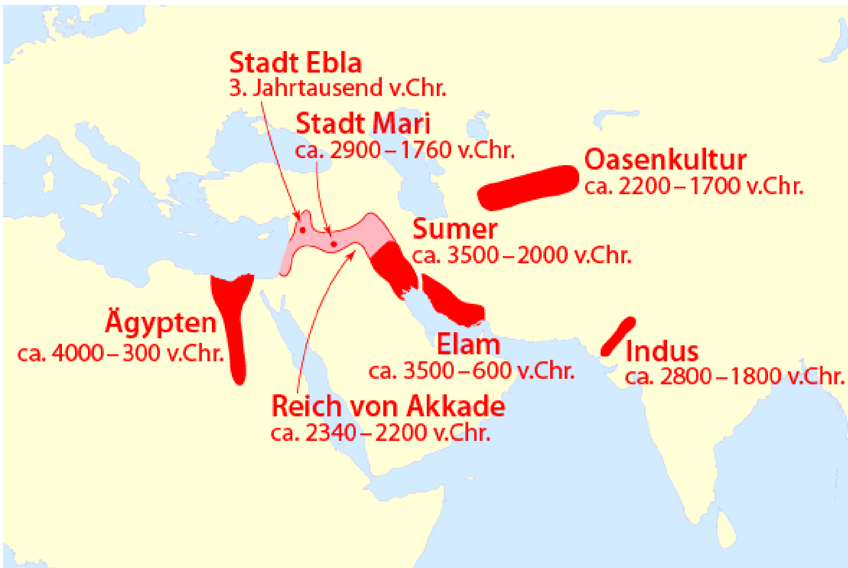
$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{mit: } \lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$$

a) Wenn ein Stickstoffatom N von einem kosmischen Neutron n, die von der Sonne kommen können, getroffen wird, dann kann durch die Reaktion

$$^{14}_{7}N +^{1}_{0} n \longrightarrow^{14}_{6} C +^{1}_{1} p$$

^{14}C-Kohlenstoff entstehen. Dieses Kohlenstoffisotop ist instabil und somit radioaktiv. Über einen β-Zerfall mit einer Halbwertszeit von $\tau = 5730\,\text{a}$ entsteht dadurch wieder das stabile $^{14}_{7}N$. Da durch Photosynthese auch ^{14}C von Pflanzen aufgenommen wird, kann für ein noch lebendes Wesen festgehalten werden, dass der ^{14}C-Anteil konstant ist und erst nach dem Tod abnimmt. Dabei gilt: $\#\left(^{14}C\right) \cdot 10^{12} \approx \#\left(^{12}C\right)$, wobei $\#$ die Funktion für die Anzahl ist. Berechne die Zerfallsrate λ für ^{14}C.

b) Eine Knochenprobe soll analysiert werden. Dabei macht der Gesamtkohlenstoffanteil dieser Probe grade einmal $0{,}32\,\text{g}$ aus. Berechne den Anteil in [kg] von ^{14}C, unter der Annahme, dass der Knochen 2000 Jahre als ist.



c) Durch eine Verdampfung einer anderen kleineren Probe konnte die chemische Zusammensetzung des Knochens in einer Zentrifuge bestimmt werden. Dabei wurde ein Kohlenstoff-14-Anteil von $1{,}90216 \cdot 10^{-13}\,\text{g}$ ermittelt. Wie alt ist der Knochen wirklich?

d) Durch mehrere schriftliche Aufzeichnungen der Sumerer über die Harappa-Kultur (Indus), konnte der Knochen genau datiert werden. Er ist genau 4478 Jahre alt. Wie kann dieser vermeintliche Widerspruch zur C14-Methode erklärt werden? Berechne die Kohlenstoffverhältnisse für dieses Jahr neu. (Es handelt sich hierbei um ein hypothetisches Ereignis!)

Aufgabe 6: *Löse alle Teilaufgaben zur Altersbestimmung der Erde.*

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad\qquad \text{mit: } \lambda = \frac{\ln 2}{\tau}$$

a) Da in den Uran-Actinium-Reihe und der Uran-Radium-Reihe besitzen nur die Uranisotope 235 und 238 eine lange Halbwertszeit, sodass alle anderen Zwischenprodukte kaum Einfluss auf die Uran-Blei-Datierung. Die Endprodukte dieser Zerfallsketten sind gegeben als

$$^{235}U \longrightarrow ^{207}Pb + \text{Rest} \quad ,$$
$$^{238}U \longrightarrow ^{206}Pb + \text{Rest} \quad .$$

Das Verhältnis ^{235}U:^{238}U beträgt $1 : 137,818$. Im Labor wurden die Zerfallsketten untersucht, dabei wurde bei der Uran-Actinium-Reihe (^{235}U) für eine Probe von 10^{15} Atomen insgesamt 1969700 Zerfälle in 2 Jahren gemessen. Bestimme die Halbwertszeit dieses Prozesses.

b) Bei der Uran-Radium-Reihe (^{238}U) für eine Probe von 10^{15} Atomen insgesamt 775630 Zerfälle in 5 Jahren gemessen. Bestimme die Halbwertszeit dieses Prozesses.

c) Bestimme das heutige Verhältnis von ^{206}Pb und ^{207}Pb, aus den Zerfallsketten.

d) Bestimme das Alter der Erde. (Tipp: $A = Be^{\lambda_B t} - B$)

Aufgabe 7: *Löse alle Teilaufgaben zum Wirtschaftswachstum und der Inflation.*

a) In der Bundesrepublik Deutschland wird jedes Jahr das Wirtschaftswachstum und Inflationsrate bestimmt.

Jahr	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007	2006	2005	2004
Inflation	0,9%	1,5%	2,0%	2,1%	1,1%	0,3%	2,6%	2,3%	1,5 %	1,6%	1,6%
Wachstum	1,6%	0,1%	0,4%	3,6%	4,1%	-5,6 %	1,1%	3,3%	3,7%	0,7%	1,2%

Bestimme die Mittelwerte des Wirtschaftswachstums und der Inflationsrate.

b) Stelle die Potenzfunktionen mit den Mittelwerten $\bar{x}_I$ für die Inflationsrate und $\bar{x}_W$ für die Wachstumsrate, wobei die Anzahl der Jahre durch den Parameter n beschrieben wird. Erstelle Wertetabellen und zeichne die Funktionen jeweils in ein Koordinatensystem. (Setze den Amplitudenfaktor für beide Funktionen für diese Aufgabe gleich eins!) Beschreibe das Verhalten der Funktionen.

c) Die Bundesrepublik Deutschland hat im Jahre 2004 ungefähr 80% seiner gesamten Wirtschaftskraft an Schulden angehäuft. Durch die Inflationsrate sinkt der Prozentwert der Schulden. Wie viel Prozent Schulden hat der Staat im Jahre 2014? Wie sieht die Situation im Jahre 2050 aus? (Nimm an, dass keine neuen Schulden gemacht werden und keine Schuldzinsen anfallen.)

d) Wenn die Bundesrepublik Deutschland im Jahr 2004 durch ihre Wirtschaft rund 10% der weltweiten Ressourcen verbrauchen würde, nach wie viel Jahren würde die Bundesrepublik Deutschland alle weltweiten Ressourcen für ein weiteres Wirtschaftswachstum benötigen? (Beachte die Annahme, dass die geförderte Ressourcenmenge konstant bleibt und dass das Wirtschaftswachstum in diesem Beispiel direkt mit dem Ressourcenverbrauch korreliert ist.)

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.52) Lösungen zu Exponentialfunktionen.

6.15 Proportionalitäten

Oftmals ist die genaue *Funktionsgleichung* unbekannt, aber dennoch können die Eigenschaften meistens ermittelt werden. Im Allgemeinen existieren zwei dominante Möglichkeiten - die *Proportionalität* und die *Antiproportionalität*. Wenn eine Größe *proportional* zu einer anderen Größe ist, dann handelt es sich je nach *Potenz* n der Abhängigkeit um eine *Funktion* der n-ten *Ordnung*. Sei zum Beispiel die Größe x *proportional* zu t, dann wird dies geschrieben als:

$$x \propto t \ . \tag{6.56}$$

Aus dieser *Proportionalität* kann dann die *Funktionsgleichung* bestimmt werden. Hierfür werden je nach *Potenz* insgesamt $(n+1)$ *Wertepaare* benötigt, welche dann in einem *Gleichungssystem* aus der allgemeinen *Funktionsgleichungsform* eingesetzt und so die *Parameter* bestimmt werden. Bei dem Beispiel aus *Gleichung* (6.56) würde dies mit den *Wertepaaren* $(1,2)$ und $(4,8)$ wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} x \propto t \ &\Rightarrow \ x(t) = at \\ &\Rightarrow \ I.\ 2 = a \cdot 1 \ \wedge \ II.\ 8 = a \cdot 4 \ \Rightarrow \ a = 2 \ , \end{aligned} \tag{6.57}$$

wobei die Lösung über *Äquivalenzumformung* werden kann.
Des Weiteren gibt es noch die *Umkehrung* der *Proportionalität* - die *Antiproportionalität*. Sei zum Beispiel die Größe F *antiproportional* zur Größe r, dann ist F aber *proportional* zum *Kehrwert* von r,

$$F \propto \frac{1}{r} \ , \tag{6.58}$$

sodass die gesuchte Funktionsgleichung eine Hyperbel n-ter Potenz ist.
In den Naturwissenschaften sind in einer *Gleichung* oftmals mehrere *Proportionalitäten* vorzufinden, diese können zusammengefasst werden:

$$F \propto \frac{1}{r} \ \wedge \ F \propto q \ \wedge \ F \propto Q \ \wedge \ \Rightarrow F \propto \frac{qQ}{r} \ . \tag{6.59}$$

6.15.1 Übungsaufgaben zu Proportionalitäten.

Aufgabe 1: *Kreuze an um was für eine Funktion es sich handelt.*

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	6	9	12

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
$f(x)$	3	4	5	6

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	3	6	7	9
$f(x)$	$4,5$	9	$10,5$	$13,5$

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	5	4	2	1
$f(x)$	11	8	2	-1

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	4	6	8	10
$f(x)$	2	3	4	5

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	1	4	6	9
$f(x)$	4	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	5	9	11	17
$f(x)$	11	19	23	35

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	1	2	8	24
$f(x)$	240	120	30	10

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	-4	-2	0	4
$f(x)$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	4	6	10	16
$f(x)$	1	$1,5$	$2,5$	4

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	5	15	45	90
$f(x)$	60	30	10	5

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	6	8	10	12
$f(x)$	3	7	9	13

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	2	7	11	19
$f(x)$	1	$3,5$	$5,5$	$9,5$

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	0	1	12	15
$f(x)$	$0,5$	1	6	$7,5$

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

x	12	72	144	240
$f(x)$	960	160	80	48

- ☐ proportional
- ☐ antiproportional
- ☐ beliebig

Aufgabe 2: *Bestimme ob die Tabelle eine Proportionalität, eine Antiproportionalität oder keins von beidem zeigt.*

a)

x	y
1	3
3	9
6	18
8	24
9	27
10	30
11	33

b)

x	y
3	10
5	12
8	15
11	20
16	25
19	28
21	30

c)

x	y
1	80
2	40
4	20
5	16
8	10
10	8
16	5

d)

x	y
3	14
5	18
8	24
11	30
18	44
32	69
56	117

e)

x	y
0,7	2,268
1,9	6,156
3,5	11,34
5,1	16,524
6,3	20,412
8	25,92
11	35,64

f)

x	y
11	-21,23
14	-27,02
23	-44,39
27	-52,11
29	-55,97
34	-65,62
39	-75,27

g)

x	y
0,0625	640
0,25	200
0,5	100
1	50
2	25
4	12,5
10	4

h)

x	y
4	6250
8	3125
16	1562,5
25	1000
32	781,25
50	500
80	312,5

i)

x	y
8	4
12	6
15	7,5
17	4,25
22	5,5
29	7,25
43	10,75

j)

x	y
25	2100
40	1350
50	1100
80	725
100	600
125	500
250	300

k)

x	y
2,3	0,069
6,3	0,189
7,5	0,225
8,7	0,261
9,5	0,285
27	0,81
39	1,17

l)

x	y
4	12,5
5	10
8	6,25
11	$4,\overline{54}$
15	$3,\overline{3}$
20	2,5
30	$1,\overline{6}$

Aufgabe 3: *Zeichne die Wertepaare aus Aufgabe 2 in ein geeignetes Koordinatensystem.* (Keine Lösung!)

Aufgabe 4: *Bestimme die Funktionsgleichung der proportionalen Tabellen aus Aufgabe 2.*

Aufgabe 5: *Bestimme die Funktionsgleichung der antiproportionalen Tabellen aus Aufgabe 2.*

Aufgabe 6: *Bestimme aus der Proportionalität die gesuchte Größe ohne dabei die Proportionalitätskonstante zu bestimmen. Stelle eine Verhältnisgleichung auf.*

a) $F \propto a$ mit: $F_1 = 75, F_2 = 15$ und $a_2 = 6$ gesucht: $a_1 =$

b) $F \propto D$ mit: $F_1 = 100, F_2 = 40$ und $D_1 = 1200$ gesucht: $D_2 =$

c) $D \propto \frac{1}{s}$ mit: $D_1 = 750, D_2 = 125$ und $s_1 = 30$ gesucht: $s_2 =$

d) $m \propto \frac{1}{a}$ mit: $m_1 = 70, m_2 = 427$ und $a_2 = 11$ gesucht: $a_1 =$

f) $l \propto A$ mit: $A_1 = 864, A_2 = 96$ und $l_1 = 45$ gesucht: $l_2 =$

g) $A \propto \frac{1}{R}$ mit: $R_1 = 7756, R_2 = 1428$ und $A_1 = 34$ gesucht: $A_2 =$

h) $E \propto \frac{1}{r}$ mit: $r_1 = 6152, r_2 = 5416$ und $E_2 = 1453$ gesucht: $E_1 =$

Aufgabe 7: *Fasse die Proportionalitäten zu einem einzigen Proportionalitätsgesetz zusammen*

a) $H \propto D \;;\; H \propto U$

b) $p \propto A \;;\; p \propto m \;;\; p \propto c$

c) $a \propto \frac{1}{x} \;;\; a \propto y$

d) $k \propto \frac{1}{T} \;;\; k \propto f \;;\; k \propto z$

e) $E \propto \frac{1}{r} \;;\; E \propto Q$

f) $P \propto \frac{1}{d} \;;\; P \propto \frac{1}{N} \;;\; P \propto T$

g) $L \propto \frac{1}{N} \;;\; L \propto \frac{1}{d} \;;\; L \propto n \;;\; L \propto U$

h) $W \propto \frac{1}{g} \;;\; W \propto I \;;\; W \propto \frac{1}{H} \;;\; W \propto \frac{1}{T} \;;\; W \propto C$

i) $F \propto \frac{1}{r} \;;\; F \propto m \;;\; F \propto v^2$

j) $G \propto \frac{1}{r^2} \;;\; G \propto \ln m \;;\; G \propto e^{\lambda} \;;\; G \propto \sqrt{z} \;;\; G \propto y^3$

Aufgabe 8: *Gegeben sind die folgenden proportionalen Zuordnungen. Fülle die Tabellen vollständig aus.*

a) A	B
8	72
12	

b) P	R
11	121
8	

c) P	R
35	2800
82	

Aufgabe 9: *Fünf Waldarbeiter durchsuchen ein Waldgebiet von* $1450m^2$ *in acht Stunden. Berechne wie lange neun Waldarbeiter für dieses Waldgebiet bräuchten.*

Aufgabe 10: *Ein Handwerker stellte für seine vierstündige Arbeit eine Rechnung in Höhe von* 316 €. *Berechne wie viel Geld der Handwerker für sieben Stunden dieser Arbeit verlangt hätte.*

Aufgabe 11: *Sechs Waldarbeiter durchsuchen ein Waldgebiet von* $1920m^2$ *in acht Stunden. Berechne wie lange zehn Waldarbeiter für ein Waldgebiet von* $5600m^2$ *Größe bräuchten.*

Aufgabe 12: *Neun Joghurts werden in* 54 *s hergestellt. Berechne wie lange die Produktion von* 50 *Joghurts dauern würde.*

Aufgabe 13: 500 *Joghurts werden von* 8 *Maschinen in* 24 *min hergestellt. Berechne wie lange die Produktion von* 500 *Joghurts mit* 3 *Maschinen dauern würde.*

Aufgabe 14: *Ein Bagger hat nach* 30 *min eine Strecke von* 12 *km zurückgelegt. Berechne wie viel Kilometer der Bagger nach* 2 *h zurückgelegt hat, wenn dieser seine Geschwindigkeit hält. Zeichne den Graphen dieser Zuordnung in ein geeignetes Koordinatensystem.*

Aufgabe 15: *In jeder von vier Tüten befinden sich jeweils* 24 *Bonbons. Berechne wie viele Bonbons sich in jeder Tüte befinden müssten, wenn diese gerecht auf* 16 *kleinere Tüten verteilt werden würden. Zeichne den Graphen dieser Zuordnung in ein geeignetes Koordinatensystem.*

Aufgabe 16: *Vier Traktoren pflügen einen Acker in drei Stunden. Berechne wie lange fünf Traktoren für diese Arbeit brauchen würden.*

Aufgabe 17: *Gegeben sind die folgenden antiproportionalen Zuordnungen. Fülle die Tabellen vollständig aus.*

a) A	B
2	60
1	
5	

b) P	R
36	15
20	

c) P	R
120	12
90	

d) A	B
4	72
9	

e) P	R
9	45
5	

f) P	R
12	63
7	

Aufgabe 18: *Ein Kinder im Alter von drei Jahren wiegt* $14kg$ *und wurde in diesem Jahr um* $2kg$ *schwerer. Berechne das Gewicht dieses Menschens, wenn dieser* 20 *Jahre alt ist.*

Aufgabe 19: *Eine Pumpe fördert in vier Stunden genau* 182 *Liter Wasser. Berechne, wie viel Liter Wasser die Pumpe in sieben Stunden fördert.*

Aufgabe 20: *Die Lebensmittelvorräte einer Gruppe mit fünf Personen reichen für zwölf Tage. Berechne wie lange die Lebensmittel reichen, wenn die Gruppe aus sechs Personen bestehen würde.*

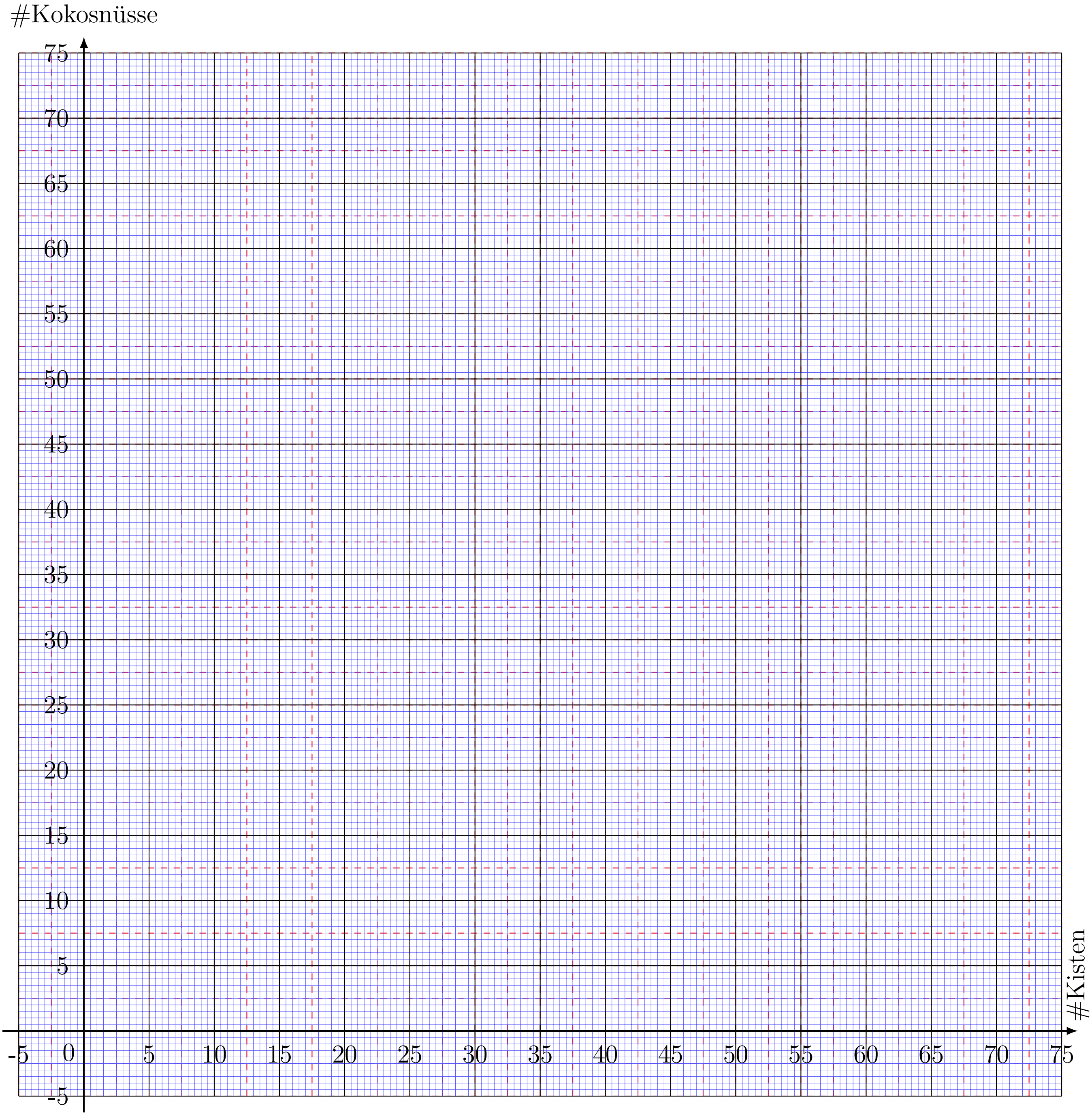
Aufgabe 21: *Drei Schüler benötigen für ihren Schulweg zusammen* $15min$*. Berechne wie viel Zeit nur zwei dieser Schüler zur Schule benötigen.*

Aufgabe 22: *Vier Arbeiter verdienen in acht Tagen* 1680 €*. Berechne wie viel Lohn der Arbeitgeber aus zahlen muss, wenn dieser fünf Arbeiter fünf Tage lang beschäftigt?*

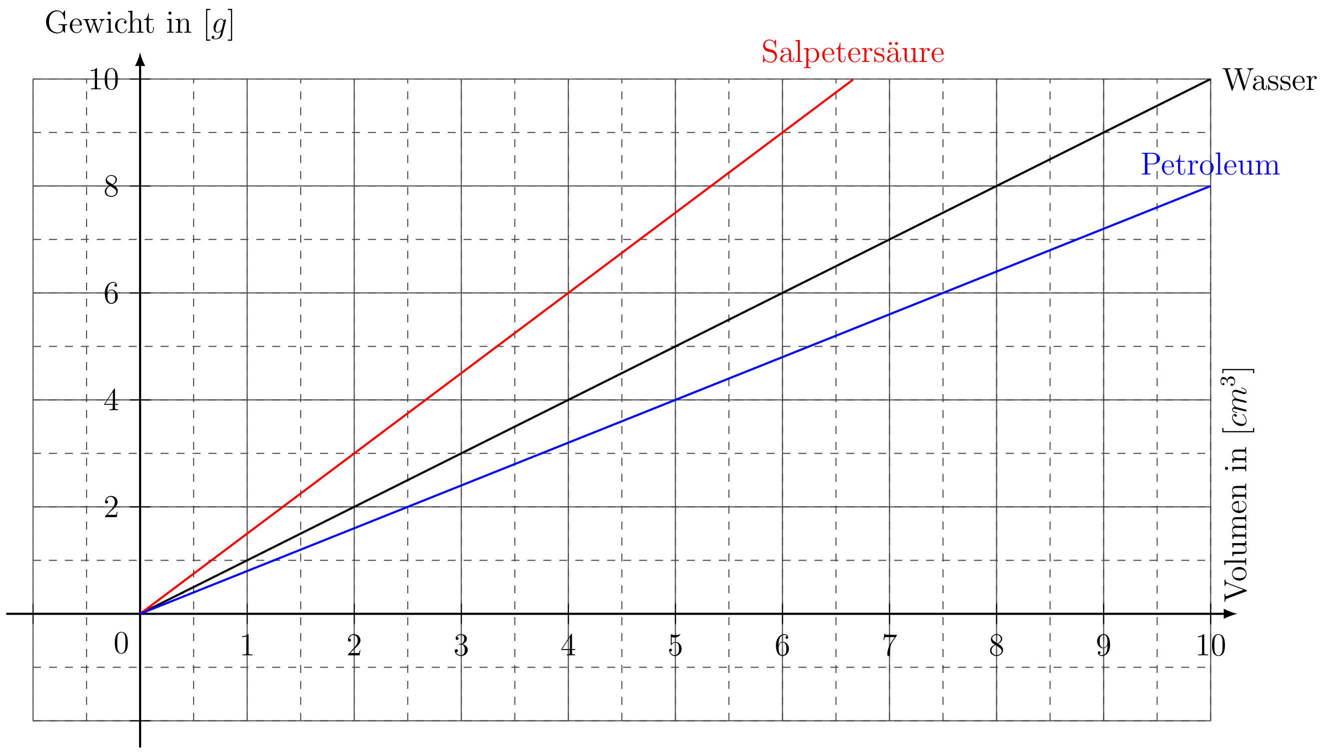
Aufgabe 23: *Sechs Forstarbeiter bepflanzen ein Waldstück mit* 48 *Bäumen in* $2,4$ *Stunden. Berechne wie lange acht Forstarbeiter für* 96 *Bäume benötigen.*

Aufgabe 24: *In sechs Kisten befinden sich jeweils* 12 *Kokosnüsse. Berechne anhand der Wertetabelle wie viele Kokosnüsse in die angegebene Anzahl von Kisten gepackt werden müssten, wenn alle sechs Kisten neu verpackt werden müssen. Trage die Wertepaare in der Koordinatensystem ein und verbinde die Punkte sinnvoll (ohne Lineal).*

1	2	3	4	6	8	12	24	36	72
				12					



Aufgabe 25: *Bearbeite alle Teilaufgaben.*



$a)$ Wie viel Gramm wiegen $4cm^3$ Wasser, Petroleum beziehungsweise Salpetersäure?

$b)$ Wie viel Kubikzentimeter entsprechen $5g$ Wasser, Petroleum beziehungsweise Salpetersäure?

$c)$ Wie viel Gramm wiegen $2,5cm^3$ Wasser, Petroleum beziehungsweise Salpetersäure?

$d)$ Berechne wie viel Gramm $1cm^3$ Wasser, Petroleum beziehungsweise Salpetersäure wiegen.

$e)$ Bestimme zu jedem gezeigten Graphen mindestens vier Punkte.

$f)$ Dividiere bei den jeweiligen Wertepaaren den Variablenwert durch den Funktionswert und beschreibe die Auffälligkeiten.

Aufgabe 26: *In den Tabellen wurde verschiedenen Gewichten von Lebensmitteln ein Preis proportional zugeordnet. Berechne mindestens zu jedem Lebensmittel* 4 *weitere Punkte und zeichne anschließend die Punkte in ein gemeinsames Koordinatensystem ein (bis* $15kg$*). Verbinde die zusammengehörigen Punkte, sodass eine Gerade als Graph der linearen Funktion entsteht.*

Kirschengewicht	$2kg$				
Preis	12 €				

Käsegewicht	$0,5kg$				
Preis	5 €				

Salamigewicht	$0,2kg$				
Preis	4 €				

Aufgabe 27: *Beantworte die nachfolgenden Fragen durch Ablesen der Graphen aus Aufgabe* 26*.*

a) Wie viel Kilogramm Käse können von 70 € gekauft werden?

b) Wie viel Kilogramm Salami könnten statt $5kg$ Käse gekauft werden?

c) Wie viel würden $12kg$ Kirschen kosten?

d) Wie viel Kilogramm Käse könnten statt $9kg$ Kirschen gekauft werden?

e) Wie viel Kilogramm Kirschen können von 33 € gekauft werden?

f) Wie viel würden $4,5kg$ Salami kosten?

g) Wie viel Kilogramm Kirschen könnten statt $3kg$ Salami gekauft werden?

h) Wie viel Kilogramm Käse können von 55 € gekauft werden?

Aufgabe 28: *Berechne den Preis von* $12kg$ *Kirschen, wenn* $3kg$ *Kirschen* 9 € *kosten.*

Aufgabe 29: *Eine Pumpe förderte in drei Stunden genau* $219l$ *Wasser. Berechne wie viel Liter Wasser nach* 7 *Stunden gefördert wurden.*

Aufgabe 30: *Ein acht minütiges Telefongespräch ins Ausland kostete* 6,40 €. *Berechne wie teuer ein* 15*min Gespräche wäre.*

Aufgabe 31: *Fülle die Tabellen vollständig aus. Benutze den Dreisatz für proportionale Zuordnungen.*

	a) *A*	*B*	
	40	480	
	75		

	b) *P*	*R*	
	25	625	
	84		

	c) *P*	*R*	
	24	1632	
	73		

	d) *A*	*B*	
		160	
$:64$			
			$\cdot 33$

	e) *P*	*R*	
	0,5	140	
			$\cdot 2,3$

	f) *P*	*R*	
	15	3870	
			$\cdot 4,4$

Aufgabe 32: *Berechne den Preis von* 20 *Äpfeln, wenn* 6 *Äpfel* 2 € *kosten.*

Aufgabe 33: *Berechne wie viel Liter Benzin ein Auto im Durchschnitt auf einer Strecke von* 750*km verbraucht, wenn dieses Auto einen durchschnittlichen Verbrauch von* 5,5*l Benzin pro* 100*km hat.*

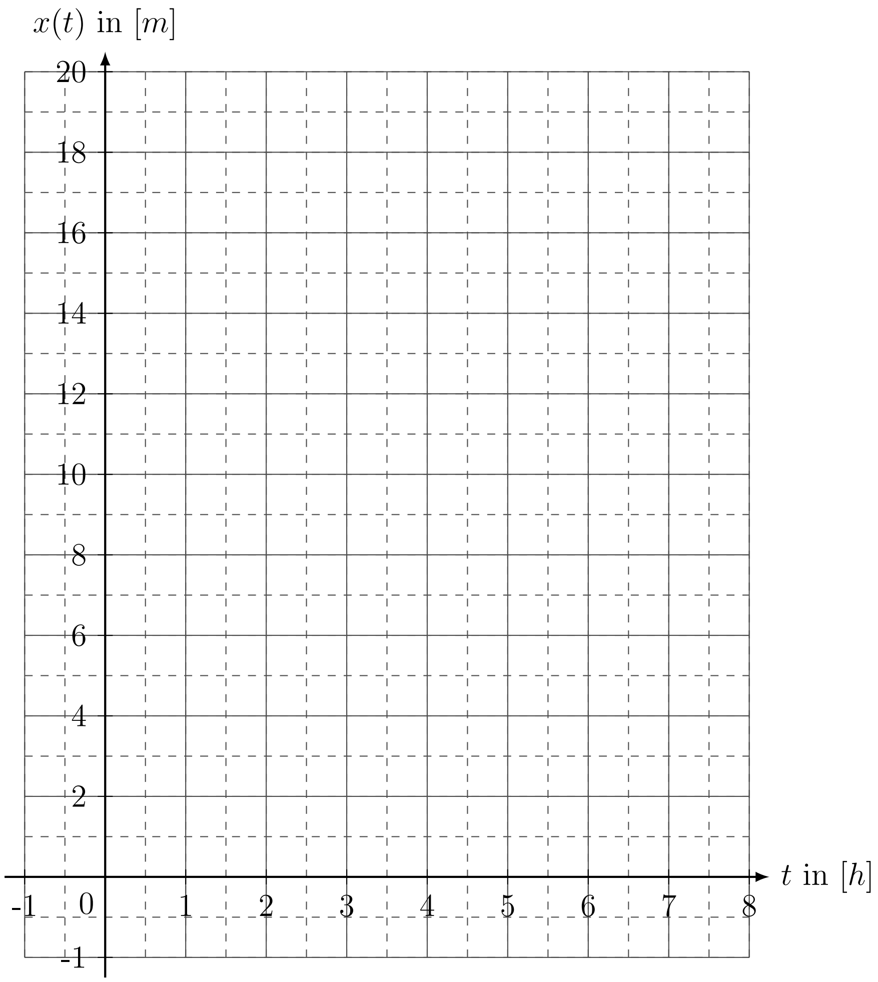
Aufgabe 34: *Eine Pumpe fördert in zwei Stunden genau* 147*l Wasser. Berechne wie viel Wasser nach* 17 *Stunden gefördert wurden.*

Aufgabe 35: *Eine Weinbeinschnecke legt in einer Stunde eine Strecke von* $3m$ *zurück. Berechne wie viel Strecke die Schnecke nach der, in der Tabelle gegeben, Zeit zurückgelegt hat und trage dies in die Tabelle ein. Zeichne die Wertepaare in das gegebene Koordinatensystem unter der Aufgabe* 36 *ein.*

t	$0,5h$	$1h$	$1,5h$	$2h$	$3h$	$6,5h$	$8h$
$x(t)$		$3m$					

Aufgabe 36: *Eine andere Schnecke legt in drei Stunde eine Strecke von* $7,5m$ *zurück. Berechne wie viel Strecke die Schnecke nach der, in der Tabelle gegeben, Zeit zurückgelegt hat und trage dies in die Tabelle ein. Zeichne die Wertepaare in das gegebene Koordinatensystem ein.*

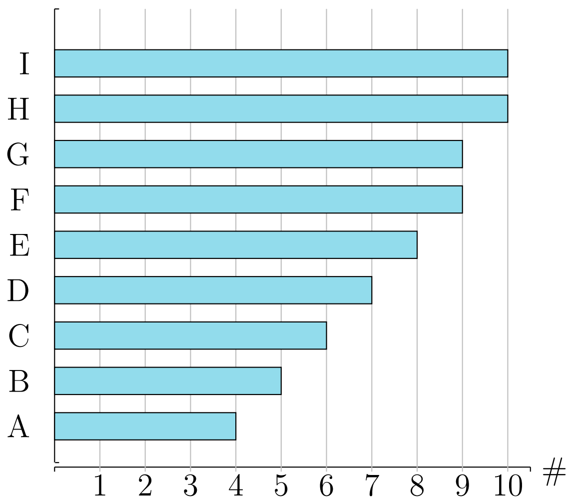
t	$0,5h$	$1h$	$1,5h$	$2h$	$3h$	$6h$	$7h$
$x(t)$					$7,5m$		

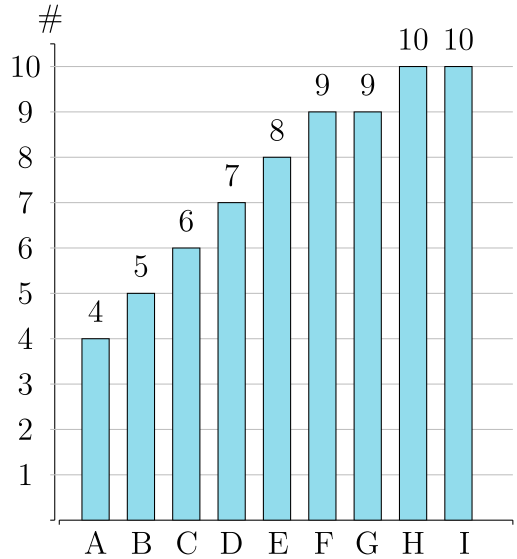


Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.53) Lösungen zu Proportionalitäten.

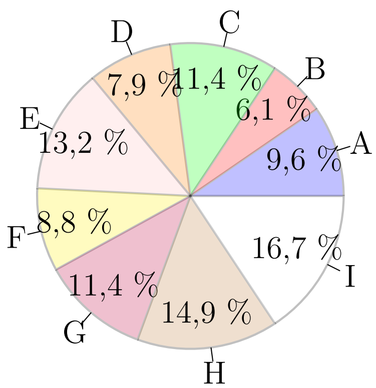
6.16 Darstellungen durch Diagramme

Neben der *Darstellung* von *Wertepaaren* durch Funktionen existieren noch weitere Darstellungen. So werden absolute *Häufigkeiten* (*Anzahl*) # oftmals mit *Säulen*- oder *Balkendiagrammen* dargestellt, um Unterschiede schneller visuell erfassen zu können. So kann schnell und deutlich selbst ohne Zahlen abgelesen werden welcher Fall die maximale absolute *Häufigkeit* # besitzt. Ein *Säulendiagramm* mit einer *äquidistanten* (gleiche *Abstände*) Einteilung auf der *Abszisse* wird auch *Histogramm* genannt.

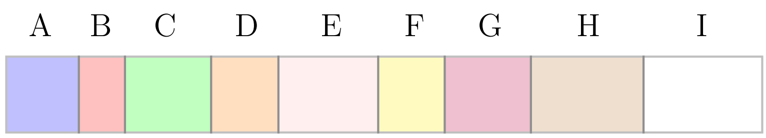




Oftmals ist aber auch eine *relative Häufigkeit* (in %) interessanter. Aus diesem Grund werden *prozentuale Diagramme* benutzt. Diese *Diagrammtypen* sind meistens *Kreisdiagramme*. Selten kommt es auch vor, dass auf einer bestimmten anderen *Fläche* die *relative Verteilung* angezeigt wird - so wird in der Sitzverteilung in einem politischem Gremium ein *Halbring* oder ein *Rechteck* verwendet. Dabei muss beachtet werden, dass $3,6°$ genau 1% bei einem *Kreis* entsprechen.



Bei einer *Darstellung* mit einem *Rechteck* muss die *Länge prozentual* aufgeteilt werden.



6.16.1 Übungsaufgaben zu Diagrammen

Aufgabe 1: *Erstelle ein Kreis-, Balken- und Säulendiagramm sowie eine prozentuale Verteilung in einem Rechteck mit den Maßen $a = 1cm$ und $b = 10cm$ für die Sitzplätze und ein Säulendiagramm für die Veränderungen.*

Partei	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Sitzplätze	𝍸𝍸𝍷	𝍸𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸	𝍸𝍸	𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷
Veränderungen	+2	-4	+3	+1	0	-3	+2	+5	-1

Aufgabe 2: *Bei einer Umfrage der siebten Klassen wurden lediglich die Meldungen in einer Tabelle dokumentiert. Erstelle ein Kreis-, Balken- und Säulendiagramm sowie eine prozentuale Verteilung in einem Rechteck mit den Maßen $a = 1cm$ und $b = 10cm$ für jede Frage.*

Klasse	7a	7b	7c	7d	7e
Frage 1	13	11	14	19	9
Frage 2	8	5	5	7	6
Frage 3	17	13	12	15	13
Frage 4	3	7	4	2	6
Frage 5	22	24	25	24	27
Frage 6	5	2	3	3	4

Aufgabe 3: *Bestimme die absoluten Häufigkeiten in den Tabellen und erstelle anschließend ein Histogramm zu den Tabellen. Gib die Spannweite, den Maximal- und Minimalwert an.*

a)

29	31	27	28	23	22	21	24	29	21	27	22
22	24	23	23	29	23	25	24	32	21	22	26
22	21	28	22	20	21	29	29	25	32	24	32
22	24	23	28	20	25	21	24	29	31	21	21
22	25	31	24	22	21	29	31	24	25	26	26
21	26	31	31	28	24	26	28	22	21	25	29
32	29	27	30	24	21	32	21	29	24	29	23
24	30	24	25	23	24	22	31	21	29	24	30
29	20	32	22	27	21	29	21	22	30	27	32
30	31	32	21	26	28	32	29	23	21	32	25
26	25	31	29	22	21	27	30	28	29	29	28
24	24	26	20	22	31	23	30	31	29	20	31
28	22	26	31	23	24	29	26	29	23	25	31
20	28	27	29	29	29	28	25	26	30	26	25
21	32	29	32	26	24	28	25	21	27	21	27
29	28	20	31	25	31	26	25	30	28	30	24
27	21	23	30	30	25	29	23	30	21	23	21

b)

1455	1457	1452	1457	1455	1455	1455	1458	1453	1456	1451	1453
1454	1452	1453	1453	1453	1454	1460	1455	1457	1453	1459	1451
1452	1459	1452	1456	1453	1455	1460	1457	1457	1459	1452	1454
1456	1457	1451	1454	1457	1458	1453	1450	1453	1451	1454	1456
1458	1450	1455	1458	1455	1457	1455	1451	1455	1452	1455	1455
1451	1459	1452	1450	1453	1460	1452	1458	1455	1457	1456	1453
1453	1458	1455	1453	1451	1454	1456	1454	1459	1456	1454	1456
1455	1452	1450	1457	1454	1457	1452	1451	1456	1455	1454	1452
1451	1459	1450	1459	1454	1450	1454	1460	1460	1455	1451	1455
1456	1454	1454	1450	1456	1451	1451	1452	1457	1460	1453	1458
1454	1455	1459	1455	1459	1459	1453	1450	1457	1454	1451	1453
1460	1455	1456	1451	1457	1457	1460	1450	1460	1452	1459	1452
1452	1453	1452	1460	1458	1450	1455	1457	1454	1454	1454	1454
1450	1458	1460	1457	1458	1456	1455	1451	1453	1454	1459	1453
1450	1452	1460	1456	1460	1454	1453	1457	1451	1460	1454	1456
1455	1456	1456	1456	1456	1453	1458	1458	1455	1453	1456	1455
1450	1454	1457	1455	1455	1460	1454	1459	1454	1455	1457	1455

c)

97	99	101	99	101	99	97	104	107	98	99	99
97	99	98	101	101	97	103	97	96	109	97	103
96	101	100	99	98	97	99	100	101	101	99	103
101	98	97	101	100	97	104	106	99	98	104	98
98	100	97	102	101	99	99	103	104	104	111	98
100	98	100	98	97	102	101	106	106	108	96	103
98	97	98	100	97	98	103	99	100	112	100	112
100	99	97	99	103	98	98	97	107	110	96	100
100	100	98	101	100	98	102	98	106	103	97	99
98	100	101	100	103	99	100	103	107	104	96	97
99	101	99	101	99	100	98	97	102	101	97	100
96	97	98	99	103	101	104	101	97	110	100	101
97	99	96	99	97	99	100	105	107	99	100	96
96	100	99	101	97	98	97	99	104	105	100	101
99	100	98	101	103	100	100	105	108	107	99	105
99	96	101	102	98	100	102	105	105	101	100	100
97	98	101	101	100	101	102	100	100	102	97	99

d)

287	289	291	288	294	292	293	298	293	298	287	288
290	288	288	294	289	292	292	299	303	311	292	291
290	290	293	287	288	290	290	294	296	290	296	292
291	289	288	291	291	290	302	287	293	288	295	298
290	290	291	291	288	294	294	293	299	298	293	293
290	291	288	289	288	287	295	299	291	308	303	292
289	288	289	289	295	293	294	288	298	303	293	288
290	291	291	290	288	290	293	296	293	289	294	294
287	290	291	288	290	289	295	292	297	312	292	289
289	289	288	292	288	289	288	290	292	294	291	291
289	288	289	291	289	293	291	290	301	296	295	288
291	293	288	292	294	294	293	292	302	294	292	290
289	289	293	290	287	292	292	287	304	307	288	296
288	293	293	287	292	288	293	299	291	287	289	295
291	291	287	289	295	289	296	288	291	293	290	288
289	289	292	291	292	295	291	295	292	309	311	299
289	292	290	293	287	291	293	290	302	307	298	309

Aufgabe 4: *Erstelle aus den Strichlisten Säulendiagramme.*

a)

Name	A	B	C	D	E
Anzahl	𝍸 𝍸	𝍸 ||	|||	𝍸 |	||||

b)

Name	A	B	C	D	E	F
Anzahl	𝍸 ||	𝍸 𝍸	||||	𝍸 |||	𝍸	𝍸 𝍸 |

c)

Name	A	B	C	D	E	F
Anzahl	𝍸 𝍸 ||||	𝍸 𝍸 |||	𝍸 ||	|||	𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 ||||

d)

Name	A	B	C	D	E	F
Anzahl	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 ||||

e)

Name	A	B	C	D	E	F	G
Anzahl	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||

f)

Name	A	B	C	D	E	F	G
Anzahl	|||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	𝍸 ||||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 ||||	𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸

g)

Name	A	B	C	D	E	F	G	H
Anzahl	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||

h)

Name	A	B	C	D	E	F	G	H
Anzahl	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 ||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||||

i)

Name	A	B	C	D	E	F	G	H
Anzahl	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 ||	𝍸 𝍸 |	𝍸 |||	||||

Aufgabe 5: *Erstelle aus den Strichlisten Balkendiagramme.*

a)

Name	A	B	C	D	E
Anzahl	𝍸𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸	𝍸𝍷	𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍷𝍷

b)

Name	A	B	C	D	E	F
Anzahl	𝍸𝍸𝍸𝍷	𝍸𝍸	𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸	𝍸𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷

c)

Name	A	B	C	D	E	F
Anzahl	𝍷𝍷𝍷	𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍷𝍷	𝍸𝍸

d)

Name	A	B	C	D	E	F
Anzahl	𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍸	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍷𝍷𝍷

e)

Name	A	B	C	D	E	F	G
Anzahl	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍷	𝍸	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸	𝍸𝍸𝍸	𝍸𝍸𝍸 𝍷𝍷

f)

Name	A	B	C	D	E	F	G
Anzahl	𝍸𝍸 𝍸𝍸 𝍸	𝍸𝍸 𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸 𝍸𝍸 𝍸𝍷	𝍸𝍸	𝍸𝍸 𝍷𝍷𝍷	𝍸

g)

Name	A	B	C	D	E	F	G	H
Anzahl	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍷𝍷

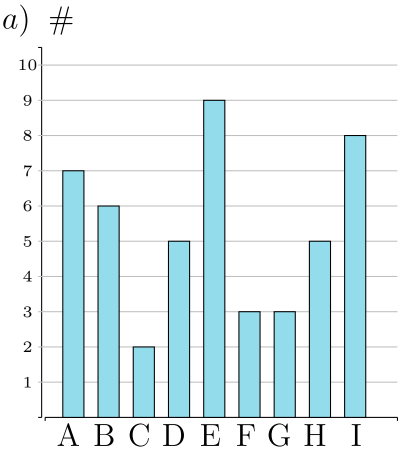
h)

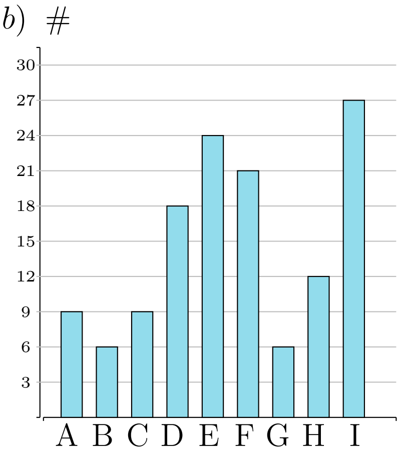
Name	A	B	C	D	E	F	G	H
Anzahl	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍷𝍷𝍷	𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍷𝍷	𝍸	𝍸𝍸	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍷𝍷	𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍷𝍷

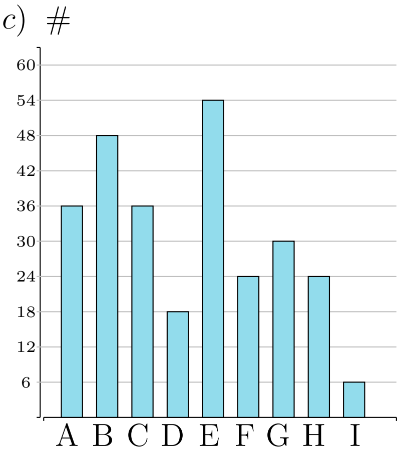
i)

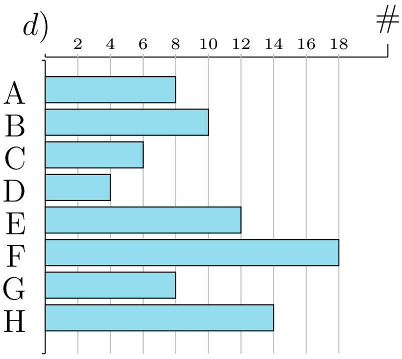
Name	A	B	C	D	E	F	G	H
Anzahl	𝍸𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍷𝍷	𝍸𝍸 𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸 𝍸𝍸 𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍷	𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍷𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸 𝍸𝍷𝍷𝍷	𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸𝍸𝍸 𝍸𝍸𝍸𝍷	𝍸𝍸 𝍸𝍷𝍷

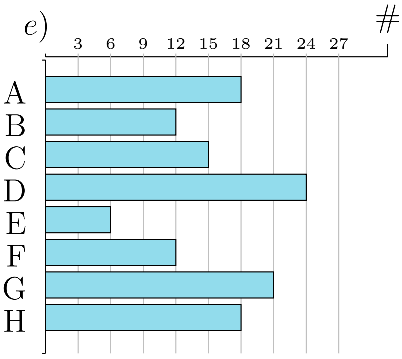
Aufgabe 6: *Schreibe auf welches Ereignis am häufigsten und welches am seltensten im Diagramm dargestellt ist. Gib die Häufigkeit aller Ereignisse an.*

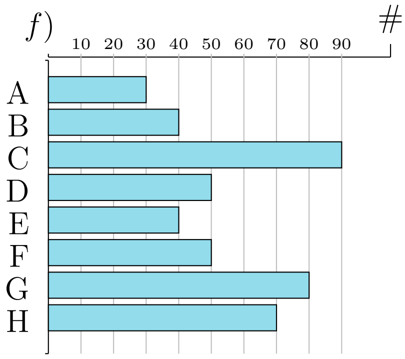
a)


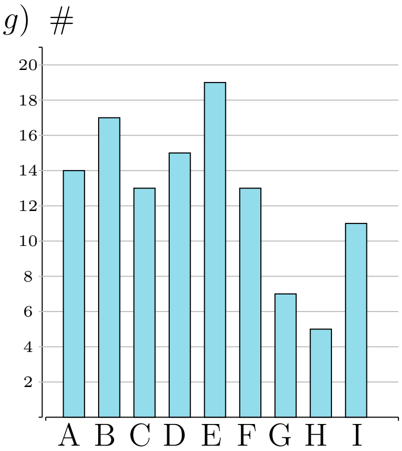
b)


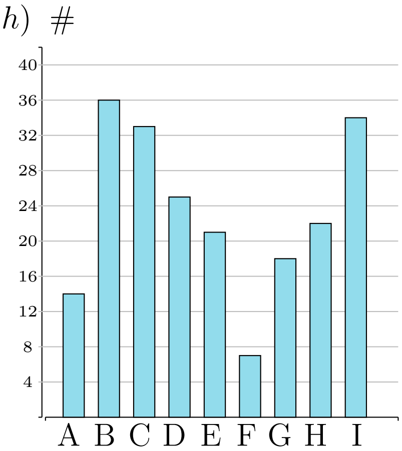
c)


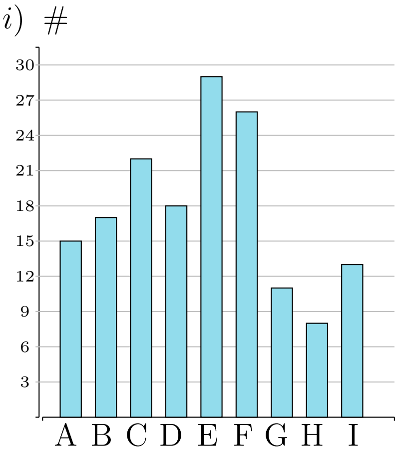
d)


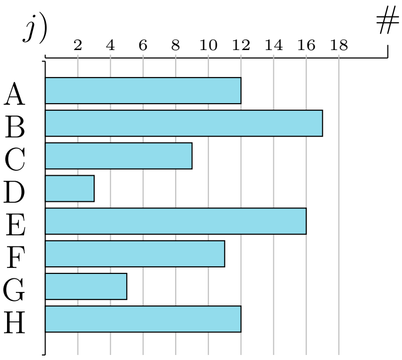
e)


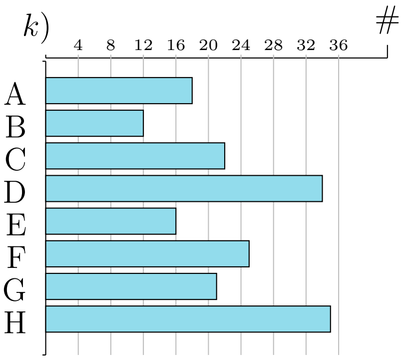
f)


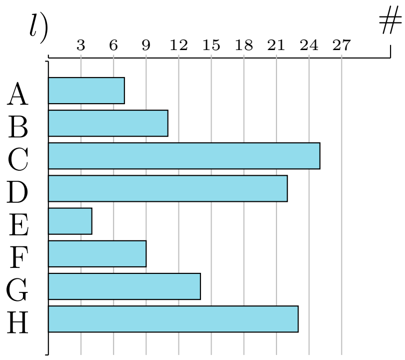
g)


h)


i)


j)


k)


l)


Aufgabe 7: *Zeichne ein geeignetes Säulendiagramm zu den Tabellen.* (Keine Lösung!)

a)

A	B	C	D	E	F
205	415	758	667	456	368

b)

A	B	C	D	E	F
3466	6856	5748	4788	7457	2944

c)

A	B	C	D	E	F
14560	53489	32527	43689	23567	84563

d)

A	B	C	D	E	F
457745	604463	78854	43438	123233	378605

Aufgabe 8: *Zeichne ein geeignetes Balkendiagramm zu den Tabellen.* (Keine Lösung!)

a)

A	B	C	D	E	F
190	523	483	378	249	648

b)

A	B	C	D	E	F
4581	5130	2089	3251	6480	4821

c)

A	B	C	D	E	F
64185	51101	92085	38415	48102	75025

d)

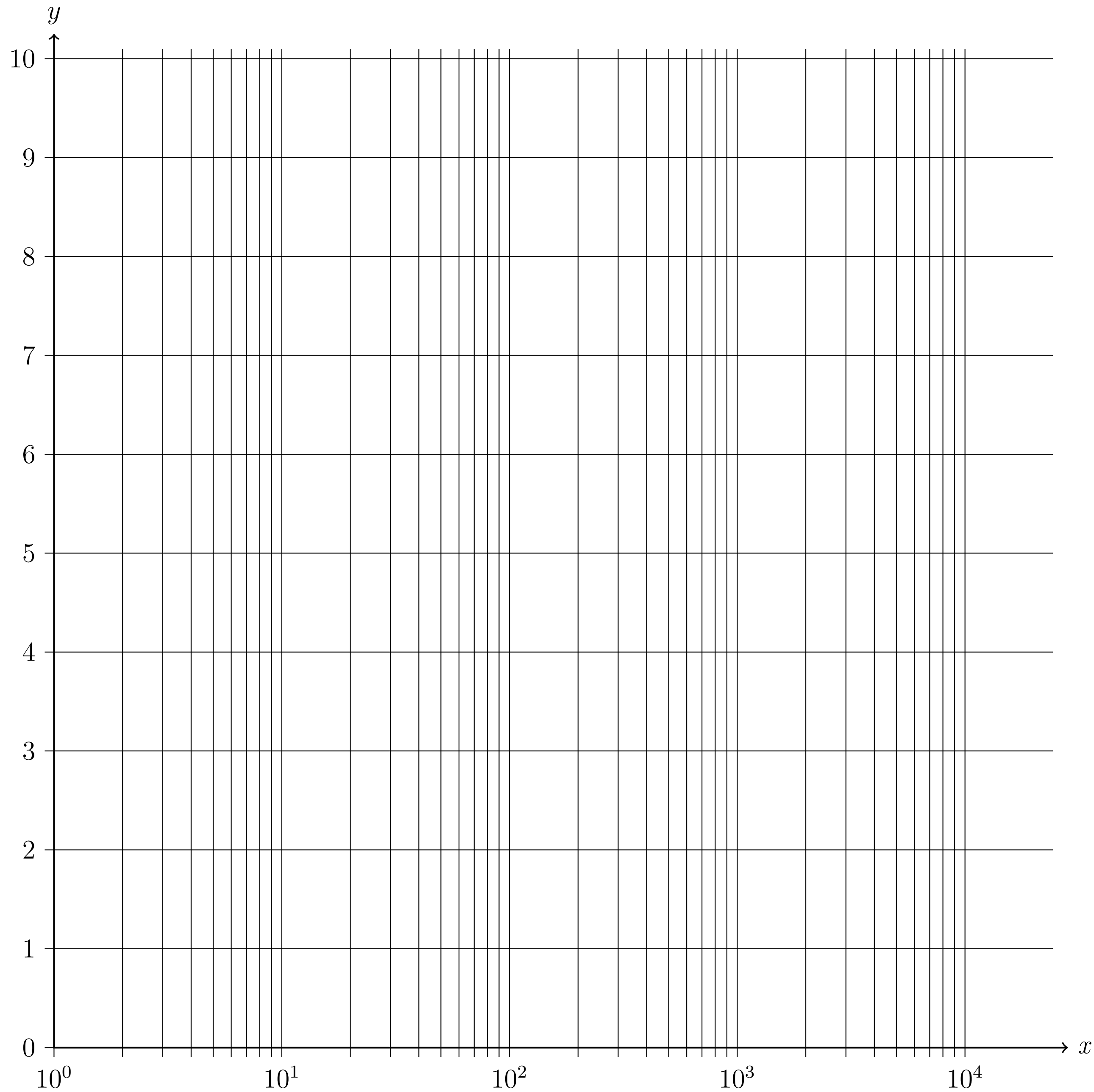
A	B	C	D	E	F
798120	566901	369431	454812	276156	951365

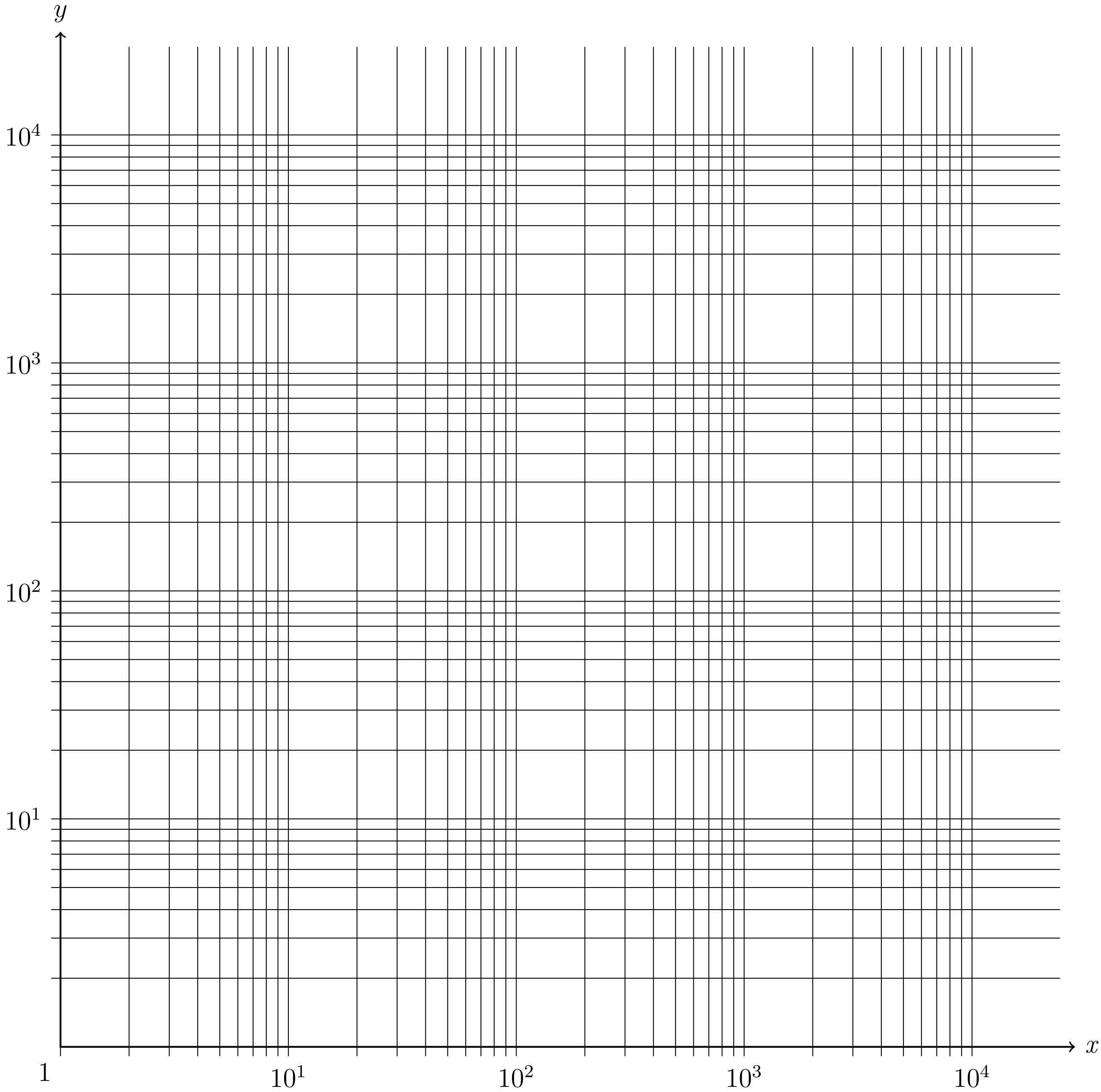
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.54) Lösungen zu Diagrammen.

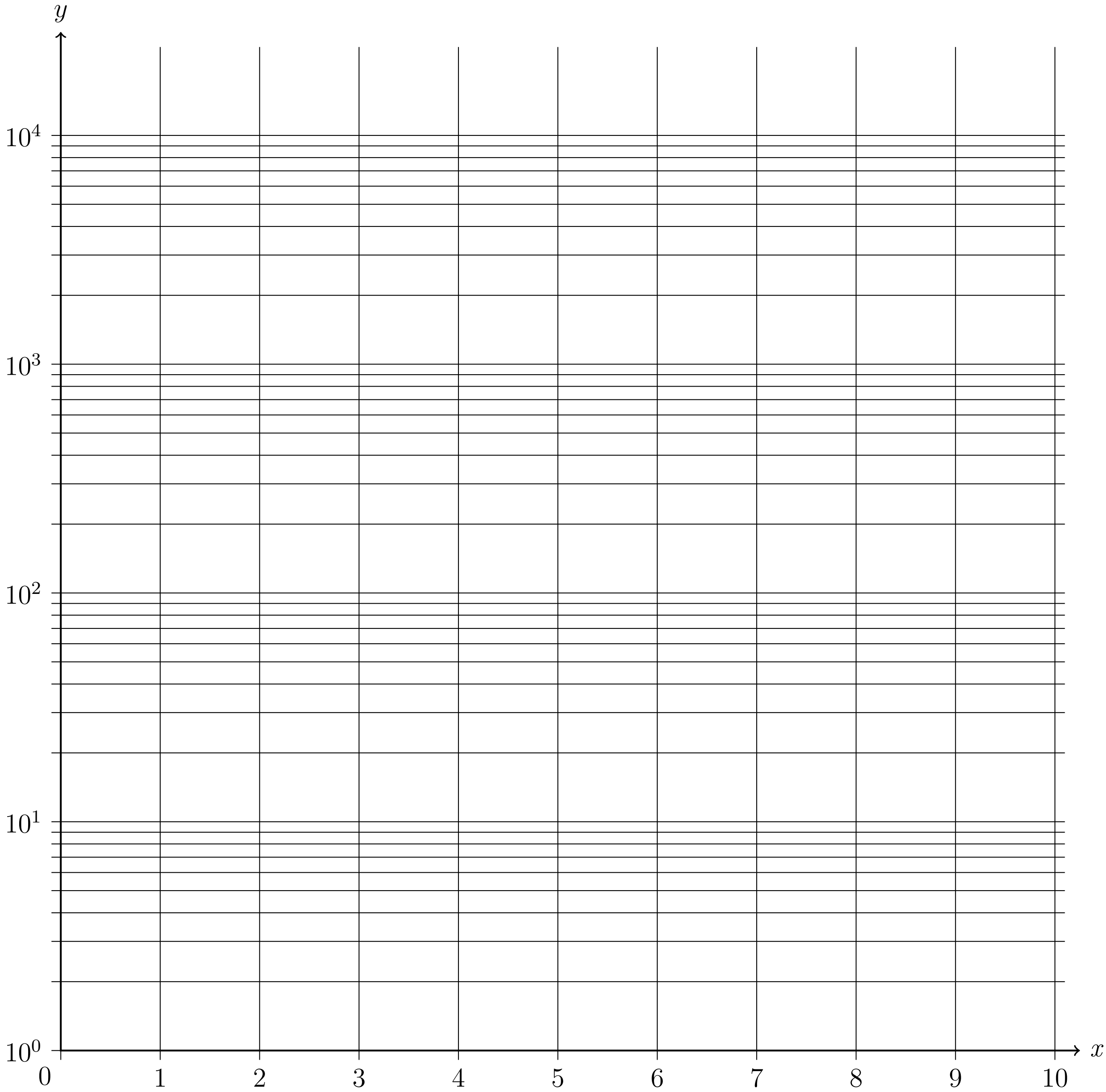
6.17 Gemischte Funktionenaufgaben

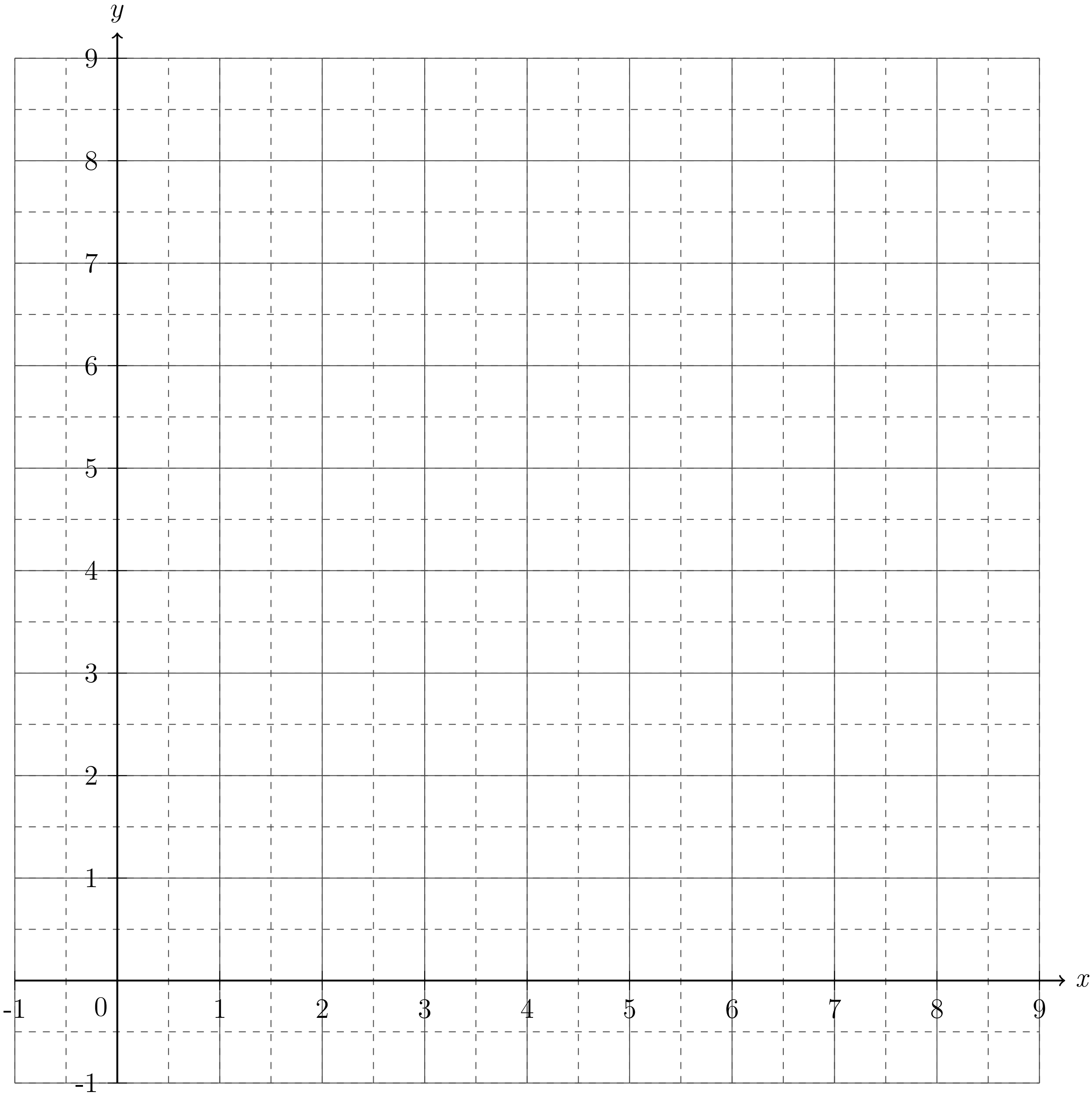
Aufgabe 1: *Zeichne folgende Funktionen in die vier Arten von Koordinatensystemen*

$f(x) = x$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^3$
$k(x) = \dfrac{1}{x}$	$l(x) = \dfrac{1}{x^2}$	$m(x) = \sin(x)$
$n(x) = \sqrt{x}$	$o(x) = \sqrt[4]{x}$	$p(x) = e^x$
$q(x) = 2^x$	$r(x) = \mathrm{lb}(x)$	$s(x) = \ln(x)$



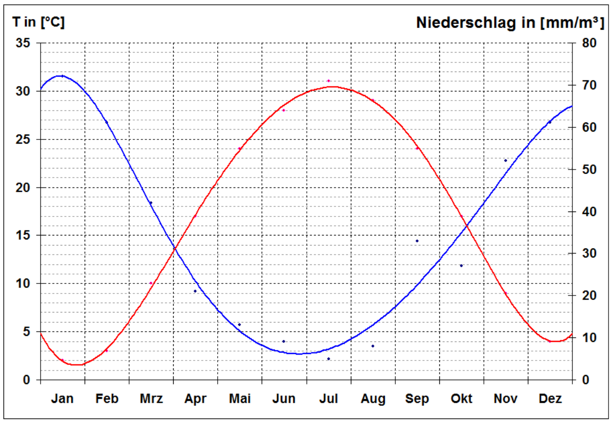

y
10^4
10^3
10^2
10^1
1
10^1
10^2
10^3
10^4
x


y
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x

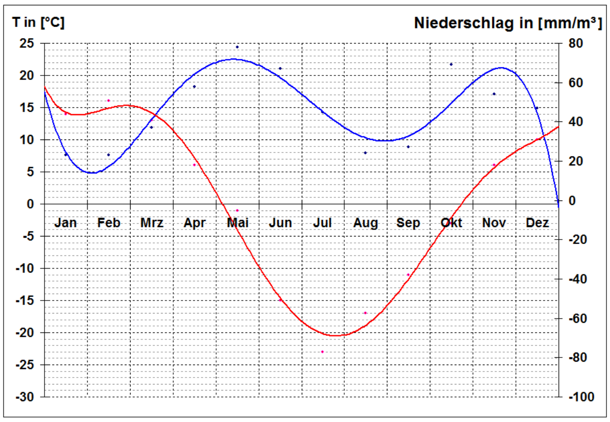

y
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
x
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Aufgabe 2: *Bestimme aus den fiktiven und stark vereinfachten Klimadiagrammen die Temperatur und die Niederschlagsmenge für jeden Monatsanfang und jeder Monatsmitte und halte dies in einer Tabelle fest. Bestimme anschließend die Punkte an denen sich die, am Durchschnitt orientierende, Niederschlagsmenge- und die Temperaturkurve schneiden. Bestimme für diese Punkte die Temperatur und die Niederschlagsmenge. Hierbei ist die Temperatur rot und die Niederschlagsmenge blau dargestellt.*

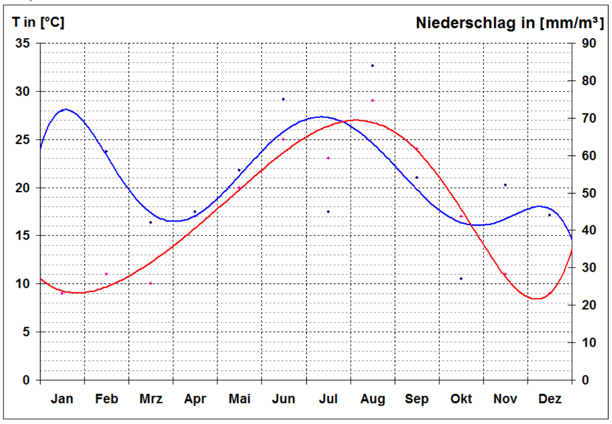
a)



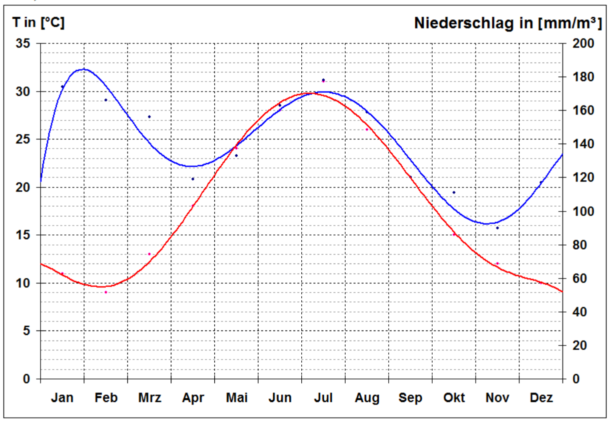
b)



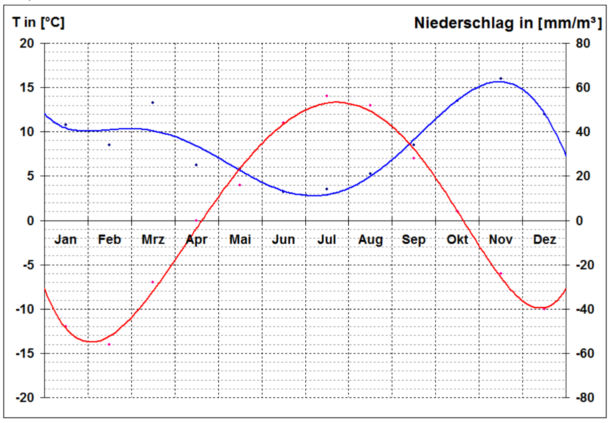
c)



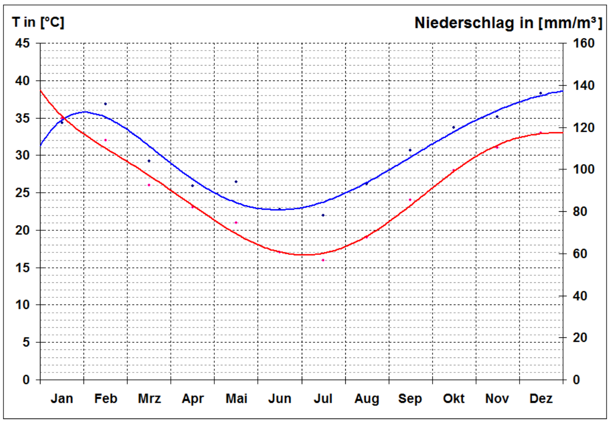
d)



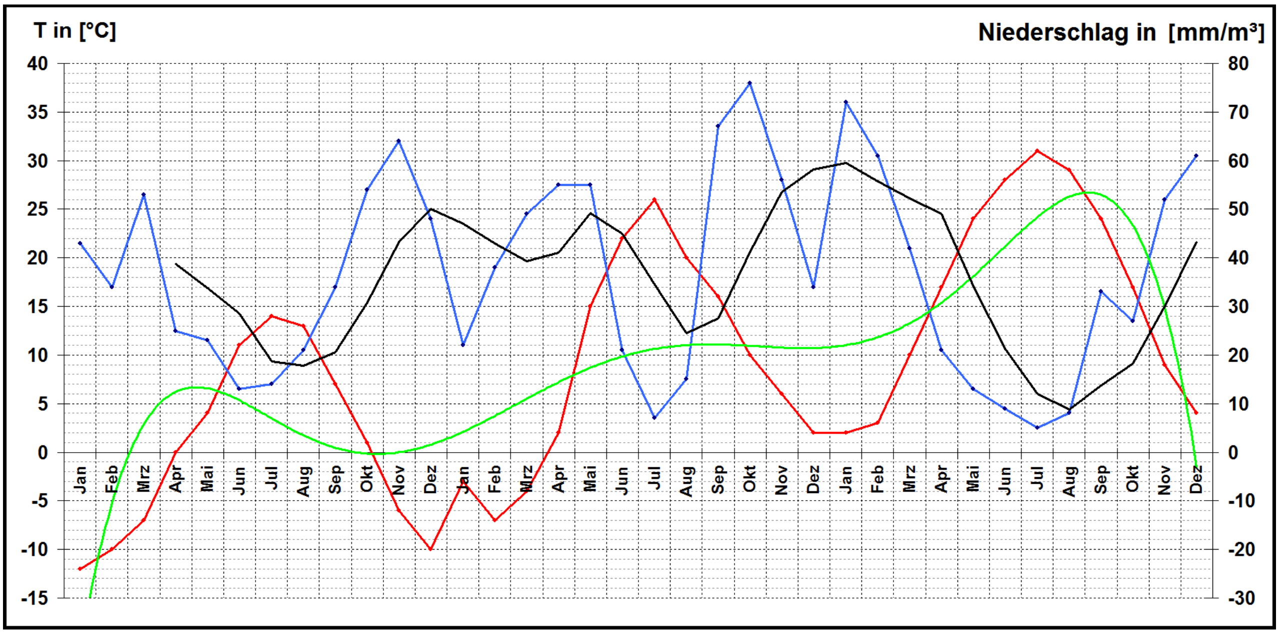
e)



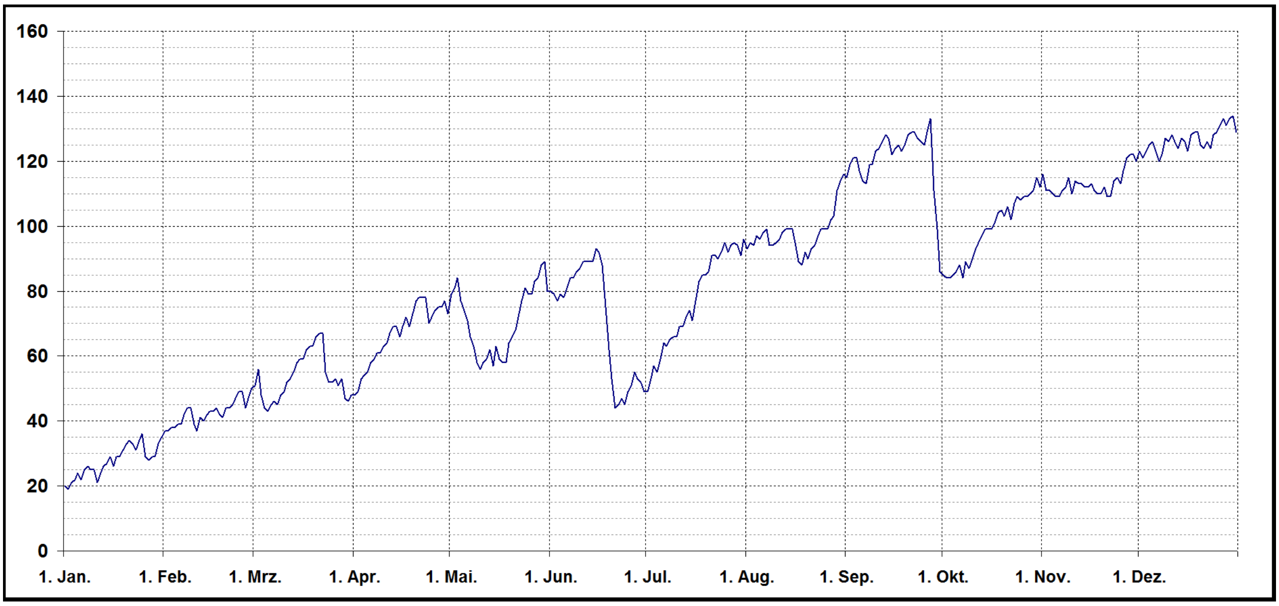
f)



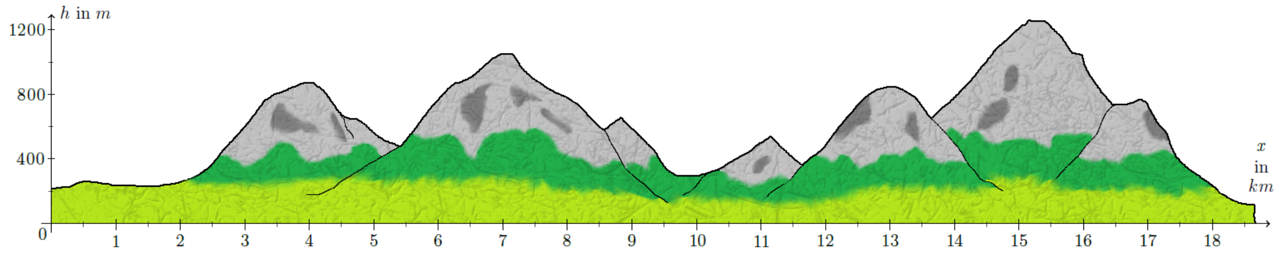
Aufgabe 3: *Bestimme aus den fiktiven und stark vereinfachten Klimadiagrammen die Temperatur und die Niederschlagsmenge für jeden Monatsanfang und halte dies in einer Tabelle fest. Hierbei ist die Temperatur rot und die Niederschlagsmenge blau dargestellt. Bestimme anschließend für jede Monatsmitte aus den Langzeitwerten die durchschnittliche Temperatur in grün und die durchschnittliche Niederschlagsmenge in schwarz und halte dies in einer Tabelle fest.*



Aufgabe 4: *Bestimme aus den fiktiven Aktienkurs den Wert für jeden Monatsanfang und für jede Monatsmitte und halte dies in einer Tabelle fest.*



Aufgabe 5: *Beantworte alle nachfolgenden Fragen zum Gebirgszug*



a) Wie hoch sind die Berge jeweils?

b) Wie weit sind die beiden höchsten Berge voneinander entfernt?

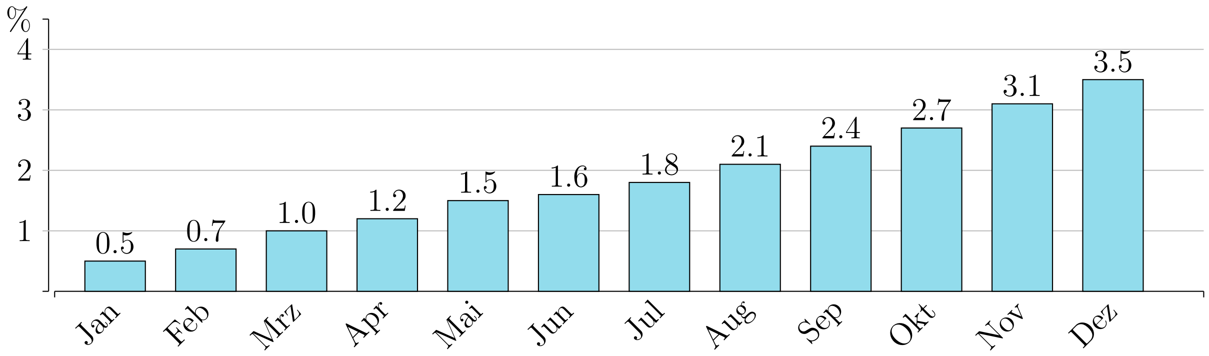
c) Wie weit sind die beiden kleinsten Berge voneinander entfernt?

Aufgabe 6: *Zeichne die Wertepaare aus der Wertetabelle in ein geeignetes Koordinatensystem ein.* (Keine Lösung!)

a) x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$f(x)$	4	6	7	8	5	3	1	6	7	3	6	8	3	2	4
b) x	1	1,5	2	2,5	4	4,25	4,5	5	5,5	5,75	6	6,5	7	7,25	7,5
$f(x)$	0	2,5	3	5,5	7	3,25	0	4,5	7	8,25	6,5	7	5	3	1
c) x	3	3,5	4	4,5	4,75	5	5,25	5,5	5,75	6	6,25	6,5	7	7,25	7,5
$f(x)$	2,4	2,7	3	2,6	1,3	1,1	0,9	2,1	3,3	4,7	4,9	3,7	2,8	2,2	1,7

d) x	4	7	9	10	11	13	15	16	17	20	21	22	24	25	27
$f(x)$	0,4	0,7	1,3	1,8	2,3	1,9	5,6	6,4	6,7	3,75	4,4	3,5	2,4	2,7	1,8
e) x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,1	1,4	1,5	1,6	1,7	1,85	2,05	2,25	2,35	2,5
$f(x)$	1	3	3,5	2,5	2,1	1,6	3,6	5,4	5,7	4,25	3,4	3,75	2,9	2,5	1,7

Aufgabe 7: *Beantworte die Fragen zu dem Säulendiagramm.*



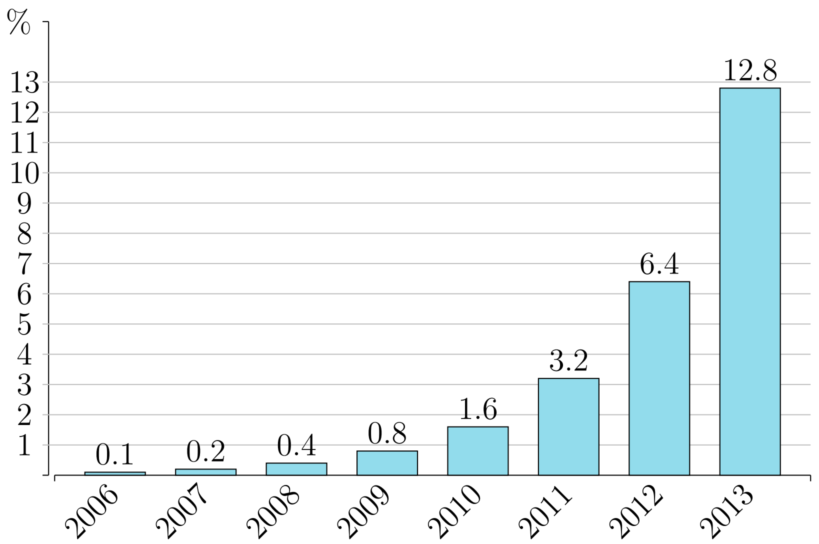
a) Um was für ein Wachstum handelt es sich?

b) Bestimme den Mittelwert des Wachstums.

c) Bestimme die Funktionsgleichung aus dem Mittelwert des Wachstums unter der Annahme, dass der Januar $x = 0$ ist.

d) Berechne den Wert für den kommenden Juli.

Aufgabe 8: *Beantworte die Fragen zu dem Säulendiagramm.*



a) Um was für ein Wachstum handelt es sich?

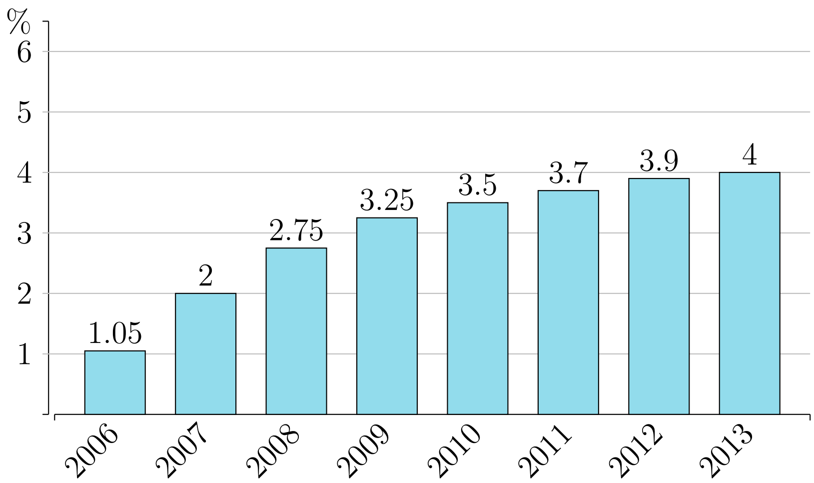
b) Wie stark wird das Wachstum im Jahr 2014 sein?

c) Bestimme die Funktionsgleichung aus den abgebildeten Werten des Säulendiagramms unter der Annahme, dass 2006 das Jahr $x = 0$ ist.

d) Wann betrug das Wachstum genau 1%?

e) In welchem Jahr wird das Wachstum genau 50% betragen?

Aufgabe 9: *Beantworte die Fragen zu dem Säulendiagramm.*

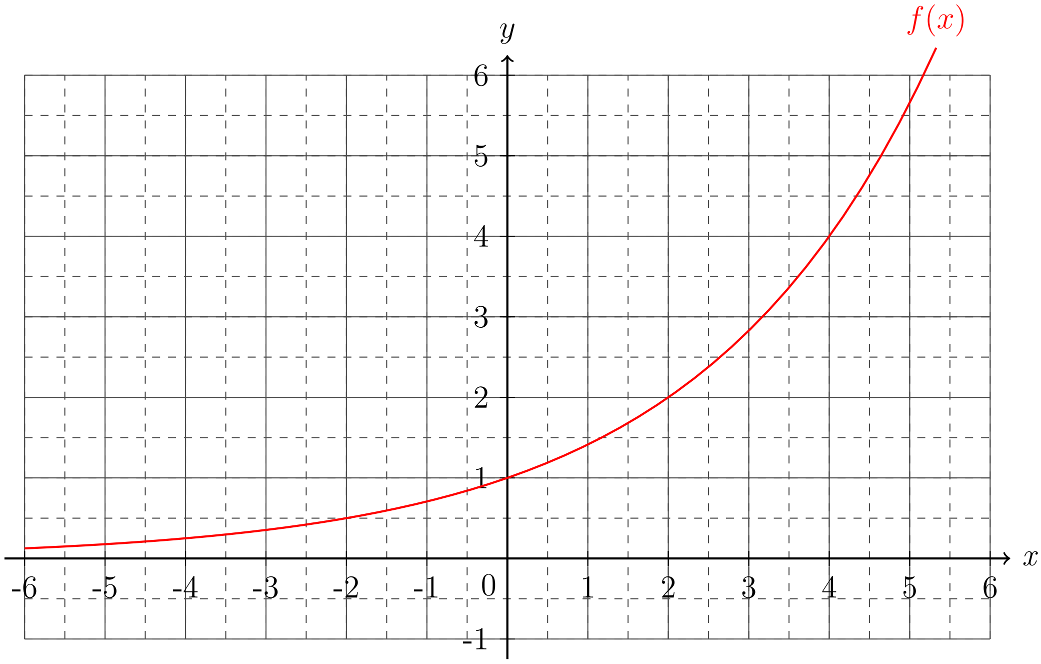


$a)$ Um was für ein Wachstum handelt es sich?

$b)$ Wann ist das Wachstum am stärksten?

$c)$ Zeichne in das Diagramm die Funktion $f(x) = 2\ln x$ unter der Annahme, dass 2006 das Jahr $x = 2$ ist.

Aufgabe 10: *Beantworte alle Fragen zu diesem Funktionsgraphen.*



$a)$ Um was für eine Funktion handelt es sich?

$b)$ Lese die fehlenden Funktions- oder Variablenwerte aus und trage diese in die Tabelle ein.

x	-4		1		4
$f(x)$		$0,5$		2	

$c)$ Bestimme aus der Wertetabelle die Funktionsgleichung.

$d)$ Berechne die fehlenden Funktions- oder Variablenwerte und trage diese in die Tabelle ein.

x	8	$1,5$			-8		-1	
$f(x)$			10	3		$0,1$		10^{-5}

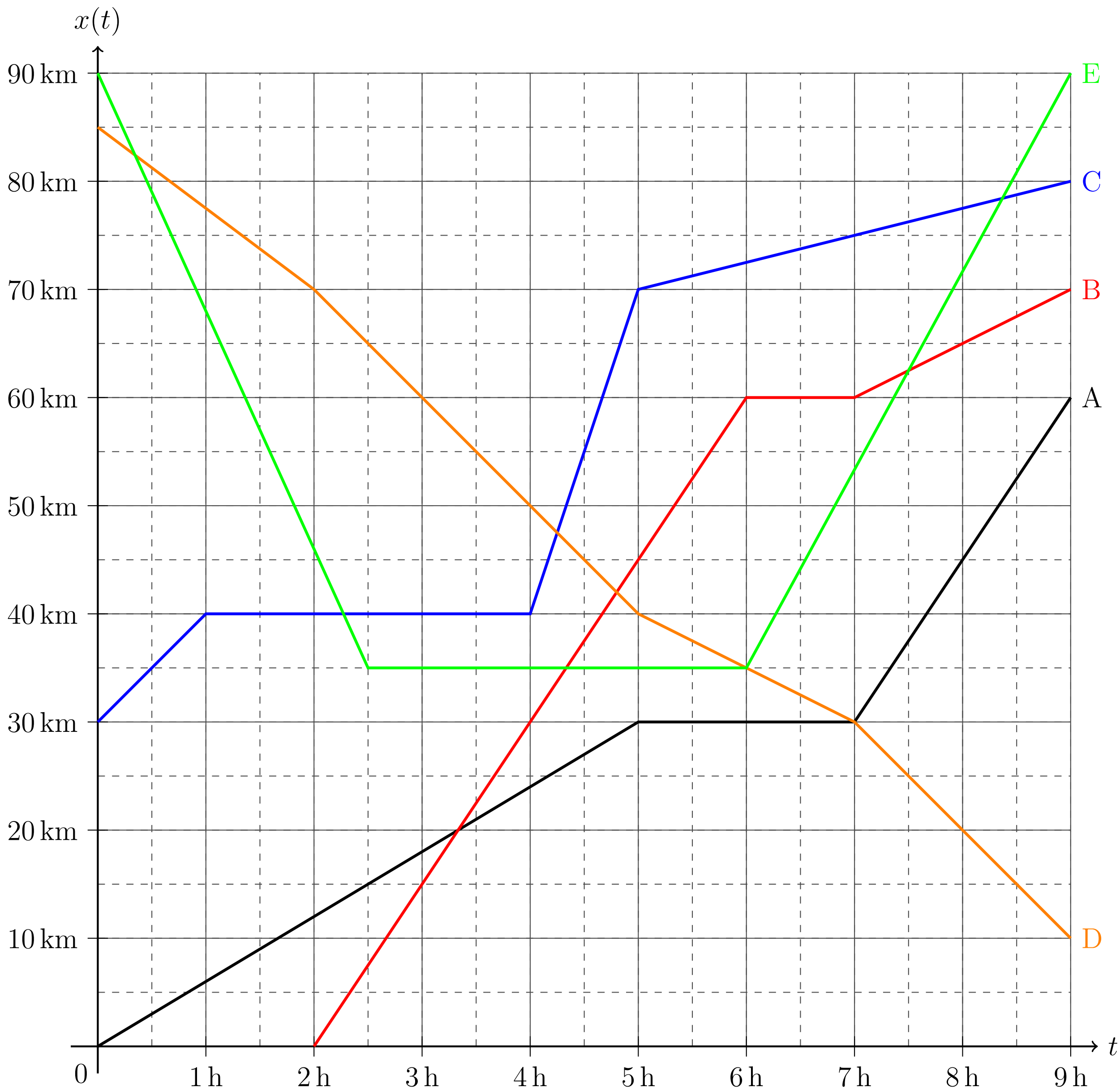
Aufgabe 11: *Da man nicht durch Null dividieren darf, müssen Rechnungen begründet werden, bei der durch einen Term mit der Variablen dividiert wird, da diese gleich Null sein könnte. Begründe durch eine Rechnung, dass die erste Zeile der folgenden Rechnung erlaubt ist. (Tipp: Benutze Potenzgesetze und die Bruchrechnung!)*

$$\begin{aligned} x \cdot e^{2x} - 5 \cdot e^{2x} &= 0 \qquad &\Big|: e^{2x} \\ x - 5 &= 0 \qquad &|+5 \\ \Rightarrow x &= 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 12: *Lies die Behauptung und kreuze an, ob diese wahr oder falsch ist.*

Behauptung	wahr	falsch
$f(x) = mx + b$ ist eine Funktion erster Ordnung.		
Eine Konstante ist keine Funktion.		
Eine Hyperbel ist für alle Werte definiert.		
Eine Tangente schneidet eine Funktion an einem Punkt.		
Eine Funktion 5. Ordnung hat bis zu 4 Extremstellen.		
Die Exponentialfunktion e^x hat ihren Graphen nur im 1. und 2. Quadranten.		
Zur Wurzelfunktion existiert keine Umkehrfunktion.		
Die Hyperbel $\frac{1}{x}$ hat ihren Graphen nur im 1. und 3. Quadranten.		
Der positive Abszissen- und negative Ordinatenbereich ist der 4. Quadrant.		
$f(x) = -3x^6 + 2x^2 - 9$ ist eine Funktion zweiter Ordnung.		

Aufgabe 13: *Bei dem gezeigten Graphen handelt es sich um eine Darstellung von Strecken x in Abhängigkeit der Zeit t. Hierbei wird alles von einem Standpunkt aus betrachtet, dem Punkt $P(0|0)$. Es wurden fünf verschiedene Autos beobachtet, welche alle auf einer Straße fuhren. Beantworte alle Fragen zu diesen Graphen.*



a) Wie viel Strecke wurde pro Automöglichkeit insgesamt zurückgelegt?

b) Welches Auto machte wann und für wie lange eine Pause?

c) Welches Auto fuhr später los, A oder B? Gib die Wartezeit an!

d) Wie weit waren die Autos A oder C bei der Zeit $t = 0$ von einander entfernt?

e) Wie weit waren die Autos C oder B bei der Zeit $t = 2\,\text{h}$ von einander entfernt?

f) Wie weit waren die Autos C oder B bei der Zeit $t = 3\,\text{h}$ von einander entfernt?

g) Wie weit sind die Autos A oder E nach neun Stunden von einander entfernt?

h) Was unterscheidet D drastisch von A, B und C?

i) Was unterscheidet E drastisch von A, B, C und D?

j) Gib die höchsten Geschwindigkeiten $v = \dfrac{x}{t}$ der Autos an?

k) Wann und wie begegneten sich welche Autos?

Aufgabe 14: *Es sind zwei Punkte in einem Koordinatensystem gegeben. Bestimme die Strecke zwischen den beiden Punkten.*

a) $P\,(0\,|0\,)$ und $Q\,(2\,|4\,)$

b) $P\,(1\,|3\,)$ und $Q\,(5\,|6\,)$

c) $P\,(-2\,|-4\,)$ und $Q\,(4\,|3\,)$

d) $P\,(-6\,|3\,)$ und $Q\,(-1\,|-5\,)$

e) $P\,(-2,8\,|2,4\,)$ und $Q\,(5,1\,|-4,9\,)$

f) $P\,(-4,2\,|-5,5\,)$ und $Q\,(2,3\,|3,7\,)$

g) $P\,(-2,35\,|5,42\,)$ und $Q\,(3,11\,|0,06\,)$

h) $P\left(\dfrac{2}{3}\,\middle|\,\dfrac{1}{4}\right)$ und $Q\left(\dfrac{8}{5}\,\middle|\,\dfrac{2}{7}\right)$

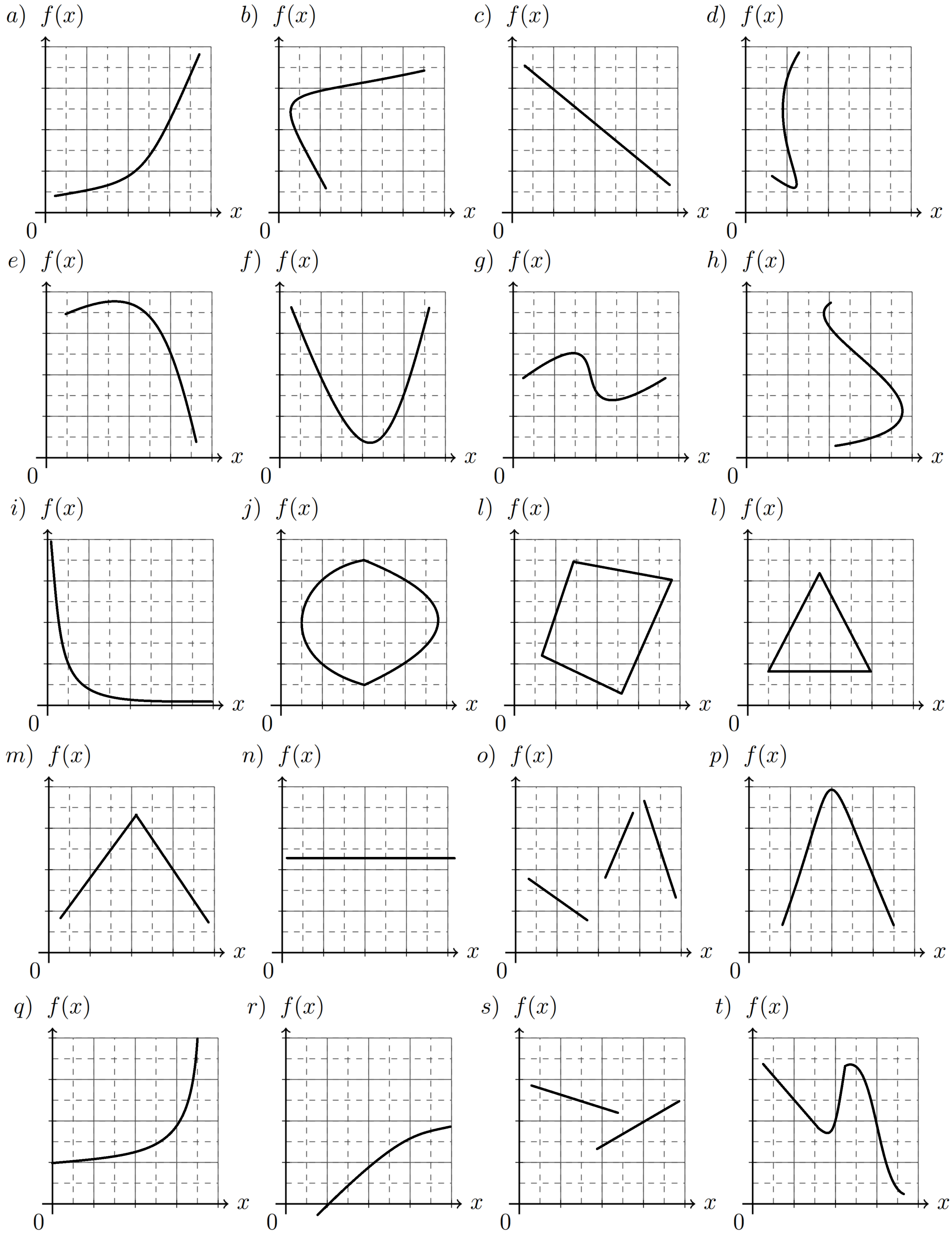
i) $P\left(\dfrac{11}{6}\,\middle|\,-\dfrac{6}{7}\right)$ und $Q\left(\dfrac{13}{8}\,\middle|\,\dfrac{11}{2}\right)$

j) $P\left(-\dfrac{7}{8}\,|4,23\right)$ und $Q\,(-0,93\,|2,84\,)$

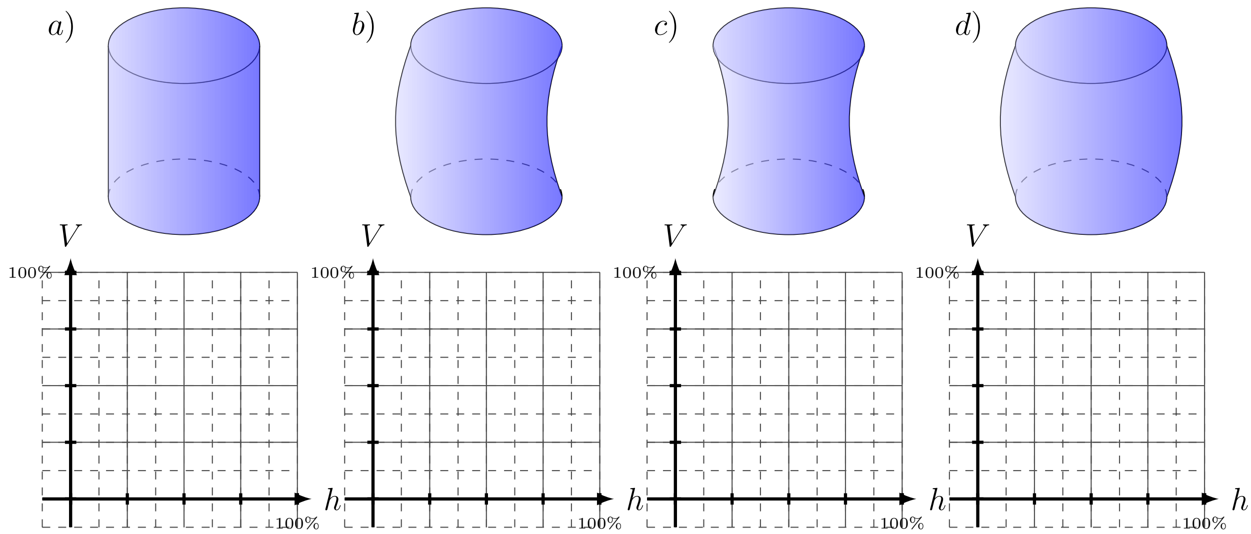
k) $P\left(\pi\,\middle|\,\dfrac{7}{6}\right)$ und $Q\left(-\dfrac{\pi}{3}\,|5,38\right)$

l) $P\left(\sqrt{7}\,\middle|\,-\sqrt{2}\right)$ und $Q\left(\dfrac{\pi}{e}\,|4,73\right)$

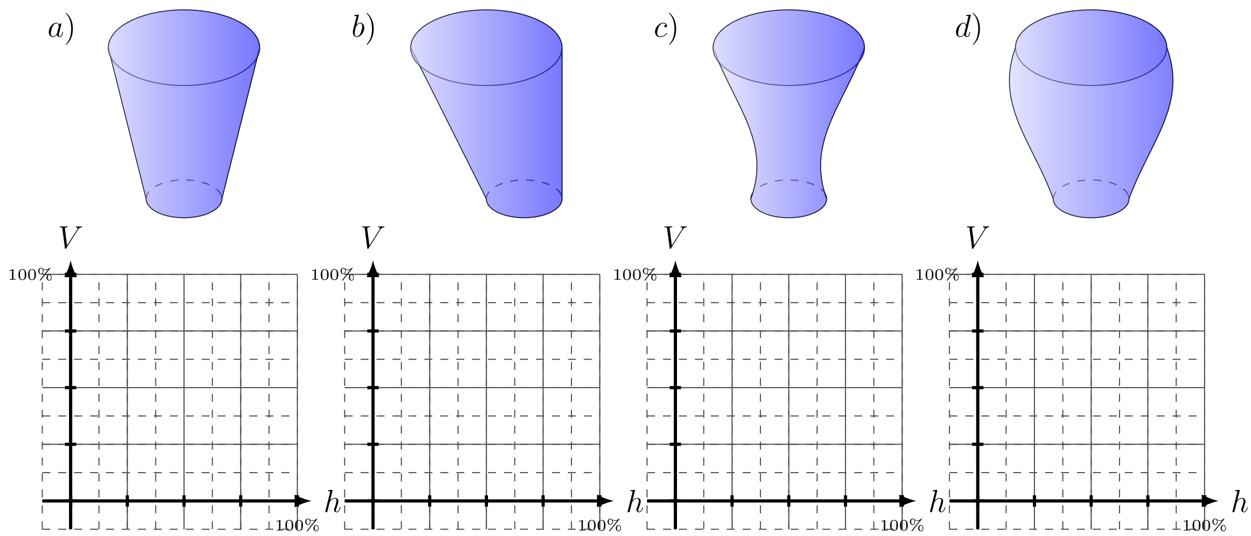
Aufgabe 15: *In welchen der gezeigten Koordinatensysteme befindet sich eine Funktion. Begründe warum es sich gegebenenfalls um keine Funktion handeln kann.*



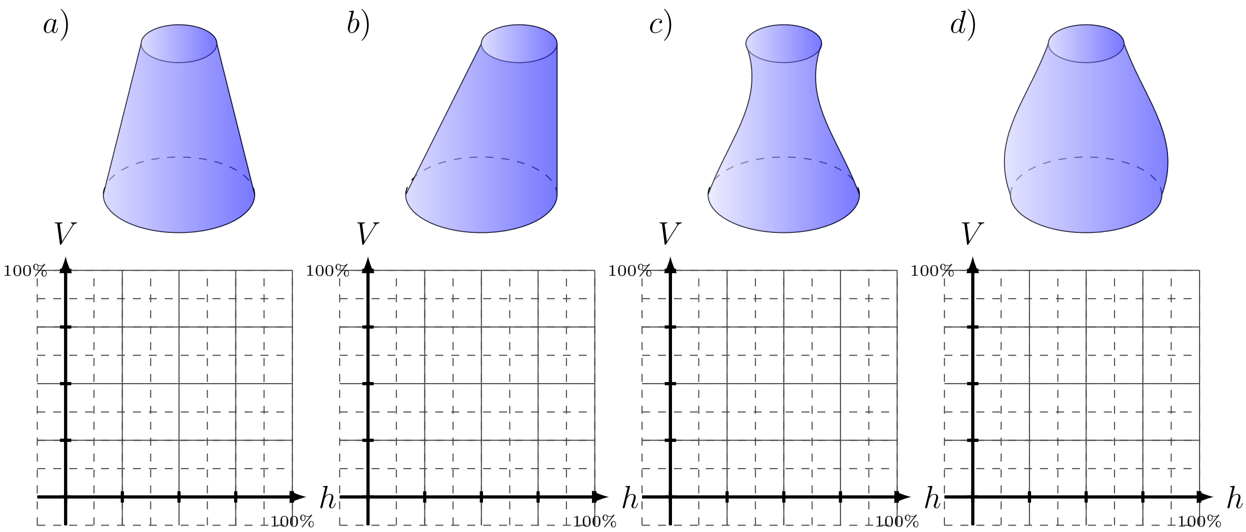
Aufgabe 16: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Volumens in der Abhängigkeit der Füllhöhe des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile des Gesamtvolumens beziehungsweise der Gesamtfüllhöhe angegeben sind.*



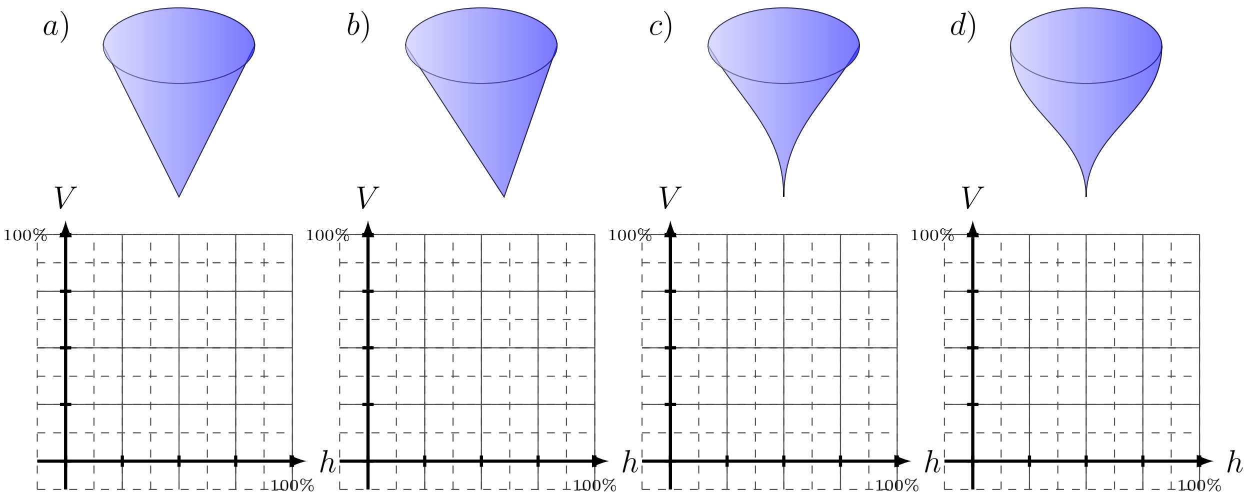
Aufgabe 17: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Volumens in der Abhängigkeit der Füllhöhe des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile des Gesamtvolumens beziehungsweise der Gesamtfüllhöhe angegeben sind.*



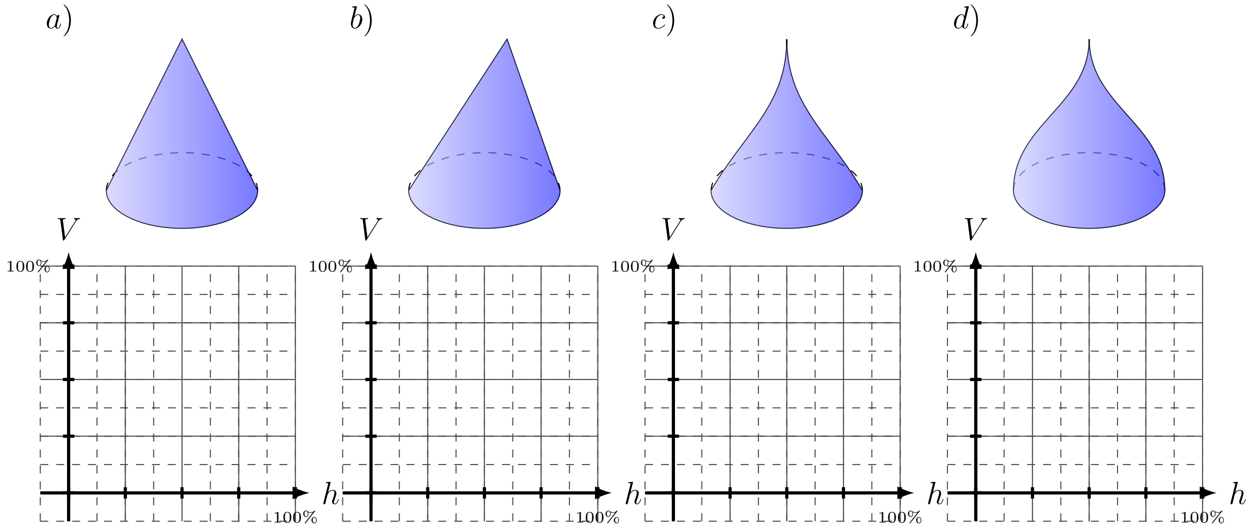
Aufgabe 18: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Volumens in der Abhängigkeit der Füllhöhe des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile des Gesamtvolumens beziehungsweise der Gesamtfüllhöhe angegeben sind.*



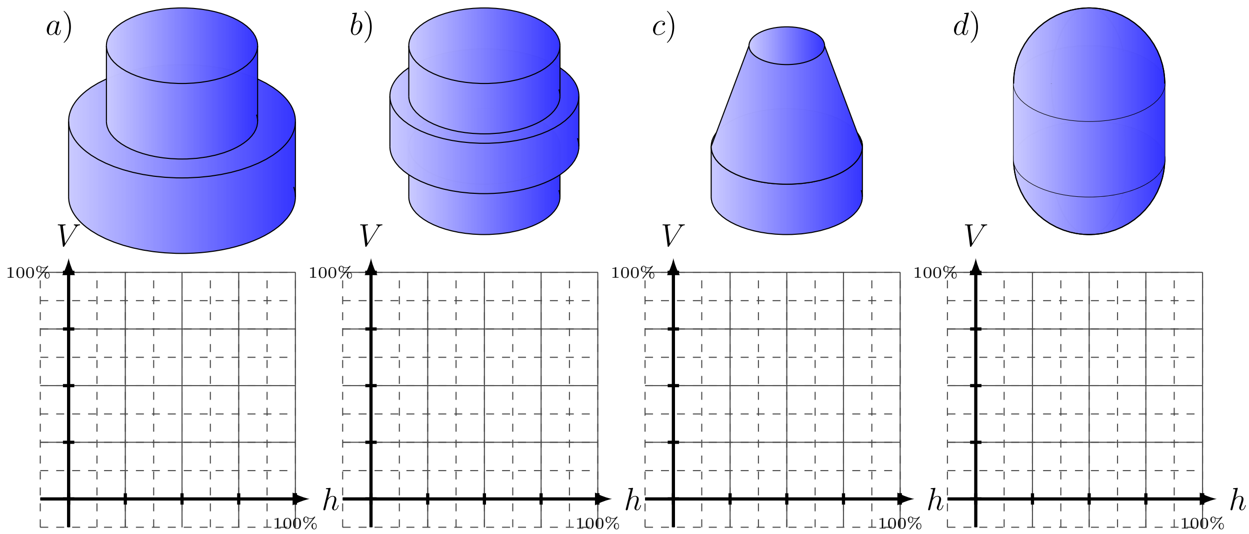
Aufgabe 19: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Volumens in der Abhängigkeit der Füllhöhe des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile des Gesamtvolumens beziehungsweise der Gesamtfüllhöhe angegeben sind.*



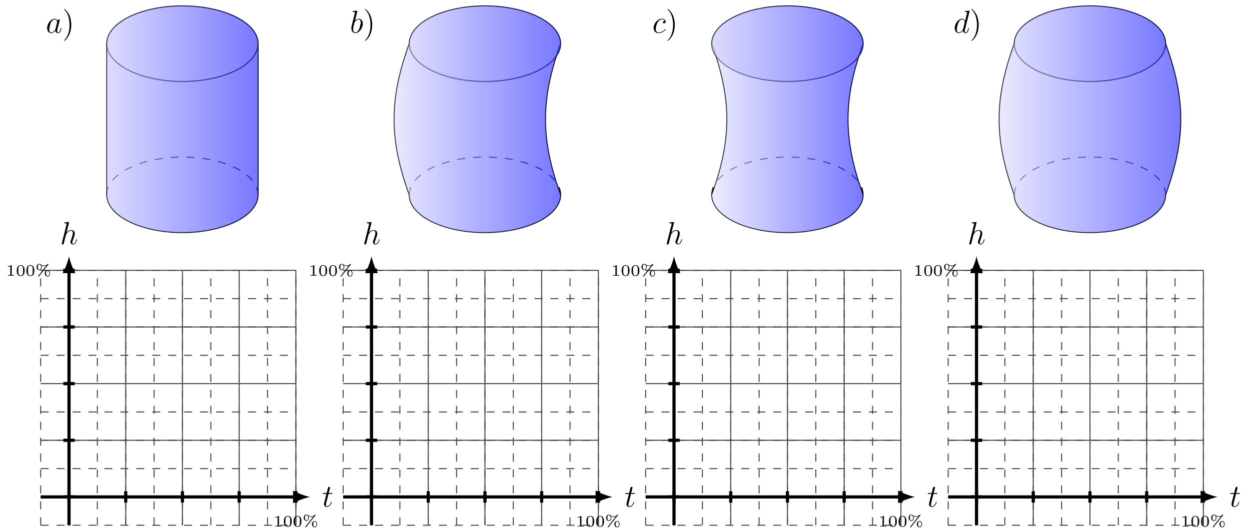
Aufgabe 20: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Volumens in der Abhängigkeit der Füllhöhe des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile des Gesamtvolumens beziehungsweise der Gesamtfüllhöhe angegeben sind.*



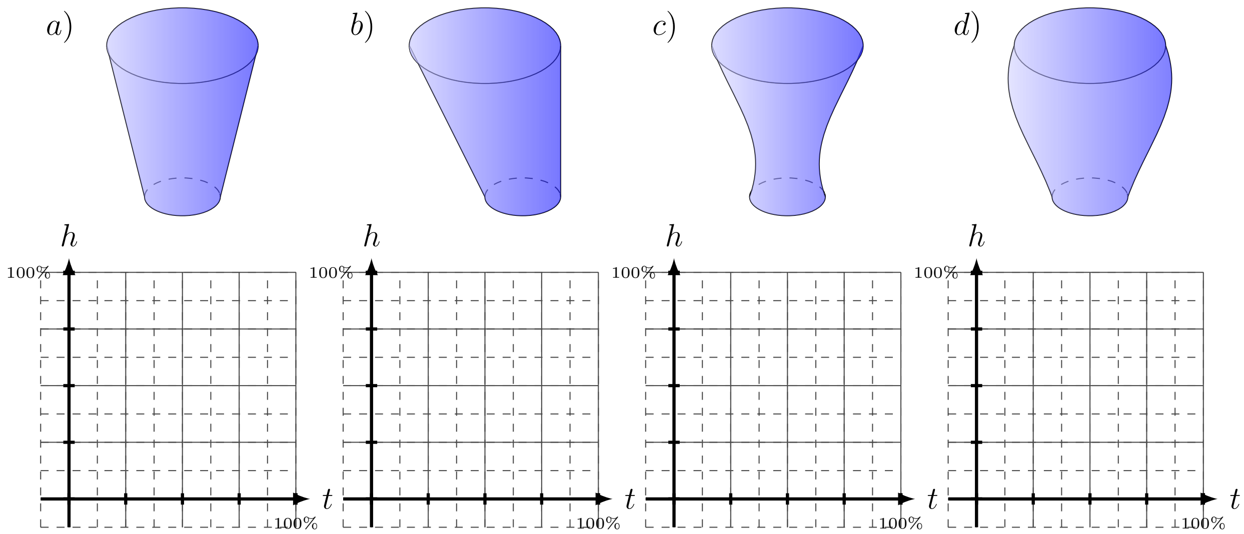
Aufgabe 21: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Volumens in der Abhängigkeit der Füllhöhe des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile des Gesamtvolumens beziehungsweise der Gesamtfüllhöhe angegeben sind.*



Aufgabe 22: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Füllhöhe in der Abhängigkeit der Füllzeit des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile der Gesamtfüllhöhe beziehungsweise der Gesamtfüllzeit angegeben sind.*

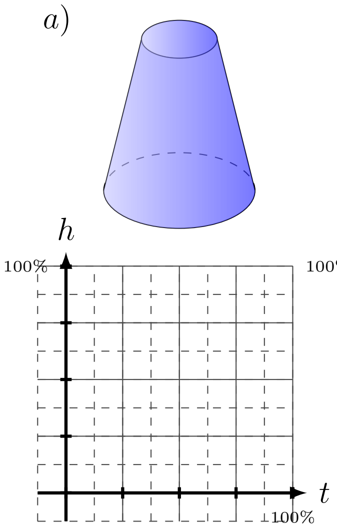


Aufgabe 23: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Füllhöhe in der Abhängigkeit der Füllzeit des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile der Gesamtfüllhöhe beziehungsweise der Gesamtfüllzeit angegeben sind.*

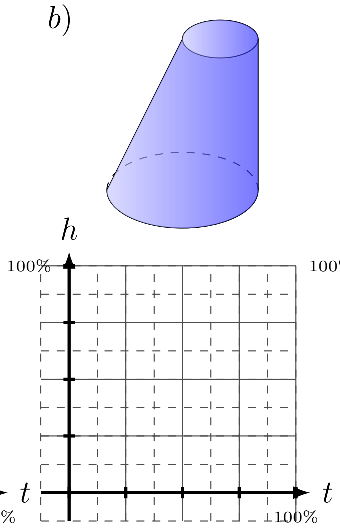


Aufgabe 24: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Füllhöhe in der Abhängigkeit der Füllzeit des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile der Gesamtfüllhöhe beziehungsweise der Gesamtfüllzeit angegeben sind.*

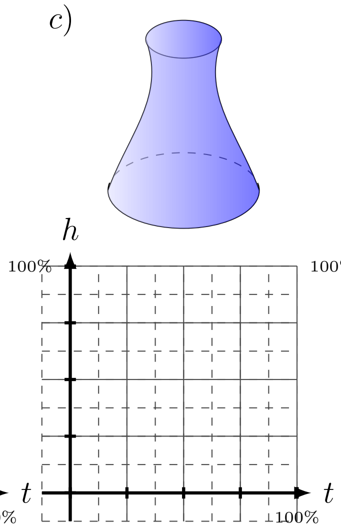
a)



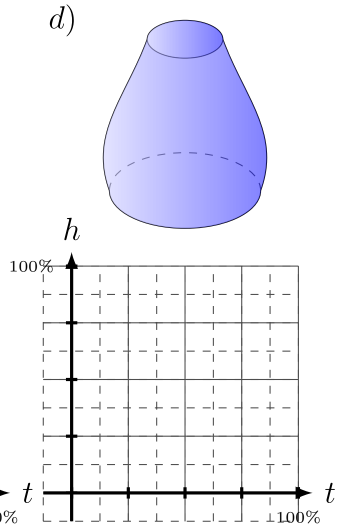
b)



c)

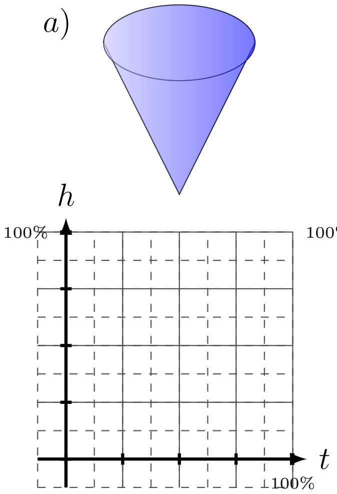


d)

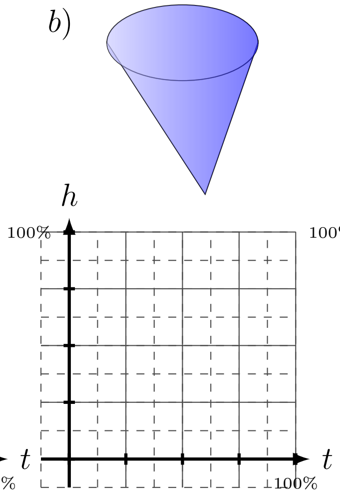


Aufgabe 25: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Füllhöhe in der Abhängigkeit der Füllzeit des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile der Gesamtfüllhöhe beziehungsweise der Gesamtfüllzeit angegeben sind.*

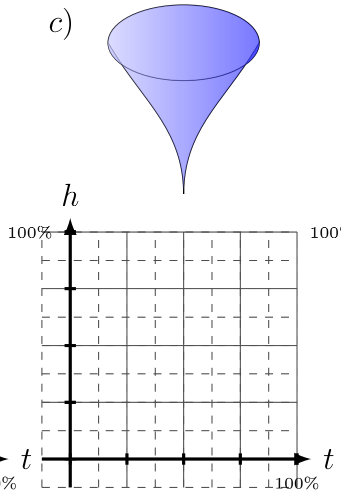
a)



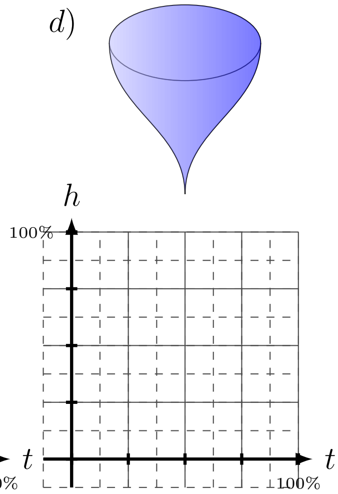
b)



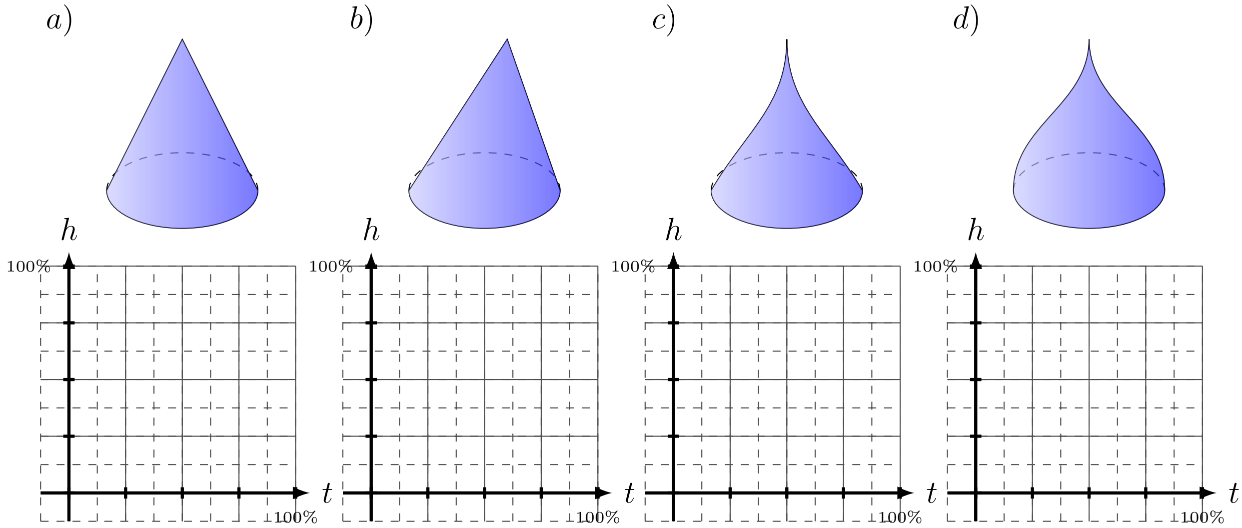
c)



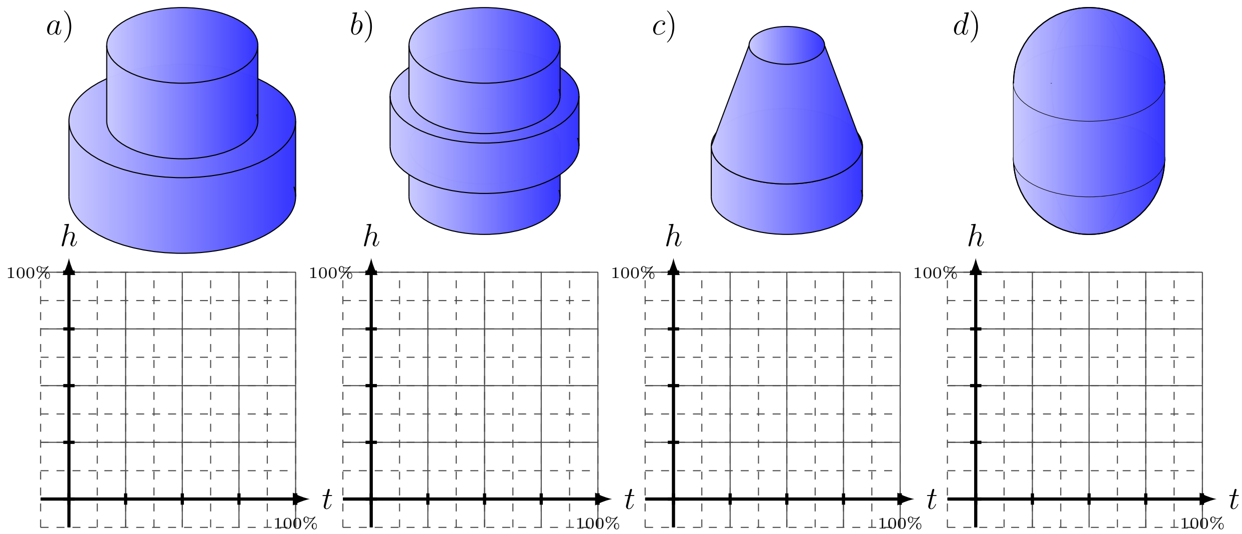
d)



Aufgabe 26: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Füllhöhe in der Abhängigkeit der Füllzeit des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile der Gesamtfüllhöhe beziehungsweise der Gesamtfüllzeit angegeben sind.*



Aufgabe 27: *Skizziere den Funktionsgraphen der Funktion des Füllhöhe in der Abhängigkeit der Füllzeit des Körpers in der Koordinatensystem. Beachte, dass auf den Achsen die Werte in prozentuale Anteile der Gesamtfüllhöhe beziehungsweise der Gesamtfüllzeit angegeben sind.*



Aufgabe 28: *Vergleiche jeweils die Lösungen von Aufgabenteil a) und b) der Aufgaben 16 bis 27. Beschreibe die Auffälligkeit.*

Aufgabe 29: *Vergleiche jeweils die Lösungen der Aufgaben 16 bis 22 mit den Lösungen der Aufgaben 23 bis 27. Beschreibe die Auffälligkeit.*

Weitere Behauptung zu Funktionen zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.55) Lösungen zu den gemischten Funktionsaufgaben.

7 Beweisverfahren

In der Mathematik sind *Beweise* von *Lemma*, *Sätzen* und *Theoremen* das wichtigste Mittel, um die Mathematik weiter zu entwickeln sowie Relationen verwenden zu können. Um etwas zu beweisen existieren mehrere Methoden, die wichtigsten Verfahren sollen hier erläutert werden:

- Direkter *Beweis*: Bei einem direkten *Beweis* verwendet man schon bereits bewiesene *Gleichungen* und benutzt diese um weitere Erkenntnisse zu gewinnen. Dies wird in der Regel auch als Herleitung bezeichnet. Dabei wird die Richtigkeit des zu beweisenden gezeigt.

- Indirekter *Beweis*: Diese Beweisart wird auch „Beweis durch Widerspruch“ genannt. Hier wir die Behauptung als falsch angenommen und wendet dann die gleichen Methoden wie beim direkten *Beweis* an.

- *Vollständige Induktion*: Diese Beweismethode wird in der Regel für Behauptungen benutzt, die eine Verallgemeinerung auf alle natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ abzielt. Die vollständige Induktion verläuft immer nach dem selben Schema:

  Induktionsanfang: Am Anfang der *vollständigen Induktion* wird die Richtigkeit der Behauptung für eine beliebige natürliche Zahl m geprüft. Hierbei empfiehlt es sich $m = 1$ oder $m = 0$ zu wählen, da im späteren Beweisverfahren Teile dieser Rechnung verwendet werden können.
  Induktionsschritt: In die zu beweisende Behauptung wird die *Induktionsbehauptung* $n+1$ eingesetzt und so die *Induktionsvoraussetzung* (Behauptung mit n) über *Umformungen* und dem Einsetzen des *Induktionsanfangs* bewiesen. Dies wird dann der *Induktionsschluss* genannt.

  Hierzu ein Beispiel: Behauptung

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \tag{7.1}$$

Induktionsanfang: Es wird $n = 1$ gewählt und die Behauptung überprüft.

$$\sum_{k=1}^{n=1}(2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2 = n^2 \tag{7.2}$$

Induktionsschritt: In die Behauptung wird $n+1$ eingesetzt und anschließend auf eine Form gebracht in der *Terme* aus dem *Induktionsanfang* zu erkennen sind.

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2 \\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2\end{gathered} \tag{7.3}$$

Nun wird in die *Induktionsbehauptung* die *Induktionsvoraussetzung* $(n = 1)$ erneut eingesetzt.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}_{=1} + \underbrace{(2(n+1)-1)}_{=3} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = 4 \tag{7.4}$$

Da nun die Behauptung für n und $n+1$ testweise überprüft wurde, ist sie für alle *natürlichen Zahlen* $n \in \mathbb{N}$ gültig.

7.0.1 Übungsaufgaben zu Beweisverfahren

Aufgabe 1: *Beweise durch vollständige Induktion.* (Keine Lösung!)

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)^2$

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (n+k)(n-k) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

j) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

k) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

l) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

m) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

n) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$

Aufgabe 2: *Beweise durch vollständige Induktion.* (Keine Lösung!)

a) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n(n+1)}$

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n!}$

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

Aufgabe 3: *Beweise durch vollständige Induktion.* (Keine Lösung!)

a) $n^2 + n$ ist teilbar durch: 2

b) $4n^3 - n$ ist teilbar durch: 3

c) $n^3 - n$ ist teilbar durch: 6

d) $n^3 + 5n$ ist teilbar durch: 6

e) $n^4 - 4n^2$ ist teilbar durch: 3

f) $5^n + 7$ ist teilbar durch: 4

g) $4^n + 15n - 1$ ist teilbar durch: 9

h) $3^{n+1} + 2^{3n+1}$ ist teilbar durch: 5

Aufgabe 4: *Beweise durch vollständige Induktion.* (Mit Musterlösung!)

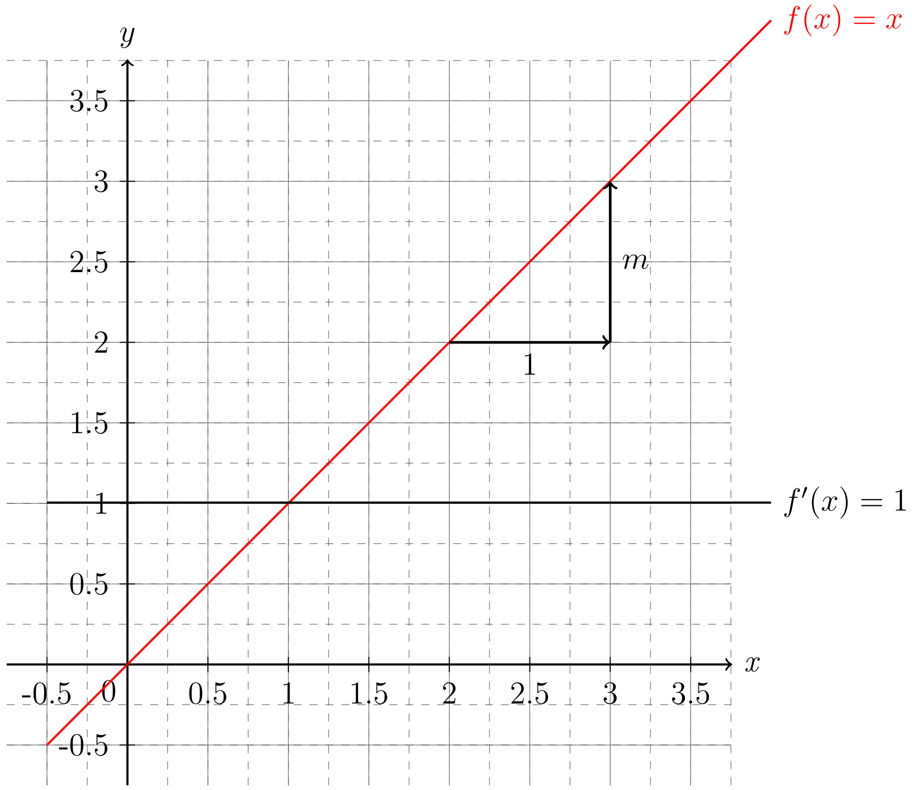
a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

b) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.56) Lösungen zu Beweisverfahren.

8 Differentiation und Integration

Die *Differentiation* und die *Integration* sind wichtige Kernelemente der *Analysis*. Um diese beiden *Operationen* effektiv einzuführen, sollte die *Geradengleichung* $f(x) = mx + b$ mit der *Steigung* der *Geraden* m und dem *Ordinatenschnittpunkt* b nochmals ins Gedächtnis gerufen werden.
Seien die *Geraden* $f(x) = x$ und $f'(x) = 1$ gegeben, dann kann durch die Veranschaulichung im *Koordinatensystem* gesehen werden, dass die *Steigung* der *Gerade* $f(x)$ gleich der dem Wert der *Geraden* $f'(x)$ also gleich eins ist. Die *Steigung* der *Gerade* $f'(x)$ ist Null, da es sich um eine *Konstante* handelt wie im *Koordinatensystem* zu erkennen ist. Dabei ist der Begriff „*Steigung*" so *definiert*: „Wenn man einen Einheitenschritt nach rechts von der *Geraden* aus geht, ist die *Steigung* der *Geraden* gleich der Einheitenschritte *orthogonal* zum gegangenen Schritt - folglich nach oben für positive *Steigung* und nach unten für negative *Steigung*."



8.1 Operatoralgebra

Mathematisch lässt sich ein Ausdruck definieren, der sprachlich fordert: „*Bestimme die Steigung von der Funktion!*“ Diese Forderung wird durch den sogenannten *Differentialoperator* $\frac{\partial}{\partial x}$ erfüllt, der „*d nach d x*“ gelesen wird. Ein solcher *Operator* wirkt nur nach rechts, dass heißt alle *Größen* die links vom *Operator* unangetastet stehen bleiben. Somit soll folgende Rechenvorschrift für den *Operator* gelten, um den veranschaulichten Forderungen im vorherigen *Koordinatensystem* gerecht zu werden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x &= 1 \qquad \text{siehe Funktionenbeispiel} \\ \frac{d}{dx}1 &= 0 \qquad \text{im Koordinatensystem} \end{aligned} \tag{8.1}$$

Somit würde das *Kommutativgesetz*, welches für normale Zahlen, *Parameter* und *Variablen* gegeben ist durch

$$\begin{aligned} &3 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = 0 \\ &a \cdot b - b \cdot a = 0 = [a, b] \qquad , \end{aligned} \tag{8.2}$$

wobei $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a = 0$ der sogenannte *Kommutator* ist, sich wie folgt verändern:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx}, x\right] &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}1 \\ &= 1 - 0 \\ &= 1 \qquad . \end{aligned} \tag{8.3}$$

Durch *Äquivalenzumformung* der Gleichung (8.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} &= 1 \qquad \Big| + x\frac{d}{dx} \\ \color{red}{\frac{d}{dx}x} &= \color{green}{1 + x\frac{d}{dx}} \end{aligned} \tag{8.4}$$

Dieser Ausdruck ist von zentraler Bedeutung, der es durch ein triviales *Einsetzungsverfahren* ermöglicht den *Operator* an einer *Variable* vorbei zu ziehen. Sei zum Beispiel die *Steigung* der

Funktion $g(x) = x^2$ gesucht, dann lässt sich dies mit Hilfe der Gleichung (8.4) bestimmen, indem *Terme* der Form $\frac{d}{dx}x$ durch den Ausdruck $\left(1 + x\frac{d}{dx}\right)$ ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}x \cdot x \\ &= \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)x \\ &= x + x\frac{d}{dx}x \\ &= x + x\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \\ &= x + x + x^2 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\ &= 2x \end{aligned} \tag{8.5}$$

Ähnlich verhält sich das Prozedere mit der *Funktion* $h(x) = x^3$, wobei lediglich die Anzahl der Schritt zunimmt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^3 &= \frac{d}{dx}x \cdot x \cdot x \\ &= \left(1 + x\frac{d}{dx}\right)x \cdot x \\ &= x \cdot x + x\frac{d}{dx}x \cdot x \\ &= x \cdot x + x\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \cdot x \\ &= x \cdot x + x \cdot x + x^2\frac{d}{dx} \cdot x \\ &= x \cdot x + x \cdot x + x^2\left(1 + x\frac{d}{dx}\right) \\ &= x^2 + x^2 + x^2 + x^3 \underbrace{\frac{d}{dx}}_{=0} \\ &= 3x^2 \end{aligned} \tag{8.6}$$

Dies kann für x^4 und höhere *Potenzen* von x auch bestimmt werden, wobei sich die Anzahl der Schritte nur weiter erhöhen würde. Bei der Gegenüberstellung der Ergebnisse ist eine Regel für die *Ableitung* von *Polynomen* erkennbar, sodass die Prozedur des wiederholten Einsetzens überflüssig wird.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}1 &= 0\\ \frac{d}{dx}x &= 1 + x\frac{d}{dx} = 1\\ \frac{d}{dx}x^2 &= 2x + x^2\frac{d}{dx} = 2x\\ \frac{d}{dx}x^3 &= 3x^2 + x^3\frac{d}{dx} = 3x^2\\ \frac{d}{dx}x^4 &= 4x^3 + x^4\frac{d}{dx} = 4x^3\\ \frac{d}{dx}x^5 &= 5x^4 + x^5\frac{d}{dx} = 5x^4\end{aligned} \tag{8.7}$$

Gleichung (8.7) zeigt deutlich, dass sich die Potenz bei der Anwendung vom *Differentialoperator* um eins verringert und als *Vorfaktor* wieder zu finden ist. Somit ergibt sich folgende allgemeine Regel für die Anwendung des *Differentialoperators* - es wird auch vom „*Ableiten*“ gesprochen - auf ein *Polynom*:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx}\\ \Rightarrow \frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1}\end{aligned} \tag{8.8}$$

Als verkürzende Schreibweise soll von nun an gelten:

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \qquad . \tag{8.9}$$

Dabei bedeutet der Strich bei $f'(x)$, dass es sich um die *Ableitung* der *Funktion* $f(x)$ handelt und dass der wirkende *Differentialoperator* nach x (also $\frac{d}{dx}$) gewirkt hat. So gilt zum Beispiel ebenso:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}f(y) &= f'(y) \qquad \text{Funktion von } y \text{ deswegen Differentialoperator nach } y\\ \frac{d}{dz}f(z) &= f'(z) \qquad \text{Funktion von } z \text{ deswegen Differentialoperator nach } z\\ \frac{d}{dt}x(t) &= \dot{x}(t) \qquad \text{Funktion von } t \text{ deswegen Differentialoperator nach } t,\end{aligned} \tag{8.10}$$

wobei letztes ein Spezialfall der Physik ist, da nach der Zeit t *abgeleitet* wurde. Generell werden in der Physik immer die *Ableitungen* nach der Zeit mit einem *Punkt* über der *Funktion* beschrieben.

Da in den Schulen fast ausschließlich der *Differentialquotient* benutzt wird um diese neuen mathematischen *Operationen* einzuführen, wird dieser in einem Nachtragsabschnitt (8.17) erläutert.

8.1.1 Übungsaufgaben zum Differentiationsoperator

Aufgabe 1: *Führe den Operator mit Hilfe des Kommutators an allen Termen vorbei.*

a) $\frac{d}{dx}x^4$

b) $\frac{d}{dx}3x^2$

c) $\frac{d}{dx}6$

d) $\frac{d}{dx}2x^3$

e) $\frac{d}{dx}(x+1)$

f) $\frac{d}{dx}x+1$

g) $\frac{d}{dx}x^4+2x^2$

h) $\frac{d}{dx}\left(x^3+x^2\right)$

i) $\frac{d}{dx}5\left(x^2+x\right)$

j) $\frac{d}{dx}x^2+x^7$

k) $\frac{d}{dx}5x^3+8x^9$

l) $\frac{d}{dx}\left(x^3+77\right)+x^9$

Aufgabe 2: *Leite die Funktionen ab.*

a) $f(x)=x^6$

b) $f(x)=x^{55}$

c) $f(x)=2x^7$

d) $f(x)=\frac{1}{2}x^{12}$

e) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$

f) $f(x)=x^{-1}$

g) $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$

h) $f(x)=x^{-\frac{3}{4}}$

i) $f(x)=x+1$

j) $f(x)=x^2+x^6+7$

k) $f(x)=4$

l) $f(x)=\pi x^3$

m) $f(x)=ex^4+\sqrt{2}$

n) $f(x)=\frac{4}{x^2}$

o) $f(x)=\sqrt{4x}$

p) $f(x)=\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}+3$

q) $f(x)=-x^{\frac{2}{3}}$

r) $f(x)=-x^{-8}$

s) $f(x)=x^{-\frac{5}{6}}$

t) $f(x)=e\pi$

u) $f(x)=5x^3-3x^6+x^2$

v) $f(x)=8x^4-3x^2+5x+5$

w) $f(x)=3x^6-3x^{-3}+2x^3$

x) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

y) $f(x)=x^3-2x^2+\sqrt{x}$

z) $f(x)=x^{3n-2}$

Aufgabe 3: *Führe den Operator mit Hilfe des Kommutators an allen Termen vorbei. Halte immer alle angegebenen Ordnungen ausgeschrieben. Führe die Reihendarstellung anschließend durch Ausklammern wieder zur Funktionsdarstellung zurück.*

a) $\frac{d}{dx}e^x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \frac{d}{dx}\left[1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)\right]$

b) $\frac{d}{dx}e^{ax} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ax)^n = \frac{d}{dx}\left[1 + ax + \frac{1}{2!}a^2x^2 + \frac{1}{3!}a^3x^3 + \frac{1}{4!}a^4x^4 + \frac{1}{5!}a^5x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right)\right]$

c) $\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \frac{d}{dx}\left[x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \mathcal{O}\left(x^9\right)\right]$

d) $\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = \frac{d}{dx}\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \mathcal{O}\left(x^8\right)\right]$

e) $\frac{d}{dx}\sin ax = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(ax)^{2n+1} = \frac{d}{dx}\left[ax - \frac{1}{3!}a^3x^3 + \frac{1}{5!}a^5x^5 - \frac{1}{7!}a^7x^7 + \mathcal{O}\left(x^9\right)\right]$

f) $\frac{d}{dx}\cos ax = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(ax)^{2n} = \frac{d}{dx}\left[1 - \frac{1}{2!}a^2x^2 + \frac{1}{4!}x^4x^4 - \frac{1}{6!}a^6x^6 + \mathcal{O}\left(x^8\right)\right]$

Aufgabe 4: *Leite mit den Ergebnissen aus Aufgabe 3 folgende Funktionen ab.*

a) $f(x) = e^x$ *b)* $f(x) = e^{-x}$

c) $f(x) = e^{4x}$ *d)* $f(x) = \frac{1}{2}e^{-3x}$

e) $f(x) = \sin x$ *f)* $f(x) = -\sin x$

g) $f(x) = \cos x$ *h)* $f(x) = -\cos x$

i) $f(x) = \sin 4x$ *j)* $f(x) = -\sin 3x$

k) $f(x) = \cos 5x$ *l)* $f(x) = -\cos 2x$

Aufgabe 5: *Beweise durch vollständige Induktion die Ableitungsregel.* (Keine Lösung!)

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx}$$

Aufgabe 6: *Leite die Funktionen dreimal ab und schreibe alle Ableitungen auf ($f'(x), f''(x), f'''(x)$).*

a) $f(x) = x^7$

b) $f(x) = 2x^5$

c) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 6x$

d) $f(x) = 2x^4 + x^2 - 7$

e) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{8}x^8 + 2x^2$

f) $f(x) = \frac{5}{7}x^4 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{2}{3}$

g) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

h) $f(x) = x^{-1}$

i) $f(x) = x^{\frac{11}{3}}$

j) $f(x) = x^{-\frac{4}{5}}$

k) $f(x) = e^{-2x}$

l) $f(x) = \sin(3x)$

Aufgabe 7: *Leite die Funktionen ab.*

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = 3x^5$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = 2x^6 + 3$

e) $f(x) = 17x^{\frac{3}{2}}$

f) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} + 4,14$

g) $f(x) = x^{-2}$

h) $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$

i) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^5$

j) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

k) $f(x) = 34x^10 + 4x^5 + 3x$

l) $f(x) = 5x^2 + 12x^3 + 43$

m) $f(x) = 6x^7 + x^5 + 17$

n) $f(x) = 2x^4 + 2x + 9$

o) $f(x) = e^x$

p) $f(x) = e^{4x}$

q) $f(x) = e^{7x}$

r) $f(x) = e^{-5x}$

s) $f(x) = e^{\frac{1}{4}x}$

t) $f(x) = e^{\sqrt{2}x}$

u) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$

v) $f(x) = e^{-\frac{3}{7}x}$

Aufgabe 8: *Vereinfache den Term maximal.*

a) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}x^3 =$	b) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}4x^6 =$
c) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}7x =$	d) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left(3x^4 - 2x^3\right) =$
e) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left(4x^2 + 6x + 7\right) =$	f) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left(8x^3 - 3x^2 + 5x - 2\right) =$
g) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\sqrt{x} =$	h) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{1}{x} =$
i) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}e^x =$	j) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}e^{-\frac{1}{2}x} =$
l) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}2x^{-3} =$	k) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{3}{4}x^{\frac{5}{3}} =$

Aufgabe 9: *Vereinfache den Term maximal.*

a) $\frac{d}{da}a^3 + \frac{d}{db}\frac{1}{2}b^4 =$	b) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}x^3y^2 =$
c) $\frac{d}{dy}3x^3 =$	d) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\frac{d}{dz}\left(2x^3 - 4y^2 + 7z^5\right) =$
e) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\frac{d}{dz}\left(2x^2yz - 2xy^2 + xyz^5\right) =$	f) $\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\left(e^{-2x} + xy\right) =$

Aufgabe 10: *Bilde insgesamt drei Ableitungen der Funktionen und notiere diese.*

a) $f(x) = 3x^6 - 3x^2$	b) $f(x) = 4x - 5x^4$
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4$	d) $f(x) = \frac{5}{7}x + 5 - 3x^2 - \frac{4}{3}x^3$
e) $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 - x^{-1}$	f) $f(x) = \frac{1}{6}x^{-2} + \frac{3}{4x}$
g) $f(x) = 3x^2 - 4\sqrt{x}$	h) $f(x) = x^{\frac{9}{4}} - 3x^{\frac{13}{5}}$
i) $f(x) = \frac{6}{88}x^{\frac{11}{3}} + 3x^{-\frac{1}{4}}$	j) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - \frac{1}{30}x^6$
l) $f(x) = \sqrt[6]{\sqrt[4]{x^5}^3}$	k) $f(x) = \sqrt{\left(x^2\right)^5}^{\frac{7}{8}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$
m) $f(x) = (x-2)^2$	n) $f(x) = \left(x\sqrt{x} + 2\right)^3$

Aufgabe 11: *Leite die Funktion ab.*

$a)\ f(x) = \frac{3}{x^4}$	$b)\ f(x) = 2\sqrt[4]{x}$	$c)\ f(x) = 14\sqrt[7]{x}$
$d)\ f(x) = -\frac{2}{x^3}$	$e)\ f(x) = 3\sqrt[3]{x^5}$	$f)\ f(x) = 3\sqrt[9]{x^7} - 2$
$g)\ f(x) = \frac{7}{3x^6}$	$h)\ f(x) = \frac{2x^4}{7x^9}$	$i)\ f(x) = \frac{8}{5x^2}x^7$
$j)\ f(x) = \frac{2}{x^{-1}} + 3$	$k)\ f(x) = 6\sqrt[4]{16x^9}$	$l)\ f(x) = \sqrt[7]{x^2} - \pi$
$m)\ f(x) = \frac{9}{x^{-3}} + 5x$	$n)\ f(x) = -\frac{2}{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$	$o)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x}}$
$p)\ f(x) = \frac{1}{\left(x^3\right)^{-2}} - 6x^{\frac{2}{3}}$	$q)\ f(x) = \sqrt[5]{\frac{4}{7x^3}} - e^2$	$r)\ f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[2]{\frac{6}{5x^7}}}\right)^3 + \chi x - \phi$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.57) Lösungen zur Differentiationsoperator.

8.2 Ableitungsregeln

Die erste *Ableitungsregel* wurde schon in *Gleichung* (8.8) beschrieben und gilt für jede Art von *Polynomen*.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx} \tag{8.11}$$

Diese *Ableitungsregel* ist besonders nützlich im Zusammenhang mit den *Potenzgesetzen*, denn so lassen sich bestimme *Funktionen* über einer *Variable* als *Basis* mit einer Zahl im *Exponenten darstellen*. Mit Hilfe dieser *Ableitungsregel* besteht die Möglichkeit wesentlich komplexere, also zusammengesetzte, *Funktionen abzuleiten*. Dazu sei $f(x) = g(x) + h(x)$, dann gilt unter der Verwendung der Regeln für die Klammersetzung:

$$\frac{d}{dx}\left(g(x) + h(x)\right) = \frac{d}{dx}g(x) + \frac{d}{dx}f(x) \tag{8.12}$$

Sei nun $f(x) = g(x)h(x)$ und zum Beispiel mit $g(x) = x^n$ und $h(x) = x^m$, dann gilt unter Berücksichtigung der *Potenzgesetze* und Gleichung (8.11) und der verkürzten Schreibweise aus *Gleichung* (8.9):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)h(x) &= \frac{d}{dx}x^n x^m = \frac{d}{dx}x^{n+m} = (n+m)x^{n+m-1} \\
&= \frac{d}{dx}x^n x^m = \left(nx^{n-1} + x^n\frac{d}{dx}\right)x^m \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n\frac{d}{dx}x^m \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n\left(mx^{m-1} + x^m\frac{d}{dx}\right) \\
&= nx^{n-1}x^m + x^n m x^{m-1} \\
&= g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \\
&= nx^{n-1+m} + mx^{n+m-1} = (n+m)x^{n+m-1}
\end{aligned} \tag{8.13}$$

Wie Gleichung (8.13) zeigt, kann diese Aufgabe schnell über die *Potenzgesetze* in einer Zeile gelöst werden. Dieses Ergebnis soll als Vergleich dienen, um die *Ableitungsregel* für *Polynome* auf die zusammengesetzte *Funktion* $f(x)$ anzuwenden. Dabei wird erneut wie schon beim Herleiten der *Ableitungsregel* für *Polynome* das *Einsetzungsverfahren* verwendet. In der vorletzten Zeile dieser Rechnung ist zu erkennen, dass

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g(x)h(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x) \quad , \tag{8.14}$$

gilt. Diese *Ableitungsregel* aus Gleichung (8.14) wird *Leibnizregel* oder *Produktregel* genannt. Ihr Nutzen wird sich offenbaren wenn nicht nur *Polynome* zur Diskussion stehen.

Mit der *Leibnizregel* und der *Substitution*, soll nun noch eine weitere *Ableitungsregel* bestimmt werden. Dabei soll gelten, dass die *Funktion* $f(x)$ eine verkettete *Funktion* sein soll: $f(x) = g(x) \circ h(x) = g\left(h(x)\right)$ mit dem Beispiel, dass $g(x) = x^2$ und $h(x) = 2x + 1$ sei - mit den *Ableitungen* $g'(x) = 2x$ und $h'(x) = 2$. Wie die Verkettung fordert, wir $h(x)$ in die *Funktion* $g(x)$ eingesetzt. Daraus ergibt sich folgende Ableitung mit der Überprüfung des Ergebnisses durch die *Ableitungsregel* der *Polynome* sowie den *Binomischen Formeln*:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g\left(h(x)\right) &= \frac{d}{dx}\left(2x+1\right)^2 = \frac{d}{dx}4x^2 + 4x + 1 = 8x + 4 \\
&= \frac{d}{dx}\left(2x+1\right)\left(2x+1\right) \quad \text{Leibnizregel} \\
&= \left(2x+1\right)\frac{d}{dx}\left(2x+1\right) + \left(2x+1\right)\frac{d}{dx}\left(2x+1\right) \\
&= \left(2x+1\right)2 + \left(2x+1\right)2 \\
&= 2 \cdot 2\left(2x+1\right) \quad \text{Vergleich mit } g'(x),\, h'(x) \text{ und } h(x) \\
&= h'(x) \cdot g'\left(h(x)\right) = 8x + 4
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

Die letzte Zeile offenbart durch den Vergleich der *Terme* mit den *Funktionen* $g(x)$ und $h(x)$ sowie ihren *Ableitungen* $g'(x)$ und $h'(x)$ die allgemeine Regel der *Ableitung* von verketteten *Funktionen*.

$$
f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}g\left(h(x)\right) = h'(x) \cdot g'\left(h(x)\right) \tag{8.16}
$$

Diese Regel wird *Kettenregel* genannt und wird ihre Bedeutung erst offenbaren, wenn *Funktionen* angenommen werden, deren abgekürzte Schreibweise ihre Herkunft aus *Polynomen* nicht mehr offensichtlich zeigen.
Mittels der *Substitution* $y := h(x)$ würde das *Polynom* in der Klammer ersetzt werden. Allerdings muss auch der *Ableitungsoperator* $\frac{d}{dx}$ nach $\frac{d}{dy}$ umgewandelt werden. Dies geschieht wie folgt (Hier sollte erwähnt werden, dass es sich lediglich um eine Nebenrechnung handelt, um die *Substitution* zu durchführen zu können. Die gezeigten Schritte der Rechnung sehen intuitiv aus, sind allerdings nicht ohne weitere Prüfungen und tiefer liegende Mathematik durchführbar.):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx} &= h'(x) \qquad |\cdot dx \\
dy &= dx \cdot h'(x) \qquad |: h'(x) \\
\Rightarrow dx &= \frac{dy}{h'(x)} \qquad \text{eingesetzt in: } \frac{d}{dx} \\
\Rightarrow \frac{d}{dx} &= h'(x)\frac{d}{dy}
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

Der gefundene Ausdruck für $\frac{d}{dx}$ wird nun mit eingesetzt, wenn die *Substitution* durchgeführt wird.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}g\left(h(x)\right) \qquad \text{mit: } y := h(x) \text{ und: } \frac{d}{dx} = h'(x)\frac{d}{dy} \\ &= h'(x)\frac{d}{dy}g(y) \\ &= h'(x)g'(y) \qquad \text{mit: } y = h(x) \text{ zurück eingesetzt} \\ &= h'(x)g'\left(h(x)\right)\end{aligned} \tag{8.18}$$

Gleichung (8.17) und (8.18) zeigen eine Herleitung der *Kettenregel* ohne Spezifizierung der *Funktionen*, sodass festgehalten werden kann, dass jede *differenzierbare verkettete Funktion* über diese Regel *ableitbar* ist.
Einige *Funktionen* haben eine sehr komplex anmutende Struktur, sodass die *Ableitung* manchmal nicht intuitiv erscheint. Allerdings erscheint oftmals die *Umkehrfunktion* dieser *Funktionen* in einer trivialeren Form. Aus diesem Grund muss ein Ausdruck gefunden werden, wie aus der leicht zu bestimmenden *Ableitung* der verwandten *Umkehrfunktion* die *Ableitung* der gewünschten *Funktion* gewonnen werden kann. Als Ansatz wird die Gleichung (6.25) gewählt:

$$\begin{aligned}f\left(f^{-1}(x)\right) &= x \qquad \left|\frac{d}{dx}\right. \\ \frac{d}{dx}f\left(f^{-1}(x)\right) &= \frac{d}{dx}x \qquad |\text{Kettenregel} \\ \left(\frac{d}{dx}f^{-1}(x)\right)f'\left(f^{-1}(x)\right) &= 1 \qquad \left|: f'\left(f^{-1}(x)\right)\right. \\ \frac{d}{dx}f^{-1}(x) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}\end{aligned} \tag{8.19}$$

Diese Gleichung zur Bestimmung der *Ableitung* einer *Umkehrfunktion* $f^{-1}(x)$ über die verwandte *Funktion* $f(x)$ ermöglicht es selbst *Umkehrfunktion* mit unbekannter Struktur abzuleiten, da lediglich die Struktur der *Funktion* bekannt sein muss.
Mit den erschlossenen *Ableitungsregeln* können alle *Funktionen* abgeleitet werden. Allerdings bedarf es bei speziellen *Funktionsarten* noch einen technischen Zwischenschritt der Vereinfachung, wobei die Gleichung (6.25) erneut ausgenutzt werden kann.

$$\begin{aligned}f(x) &= a^x \qquad \left|\text{mit: } f\left(f^{-1}(x)\right) = x\right. \\ f(x) &= e^{\ln a^x} \qquad |\text{mit: } \ln a^x = x\ln a \\ f(x) &= e^{x\ln a} \qquad \left|\frac{d}{dx}\right. \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}f(x) &= a^x \ln a\end{aligned} \tag{8.20}$$

An Gleichung (8.20) ist deutlich zu erkennen, wie die Verbindung zwischen *Funktion* und *Umkehrfunktion* von der besonders leicht abzuleitenden *Exponentialfunktion* mit der Kombination der *Logarithmengesetze* ausgenutzt wird. Mittels dieses Verfahrens kann auch die Funktion $f(x) = x^x$ abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^x && \Big| \text{mit: } f\left(f^{-1}(x)\right) = x \\ f(x) &= e^{\ln x^x} && \Big| \text{mit: } \ln a^x = x \ln x \\ f(x) &= e^{x \ln x} && \Bigg| \frac{d}{dx} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) &= (\ln x + 1)\, e^{x \ln x} \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) &= (\ln x + 1)\, x^x \end{aligned} \tag{8.21}$$

8.2.1 Übungsaufgaben zu den Ableitungsregeln

Aufgabe 1: *Leite die Funktionen mit der Kettenregel ab.*

a) $f(x) = (2x+3)^3$

b) $f(x) = \left(x^3+2\right)^2$

c) $f(x) = \left(x^4 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

d) $f(x) = \sqrt{4x^2+3x}$

e) $f(x) = e^{3x^2}$

f) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x^3-4x+6}$

g) $f(x) = \sin(5x)$

h) $f(x) = \frac{1}{3}\cos(-2x^3)$

i) $f(x) = \left(3x^2-5\right)^{-2}$

j) $f(x) = \frac{3}{5}e^{\frac{2}{7}x^5-x^3+2x}$

k) $f(x) = \sqrt[3]{x^4-6x+3}$

l) $f(x) = 2\sin\left(x^3-2x^2+4x+9\right)$

m) $f(x) = \sqrt{e^{3x^2+1}}$

n) $f(x) = \sin\left(3\sqrt{2x+6}\right)$

o) $f(x) = \left(5x^2+6x\right)^{-\frac{1}{2}}$

p) $f(x) = (\cos(3x))^{-3}$

Aufgabe 2: *Leite die Funktionen mit der Produktregel ab.*

a) $f(x) = xe^x$

b) $f(x) = x^3e^x$

c) $f(x) = 2x^2e^{5x}$

d) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}x}$

e) $f(x) = x^4\sin(5x)$

f) $f(x) = \frac{1}{2}x^{2,34}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

g) $f(x) = \frac{x^2-3}{x}$

h) $f(x) = 2\sqrt{x}\sqrt[5]{3x}$

i) $f(x) = \frac{e^{-4x}}{8x^2}$

j) $f(x) = \left(x^3+4x-5\right)e^{-2x}$

k) $f(x) = xe^{-x}\sin(2x)$

l) $f(x) = (x+\sin(2x))\,e^x$

m) $f(x) = e^{-3x}\cos\left(\frac{3x}{4}\right)$

n) $f(x) = \sin(ax)\cos(bx)$

o) $f(x) = e^{-2x}\cos(6x)\cos(\pi x)$

p) $f(x) = \sin(ax)\cos(bx)e^{dx}$

Aufgabe 3: *Leite die Funktionen mithilfe der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen ab.*

a) $f^{-1}(x) = \ln x$ *b)* $f^{-1}(x) = \log_a x$

c) $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ *d)* $f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$

e) $f^{-1}(x) = \tan^{-1} x$ *f)* $f^{-1}(x) = \cot^{-1} x$

Aufgabe 4: *Leite die Funktionen ab.*

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *b)* $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 3}{2x - 1}$

c) $f(x) = x \ln x - x$ *d)* $f(x) = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2a} \sin^2 ax$ *f)* $f(x) = \dfrac{ax - 1}{a^2} e^{ax}$

Aufgabe 5: *Bilde insgesamt drei Ableitungen der Funktionen und notiere diese.*

a) $f(x) = \dfrac{3}{8} x^2 e^{-x}$ *b)* $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)$

c) $f(x) = e^{-2x^2+4}$ *d)* $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$

e) $f(x) = 3x\sqrt{2x + 5}$ *f)* $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{3}{4}x}}{x}$

g) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x + 1}$ *h)* $f(x) = \dfrac{4}{5}\sqrt[3]{2x^2 + 4}$

i) $f(x) = x^3 \cos\left(\dfrac{1}{3}\pi x\right)$ *j)* $f(x) = \sin(x)\cos(x) + e^{-x}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{10} x \ln\left(x^5\right)$ *k)* $f(x) = \ln\left(\dfrac{3x^x yg}{4az}\right)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.58) Lösungen zu den Ableitungsregeln.

8.3 Taylorentwicklung

Viele *Funktionen* sind relativ einfach zu *differenzieren*, allerdings schwer zu analysieren. Durch die sogenannte *Taylorentwicklung* kann jede *Funktion iterativ* durch ein *Polynom* beschrieben werden. Die *Taylorentwicklung* ist definiert durch die *Taylorreihe*:

$$\mathcal{T}_f(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \right|_{x=a} (x-a)^n \quad . \tag{8.22}$$

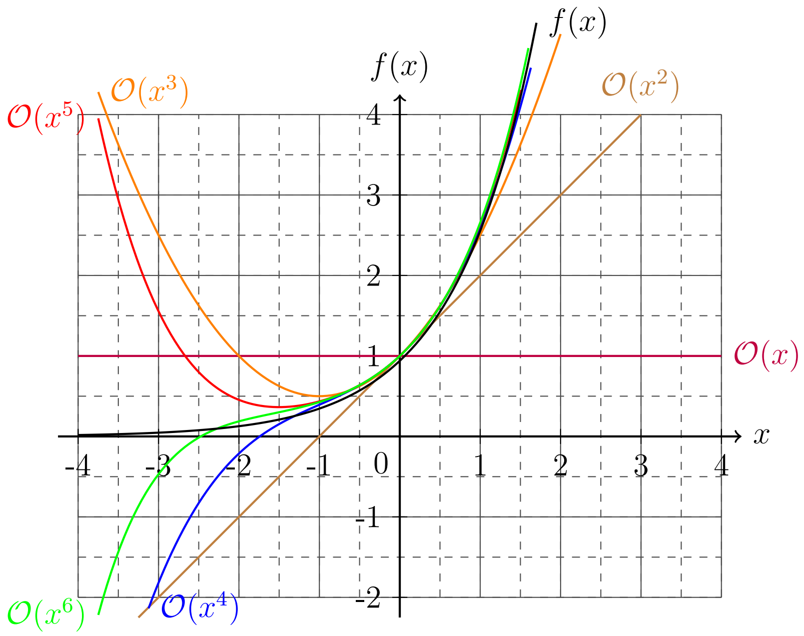
Die *Taylorreihe* $\mathcal{T}$ der *Funktion* $f(x)$ um die Stelle a ist gegeben durch *Summe* der n-ten *Ableitungen* $f^{(n)}(x)$ durch die n-te *Fakultät*. Nachdem die *Ableitungen* gebildet wurden soll links vom Querstrich | alle *Variablen* x durch den *Wert* a ersetzt werden. Abschließend bekommt jeder *Summand* der gesamten *Summe* ein *binomiales Polynom* der n-ten *Ordnung*.
Mittels der *Taylorreihe*, kann jeder *Funktion* als *Polynom* dargestellt werden. Somit ist die Entwicklung einer beliebigen *Funktion* $f(x)$ um den *Wert* $a = 0$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_f(x;0) &= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.23}$$

Unter der Anwendung der Gleichung (8.22) kann die *Funktion* $f(x) = e^x$ um $a = 0$ entwickelt werden.

$$\mathcal{T}_f(x;0) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \mathcal{O}\left(x^6\right) \quad . \tag{8.24}$$

Graphisch lässt sich die Annäherung an der *Funktion* $f(x)$ um den *Punkt* $a = 0$ durch die Einzeichnung der *Graphen* je nach betrachteter *Ordnung* $\mathcal{O}\left(x^n\right)$. Hieraus folgt, dass mit zunehmender *Ordnung* die Genauigkeit der Annäherung zunimmt.



8.3.1 Übungsaufgaben zur Taylorentwicklung

Aufgabe 1: *Entwickle bis zur angegebenen Ordnung und um den angegeben Punkt.*

$$
\begin{aligned}
&a)\ \ f(x)=\sin(x) && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^8) && \text{um } a=0 && \forall x\in\mathbb{R}\\
&b)\ \ f(x)=\cos(x) && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^9) && \text{um } a=0 && \forall x\in\mathbb{R}\\
&c)\ \ f(x)=\sqrt{1+x} && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^5) && \text{um } a=0 && \forall\,|x|\le 1\\
&d)\ \ f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}} && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^5) && \text{um } a=0 && \forall\,|x|<1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: *Entwickle bis zur angegebenen Ordnung und um den angegeben Punkt.*

$$
\begin{aligned}
&a)\ \ f(x)=3x^4-6x^3+4x-5 && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^3) && \text{um } a=2\\
&b)\ \ f(x)=-2x^6+2x^2-3x && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^4) && \text{um } a=1\\
&c)\ \ f(x)=7x^3-\sqrt{5x}+\frac{1}{2}x^5 && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^3) && \text{um } a=5\\
&d)\ \ f(x)=\frac{3}{4}x^7-\frac{2}{5}x^4-\frac{5}{6}x^2 && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^5) && \text{um } a=3\\
&e)\ \ f(x)=\frac{x^3-2x^2+5}{x-1} && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^3) && \text{um } a=-1\\
&f)\ \ f(x)=\frac{2x^4+6x-2}{4x^2+x-2} && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^5) && \text{um } a=4\\
&g)\ \ f(x)=\frac{3x^5-4}{3x^4-3} && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^4) && \text{um } a=-2\\
&h)\ \ f(x)=\frac{6x+3}{x^2-4} && \text{bis}\ \ \mathcal{O}(x^4) && \text{um } a=3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3: *Entwickle bis zur angegebenen Ordnung und um den angegeben Punkt.* (Mit Musterlösung!)

a) $f(x) = x^7 - 3x$ bis $\mathcal{O}(x^3)$ um $a = 0$

b) $f(x) = \frac{1}{2}e^{4x}$ bis $\mathcal{O}(x^4)$ um $a = 0$

c) $f(x) = x^4 - 4x^2 - 2$ bis $\mathcal{O}(x^2)$ um $a = 2$

d) $f(x) = \sqrt{x}$ bis $\mathcal{O}(x^4)$ um $a = 1$

e) $f(x) = \ln(x)$ bis $\mathcal{O}(x^3)$ um $a = 1$

f) $f(x) = \tan(\cos(x))$ bis $\mathcal{O}(x^2)$ um $a = -\frac{\pi}{2}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.59) Lösungen zur Taylorentwicklung.

8.4 Tangentengleichungen

Oftmals ist die *momentane Steigung* in einem Punkt $x = a$ interessant, denn mit ihr kann ein mögliches weiteres Verhalten abgelesen werden. Dabei ist die *momentane Steigung* lediglich der *Funktionswert* der *Ableitung* $f'(a)$. Dabei bildet die *momentane Steigung* $f'(a)$ ebenfalls die *Steigung* einer *Tangenten* $t(a)$. Die *Tangentengleichung* kann über die *Taylorentwicklung* hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_f(x;a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left.\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|_{x=a} (x-a)^n \quad . \\ &= \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a)^1 + \mathcal{O}\left(x^2\right) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \mathcal{O}\left(x^2\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.25}$$

Wodurch sich durch das *Kommutativgesetz* die übliche Form einer *Geraden* ergibt, wenn höhere *Entwicklungsterme* $\mathcal{O}(x^2)$ vernachlässigt werden:

$$t(a) = f'(a)(x-a) + f(a) \quad . \tag{8.26}$$

Generell lässt sich festhalten, dass *Tangenten* die *Funktion lokal* nur berühren und nicht schneiden, es sei denn es handelt sich beim *Berührpunkt* um einen *Wendepunkt*. Am *Wendepunkte* anliegende *Tangenten* schneiden die *Funktion*, wobei bei *Sattelpunkten* die *Tangenten Konstanten* sind.

8.4.1 Übungsaufgaben zu Tangentengleichungen

Aufgabe 1: *Bestimme die momentane Steigung in den angegebenen Punkten.*

a) $f(x) = 3x^3$	$x_1 = 2$;	$x_2 = -1$;	$x_3 = 2,85$
b) $f(x) = 2x^2 - 4x$	$x_1 = -2$;	$x_2 = 1,5$;	$x_3 = -2,2$
c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2x$	$x_1 = -1$;	$x_2 = \frac{2}{5}$;	$x_3 = -\frac{11}{6}$
d) $f(x) = 1,67x^2 - 0,23x^5 + 3,8x$	$x_1 = -0,9$;	$x_2 = -\frac{3}{8}$;	$x_3 = 7,2$
e) $f(x) = -0,01x^5 + 0,15x^3 - 3x^2 + 5x$	$x_1 = \frac{5}{9}$;	$x_2 = -0,67$;	$x_3 = \frac{4}{3}$
f) $f(x) = 3,6x^4 - 2,1x^5 + 6,4x^2 - 4$	$x_1 = 3,2$;	$x_2 = \frac{4}{7}$;	$x_3 = -1,05$
g) $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 6$	$x_1 = -0,4$;	$x_2 = -\frac{5}{6}$;	$x_3 = \frac{7}{8}$
h) $f(x) = -\frac{4}{5}x^3 + \frac{6}{7}x$	$x_1 = 0,17$;	$x_2 = \frac{9}{4}$;	$x_3 = -0,02$
i) $f(x) = \frac{9}{5}x^6 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{8}{9}x^2$	$x_1 = \frac{2}{9}$;	$x_2 = 1,4$;	$x_3 = -\frac{7}{5}$

Aufgabe 2: *Bestimme die momentane Steigung in den angegebenen Punkten.*

a) $f(x) = 0,1e^x$	$x_1 = 0,17$;	$x_2 = \frac{9}{4}$;	$x_3 = -0,02$
b) $f(x) = \sin(2x)$	$x_1 = \frac{5}{4}$;	$x_2 = -0,67$;	$x_3 = \frac{7}{3}$
c) $f(x) = \sqrt{2x}$	$x_1 = 2$;	$x_2 = 1,5$;	$x_3 = 2,1$
d) $f(x) = \frac{3}{x}$	$x_1 = -0,4$;	$x_2 = -\frac{5}{6}$;	$x_3 = \frac{7}{8}$
e) $f(x) = 2,4\cos(1,3x - 1,7)$	$x_1 = -\frac{5}{4}$;	$x_2 = 1,1$;	$x_3 = -2,7$
f) $f(x) = 2x^2 - e^{-0,27x}$	$x_1 = \frac{5}{2}$;	$x_2 = 1,4$;	$x_3 = -\frac{8}{5}$
g) $f(x) = 1,9e^{-1,3x+1} - 0,4e^{-1,04x}$	$x_1 = \frac{5}{7}$;	$x_2 = -0,55$;	$x_3 = \frac{4}{5}$
h) $f(x) = \sqrt{2,09x + 3} + \frac{5}{x}$	$x_1 = -0,9$;	$x_2 = -\frac{3}{8}$;	$x_3 = 2,1$
i) $f(x) = x^2e^{2\sin(x)}$	$x_1 = 0,6$;	$x_2 = \frac{11}{7}$;	$x_3 = -0,78$
j) $f(x) = \frac{\sqrt{3x}}{4x}e^{1,16x}$	$x_1 = \frac{7}{5}$;	$x_2 = 1,72$;	$x_3 = \frac{11}{4}$

Aufgabe 3: *Bestimme die Tangentengleichungen in den angegebenen Punkten.*

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ $x_1 = -1$; $x_2 = 1$

b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$ $x_1 = 2$; $x_2 = -3$

c) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ $x_1 = 0,3$; $x_2 = \frac{1}{3}$

d) $f(x) = 3 - 3x + x^2$ $x_1 = -2$; $x_2 = 0,36$

e) $f(x) = -2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 4x$ $x_1 = \frac{2}{7}$; $x_2 = -\frac{4}{5}$

f) $f(x) = 0,4x^3 - 1,1x + 4,3$ $x_1 = \frac{5}{4}$; $x_2 = -0,67$

g) $f(x) = 1,53x^3 + 0,4x - 2,56x$ $x_1 = 0,6$; $x_2 = \frac{11}{7}$

h) $f(x) = -1,2x^3 - 1,8x - x + 1,64$ $x_1 = 1,72$; $x_2 = -\frac{11}{4}$

i) $f(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{3}{4}x^2$ $x_1 = \frac{5}{9}$; $x_2 = -0,67$

j) $f(x) = \frac{2}{9}x^5 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{5}x^2$ $x_1 = -\frac{5}{6}$; $x_2 = \frac{7}{8}$

k) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{8}x^5$ $x_1 = -\frac{5}{4}$; $x_2 = -2,7$

l) $f(x) = \sqrt{x+2}$ $x_1 = 0,17$; $x_2 = \frac{9}{4}$

m) $f(x) = \frac{5}{x}$ $x_1 = 0,37$; $x_2 = \frac{5}{6}$

n) $f(x) = e^{-2x+1}$ $x_1 = -\frac{3}{4}$; $x_2 = \frac{9}{8}$

o) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x}$ $x_1 = \frac{5}{2}$; $x_2 = 1,9$

p) $f(x) = x^3 e^{0,3x+2}$ $x_1 = \frac{1}{6}$; $x_2 = -\frac{1}{6}$

q) $f(x) = \sqrt{2x}\sin(0,2x)$ $x_1 = 1,72$; $x_2 = \frac{9}{11}$

r) $f(x) = e^{-3x^4 - 2x^2 + 2}$ $x_1 = 0,2$; $x_2 = -0,39$

s) $f(x) = \sqrt{3x^3 + e^x}$ $x_1 = 3,2$; $x_2 = \frac{4}{7}$

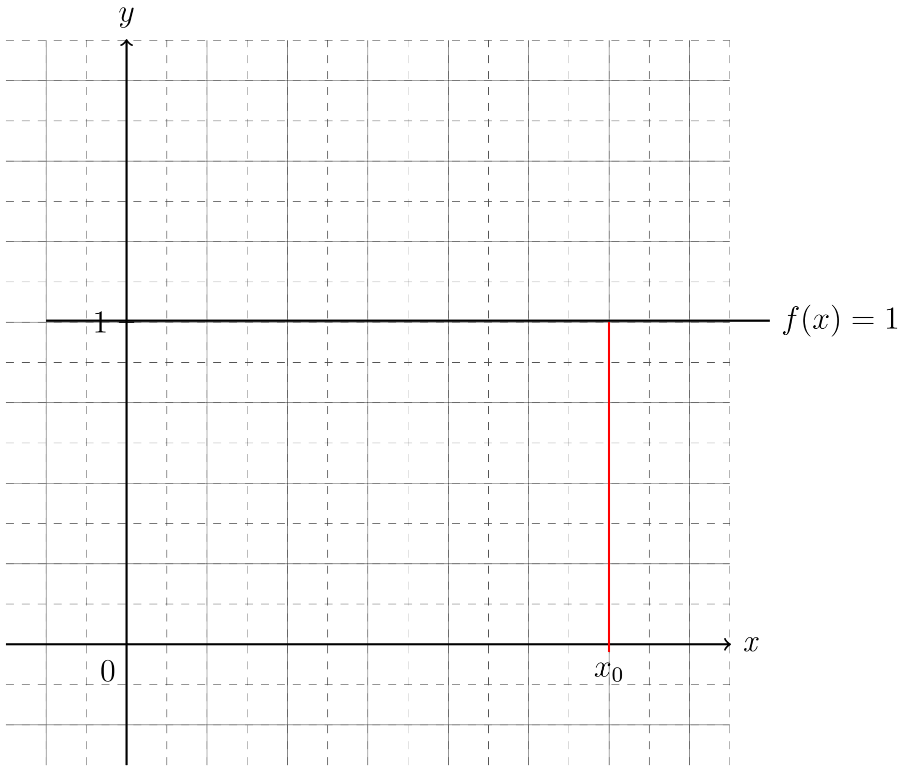
t) $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{2x^2 + 3}$ $x_1 = -\frac{1}{4}$; $x_2 = -\frac{5}{6}$

u) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{3x - 2}$ $x_1 = -3,141$; $x_2 = 2,781$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.60) Lösungen zu Tangentengleichungen.

8.5 Integration

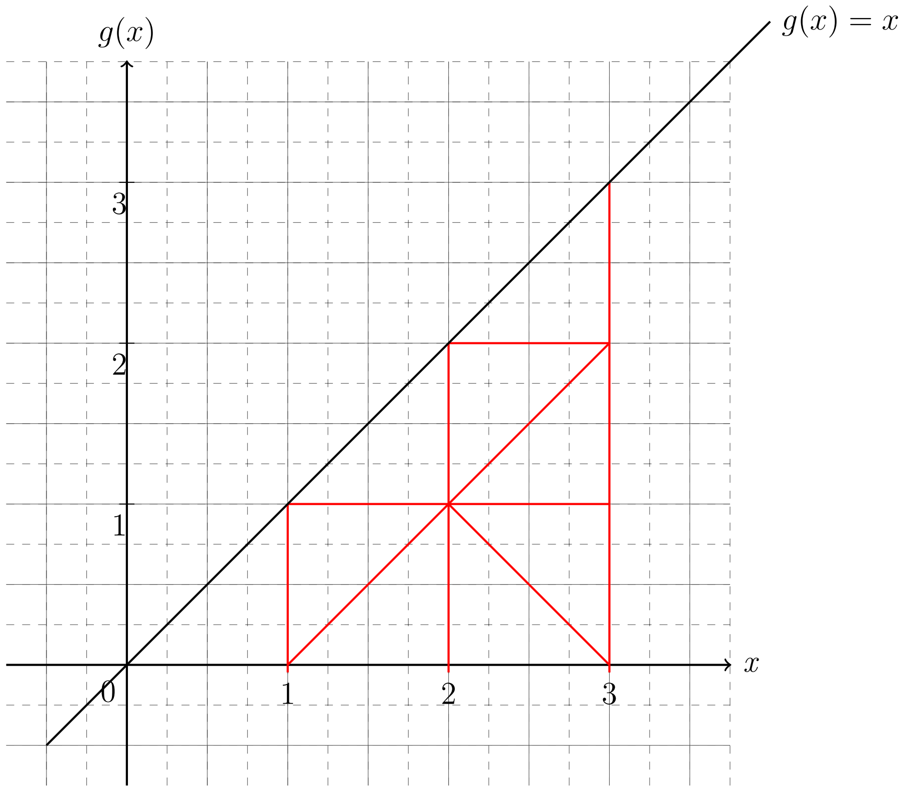
Nachdem die *Differentiation* zur Bestimmung der *Steigung* einer *Funktion* eingeführt wurde, soll nun eine weitere Eigenschaft der *Funktion* untersucht werden. Sei eine *Funktion* $f(x) = 1$ gegeben. Nun soll der *Flächeninhalt* bestimmt werden, der von der *x-Achse* und *Funktion* $f(x)$ eingeschlossen wird, von $x = 0$ bis $x = x_0$ bestimmt werden.



Der *Flächeninhalt* als *Funktion* $F(x)$ wäre gegeben als:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) \cdot x \qquad \text{mit: } f(x) = 1 \\ F(x) &= x \qquad \text{mit: } x = x_0 \\ \Rightarrow F(x_0) &= x_0 \end{aligned} \tag{8.27}$$

Die *Ableitung* der *Flächeninhaltsfunktion* $F(x)$ wäre wieder die *Funktion* $f(x)$. Als weiteres Beispiel soll die *Funktion* $g(x) = x$ gegeben sein und erneut soll der *Flächeninhalt* als *Funktion* von x, also $G(x)$, bestimmt werden.



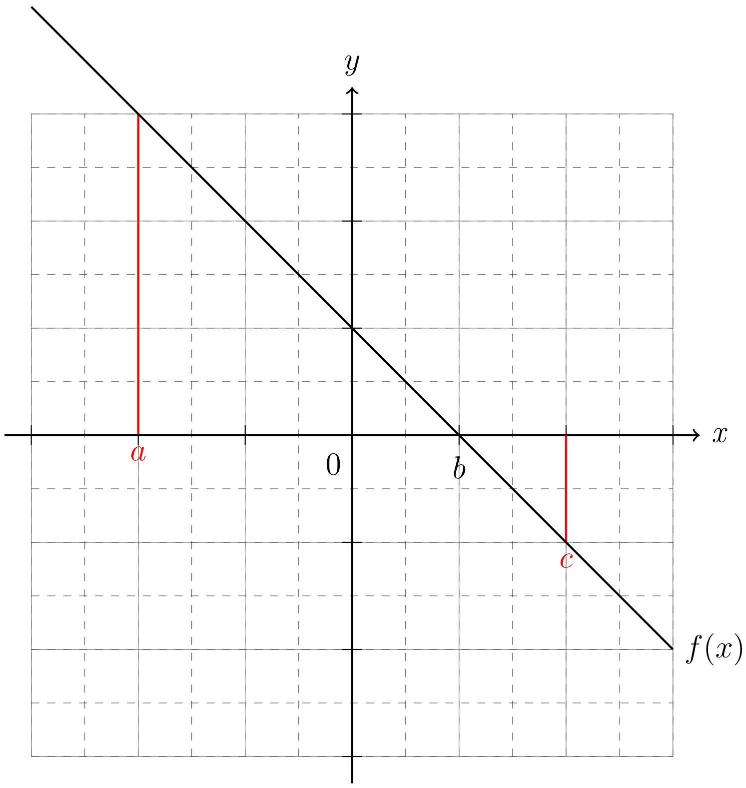
Der *Flächeninhalt* unterhalb der *Funktion* $g(x)$ bildet ein *Dreieck*. Somit ist die *Flächeninhaltsfunktion* $G(x)$ gegeben als:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{g(x) \cdot x}{2} \qquad \text{mit: } g(x) = x \\ G(x) &= \frac{1}{2}x^2 \end{aligned} \tag{8.28}$$

Die *Ableitung* der *Flächeninhaltsfunktion* $G(x)$ wäre $\frac{1}{2}2x = x = g(x)$. Somit wäre erneut die *Ableitung* der *Flächeninhaltsfunktion* $G(x)$ die *Ausgangsfunktion* $g(x)$. Aus dieser Erkenntnis kann wieder aus der sprachlichen Forderung „Bestimme den *Flächeninhalt* unter der *Funktion* $f(x)$ der durch die *Grenzen* $x = a$ bis $x = b$ und x-*Achse* begrenzt ist!“ einen mathematischen Formalismus entstehen lassen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)dx \\ F(a) - F(b) &= \int_a^b f(x)dx \\ F(x) + G(x) &= \int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \end{aligned} \tag{8.29}$$

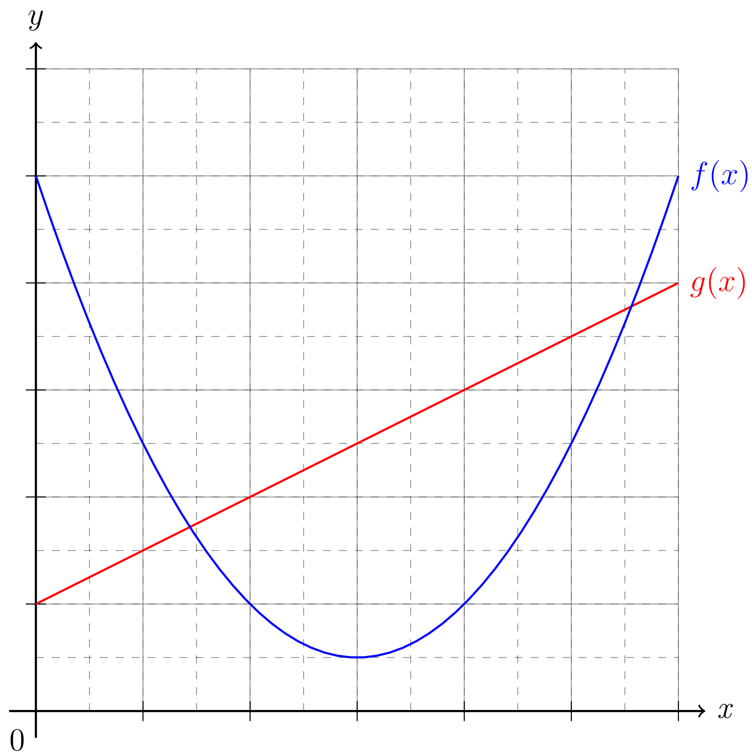
Diese *Operation* wird *Integration* genannt. Dabei wird Gleichung (8.29) gelesen als „Die *Stammfunktion* $F(x)$ ist gleich das *Integral* über die *Funktion* $f(x)$ nach x in den *Grenzen* von a bis b“. Bei der *Integration* mit *Grenzen* handelt es sich um die *bestimmte Integration*. Hierbei ist es wichtig, ob im *Integrationsintervall* sich eine *Nullstelle* befindet, denn wenn sich die *Funktion* unterhalb der *Abszisse* befindet, dann ist das *Vorzeichen* des *Flächeninhalts* negativ. Folglich gibt es durch die *Betragsfunktion* und durch die Umkehrung der *Integrationsgrenzen* eine Möglichkeit den gesamten *Flächeninhalt* zu bestimmen.



Mit der *Nullstelle* bei $x = b$ ist der *Flächeninhalt* zwischen $[a, c]$ durch das *Integral*

$$\begin{aligned}\int_a^c |f(x)|\,dx &= \int_a^b |f(x)| + \int_b^c |f(x)| \\ &= \int_a^b f(x) - \int_b^c f(x) \qquad \text{für} \quad f(x) \in \mathbb{R}^+ \forall x \in [a, b] \\ &= \int_a^b f(x) + \int_c^b f(x)\end{aligned} \tag{8.30}$$

beschrieben. Wenn der eingeschlossene *Flächeninhalt* zwischen zwei *Funktionen* bestimmt werden soll, müssen zu nächst die *Schnittpunkte* der *Funktionen* bestimmt werden, da diese die *Integrationsgrenzen* beschreiben.



Dabei wird der *Flächeninhalt* zwischen der *Funktion* $g(x)$ und der *Abszisse* vom *Flächeninhalt* zwischen der *Funktion* $f(x)$ und der *Abszisse subtrahiert*.

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{x_{\times_1}}^{x_{\times_2}} f(x) dx - \int_{x_{\times_1}}^{x_{\times_2}} g(x) dx \right| \\ &= \int_{x_{\times_1}}^{x_{\times_2}} \left| f(x) - g(x) \right| dx \end{aligned} \tag{8.31}$$

Bei dieser *Flächeninhaltsbestimmung* muss immer beachtet werden, welche *Funktion* die höheren *Funktionswerte* im jeweiligen *Intervall* besitzt. Von dieser *Funktion* wird stets die *Funktion* mit den niedrigeren *Funktionswerten* unterm *Integral* - dem sogenannten *Integranden* - abgezogen.

8.5.1 Übungsaufgaben zur Integration

Aufgabe 1: *Integriere die Funktionen.*

a) $\int x^3 dx =$ *b)* $\int 4x^6 dx =$

c) $\int 3x - 3dx =$ *d)* $\int 9dx =$

e) $\int x^5 - x^3 + 5dx =$ *f)* $\int 4x^3 + xdx =$

g) $\int \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} dx =$ *h)* $\int 11x^5 - 6x^3 dx =$

i) $\int \frac{10}{3}x^9 - 3x^8 + 5x^6 dx =$ *j)* $\int \frac{12}{5}x^4 - x^3 + 7x^2 - 19x + 3dx =$

k) $\int \sqrt{x} dx =$ *l)* $\int \frac{1}{x^2} dx =$

Aufgabe 2: *Berechne die Integrale.*

a) $\int_2^4 x^6 dx =$ *b)* $\int_1^6 4x^2 dx =$

c) $\int_0^4 7x - 3x^2 dx =$ *d)* $\int_{-2}^3 5xdx =$

e) $\int_0^7 6x^2 - 2x + 5dx =$ *f)* $\int_{-1}^2 2x^2 + 5xdx =$

g) $\int_{-\frac{1}{2}}^2 \frac{5}{6}x^{\frac{7}{5}} dx =$ *h)* $\int_{-\frac{6}{5}}^5 4x^2 + 2x - 6dx =$

i) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} 3x^2 + 4x - 8dx =$ *j)* $\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{2}{3}} -7x^2 + 5x + 4dx =$

k) $\int_2^3 \sqrt{x} dx =$ *l)* $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2} dx =$

Aufgabe 3: *Berechne die Integrale.*

a) $\int_2^4 \left|x^6\right| dx =$

b) $\int_1^6 \left|4x^2\right| dx =$

c) $\int_0^4 \left|7x - 3x^2\right| dx =$

d) $\int_{-2}^3 |5x| \, dx =$

e) $\int_0^7 \left|6x^2 - 2x + 5\right| dx =$

f) $\int_{-1}^2 \left|2x^2 + 5x\right| dx =$

g) $\int_{-\frac{1}{2}}^2 \left|\frac{5}{6}x^{\frac{7}{5}}\right| dx =$

h) $\int_{-\frac{6}{5}}^5 \left|4x^2 + 2x - 6\right| dx =$

i) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \left|3x^2 + 4x - 8\right| dx =$

j) $\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{2}{3}} \left|-7x^2 + 5x + 4\right| dx =$

k) $\int_2^3 \left|\sqrt{x}\right| dx =$

l) $\int_{-3}^{-1} \left|\frac{1}{x^2}\right| dx =$

Aufgabe 4: *Vergleiche Aufgabe 3 und Aufgabe 4.*

Aufgabe 5: *Bestimme den Flächeninhalt zwischen den Funktionen.*

a) $f(x) = x + 2$ und $g(x) = x^2 - 2x + 4$

b) $f(x) = -x + \frac{1}{4}$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}$

c) $f(x) = \frac{1}{4}x - 3$ und $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 + x - 2$

d) $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = x^2 - 2x + 4$

e) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ und $g(x) = -2x^2 - 4x + 4$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$

Aufgabe 6: *Berechne den Wert des uneigentlichen Integrals.*

a) $\int\limits_0^\infty e^{-x}dx$ *b)* $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

c) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$ *d)* $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$

e) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^n}dx$ *f)* $\int\limits_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^n}}dx$

Aufgabe 7: *Bestimme den eingeschlossenen Flächeninhalt zwischen den Funktionen.*

a) $f(x) = x^2 - 2x + 2 \quad \wedge \quad g(x) = -x^2 + 5x + 3$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 4 \quad \wedge \quad g(x) = -3x^2 + 2x + \frac{4}{5}$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{4}x^2 - 5x \quad \wedge \quad g(x) = \frac{6}{5}x^2 - 2x$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 3x \quad \wedge \quad g(x) = -4x^3 + 3x^2 + 4x$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^3 \quad \wedge \quad g(x) = -x^3 + 5x^2$

f) $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{23}{7}x^2 + \frac{17}{9} \quad \wedge \quad g(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{23}{7}x^2 - \frac{17}{9}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.61) Lösungen zur Integration.

8.6 Integrationsregeln

Nachdem der Formalismus eingeführt wurde, soll ein allgemeines *Polynom* x^n untersucht werden. Dazu wird die *Ableitung* von x^n gebildet und über *Äquivalenzumformung* und mit *Potenzgesetzen* die Gleichung umgestellt:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}x^n &= nx^{n-1} \qquad \text{substituiere: } m = n-1 \Rightarrow n = m+1 \\
\Rightarrow \frac{d}{dx}x^{m+1} &= (m+1)x^m \qquad |: (m+1) \\
\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1} &= x^m \qquad |\cdot dx \\
\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}x^{m+1}dx &= x^m dx \qquad \Big|\int \\
\Rightarrow \int x^m dx &= \frac{1}{m+1}x^{m+1}
\end{aligned} \tag{8.32}$$

Die letzte Zeile der Gleichung (8.32) zeigt die hergeleitete Regel für die *Integration* von *Polynomen*. Nachdem das generelle *Integrationsgesetz* für *Polynome* gefunden wurde, die *Produktregel* als Ausgangspunkt für die Herleitung einer weiteren *Integrationsregel* dienen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x)g(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad |\cdot dx \\
\frac{d}{dx}f(x)g(x)dx &= f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx \qquad \Big|\int \\
f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \qquad \Big| - \int f(x)g'(x)dx \\
\Rightarrow \int f'(x)g(x)dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx
\end{aligned} \tag{8.33}$$

Diese *Integrationsregel* wird „*partielle Integration*“ genannt. Sie wird dazu verwendet *Funktionsprodukte* zu *integrieren* bei dem eine *Teilfunktion* $f(x)$ leicht zu *integrieren* ist, während die andere *Teilfunktion* $g(x)$ eine *Funktion* ist die eine unbekannte *Stammfunktion* besitzt, deren *Ableitung* allerdings bekannt ist. Generell wird diese *Integrationsregel* dazu verwendet, um das *Produkt* eines *Polynoms* mit einer anderen *Funktion* zu *integrieren*. Dabei bildet in der Regel das *Polynom* die *Funktion* $g(x)$, sodass dieses nach mehrfacher Anwendung der *partiellen Integration* und dem *Einsetzungsverfahren* dieses *Polynom* restlos verschwindet und die *Funktion* $f(x)$ alleinstehend unter dem *Integral* vorzufinden.

Abschließend soll die *Kettenregel* in eine Regel der *Integration* überführt werden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f\left(g(x)\right) &= g'(x) f'\left(g(x)\right) && |dx \\ \frac{d}{dx} f\left(g(x)\right) dx &= g'(x) f'\left(g(x)\right) dx && \Bigg| \int \\ f\left(g(x)\right) &= \int g'(x) f'\left(g(x)\right) dx \end{aligned} \tag{8.34}$$

Durch *Substitution* lässt sich dieses *Integral* lösen, hierbei wird $y := g(x)$ gewählt:

$$\begin{aligned} &\int g'(x) f'\left(g(x)\right) dx && \text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\ &= \int f'\left(y\right) dy = f(y) && \text{zurück eingesetzt: } g(x) = y \\ &= f\left(g(x)\right) \end{aligned} \tag{8.35}$$

Aus den Gleichungen (8.34) und (8.35) ist erkennbar, dass die *Kettenregel* der *Ableitung* überführt in die *Integration* durch *Substitution* bearbeitet werden kann. Aus diesem Grund wird diese Regel „*Integration* durch *Substitution*“ genannt.

Mit *Grenzen* würde sich bei der *Integration* durch *Substitution* die *Grenzen* mit verändern:

$$\begin{aligned} &\int_a^b g'(x) f'\left(g(x)\right) dx && \text{substituiere: } y := g(x) \Rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)} \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right) dy \end{aligned} \tag{8.36}$$

Dabei wird die obere *Grenze* und die unteren *Grenze* eingesetzt in die *Stammfunktion* und anschließend von einander *subtrahiert*. Für diesen Prozess gibt es zwei verschiedene Schreibweisen. Die erste Schreibweise umklammert den *Term*, in den einzusetzen ist, während die zweite Schreibweise einen senkrechten Strich vorsieht und aussagt, dass für alle *Variablen* links vom Strich eingesetzt werden soll.

$$\begin{aligned} \int_{g(a)}^{g(b)} f'\left(y\right) dy &= \left[f\left(y\right)\right]_{g(a)}^{g(b)} \\ &= f(y)\big|_{x=g(a)}^{x=g(b)} \\ &= f\left(g(b)\right) - f\left(g(a)\right) \end{aligned} \tag{8.37}$$

Da nun alle Regeln für die *Integration* und der *Differentiation* bekannt sind, werden im folgenden Abschnitt beide Methoden dazu verwendet um spezielle Gleichungen zu lösen - die sogenannten *Differentialgleichungen*.

Eine erste Anwendung stellt die Bestimmung des *durchschnittlichen Abstands* zwischen *Funktionsgraphen* und *Abszisse* da, welcher sich durch die *Aufsummierung* (über das *Integral*) der *Funktionswerte dividiert* durch die *Aufsummierungspanne* des betrachteten *Intervalls* ergibt. Mittels des *Mittelwertsatz* der *Integralrechnung*, auch Cauchy'scher *Mittelwertsatz* genannt,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx \quad , \tag{8.38}$$

der seine Gültigkeit für alle *Funktionen* $g(x)$ im *Intervall* $[a;b]$ besitzt und somit einen *Variablenwert* ξ im $[a;b]$, der den *Mittelwert* $f(\xi)$ angibt, ist es möglich den *durchschnittlichen Abstand* zwischen der *Abszisse* und dem *Funktionsgraphen* in einem *Intervall* berechnen. Dafür wird der Spezialfall für $g(x) = 1$ betrachtet.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= f(\xi)\int_a^b 1dx \\ \int_a^b f(x)dx &= f(\xi)(b-a) \\ \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= f(\xi) \end{aligned} \tag{8.39}$$

Hierbei gibt in diesem Spezialfall für $g(x) = 1$ der *Funktionswert* $f(\xi)$ den *durchschnittlichen Abstand* zwischen *Abszisse* und *Funktionsgraphen* an.

8.6.1 Übungsaufgaben zu den Integrationsregeln

Aufgabe 1: *Integriere die Funktionen mit der partiellen Integration.*

a) $\int xe^x dx =$

b) $\int 2xe^{4x} dx =$

c) $\int x^2 e^{2x} dx =$

d) $\int x^3 e^{-x} dx =$

e) $\int x\sin(x) dx =$

f) $\int x\cos(2x) dx =$

g) $\int 3x\sin(-x+1) dx =$

h) $\int x^2\cos(-3x+4) dx =$

i) $\int x^3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) dx =$

j) $\int 4x^2 2^x dx =$

k) $\int \frac{3}{4}x^2 e^{-x} - 1 dx =$

l) $\int \sin(x)\cos(x) dx =$

Aufgabe 2: *Integriere die Funktionen durch Substitution.*

a) $\int 2xe^{x^2} dx$

b) $\int x^3 e^{\frac{1}{4}x^4} dx$

c) $\int 12x^3 e^{4x^4} dx$

d) $\int \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} e^{\sqrt{x^3}} dx$

e) $\int 4x^3\cos(x^4) dx$

f) $\int x\sin(2x^2) dx$

g) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\sqrt{\tan(x)} dx$

h) $\int \frac{1}{x}\sin(\ln(x)) dx$

i) $\int (3x^2-4x+7)e^{x^3-2x^2+7x-11} dx$

j) $\int 7x^2 e^{x^3+4} dx$

k) $\int \sin(2x)e^{\cos(2x)} dx$

l) $\int 4x^2\cos(2x^3+4)e^{\sin(2x^3+4)} dx$

Aufgabe 3: *Integriere die Funktionen.*

a) $\displaystyle\int x^2 - \sin(4x+1)\,dx$

b) $\displaystyle\int 3xe^{-\frac{1}{2}x} + \frac{2}{x}dx$

c) $\displaystyle\int (3x+1)e^{3x^2+2x}\cos\left(e^{3x^2+2x}\right)dx$

d) $\displaystyle\int \frac{2x^2+4}{x}dx$

e) $\displaystyle\int (x^2+x+1)e^x dx$

f) $\displaystyle\int 5xe^{-2x}e^{3x}e^{-\frac{4}{5}x}dx$

g) $\displaystyle\int 4x^2e^{\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}}dx$

h) $\displaystyle 4\int x\sqrt{2x^2+2} + \frac{1}{2}e^x dx$

i) $\displaystyle\int x\cos(2x) + \frac{x}{3}\sin(3x)dx$

j) $\displaystyle\int e^{3x-2}(2x-3)dx$

k) $\displaystyle\int \cos(3x+2)\tan(3x+2)dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x\sin(\tan(3x^2+5))}{\cos(3x^2+5)^2}e^{\cos\left(\tan\left(3x^2+5\right)\right)}dx$

Aufgabe 4: *Berechne das bestimmte Integral.*

a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x}{5}\sin(x)dx$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{0,2x-2}{x}dx$

c) $\displaystyle\int_0^3 2xe^{-x^2}dx$

d) $\displaystyle\int_3^4 \sqrt{x}\cos(x^{\frac{3}{2}}+6)dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^7 (x+1)e^{-x}dx$

f) $\displaystyle\int_{0,1}^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

g) $\displaystyle\int_0^{x_N} (2x-x^2)\sqrt{x}dx$

h) $\displaystyle\int_0^{x_N} x\sqrt{2-\frac{2}{5}x^2}dx$

Aufgabe 5: *Berechne das bestimmte Integral.*

a) $\int_{0}^{x_N>0} (x^3 - 2x^2 - x)e^x dx$ b) $\int_{1}^{2} (x^2 - 5x + 6)ln(x)dx$

c) $\int_{-1}^{1} xe^x - x^3 - 2dx$ d) $\int_{4}^{6} (x^2 - x)\sin(x)dx$

Aufgabe 6: *Bestimme den Flächeninhalt zwischen der Funktion und der Abszisse in den angegebenen Grenzen.*

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2 \;\;,\;\; [0; 4]$ b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x \;\;,\;\; [-2; 3]$

c) $f(x) = -0,1x^2e^x \;\;,\;\; [-9; 0]$ d) $f(x) = x^2e^{-x^3} \;\;,\;\; [0; 8]$

e) $f(x) = 4x\ln(x) \;\;,\;\; [0; 2]$ f) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 \;\;,\;\; [x_{N_1}; x_{N_2}]$

g) $f(x) = \sin(-x + 2)e^{\cos(-x+2)} \;\;,\;\; [0; 2]$ h) $f(x) = 3\frac{\sqrt{\tan(3x)}}{\cos^2(3x)} \;\;,\;\; \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$

Aufgabe 7: *Bestimme den eingeschlossenen Flächeninhalt zwischen den Funktionen.* (Benötigt Abschnitt „Näherungsverfahren“!)

a) $f(x) = x^2 - 2x - 2 \;\;\wedge\;\; g(x) = (x - 1)e^{-x}$

b) $f(x) = \sqrt{x + 2} \;\;\wedge\;\; g(x) = x^2 - 6x - 3$

c) $f(x) = x\ln(x) \;\;\wedge\;\; g(x) = 4xe^{-x^2} - 0.5$

d) $f(x) = (3x - 2)\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 2x} \;\;\wedge\;\; g(x) = \frac{1}{5}x^8 - 2x^4 + 5$

Aufgabe 8: *Berechne den durchschnittlichen Abstand zwischen der Abszisse und dem Funktionsgraphen im angegebenen Intervall.*

a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ in: $[2; 9]$ b) $f(x) = x^2 - x + 1$ in: $[0; 3]$

c) $f(x) = \sqrt{x + 3}$ in: $[-2; 8]$ d) $f(x) = xe^x$ in: $[-3; 0]$

Aufgabe 9: *Berechne den durchschnittlichen Abstand zwischen den Funktionsgraphen im angegebenen Intervall.*

a) $f(x) = x^2 \quad \wedge \quad h(x) = x$ in: $[1; 4]$

b) $f(x) = -2(x-1)^2 - 1 \quad \wedge \quad h(x) = 2x^2 - 4x + 2$ in: $[-1; 3]$

c) $f(x) = \sin(x) \quad \wedge \quad h(x) = \cos(2x) + 2$ in: $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$

d) $f(x) = e^x \quad \wedge \quad h(x) = \ln(x)$ in: $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.62) Lösungen zu den Integrationsregeln.

8.7 Partielle und totale Differentiation

Es existieren mehrere Formen des *Differentialoperators*, dabei sind die meisten Formen zusammengesetzte Objekte aus *partiellen* und *totalen Differentialoperatoren*. Die zusammengesetzten Formen werden im Kapitel der *Vektoranalysis* weiter ausgeführt, während in diesem Abschnitt der Unterschied zwischen der *partiellen* und der *totalen Differentiation* herausgearbeitet wird. Der in den obrigen Abschnitten verwendete *Operator* ist der *totale Differentialoperator*:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad . \tag{8.40}$$

Dabei besitzt dieser *Operator* noch weitere Eigenschaften welche schon eingeführt wurden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) &= f'(x) \quad , \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}x^n f(x) &= nx^{n-1}f(x) + x^n f'(x) \quad , \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^n + f(x)\right) &= nx^{n-1} + f'(x) \quad . \end{aligned} \tag{8.41}$$

In der Gleichung (8.41) wird deutlich, dass der totale *Differentialoperator* auch Größen ableitet, welche nur eine Abhängigkeit - also keinen direkten Bezug zur betrachteten *Variable* - besitzen. Dies ist der gravierende Unterschied zum *partiellen Differentialoperators*, welcher indirekte Bezüge zur *Variable* ignoriert. Die Eigenschaften für die *partielle Differentiation* sind:

$$\frac{\partial}{\partial x}x^n = nx^{n-1} \quad , \tag{8.42}$$

wobei im Weiteren mehrere *Variablen* der *Funktion* angenommen werden, um die Eigenschaften der *partiellen Differentiation* zu verdeutlichen. Dabei wird eine *Funktion* $f\left(x, y(x)\right) = x^n + y(x)$ betrachtet, die von den *Variablen* x und y abhängt, wobei y wiederum eine Abhängigkeit von x besitzt. Mit dieser Beispielfunktion werden nun die Eigenschaften der *totalen* und der *partiellen Differentiation* gegenüber gestellt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}f\left(x, y(x)\right) &= nx^{n-1} \quad , \\ \frac{d}{dx}f\left(x, y(x)\right) &= nx^{n-1} + y'(x) \quad . \end{aligned} \tag{8.43}$$

Aus der Gleichung (8.43) wird deutlich, wie der *partielle Differentialoperator* $\frac{\partial}{\partial x}$ den Bezug von y zu x ignoriert, während die *totale Differentiation* den Bezug aufnimmt. Folglich besitzt die Deklarierung der *Variablen* einer *Funktion* eine besondere Bedeutung, wenn zwischen den *Differentialoperatoren* unterschieden werden muss. In der *Analysis* mit einer *Variablen* sind die Eigenschaften der *totalen Differentiation* mit der der *partiellen* übereinstimmend. Während sich bei *Funktionen* mit mehreren *Variablen* es zu Unterschieden kommen kann. Dabei setzt sich ein Teil des *totalen Differentialoperators* aus *partiellen Ableitungen* zusammen. Dieser Teil wird auch das *totale Differential* genannt, welches bei einer *Funktion* mit mehreren *Variablen* wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \Rightarrow \frac{df}{dt} &:= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ \Rightarrow df &:= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \quad . \end{aligned} \tag{8.44}$$

Die Bildung und Verwendung des *totalen Differentials* wird bei komplexeren *Integrationsaufgaben* sowie bei einer *generellen Koordinatentransformation* - dem Wechsel der *Koordinatensysteme* - benötigt, was in den weiterführenden Abschnitten zur *Vektoranalysis* thematisiert wird. Außerdem sind die Unterschiede zwischen der *totalen* und *partiellen Differentiation* bei der *Fehlerrechnung* von fundamentaler Bedeutung, sodass beide Typen der *Operatoren* bekannt sein sollten.

8.7.1 Übungsaufgaben zur partieller und totaler Differentiation

Aufgabe 1: *Leite partiell ab.*

a) $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 - 3x^2 + 1\right) =$

b) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^6 - t(x)\right) =$

c) $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x + a(x)\right) =$

d) $\frac{\partial}{\partial x}\left(b(x)x^{c(x)}\right) =$

e) $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x - x^2 + a(x)x\right) =$

f) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a(x)t^2(x)}{2} + v(x)t(x) + x\right) =$

g) $\frac{\partial}{\partial x}\left(ax^b - cx^d\right) =$

h) $\frac{\partial}{\partial x}\left(a^3(x) + b(x)\right) =$

Aufgabe 2: *Leite partiell ab (Beachte dabei die Ableitungsregeln).*

a) $\frac{\partial}{\partial x}x^2 e^{a(x)x} =$

b) $\frac{\partial}{\partial x}\sin(\sqrt{2xt(x)}) =$

c) $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x}e^{3x} =$

d) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{3x + f(x)}{(x-3)^2} =$

e) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin(ax)}{\cos(a(x)x)} =$

f) $\frac{\partial}{\partial x}x^{d(x)x} =$

g) $\frac{\partial}{\partial x}\sin(ax)\, e^{x^2}\cos(a(x)) =$

h) $\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{3}\tan(\ln(d(x)))x^3 =$

Aufgabe 3: *Leite total ab (Beachte dabei die Ableitungsregeln).*

a) $\frac{d}{dx}x^2 e^{a(x)x} =$

b) $\frac{d}{dx}\sin(\sqrt{2xt(x)}) =$

c) $\frac{d}{dx}\sqrt{x}e^{3x} =$

d) $\frac{d}{dx}\frac{3x + f(x)}{(x-3)^2} =$

e) $\frac{d}{dx}\frac{\sin(ax)}{\cos(a(x)x)} =$

f) $\frac{d}{dx}x^{d(x)x} =$

g) $\frac{d}{dx}\sin(ax)\, e^{x^2}\cos(a(x)) =$

h) $\frac{d}{dx}\frac{1}{3}\tan(\ln(d(x)))x^3 =$

Aufgabe 4: *Bilde das totale Differential der Funktionen.*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$	*b)* $f(x,y(x)) = xy - y^3$
c) $f(x,y) = ye^x$	*d)* $f(x,y(x)) = x^2 + 2yx + y^2$
e) $f(x,y,t) = \sqrt{xt} - y^t$	*f)* $f(x(t),y(t)) = \sqrt{x^2 + y^2} - t$
g) $f(x,y,z,t) = \frac{4}{3}\pi x^3 y z^2 + y t^2$	*h)* $f(x(y(t))) = x^4$

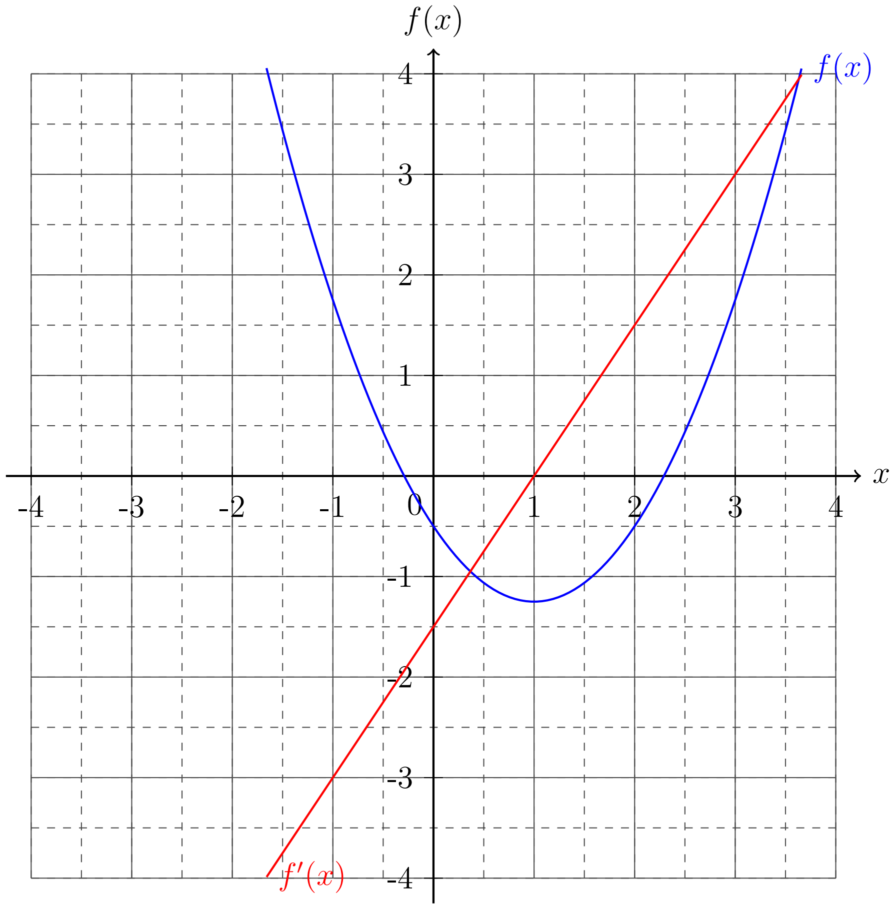
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.63) Lösungen zur partieller und totaler Differentiation.

8.8 Extrempunkte

Bei der *Parabel* wurde bereits der sogenannte *Scheitelpunkt* bestimmt, wobei die *Scheitelpunktsform* ausgenutzt wurde. Ein *Scheitelpunkt* und somit auch jeder andere *Extrempunkt* besitzt eine *Tangente* mit der *Steigung* $m_t = 0$. In diesem Unterabschnitt soll dies für alle *Funktionen* verallgemeinert werden. Dazu sei eine *Parabel* $f(x)$ zur beispielhaften Untersuchung gegeben:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4}(x-1)^2 - \frac{5}{4} \quad , \\ \Rightarrow S(d|e) &= S\left(1 \,\middle|\, \frac{5}{4}\right) \quad , \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) &= \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \quad . \end{aligned} \tag{8.45}$$

Die *Graphen* der *Parabel* $f(x)$ und ihrer *Ableitung* $f'(x)$, welche eine *Gerade* ist, werden in ein *Koordinatensystem* gezeichnet, sodass die Zusammenhänge sich verdeutlichen:



Die *Graphen* zeigen, dass der *Extremwert* der *Parabel* d und den *Nullstellenwert* der *Ableitung* den selben *Wert* besitzen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow x_{N_{f'(x)}} &= 1 \end{aligned} \tag{8.46}$$

Aus dieser These kann ein allgemeines Gesetz hergeleitet werden, welches besagt, dass die *Extremstellen* x_E der *Funktion* die *Nullstellen* ihrer *Ableitung* sind:

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{ Auflösen nach den Extremstellen } . \tag{8.47}$$

Da die *Steigung* der *Geraden* - also der *Ableitung* - positiv ist, handelt es sich bei der *Extremstelle* um ein *Minimum* (was in einigen Mathematikbüchern auch Tiefpunkt genannt wird). Wäre die *Steigung* der *Ableitung* negativ, würde es sich um ein *Maximum* (Hochpunkt) handeln. Wobei als *notwendige Bedingung* für einen *Extrempunkt* eine *Nullstelle* der *Ableitung* $\exists f'(x_E) = 0$ gegeben sein muss, reicht dieses noch nicht aus um tatsächlich einen *Extrempunkt* zu identifizieren. Um einen *Extrempunkt* genaustens zu bestimmen und seinen Typ (*Maximum* oder *Minimum*) festlegen zu können, müssen die *Punkte* in der Umgebung der *Extremstellen* auf der *Ordinate* höher (*Minimum*) oder niedriger (*Maximum*) liegen:

$$\begin{aligned} f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \textit{Maximum} \ , \\ f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \textit{Minimum} \ , \end{aligned} \tag{8.48}$$

wobei dies als *hinreichende Bedingung* bezeichnet wird. Bei einigen speziellen *Funktion* wie zum Beispiel $f(x) = x^4$ verlieren die Kriterien der *hinreichenden Bedingung* ihre Aussage, da für diese und alle anderen speziellen Funktionen dieses Typs

$$f'(x_E) = 0 \text{ und } f''(x_E) = 0 \tag{8.49}$$

gilt, und somit das *Verhalten* um diesen *Punkt* betrachtet werden muss. Nach der Untersuchung des *links*- und *rechtsseitigen Grenzwertes* eines direkt benachbarten Variablenwertes $x_E \pm \delta x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \nearrow x_E - \delta x} f''(x) > 0 \ \text{ und } \lim_{x \searrow x_E + \delta x} f''(x) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \textit{Minimum} \ , \\ \lim_{x \nearrow x_E - \delta x} f''(x) < 0 \ \text{ und } \lim_{x \searrow x_E + \delta x} f''(x) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \textit{Maximum} \ , \\ \lim_{x \nearrow x_E - \delta x} f''(x) < 0 \ \text{ und } \lim_{x \searrow x_E + \delta x} f''(x) > 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{kein } \textit{Extrempunkt} \ , \\ \lim_{x \nearrow x_E - \delta x} f''(x) > 0 \ \text{ und } \lim_{x \searrow x_E + \delta x} f''(x) < 0 \quad &\Rightarrow \quad \text{kein } \textit{Extrempunkt} \ , \end{aligned} \tag{8.50}$$

kann dann bestimmt werden, ob es sich um einen *Extrempunkt* und gegebenenfalls um welche Art es sich handelt. Dabei steht die *Extremstelle* x_E im Fokus der Untersuchungen, wobei der der *Extrempunkt* gegeben ist durch:

$$E\left(x_E\,|f\left(x_E\right)\right) \quad . \tag{8.51}$$

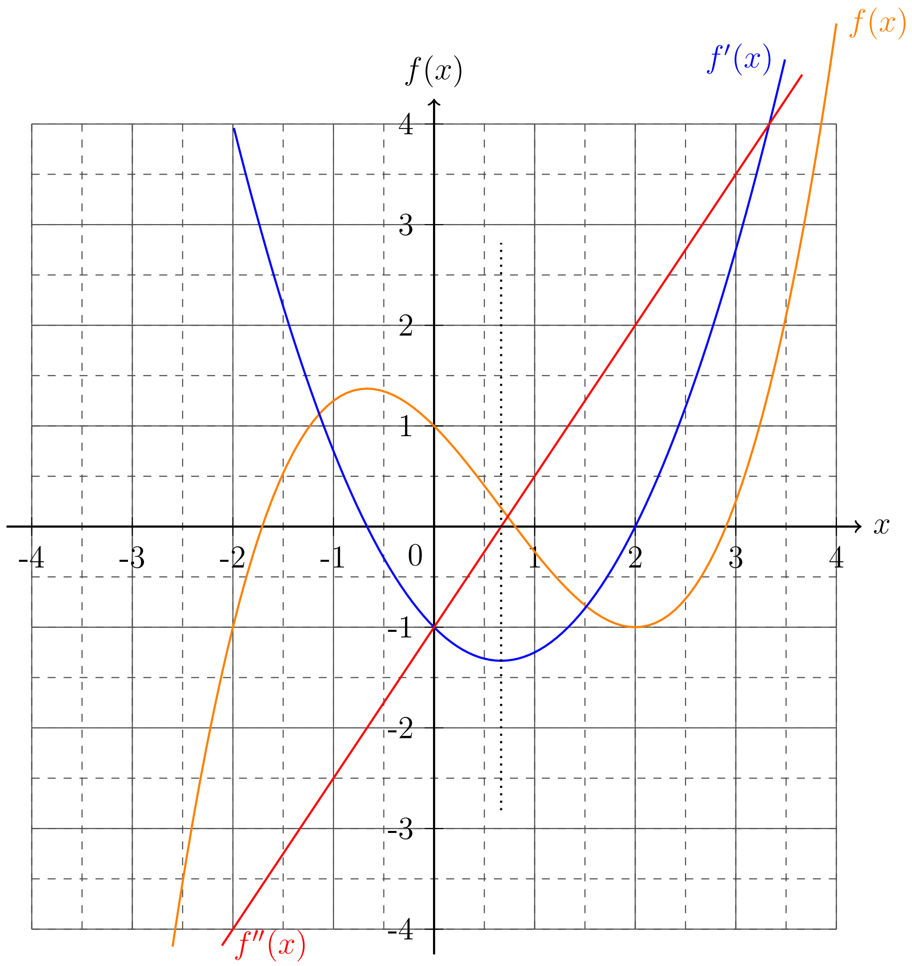
Generell muss noch zwischen *lokalen* und *globalen Extrema* unterschieden werden. *Globale Extrema* sind *Extrempunkte* die auf der *Grenze* des *Wertebereiches* liegen oder die höchste beziehungsweise niedrigste Erhebung im betrachteten *Intervall* darstellen. Aus diesem Grund müssen auch die sogenannten *Randextrema* eines gegebenen *Intervalls* mit untersucht werden, da ihr *Funktionswert* über einem *lokalen Maximum* oder unterhalb eines *lokalen Minimums* liegen können.

8.9 Wende- und Sattelpunkte

Bei *Funktionen* höherer *Ordnung* existieren noch weitere *Punkte* von besonderem Interesse. Um diese *Punkte* zu untersuchen wird wieder eine Beispielfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \ , \\ f'(x) &= \frac{3}{4}x^2 - x - 1 \ , \\ \Rightarrow S(d|e) &= S\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{4}{3}\right) \ , \\ f''(x) &= \frac{3}{2}x - 1 \ , \\ f'''(x) &= \frac{3}{2} \ . \end{aligned} \tag{8.52}$$

Diese *Funktionen* werden erneut durch ihren *Graphen* in einem *Koordinatensystem* veranschaulicht:



Deutlich an den *Graphen* wird, dass die *Variablenwerte* für den *Scheitelpunkt* der *Ableitung* und der *Nullstelle* der zweiten *Ableitung* mit dem *Variablenwert* der *Funktion* übereinstimmen, bei dem sich die Richtung der *Krümmung* der *Funktion* ändert. Der *Variablenwert* ist im *Koordinatensystem* durch die gepunktete Linie verdeutlicht. Dieser *Punkt* der *Funktion* wird *Wendepunkt* genannt. Für *Wendestellen* x_W gelten folgende Kriterien:

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0 \quad , \\ f'''(x_W) &\neq 0. \end{aligned} \tag{8.53}$$

Wenn allerdings die erste *Ableitung* für diesen *Variablenwert* x_W auch gleich Null ist, dann handelt es sich um einen sogenannten *Sattelpunkt*. Für einen *Sattelpunkt* gelten die folgenden Kriterien:

$$\begin{aligned} f'(x_S) &= 0 \quad , \\ f''(x_S) &= 0 \quad , \\ f'''(x_S) &\neq 0 \quad . \end{aligned} \tag{8.54}$$

An *Wende*- wie auch *Sattelpunkten* ändert sich die *Krümmung* der *Funktion*. Das bedeutet, dass die *Steigung* vor einem *Wende*- oder *Sattelpunkt* abnimmt und nach ihm folglich zu nimmt und vice versa.

8.10 Monotonie

Das *Monotonieverhalten* beschreibt ob eine *Funktion* wachsend, fallend oder konstant ist. Ist eine *Funktion* für alle *Variablenwerte* des *Definitionsbereiches* $\mathbb{D}$ wachsend wird von einem *streng monoton steigendem Verhalten* gesprochen. Bei einer *Funktion*, die für alle *Variablenwerte* fallende *Funktionswerte* besitzt, wird dies als ein *streng monoton fallendes Verhalten* genannt. Weist eine *Funktion* in einem *Intervall* eine konstanten Bereich auf ist aber ansonsten *streng monoton steigend* oder *fallend* gilt die *Funktion* im Allgemeinen lediglich nur noch als *monoton steigend* oder *fallend*.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; &\Rightarrow \;\; \textit{streng monoton steigend} \\ f'(x) < 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; &\Rightarrow \;\; \textit{streng monoton fallend} \\ f'(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; &\Rightarrow \;\; \textit{monoton steigend} \\ f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{D} \;\; &\Rightarrow \;\; \textit{monoton fallend} \end{aligned} \tag{8.55}$$

Das *Monotonieverhalten* kann auch auf *Intervalle* angewendet werden, sodass zum Beispiel für die *Funktion* $f(x) = x^2$ folgende *Monotonien* festgestellt werden können:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 \;\; \forall x \in \,]-\infty, 0\,[\;\; &\Rightarrow \;\; \textit{streng monoton steigend} \\ f'(x) < 0 \;\; \forall x \in \,]\,0, \infty\,[\;\; &\Rightarrow \;\; \textit{streng monoton fallend} \end{aligned} \tag{8.56}$$

8.10.1 Satz von l'Hopital

Bei *gebrochen rationalen Funktion* kann das *Verhalten* meistens nur schwer direkt abgelesen werden, da die Gewichtung der einzelnen *Funktionsteile* im *Grenzwert* unbekannt sind. Um dennoch eine Aussage über einen *Grenzwert* einer *gebrochen rationalen Funktion* machen zu können, wird in der Regel der *Satz von l'Hopital* verwendet. Dieser *Satz* sagt aus, dass der *Grenzwert* der *gebrochen rationalen Funktion* gleich dem *Quotienten* des *Grenzwertes* der *Ableitung* des *Zählers* mit dem *Grenzwert* der *Ableitung* des *Nenners* ist.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} g'(x)}{\lim_{x \to x_0} h'(x)} \tag{8.57}$$

8.11 Konvexe und konkave Funktionen

Die *Krümmung* der Funktion kann entweder *konkav* oder *konvex* sein. So ist zum Beispiel die *Normalparabel* $f(x) = x^2$ eine *konvexe* Funktion für die gesamte *Definitionsmenge*. Für diese Eigenschaft muss folgendes Kriterium gelten:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \forall x_1 \neq x_2 \ \ , \tag{8.58}$$

beziehungsweise für die Werte in einem Intervall I:

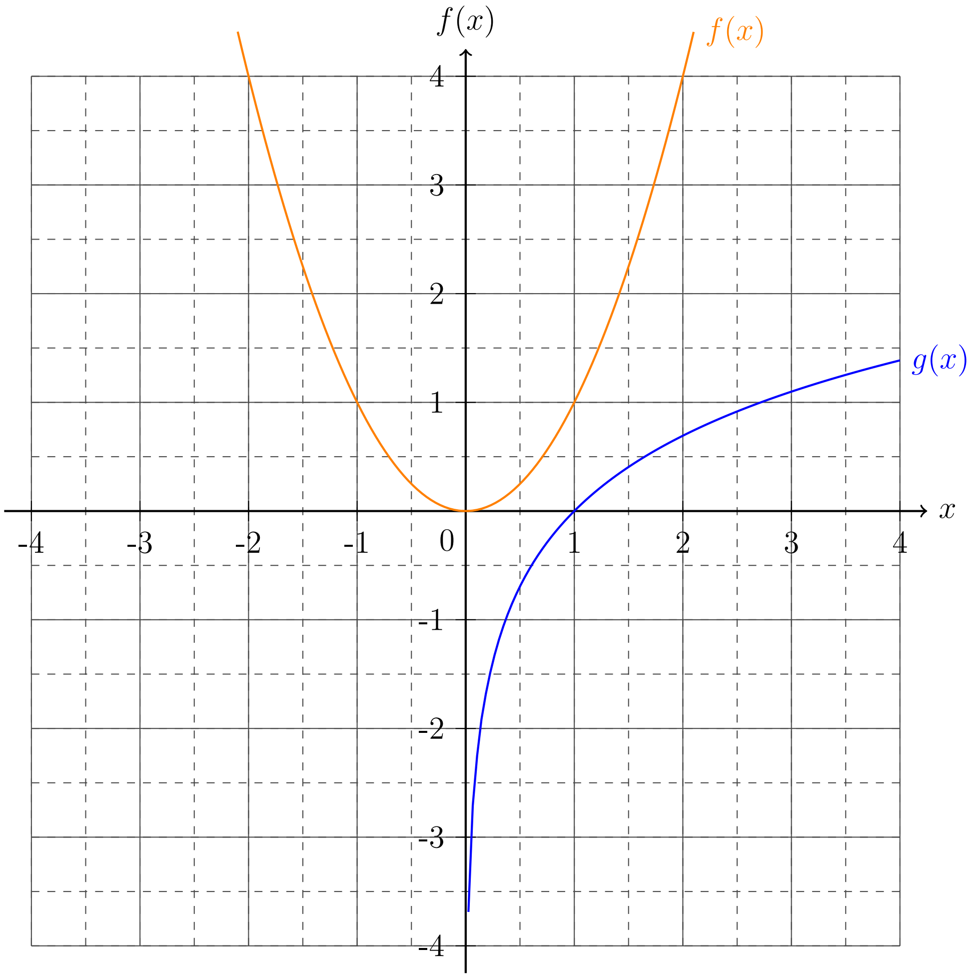
$$f''(x) \leq 0 \forall\ x\ \in\ I\ \ . \tag{8.59}$$

Für eine konkave Funktion, wie zum Beispiel $g(x) = \ln(x)$, kann dieses Kriterium umgedreht werden:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \qquad \forall x_1 \neq x_2 \ \ , \tag{8.60}$$

beziehungsweise für die Werte in einem Intervall I:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall\ x\ \in\ I\ \ . \tag{8.61}$$



Durch die *Graphen* der *Funktionen* wird deutlich, dass die *Steigung* einer *konkaven Funktion* immer weiter abnimmt und die *Steigung* einer *konvexen Funktion* immer weiter zunimmt. An einem *Wende*- oder *Sattelpunkt* wird folglich folgt auf ein *konkaves Intervall* ein *konvexes* und vice versa. Ergo sind die *Intervallgrenzen* für *konkave* oder *konvexe* Teilstücke der *Funktion* durch die *Wende*- und *Sattelpunkte* begrenzt.

8.12 Kurvendiskussion

Die *Kurvendiskussion* verbindet alle Methoden der Analyse von *Funktionen*, dabei bilden sich noch weitere Charakteristiken heraus, welche in der Kombination mit den *Differentialoperatoren* aufkommen. Diese Eigenschaften der *Funktionen* werden in diesem Abschnitt zunächst vorgestellt und anschließend ein zusammenfassender Überblick über eine vollständige *Kurvendiskussion* geboten.
Eine vollständige Kurvendiskussion beinhaltet folgende Schritte:

1.	Definitions- und Wertemenge:	$\mathbb{D} = \{x \in\}$ und $\mathbb{W} = \{f(x) \in\}$
2.	Standard-symmetrien:	Achsensymmetrie $f(x) = f(-x)$ oder Punktsymmetrie $f(x) = -f(-x)$
3.	Verhalten im Unendlichen:	$\lim_{x\to\infty} f(x) \ \wedge \ \lim_{x\to-\infty} f(x)$ $\wedge \ \lim_{x\searrow x_0\notin\mathbb{D}} f(x) \ \wedge \ \lim_{x\nearrow x_0\notin\mathbb{D}} f(x)$
4.	Polstellen:	$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow h(x_P) \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow x_P =$ $\lim_{x\searrow x_P} f(x) \ \wedge \ \lim_{x\nearrow x_P} f(x)$
5.	Asymptoten:	Bestimme durch Polynomdivision die Teilfunktion an der sich die Funktion im Unendlichen annähert.
6.	Nullstellen:	$f(x_N) \stackrel{!}{=} 0$
7.	Extremstellen:	$f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0 \ \wedge \ f''(x_E) > 0 \ \Rightarrow$ Minimum $f'(x_E) \stackrel{!}{=} 0 \ \wedge \ f''(x_E) < 0 \ \Rightarrow$ Maximum

8.	Wendestellen:	$f''(x_W) \overset{!}{=} 0 \ \wedge \ f'''(x_W) \neq 0$
9.	Sattelpunkte:	$f'(x_S) = 0 \ \wedge \ f''(x_S) \overset{!}{=} 0 \ \wedge \ f'''(x_S) \neq 0$
10.	Monotonie:	$f'(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{D} \ \Rightarrow$ *streng monoton steigend* $f'(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{D} \ \Rightarrow$ *streng monoton fallend* $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{D} \ \Rightarrow$ *monoton steigend* $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{D} \ \Rightarrow$ *monoton fallend*
11.	Konvex oder konkav:	konvex: $f''(x) \leq 0$ bzw. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \forall x_1 \neq x_2$ konkav: $f''(x) \geq 0$ bzw. $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad \forall x_1 \neq x_2$
12.	Stammfunktion:	$\int f(x)dx = F(x)$
13.	Graph:	Erstelle eine Wertetabelle und übertrage die Punkte in ein Koordinatensystem und verbinde diese sinnerfassend.

8.12.1 Beispiel einer vollständige Kurvendiskussion

In diesem Beispiel wird eine *gebrochen rationale Funktion* angeführt, welche viele Eigenschaften beherbergt. Des Weiteren wurde eine solche *Funktion* als Beispiel ausgewählt, da hier mehrere Schwierigkeiten und Überlegungen einhergehen, welche in der Regel nicht in so komprimierter Form vorkommen. Die *Beispielfunktion* ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 3}{x^2 - 3x} \quad . \tag{8.62}$$

Am Anfang jeder *Kurvendiskussion* werden alle benötigten *Ableitungen* gebildet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 12x - 18}{2x^2(x-3)^2} \quad , \\ f''(x) &= \frac{3x^3 - 18x^2 + 54x - 54}{x^3(x-3)^3} \quad , \\ f'''(x) &= \frac{9\left(x^4 + 8x^3 - 36x^2 + 72x - 54\right)}{x^4(x-3)^4} \quad . \end{aligned} \tag{8.63}$$

Schritt 1: Bestimme die *Definitions-* und *Wertemenge*. Um die Bereiche zu berechnen, für die die *Funktion* nicht definiert ist muss der *Nenner* gleich Null gesetzt werden:

$$0 \stackrel{!}{=} x^2 - 3x = x(x-3) \;\Rightarrow x_{\notin \mathbb{D},1} = 0 \;\wedge\; x_{\notin \mathbb{D},2} = 3 \quad . \tag{8.64}$$

Da die *Funktion* im *Zähler* ein *Polynom ungerader Ordnung* besitzt, ergibt sich für die *Definitions-* und *Wertemenge*

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &= \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0;3\}\} \quad , \\ \mathbb{W} &= \{f(x) \in \mathbb{R}\} \quad . \end{aligned} \tag{8.65}$$

Schritt 2: Überprüfe nach *Symmetrien*. Um die *Symmetrien* einer *gebrochen rationalen Funktion* zu untersuchen, wird eine *Polynomdivision* durchgeführt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 3\right) : \left(x^2 - 3x\right) \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{2}x + 3}{x^2 - 3x} \quad . \end{aligned} \tag{8.66}$$

Durch die *Polynomdivision* wird deutlich, dass das *rationale Polynom* der *Funktion gerade* und *ungerade Potenzen* aufzeigt. Folglich besitzt die *Funktion* keine *Achsen-* oder *Punktsymmetrie*.

Schritt 3: Bestimme das *Verhalten* im *Unendlichen* und um die nicht definierten Bereiche. Um das *Verhalten* der *Funktion* zu verstehen, muss zunächst der *Grenzwert* des *gebrochen rationalen Terms* der *Funktion* nach der *Polynomdivision* verstanden werden.

$$\lim_{x\to\pm\infty} -\frac{\frac{3}{2}x+3}{x^2-3x} = -\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} (2x-3)} = \pm 0 \ . \tag{8.67}$$

In der Gleichung (8.67) wurde der *Satz von l'Hopital* angewendet, sodass sich zeigt, dass je nach Vorzeichen der *gebrochen rationale Term* der *Funktion* von unten beziehungsweise von oben gegen Null läuft. Somit ergeben sich folgende *Grenzwerte*:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \ , \\ &\lim_{x\nearrow 0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty \ , \\ &\lim_{x\nearrow 3} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\searrow 3} f(x) = -\infty \ . \end{aligned} \tag{8.68}$$

Schritt 4: Bestimmungen der *Polstellen* und ihrer Art. Aus Gleichung (8.68) zeigt sich, dass zwei *Polstellen mit Vorzeichenwechsel* existieren sie befinden sich bei:

$$x_{P_1} = 0 \ \wedge \ x_{P_2} = 3 \ . \tag{8.69}$$

Schritt 5: Bestimme die *Asymptoten*, falls vorhanden. Um die *Asymptote* bestimmen zu können muss die *Funktion* nach der *Polynomdivision* aus Gleichung (8.66) betrachtet werden. Aus Gleichung (8.67) ist bekannt, dass der *gebrochen rationale Term* sich schnell der Null annähert, sodass dieser nur die Annäherungsrichtung an die *rationalen Terme* der *Funktion* beschreibt. Folglich ist die *Asymptote* gegeben durch:

$$A(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ . \tag{8.70}$$

Durch den *Grenzwert* aus Gleichung (8.67) ist ersichtlich, dass die *Asymptote* im negativen *Variablenwertebereich* von oben und im positiven *Variablenwertebereich* von unten angenähert wird.

Schritt 6: Bestimme die *Nullstellen*. Bei einer *gebrochen rationalen Funktion* ist bei der *Nullstellenbestimmung* der *Zähler* von Bedeutung. Somit gilt

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 3 \ \Rightarrow \ x_N \approx 4,321 \ \Rightarrow \ N(4,321|0) \ . \tag{8.71}$$

Gleichung (8.71) wurde hierbei mit einem programmierbaren Taschenrechner gelöst, welcher bei *Funktionen höherer Ordnung* herangezogen werden sollte, da durch die schriftlichen *iterativen Verfahren* zur Lösung der Gleichung ansonsten zu viel Zeit benötigt werden würde.

Schritt 7: Bestimme die *Extrempunkte* und ihre Art. Um die Extremwerte zu bestimmen muss die erste *Ableitung* $f'(x)$ aus Gleichung (8.63) gleich Null gesetzt werden. Da es sich um eine *gebrochen rationale Funktion* handelt muss wie schon bei der *Nullstelle* nur der *Zähler* berücksichtigt werden:

$$0 \stackrel{!}{=} x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 12x - 18 \;\Rightarrow\; x_{E_1} \approx -1,25166 \;\wedge\; x_{E_2} \approx 0,954537 \quad . \tag{8.72}$$

Um die Art der *Extrempunkte* zu überprüfen, müssen die mit dem programmierbaren Taschenrechner bestimmten Werte aus Gleichung (8.72) in die zweite *Ableitung* $f''(x)$ eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} f''\left(x_{E_1}\right) &\approx -1,60937 \;\Rightarrow\; E_{max}\left(-1,25166|-1,60937\right) \quad , \\ f''\left(x_{E_2}\right) &\approx 2,88384 \;\Rightarrow\; E_{min}\left(0,954537|2,88384\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.73}$$

Schritt 8: Bestimme die *Wendepunkte*. Um die *Wendepunkte* zu bestimmen muss die zweite *Ableitung* $f''(x)$ gleich Null gesetzt werden. Wie schon bei den *Null-* und *Extremstellen* wird nur der *Zähler* betrachtet:

$$0 \stackrel{!}{=} 3x^3 - 18x^2 + 54x - 54 \;\Rightarrow\; x_W \approx -8,3984 \quad . \tag{8.74}$$

Der ermittelte *Wert* muss abschließend noch in die dritte *Ableitung* $f'''(x)$ eingesetzt werden:

$$f'''(x_W) \approx -0,000317 \neq 0 \quad \Rightarrow \exists \;\; x_W \text{ als } \textit{Wendepunkt} \quad . \tag{8.75}$$

Hierbei ist der *Wendepunkt* gegeben als:

$$W\left(-8,3984|-4,59897\right) \quad . \tag{8.76}$$

Schritt 9: Überprüfe, ob ein *Wendepunkt* ein *Sattelpunkt* ist. Der berechnete *Variablenwert* des *Wendepunkts* x_W wird in die erste *Ableitung* $f'(x)$ eingesetzt.

$$f'(x_W) = 1,01013 \neq 0 \tag{8.77}$$

Wie aus Gleichung (8.77) ersichtlich wird, ist der *Wendepunkt* kein *Sattelpunkt*.

Schritt 10: Untersuche die *Funktion* in *Intervallen* nach ihrer *Monotonie*. Die *Monotonie* wird durch *Sattel-* und *Extrempunkte* sowie *Polstellen* beeinflusst. Folglich können an ihnen die *Grenzen* der *Intervalle* festgemacht werden:

$$\begin{aligned}
&f'(x) > 0 \ \forall x \in \,]-\infty, x_{E_{max}}[\qquad \text{streng monoton steigend} \ , \\
&f'(x) < 0 \ \forall x \in \,]\, x_{E_{max}}, 0\, [\qquad \text{streng monoton fallend} \ , \\
&f'(x) < 0 \ \forall x \in \,]\, 0, x_{E_{min}} [\qquad \text{streng monoton fallend} \ , \\
&f'(x) > 0 \ \forall x \in \,]\, x_{E_{min}}, 3\, [\qquad \text{streng monoton steigend} \ , \\
&f'(x) > 0 \ \forall x \in \,]\, 3, \infty\, [\qquad \text{streng monoton steigend} \ .
\end{aligned} \tag{8.78}$$

Schritt 11: Untersuche die *Funktion* in *Intervallen* ob sie *konvex* oder *konkav* ist. Eine *Funktion* kann ihre *konkave* oder *konvexe* Eigenschaft nur an *Polstellen* und *Wendepunkten* wechseln, sodass die *Intervallgrenzen* durch diese *Punkte* gegeben sind:

$$\begin{aligned}
&]-\infty, x_W [\qquad \text{konvex} \ , \\
&]\, x_W, 0\, [\qquad \text{konkav} \ , \\
&]\, 0, 3\, [\qquad \text{konvex} \ , \\
&]\, 3, \infty\, [\qquad \text{konvex} \ .
\end{aligned} \tag{8.79}$$

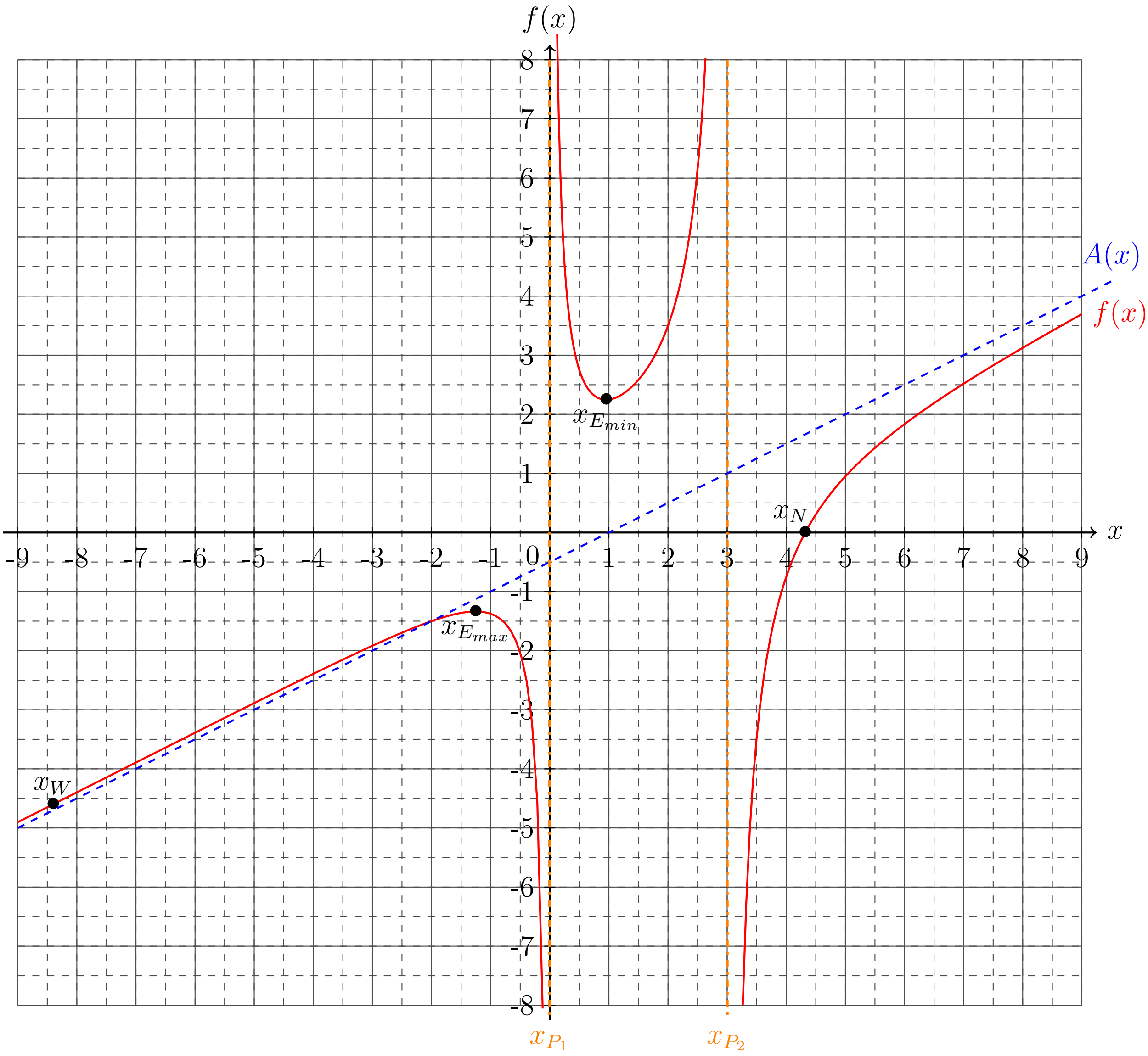
Durch die Untersuchung der *Grenzwerte* kann dies untermauert werden, da sich gegen $-\infty$ die *Funktion* von oben an die *Asymptote* $A(x)$ annähert aber allerdings bei der *Polstelle* $x_P = 0$ gegen $-\infty$ rennt, muss die *Funktion* vorm *Wendepunkt konvex* sein. Ähnliche Argumentationen lassen sich auch für die anderen *Intervalle* anstellen.

Schritt 12: Bilde die *Stammfunktion* $F(x)$ der Funktion $f(x)$. Dazu wird das *unbestimmte Integral* der *Funktion* gebildet:

$$\int f(x)dx = F(x) = \frac{1}{4}\left((x-2)x - 10\ln(3-x) + 4\ln x\right) + c \ , \tag{8.80}$$

wobei die die *Funktion* in aus Gleichung (8.66) durch *Faktorisierung* des *Nenners* und einer weiteren *Polynomdivision* noch weiter umgeformt wurde, sodass die *Nenner* leicht durch die *Integration* in einen *Logarithmus* überführt werden konnten.

Schritt 13: Zeichne den *Graphen* der *Funktion*. Hierfür werden zunächst alle ermittelten *Punkte* und zusätzliche Informationen in das *Koordinatensystem* eingefügt um dann noch fehlende Bereiche mit *Punkten* aus einer *Wertetabelle* zu bestimmen.



Eine *vollständige Kurvendiskussion* beansprucht viel Zeit und viele Kombinationen des bereits erlernten Wissens über die *Analysis* und *Algebra*. Dennoch ist eine *Kurvendiskussion* unabdingbar, wenn ein Sachverhalt in der Wirtschaft, der Naturwissenschaften oder anderen Bereichen genaustens beleuchtet werden muss.

Ableitungen und Stammfunktionen von wichtigen Funktionen können im Anhang (18.9) gefunden werden.

8.12.2 Übungsaufgaben zur Kurvendiskussion

Aufgabe 1: *Berechne die Extrempunkte (mit hinreichender und notwendiger Bedingung).*

a) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$

c) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

d) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{13}{17}$

e) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

f) $f(x) = x^3 - 5x - 10$

g) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{7}{4}x^2$

h) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - 9x$

i) $f(x) = (x-1)e^x$

j) $f(x) = x^2e^x$

k) $f(x) = (x-2)e^{x^2}$

l) $f(x) = (3x-2)e^{\frac{1}{2}x}$

m) $f(x) = (2x^2 - x - 4)e^{\frac{1}{4}x}$

n) $f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)e^{\pi x^2}$

Aufgabe 2: *Berechne die Wendepunkte (mit hinreichender und notwendiger Bedingung) und überprüfe ob diese Sattelpunkte sind.*

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$

b) $f(x) = x^4 + 5x^3 - 6x^2$

c) $f(x) = 2x^5 - x^4 + 3x^3$

d) $f(x) = -3x^4 + 5x^2 - 9$

e) $f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{7}{4}x - \frac{11}{3}$

f) $f(x) = \frac{7}{8}x^4 + 5x^3 - 2x$

g) $f(x) = \frac{11}{7}x^3 - \frac{4x^2}{9} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{6}$

h) $f(x) = \frac{5}{6}x^6 - \frac{8}{5}x^3 + \frac{17}{9}$

i) $f(x) = \frac{x^2 + 5x^4 - 6}{x - 1}$

j) $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 6}$

l) $f(x) = xe^{-2x}$

k) $f(x) = e^{x - x^2}$

Aufgabe 3: *Führe eine vollständige Kurvendiskussion durch.*

a) $f(x) = 2xe^{-x}$

b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 6,25}{x + 2,5}e^x$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x}$

e) $f(x) = x^3 e^{\frac{1}{4}x - 2}$

f) $f(x) = x^4 - 3$

g) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 8}{x - 2}$

h) $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-2x+2}$

i) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

j) $f(x) = 0,3x^3 - 4x$

k) $f(x) = 0,5x^5 - 2,6x^3$

l) $f(x) = \dfrac{x^3 - 0,5x^2 - 7,5x + 9}{-1,5 + x}$

Aufgabe 4: *Berechne die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte. Untersuche das Verhalten im Unendlichen und ob Symmetrien vorliegen. Zeichne anschließend den Graph.*

a) $f(x) = 4x^2 - 8$

b) $f(x) = x^3 - 5x$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 5$

d) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - 4x^2$

f) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^3 - 2x^2 + 3x$

g) $f(x) = \dfrac{2}{7}x^6 + \dfrac{4}{9}x^5 - \dfrac{1}{5}x^4$

h) $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

i) $f(x) = -3x^4 + 4x^2 + 5$

j) $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$

Aufgabe 5: *Bei einem schrägen Wurf wird die Flugbahn eines Balls durch die Funktion* $y(x) = -\frac{9,81}{200}x^2 + 1,5x + 1,8$ *beschrieben. Berechne die maximale Wurfhöhe und -weite.*

Aufgabe 6: *Führe eine Polynomdivision bei den gegebenen Termen durch.* (Mit Musterlösung!)

a) $(\ x^5 - 2x^4 - 25x^3 + 64x^2 + 46x - 120\ ) : (x - 4) =$

b) $(\ x^5 - 2x^4 - 25x^3 + 64x^2 + 46x - 120\ ) : (x + 5) =$

c) $(\ x^5 - 2x^4 - 25x^3 + 64x^2 + 46x - 120\ ) : (x^2 - 2) =$

d) $(\ x^5 - 2x^4 - 25x^3 + 64x^2 + 46x - 120\ ) : (x - 2) =$

e) $(\ x^5 - 2x^4 - 25x^3 + 64x^2 + 46x - 120\ ) : (x + 4) =$

f) $(\ x^5 - 2x^4 - 25x^3 + 64x^2 + 46x - 120\ ) : (x^2 + x + 1) =$

Aufgabe 7: *Untersuche die Funktion nach Polstellen und gib deren Art an.* (Mit Musterlösung!)

a) $f(x) = \dfrac{3}{x-4}$

b) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2-2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2-18}{x+3}$

d) $f(x) = \dfrac{3x^3+2x^2+x-4}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-4x+4}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-13x+12}{x+4}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.64) Lösungen zur Kurvendiskussion.

8.13 Funktionsscharen

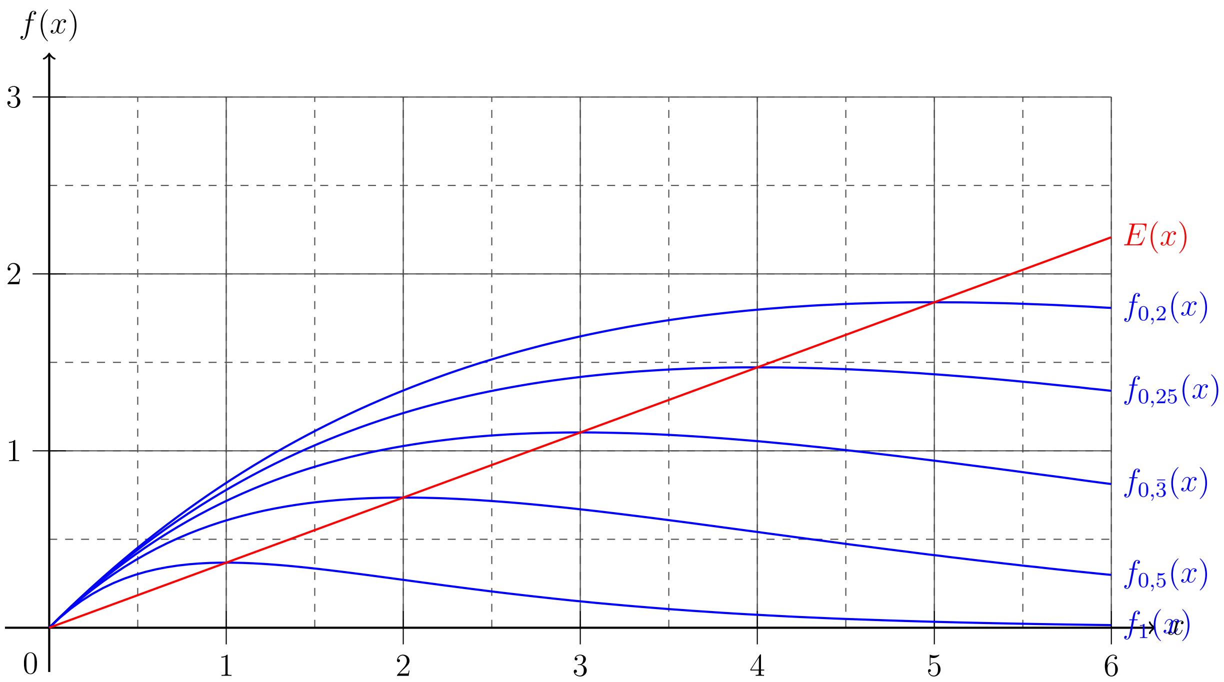
Bei *Funktionsscharen* ist ein *Parameter* der *Funktionsgleichung* nicht bestimmt. Wenn die charakteristischen *Punkte* der *Funktion* durch eine *Kurvendiskussion* untersucht werden, dann haben diese in der Regel auch eine *Parameterabhängigkeit*. So ergibt sich wiederum eine *Funktionskurve* auf der die *Punkte* sich bewegen. Diese *Funktion* wird *Ortskurve* genannt. Dies soll am folgenden Beispiel verdeutlicht werden:

$$
\begin{aligned}
f_t\left(x\right) &= xe^{-tx} \\
f_t'\left(x\right) &= (1-tx)e^{-tx} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow \quad x_E &= \frac{1}{t} \quad \Rightarrow \quad E\left(\frac{1}{t}\middle|\frac{1}{te}\right)
\end{aligned}
\tag{8.81}
$$

Vom gefundenen *Punkt* werden die *Koordinaten Variablen* zugeordnet und anschließend eine der beiden resultierenden Gleichungen nach dem freien Parameter aufgelöst und in die andere Gleichung eingesetzt, sodass eine Funktionsgleichung entsteht.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{t} \quad , \quad E = \frac{1}{te} \\
t &= \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad E(x) = \frac{x}{e}
\end{aligned}
\tag{8.82}
$$

Der dazugehörige *Funktionsgraph* würde wie folgt aussehen:



Einige *Funktionsscharen* sind so definiert, dass, gleich welcher *Parameterwert* für den freien *Parameter* gewählt wird, *konstante Punkte* gefunden werden können. Dafür werden beide *Funktionsgleichungen* mit unterschiedlichen *Parametern* gleichgesetzt und nach *Variablenwerte* gesucht die diese *Gleichung* erfüllen.

$$\begin{aligned} & f_{t_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{t_2}(x) \\ & xe^{-t_1 x} \stackrel{!}{=} xe^{-t_2 x} \\ & \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow P(0|0) \end{aligned} \tag{8.83}$$

Somit hätte die *Beispielfunktionsschar* einen gemeinsamen *Punkt* in $P(0|0)$, wie es auch schon am *Graphen* im *Koordinatensystem* zu erkennen ist.

8.13.1 Übungsaufgaben zu Funktionsscharen

Aufgabe 1: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_k(x) = 3x^2 - \frac{2}{k}x^3$ *für* $k \neq 0$.

$a)$ Bestimme die Nullstellen.
$b)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.
$c)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe b).
$d)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.
$e)$ Zeichne den Graphen für zwei Parameterwerte mit Ortskurven.

Aufgabe 2: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_k(x) = x^4 - kx^2 + 2$.

$a)$ Bestimme die Nullstellen.
$b)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.
$c)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe b).
$d)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.
$e)$ Zeichne den Graphen für zwei Parameterwerte mit Ortskurven.
$f)$ Bestimme Kriterien für die Anzahl an Null-, Extrem- und Wendestellen.

Aufgabe 3: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar eines schrägen Wurfs* $f_v(x) = 1,8 - \frac{9,81x^2}{v^2} + x$.

$a)$ Bestimme die Nullstellen.
$b)$ Bestimme die Extrempunkte.
$c)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe b).
$d)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.
$e)$ Zeichne den Graphen für zwei Parameterwerte mit Ortskurven.

Aufgabe 4: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_a(x) = \frac{\ln^2(x)}{ax}$.

$a)$ Bestimme den Definitionsbereich.
$b)$ Bestimme die Nullstellen.
$c)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.
$c)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe b).
$e)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.
$f)$ Zeichne den Graphen für zwei Parameterwerte mit Ortskurven.

Aufgabe 5: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_d(x) = -\frac{1}{d^2}x^3 + \frac{1}{d}x^2$ *für* $d > 0$.

$a)$ Bestimme die Nullstellen.
$b)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.
$c)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe b).
$d)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.
$e)$ Zeichne den Graphen für zwei Parameterwerte mit Ortskurven.

Aufgabe 6: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar eines schrägen Wurfs* $f_a(x) = ax^2 + (5 - 2a)x + (a - 5)$.

$a)$ Bestimme die Nullstellen.
$b)$ Bestimme die Extrempunkte.
$c)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe b).
$d)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.
$e)$ Zeichne den Graphen für zwei Parameterwerte mit Ortskurven.

Aufgabe 7: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_t(x) = txe^{t-tx}$.

$a)$ Bestimme die Nullstellen.
$b)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.
$c)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe b).
$d)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.
$e)$ Zeichne den Graphen für zwei Parameterwerte mit Ortskurven.

Aufgabe 8: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_a(x) = 2x^2 - 6x + a$. (Mit Musterlösung!)

$a)$ Bestimme die Nullstellen.

$b)$ Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Nullstellen.

$c)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.

$d)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.

Aufgabe 9: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_a(x) = 2x^2 + ax - 4$. (Mit Musterlösung!)

$a)$ Bestimme die Nullstellen.

$b)$ Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Nullstellen.

$c)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.

$d)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe c).

$e)$ Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Extrem- und Wendepunkte aus der Teilaufgabe c).

$f)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.

Aufgabe 10: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_a(x) = ax^2 - 6x - 4$. (Mit Musterlösung!)

$a)$ Bestimme die Nullstellen.

$b)$ Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Nullstellen.

$c)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.

$d)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe c).

$e)$ Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Extrem- und Wendepunkte aus der Teilaufgabe c).

$f)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.65) Lösungen zu Funktionsscharen.

8.14 Rekonstruktion von Funktionen

Um eine *Funktion* zu rekonstruieren, werden eine bestimmte Anzahl von Informationen benötigt. Diese Informationen können *Punkte* der *Funktion* oder *momentane Steigungen* sowie andere Beziehungen. Allerdings ist die Information entscheidend um was für eine *Funktion* es sich handelt. Dies ist meistens in den Naturwissenschaften durch die *Proportionalitäten* zu erkennen. Da alle *Funktionen* durch die *Taylor-Entwicklung* in einem *Punkt* mit einem *Polynom approximiert* werden können, lohnt es sich besonders *Polynome* zu betrachten. Das vorgestellte Verfahren ist allerdings auch bei anderen *Funktionsstrukturen* anwendbar.
Zunächst wird die allgemeine *Zielgleichung* mit allen möglichen *Parametern* niedergeschrieben:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= a_1 x + a_0 \\
f_2(x) &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
f_3(x) &= a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
\Rightarrow \quad f_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad ,
\end{aligned} \tag{8.84}$$

Hierbei wird deutlich, dass ein *Polynom* n-ter für die vollständige Bestimmung genau $n+1$ Informationen benötigt. Oftmals sind allerdings weniger Informationen vorhanden, sodass das unterbestimmte *Gleichungssystem* eine *Funktionsschar* resultieren lässt.

In einem Anwendungsbeispiel, ist eine *Funktion* zweiter *Ordnung* gegeben und soll durch die *Punkte* $P_1(0|2)$, $P_1(4|0)$ und $P_1(-3|0)$.

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\
\Rightarrow \quad I.\ \ 2 &= a_2 0^2 + a_1 0 + a_0 \quad \Rightarrow \quad 2 = a_0 \\
II.\ \ 0 &= a_2 4^2 + a_1 4 + a_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} - 4a_2 = a_1 \\
III.\ \ 0 &= a_2(-3)^2 + a_1(-3) + a_0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 9a_2 - 3a_1 + 2 \\
\Rightarrow \quad II. \text{ in } III.\ \ 0 &= 9a_2 - \frac{3}{2} + 12a_2 + 2 \\
-\frac{1}{2} &= 21a_2 \\
\Rightarrow \quad -\frac{1}{42} &= a_2 \\
\Rightarrow \quad a_1 &= \frac{1}{2} - 4\left(-\frac{1}{42}\right) = \frac{25}{42} \\
\Rightarrow \quad f_2(x) &= -\frac{1}{42}x^2 + \frac{25}{42}x + 2
\end{aligned} \tag{8.85}$$

8.14.1 Übungsaufgaben zu Funktionsrekonstruktionen

Aufgabe 1: *Die gesuchte Funktion besitzt an der Stelle* $x = 1$ *eine Steigung von* 2*. Sie hat einen Ordinatenachsenabschnitt von* 2 *und schneidet die Abzisse bei* $x = 3$*. Bei der gesuchten Funktion handelt es sich um eine Parabel. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 2: *Die gesuchte Funktion dritter Ordnung ist punktsymmetrisch und besitzt einen Extrempunkt bei der Stelle* $x = 2$*. Außerdem liegt der Punkt* $P(2|-4)$ *auf der Funktion. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 3: *Die gesuchte Funktion dritten Grades besitzt einen Wendepunkt bei* $W(3|2)$ *und berührt die Abszisse bei* $x = 1$*. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 4: *Die gesuchte Funktion dritter Ordnung besitzt im Punkt* $P(-2|-2)$ *eine Tangente mit der Steigung von* $m_t = 0$*. Außerdem bildet die Abszisse eine Sekante zur Funktion mit den Schnittstellen bei* $x = 1$ *und* $x = -3$*. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 5: *Löse alle Teilaufgaben zum Springbrunnen.*

$a)$ Ein Springbrunnen mit einer gleichmäßigen sechseckigen Fläche mit der Kantenlänge von 2 m hat an seinen Eckpunkten Düsen, die nach Innen gerichtet sind. Die Düsen haben vom Lot aus einen Winkel von $\alpha = 15°$. Wähle ein Koordinatensystem, sodass sich die Düse am Punkt $P(0|0)$ befindet. Der Druck des Wasser ist so eingestellt, dass sich die sechs Fontänen in der Mitte des Springbrunnens treffen. Bestimme die Funktionsgleichung der betrachten Fontäne.

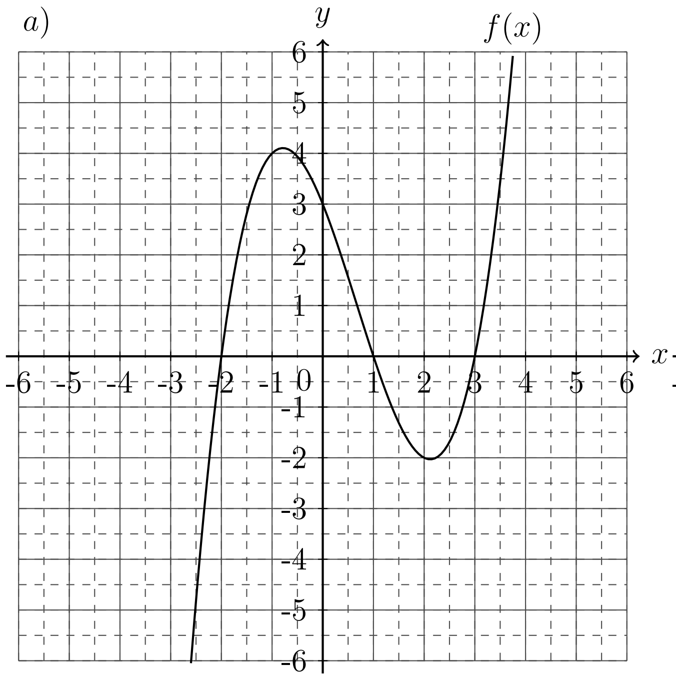
$b)$ Bestimme die Funktionsgleichungen für einen so eingestellten Wasserdruck, dass die gegenüberliegende Düse von der Fontäne getroffen wird und bestimme die maximale Höhe der Fontäne.

$c)$ In der Mitte des Springbrunnens soll eine Statue errichtet werden. Dabei soll beachtet werden, dass die Fontänen genau zwischen der gegenüberliegenden Düse und der Statue wieder die Wasseroberfläche berührt. Bestimme die maximale Höhe der Statue, sodass diese nicht von der Fontäne getroffen wird.

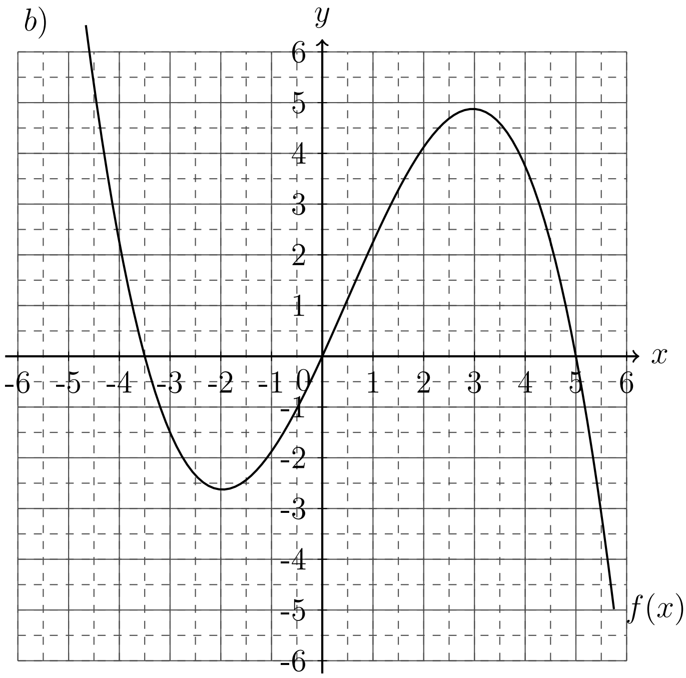
$d)$ Finde eine Funktionsgleichung, sodass nur noch die gewünschte Reichweite eingesetzt werden muss.

Aufgabe 6: *Bestimme die Funktionsgleichungen.*

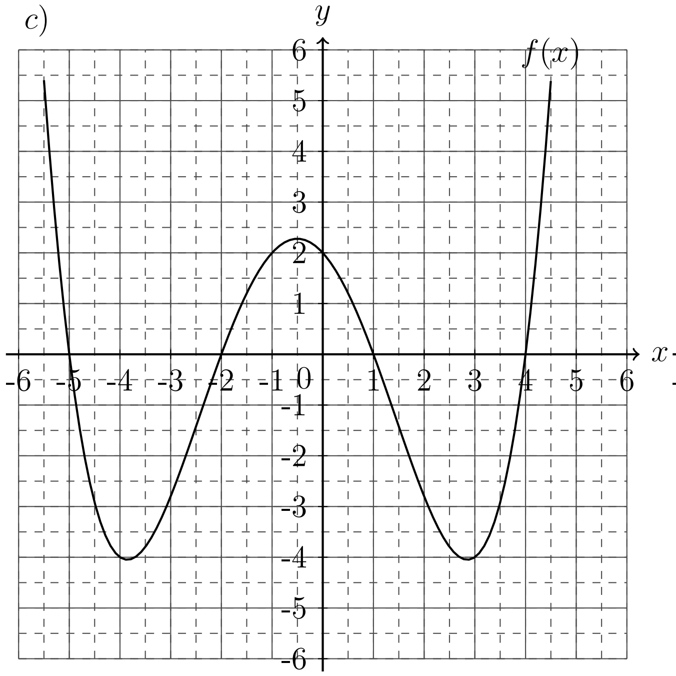
a)



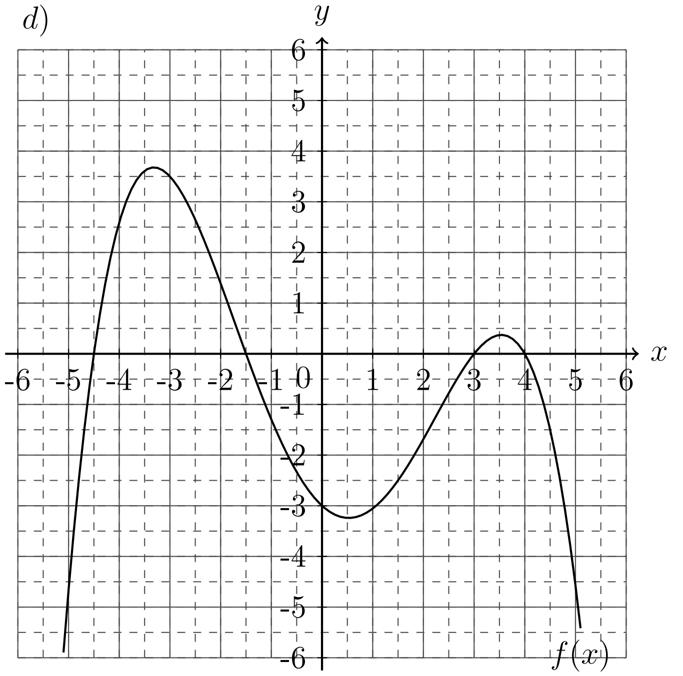
b)



c)



d)



Aufgabe 7: *Die gesuchte Funktion 2. Ordnung besitzt eine Extremstelle bei* $x_E = -2$ *und geht durch den Koordinatenursprung. Außerdem hat die Funktion an der Stelle* $x = -4$ *eine Steigung von* $-\frac{3}{2}$*. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 8: *Die Gerade* $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ *verläuft parallel zur gesuchten quadratischen Funktion in der Stelle* $x = 2$*. Die gesuchte Funktion besitzt außerdem einen Extrempunkt bei* $(1|5)$*. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 9: *Die gesuchte quadratische Funktion besitzt eine Nullstelle bei* $x_N = 3$ *und wird an der Stelle* $x = 1$ *durch die Tangente* $t(x) = -2x + 3$ *beschrieben. Die gesuchte Funktion weist eine Achsensymmetrie zur Ordinate auf. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 10: *Die gesuchte Funktion dritter Ordnung besitzt einen Wendepunkt bei* $(1|2)$ *und geht durch den Koordinatenursprung. Außerdem weist die Funktion an der Stelle* $x = 3$ *eine Steigung von* -1 *auf. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 11: *Die gesuchte Funktion 3. Ordnung besitzt eine Steigung von* -1 *an der Stelle* $x = 2$ *und durchläuft einen Wendepunkt bei* $(0|4)$*. Die Funktion besitzt zusätzlich eine Extremstelle bei* $x = -1$*. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 12: *Die gesuchte Funktion 2. Ordnung besitzt eine Nullstelle bei* $x_1 = 2$ *und ein Extrempunkt bei* $(-1|-4)$*. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 13: *Die gesuchte quadratische Funktion verläuft durch den Koordinatenursprung und besitzt einen Extrempunkt bei* $(2|3)$*. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 14: *Der gesuchte Funktionsterm ist ein Polynom 2. Ordnung. Der Graph schneidet die Abszisse bei* $x = 2$ *und* $x = 5$ *sowie die Ordinate bei* $y = 4$*. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 15: *Die gesuchte Funktion dritter Ordnung ist punktsymmetrisch und besitzt ein Extremum bei* $(2|-5)$*. Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 16: *Die gesuchte Funktion vierter Ordnung ist achsensymmetrisch zur Ordinate und besitzt eine Wendepunkt bei* $(-3|3)$ *und einen Ordinatenachsenabschnitt von* 6. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 17: *Die gesuchte Funktion dritter Ordnung besitzt eine Wendestelle bei* $x_W = 2$, *einen Extremstelle* $x_{E_1} = -2$ *und eine Nullstelle bei* $x_{N_1} = 4$. *Außerdem verläuft die Funktion durch den Punkt* $(3|3)$. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 18: *Die gesuchte Funktionsschar zweiter Ordnung verläuft durch die Punkte* $A(0|2)$ *und* $B(3|5)$. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 19: *Die gesuchte Funktionsschar zweiten Grades verläuft durch den Punkt* $A(1|2)$ *und besitzt an der Stelle* $x = 3$ *eine Steigung von* -4. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 20: *Die gesuchte Funktionsschar dritten Grades verläuft durch die Punkte* $A(0|3)$, $B(1|1)$ *und* $C(-2|2)$. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.66) Lösungen zu Funktionsrekonstruktionen.

8.15 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

In vielen Anwendungsbereichen der *Differentiation* werden mehrere Bedingungen mit einander verknüpft, um eine Optimierung je nach Aufgabenart zu erreichen. Hierbei sind oftmals *Maxima*, *Minima* oder *Wendepunkte* gesucht. Um die verschiedenen Bedingungen zu kombinieren, werden die einzelnen Informationen in Form von Gleichungen niedergeschrieben und anschließend das *Gleichungssystem* so vereinfacht, dass unwichtige und unbekannte Parameter eliminiert werden. Die resultierende *Gleichung* kann dann als *Funktion* aufgestellt werden, sodass diese untersucht werden kann.

Durch ein Beispiel wird die Vorgehensweise schnell deutlich:

Beispielaufgabe: Der *Umfang* U eines *Rechtecks* ist festgelegt. Dabei sollen die *Seiten* des *Rechtecks* so gewählt werden, dass der *Flächeninhalt* maximal wird. Berechne den *Seitenlängen* des *Rechtecks* für den *maximalen Flächeninhalt*.

Im ersten Schritt werden die Informationen in *Gleichungen* niedergeschrieben:

$$U = 2x + 2y \quad \wedge \quad A = xy \quad , \tag{8.86}$$

wobei das Ziel der Aufgabe die *Maximierung* des *Flächeninhalts* ist und somit die *Gleichung* für den *Umfang* nach einer *Seite* (zum Beispiel y) aufgelöst und in die *Gleichung* für den *Flächeninhalt* eingesetzt werden, um die *Zielfunktion* zu finden:

$$U = 2x + 2y \;\Rightarrow\; y = \frac{U}{2} - x \;\Rightarrow\; A(x) = x\left(\frac{U}{2} - x\right) = -x^2 + \frac{Ux}{2} \quad . \tag{8.87}$$

Die gefundene *Zielfunktion* kann anschließend untersucht werden, um so das *Ergebnis* zu berechnen.

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + \frac{Ux}{2} \\ A'(x) &\overset{!}{=} 0 = -2x + \frac{U}{2} \\ \Rightarrow \quad x &= \frac{U}{4} \quad \Rightarrow \quad A''(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum} \end{aligned} \tag{8.88}$$

Somit ergibt sich der *maximale Flächeninhalt*, wenn die *Seiten* $x = \dfrac{U}{4}$ und folglich $y = \dfrac{U}{4}$ lang sind.

8.15.1 Übungsaufgaben zu Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Aufgabe 1: *In einem gleichschenkligen Dreieck soll ein Rechteck mit einem maximalen Flächeninhalt aufgespannt werden. Berechne die Seitenlängen des Rechtecks.*

Aufgabe 2: *In einem Kreis soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt gezeichnet werden. Berechne die Seitenlängen des Rechtecks.*

Aufgabe 3: *In einem Halbkreis ein Rechteck mit einem maximalen Flächeninhalt aufgespannt werden. Berechne die Seitenlängen des Rechtecks.*

Aufgabe 4: *Ein einem Kreis soll ein gleichschenkliges Dreieck mit maximalem Flächeninhalt gezeichnet werden. Berechne die Seitenlängen des Dreiecks.*

Aufgabe 5: *Ein Zaun soll entlang einer Hausseite gespannt werden, sodass der maximale Flächeninhalt eingeschlossen wird. Dabei ist die Gesamtlänge des Zauns gegeben durch s.*

Aufgabe 6: *Berechne die Seitenlängen eines Rechtecks mit konstantem Flächeninhalt, sodass der Umfang minimal wird.*

Aufgabe 7: *Berechne die Seitenlängen eines geraden Prismas mit rechteckiger Grundfläche, sodass das Volumen maximal ist, während die Oberfläche konstant bleibt.*

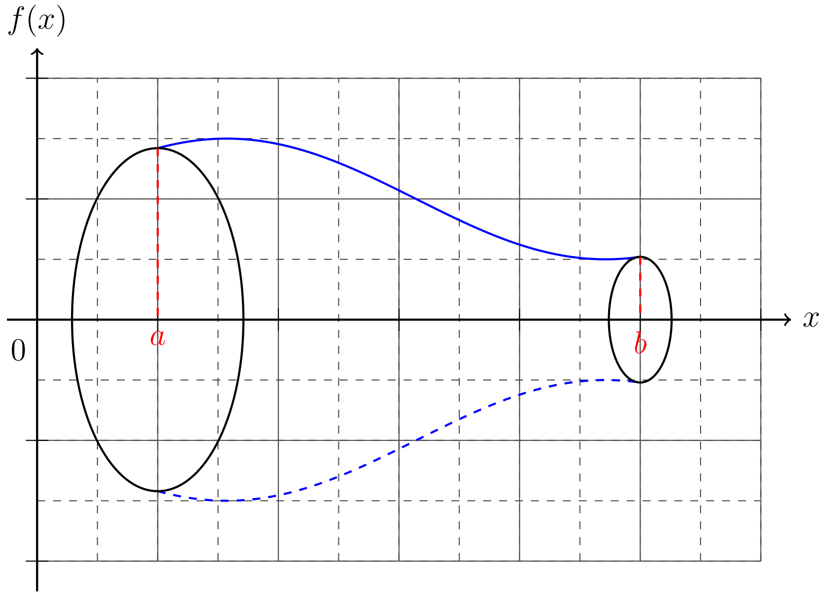
Aufgabe 8: *Berechne den Radius und die Höhe eines Zylinders mit konstantem Volumen, sodass die Oberfläche minimal wird.*

Aufgabe 9: *Die Oberfläche eines Quaders mit konstantem Volumen soll minimiert werden. Berechne die Kantenlängen des Quaders.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.67) Lösungen zu Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen.

8.16 Rotationskörper

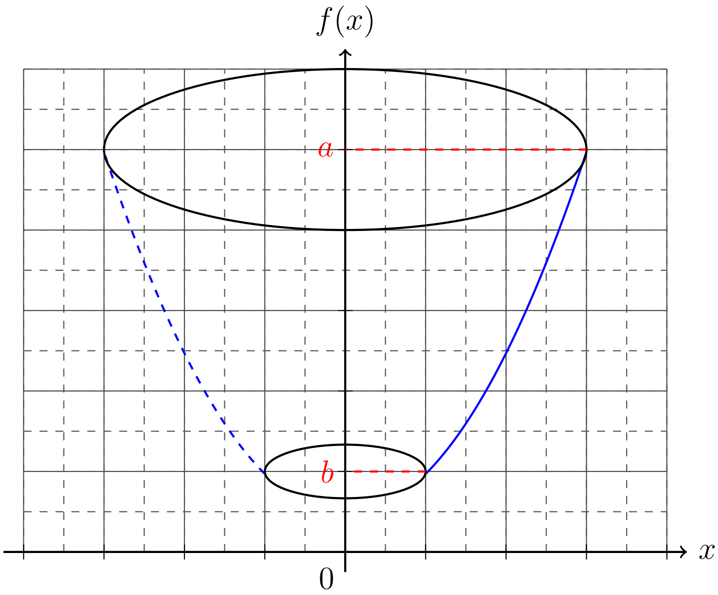
Mit dem *Integral* ist es nicht nur möglich eingeschlossene *Flächeninhalte* zu bestimmen, sondern auch von dreidimensionalen Körpern, welche entstehen, wenn die eingeschlossene *Fläche* um eine Achse rotiert wird. Diese *Rotationskörper* können benutzt werden, um das *Volumen* und die *Oberfläche* von Objekten wie zum Beispiel Vasen zu bestimmen.



Für das *Volumen* ergibt sich, wie aus der *Geometrie* des *Zylinders* bekannt, *Grundfläche* mal *Höhe*, wobei über alle möglichen *Höhen* im *Intervall integriert* wird

$$\begin{aligned} V_Z &= \pi y r^2 \quad , \\ V_x &= \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad . \end{aligned} \tag{8.89}$$

Für die *Rotation* um die *Ordinate*

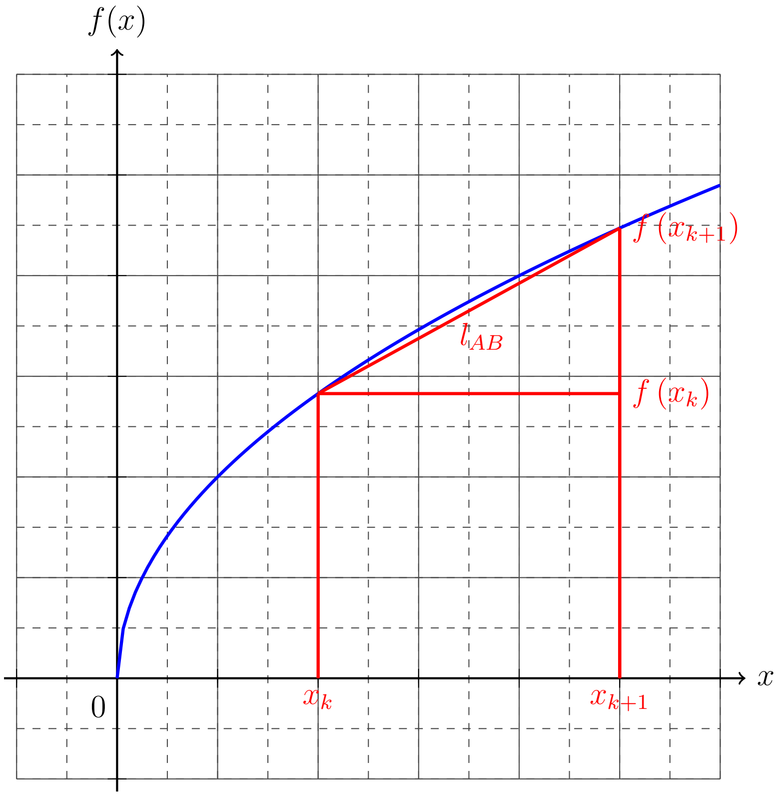


verhält sich dies ähnlich, wobei die *Funktion* $f(x)$ zur *Umkehrfunktion* $f^{-1}(y)$ gebracht werden muss, hieraus und der *Eindeutigkeitsbedingung* ergeben sich auch neue *Grenzen* des *Integrals*.

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_{\max\{f(a),f(b)\}}^{\min\{f(a),f(b)\}} \left(f^{-1}(y)\right)^2 dy \ \text{ substituiere: } f^{-1}(y) = x \ \Rightarrow \ dy = |f'(x)|\, dx \\ \Rightarrow \quad V_y &= \pi \int_a^b x^2\, |f'(x)|\, dx \quad . \end{aligned} \tag{8.90}$$

Hierbei ist die letztere *Darstellung* direkt aus der *Funktionsgleichung* zu benutzen, was zeitlichen Aufwand erspart.

Bei der Berechnung der Oberfläche O sind die Grundflächen, falls sie vorhanden sind, Kreise, sodass diese nicht besprochen werden müssen. Allerdings kann bei der Mantelfläche $M = U \cdot h$ die passende Höhe nicht mehr als direkter Abstand zwischen den Grundflächen angegeben werden, da es auch auf der Mantelfläche zu Krümmungen kommen kann. Folglich muss zu erst die Länge der Funktion bestimmt werden - die sogenannte Bogenlänge l. Hierzu wird eine beliebige Funktion als Skizze betrachtet und die Bogenlänge zwischen zwei Punkten auf der Funktion $A\,(x_k\,|f\,(x_k))$ und $B\,(x_{k+1}\,|f\,(x_{k+1}))$.



Durch den Satz des Pythagoras lässt sich folgende Gleichung für die Bogenlänge aufstellen:

$$
\begin{aligned}
l_{AB} &= \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} \\
&= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f(x))^2} \\
&= \Delta x \sqrt{1 + \frac{(\Delta f(x))^2}{(\Delta x)^2}}
\end{aligned}
\tag{8.91}
$$

Da hier diskrete Abstände ($\Delta f(x)$ und Δx) zur Erläuterung gewählt wurden, müssen diese nun in ein Kontinuum übersetzt werden. Aus diesem Grund wird die Strecke zwischen A und B in n Teilschritt unterteilt, sodass approximativ für die Bogenlänge,

$$
l_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_n \sqrt{1 + \frac{(\Delta f(x_n))^2}{(\Delta x_n)^2}} \quad , \tag{8.92}
$$

gilt. Durch die Verwendung des Limes kann diese Gleichung nun von einer diskreten Summe zu einer kontinuierlichen überführt werden:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} l_n &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1+\frac{(\Delta f(x_n))^2}{(\Delta x_n)^2}}\Delta x_n \qquad \left[\text{mit: } \lim_{\to\infty}\sum\cdots=\int \quad \text{und} \quad \lim_{\to\infty}\Delta x = dx\right] \\
l &= \int\limits_a^b \sqrt{1+\frac{(df(x))^2}{(dx)^2}}dx \\
l &= \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2}dx \\
l &= \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \quad .
\end{aligned} \tag{8.93}$$

Somit ergibt sich für die *Mantelfläche* $M = U \cdot l$:

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx \quad . \tag{8.94}$$

Dies kann ebenso für die Rotation um die Ordinate verwendet werden, allerdings muss hierfür die Umkehrfunktion eingesetzt werden.

$$M_x = 2\pi \int_{\max\{f(a),f(b)\}}^{\min\{f(a),f(b)\}} f^{-1}(y)\sqrt{1+(f'^{-1}(y))^2}dx \quad . \tag{8.95}$$

8.16.1 Übungsaufgaben zu den Rotationskörpern

Aufgabe 1: *Berechne das Volumen des Rotationskörpers um die Abszisse in den angegebenen Grenzen.*

a) $f(x) = x^2 - 3x \;\; \forall\, x \in [0; x_N]$

b) $f(x) = x^2 - x - 2 \;\; \forall\, x \in [x_{N_1}; x_{N_2}]$

c) $f(x) = \frac{1}{4}e^x \;\; \forall\, x \in [0; 3]$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} \;\; \forall\, x \in [2; 8]$

e) $f(x) = 3\sqrt{3x} - x \;\; \forall\, x \in [0; x_N]$

f) $f(x) = \ln(x) \;\; \forall\, x \in \left[\frac{1}{3}; 6\right]$

g) $f(x) = x^3 - 3x - 2 \;\; \forall\, x \in [x_{N_1}; x_{N_2}]$

h) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \;\; \forall\, x \in [x_{N_1}; x_{N_2}]$

Aufgabe 2: *Berechne das Volumen des Rotationskörpers um die Ordinate in den angegebenen Grenzen.*

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \;\; \forall\, x \left[\frac{1}{5}; 2\right]$

b) $f(x) = 2x + 1 \;\; \forall\, x \left[\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right]$

c) $f(x) = x^3 - x \;\; \forall\, x \left[1; \frac{5}{2}\right]$

d) $f(x) = \sqrt{x} \;\; \forall\, x\, [2; 4]$

e) $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 3 \;\; \forall\, x\, [0; x_N] \;,\; 0 < x_N$

f) $f(x) = -x^2 - 3x - 2 \;\; \forall\, x\, [x_N; x_E] \;,\; x_E < x_N$

g) $f(x) = \ln(x) \;\; \forall\, x\, [x_N; 3]$

h) $f(x) = e^{2x} \;\; \forall\, x\, [1; 2]$

Aufgabe 3: *Berechne die Oberfläche des Rotationskörpers um die Abszisse in den angegebenen Grenzen.*

a) $f(x) =$

Aufgabe 4: *Zeige, dass die eingeschlossene Fläche zwischen der Abszisse und* $f(x) = \frac{1}{x}$ *im Intervall von* $[1; \infty]$ *keine Lösung besitzt, allerdings es endliches Rotationsvolumen. Bestimme dieses Rotationsvolumen.*

Aufgabe 5: *Bestimme die äußere radiale Ausdehnung einer möglichen Schalenstruktur mit der Abszisse und der Funktion als Begrenzung (Mantelfläche), sodass ein Volumen von* 20 *Volumeneinheiten in diese hineinpasst.*

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ *b)* $f(x) = x^2 - 1$ *c)* $f(x) = \ln(x)$

Aufgabe 6: *Bestimme die äußere radiale Ausdehnung einer möglichen Schalenstruktur mit der Abszisse und der Funktion als Begrenzung, sodass ein Volumen von* 20 *Volumeneinheiten in diese hineinpasst, wobei der Rand der Schale durch die Funktion* $f(x) = \sqrt{x-1}$ *beschrieben wird.*

Aufgabe 7: *Die Kapazität eines symmetrischen Pumpspeichersee soll durch einen Wall erhöht werden, welcher durch die Funktion* $f(x) = 1250(x-2)e^{-x-2}$ *beschrieben wird. Der Seegrund kann näherungsweise durch die Funktion* $g(x) = 1{,}85x^2 - 7{,}4$ *beschrieben werden. Bestimme die maximale Füllhöhe des Speichersees. Der See hat eine gesamte orthogonale Längenausdehnung zur Funktion von Wallscheitel zu Wallscheitel von* 10,5 *Längeneinheiten, während an den Enden eine ideale Rundung vorzufinden ist. Berechne die maximale Füllmenge des gesamten Speichersees mit dem Wall und bestimme um wie viel Prozent sich die Kapazität durch den Wall erhöht hat.*

Aufgabe 8: *Ein Blumentopf soll nach eine Form besitzen, welche im Intervall* $[1,4]$ *durch die Funktion* $f(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$*, während das Innere durch die Funktion* $g(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}-0,005}}{\sqrt{x}}$ *beschrieben wird. Außerdem befindet sich am kleineren Ende ein Boden mit einer Stärke von* $0,03125$ *Längeneinheiten, welche in Dezimetern zu interpretieren sind.*

a) Zeichne in ein Koordinatensystem die Funktionen im Intervall $\left[\dfrac{1}{2},5\right]$.

b) Bestimme das Füllvolumen des Blumentopfes.

c) Bestimme die maximale Dicke der Wand des Blumentopfes.

d) Berechne das Gewicht des Blumentopfes, wenn dieser aus Porzellan mit einer Dichte von $\rho=2,36\frac{g}{cm^3}$ besteht.

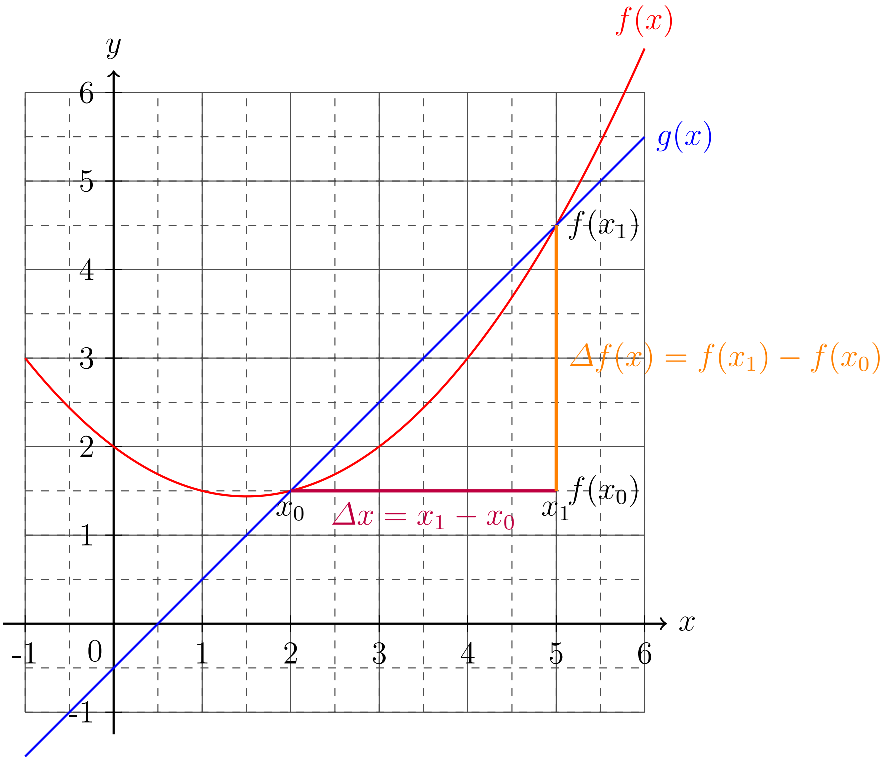
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.68) Lösungen zu den Rotationskörpern.

8.17 Nachtrag: Differentialquotient

In diesem Buch wurde die gesamte *Differentiation* und *Integration* über die *Operatoralgebra* eingeführt, da dies in der Physik, Wirtschaft, höheren Mathematik und vielen anderen Bereichen von Vorteil ist. Außerdem konnte auch bekannte Konzepte wie dem *Einsetzverfahren* und *linearen Funktionen* zurückgegriffen werden. Außerdem wird die zentrale Rolle des *Kommutators* noch einmal hervorgehoben und zeigt somit, dass die *Differentiation* und *Integration* neue *Operatoren* sind, welche auf *Kommutativ-* und *Assoziativgesetz* überprüft werden müssen. Aus dieser Ansammlung von Gründen wurde in diesem Buch nicht der, in der Schule verwendete, Weg über dem *Differentialquotienten* gewählt, da dieser in erster Linie eine *Näherung* ist. Oftmals sind die Schüler deswegen beim Übergang zwischen dieser *Näherung* und den allgemeinen *Ableitungsregeln* verwirrt. Ähnlich ist die Situation beim Übergang von *Differentiation* zur *Integration* sowie der Anwendung in der Physik (zum Beispiel den Bewegungsgleichungen).

In diesem Nachtragsabschnitt soll dennoch, für die Vollständigkeit, der *Differentialquotient* vorgestellt werden.

Zunächst soll die erste *Näherung* beschrieben werden. Dazu werden in einem *Koordinatensystem* eine beliebige *Funktion* $f(x)$ gezeichnet, wobei diese von einer *Gerade* $g(x)$ zweimal geschnitten wird. Diese *Schnittpunkte* sind dann $P_0(x_0|f(x_0))$ und $P_1(x_1|f(x_1))$.



Außerdem wurde das *Steigungsdreieck* mit den *Streckenlängen* $\Delta f(x)$ und Δx der *Gerade* $g(x)$ so eingezeichnet, dass dieses durch die *Schnittpunkte* der *Funktionen* beschrieben wird. Hieraus ergibt sich für den *Steigungsparameter*:

$$g(x) = mx + b \;\;\Rightarrow\;\; m = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$\Rightarrow\;\; m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} := \varphi(x_1, x_0) \;\;, \tag{8.96}$$

wobei der Bezug auf die *Funktion* $f(x)$ aufgrund der *Schnittpunkte* und der damit verbundenen Wertegleichheit resultiert. Außerdem wurde die Funktion $\varphi(x_1, x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ eingeführt, welche *Differenzenquotient* genannt wird und eine Funktion von zwei Variablen ist. Der *Differenzenquotient* kann durch eine Variablenumbenennung auch in einer anderen Form ausgedrückt werden.

$$x_1 = x_0 + h \;\text{ mit: }\; \varphi(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$
$$\Rightarrow\;\; \varphi(x_0 + h, x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{8.97}$$

Der *Differenzenquotient* gibt also die *durchschnittliche Steigung* einer Funktion in einem Intervall an, sodass dies für *Näherungsrechnungen* verwendet werden kann. Wenn nun allerdings die *Steigung* eines einzelnen Punktes der *Funktion* berechnet werden soll, ist der *Differenzenquotient* nicht mehr *definiert*, da $x_1 = x_0$ und somit $h = 0$ gelten würde. Aus diesem Grund wird der *Grenzwert* des *Differenzenquotient*, der sogenannte *Differentialquotient*, betrachtet.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x_1 \to x_0} \varphi(x_1, x_0) \\ &= \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned} \tag{8.98}$$

Allerdings ist dieser nur für einen *Punkt* gültig. Oftmals wird anschließend die Ausweitung auf die *Ableitungsregeln* lediglich argumentativ bestritten, sodass die *Operatoren* und *Differentiale* nicht vorkommen. Letztendlich läuft die Berechnung des *Differenzenquotientens* $f'(x_0)$ auf eine *Polynomdivision* mit anschließenden *Grenzwertbetrachtung* heraus, so dass sich folgende Charakteristiken herauskristallisieren:

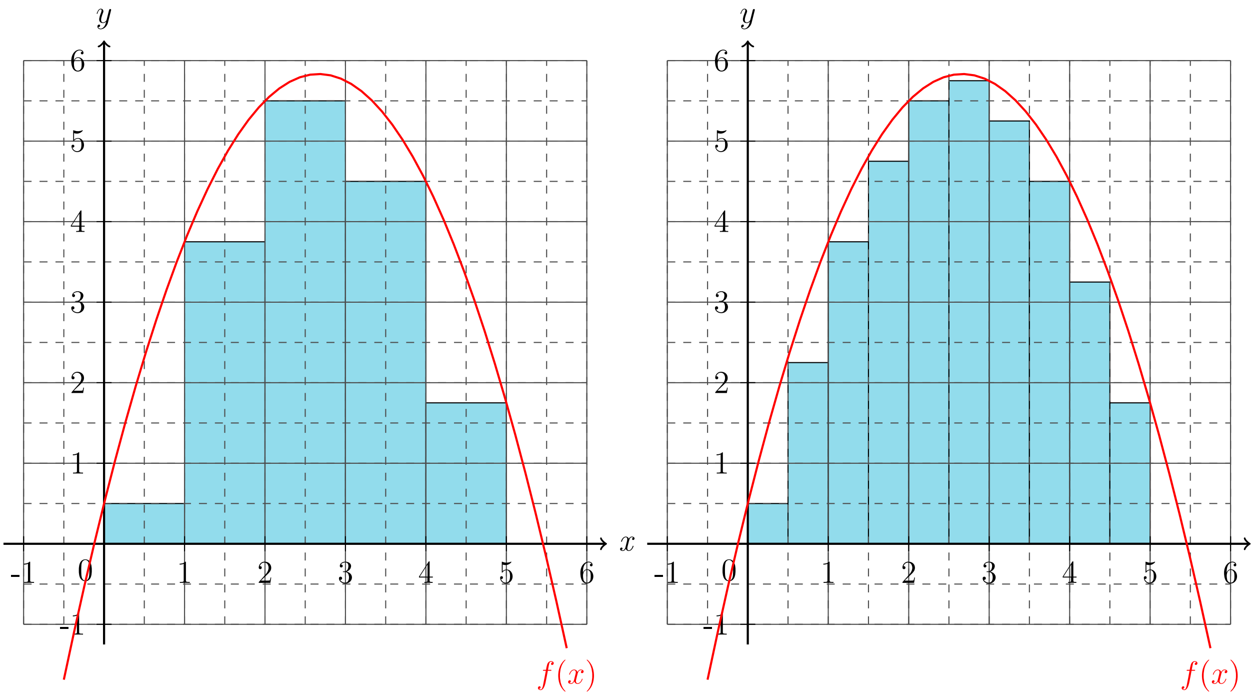
$$
\begin{aligned}
f(x) = c &\Rightarrow \varphi(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0 \\
&\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0 \\
f(x) = ax &\Rightarrow \varphi(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = a \\
&\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = a \\
f(x) = x^2 &\Rightarrow \varphi(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0 \\
&\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 2x_0 \\
f(x) = x^3 &\Rightarrow \varphi(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = x_1^2 + x_0 x_1 + x_0^2 \\
&\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 3x_0^2 \\
f(x) = x^n &\Rightarrow \varphi(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \sum_{k=0}^{n-1} x_1^k \cdot x_0^{n-1-k} \\
&\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = n x_0^{n-1} \\
f(x) = e^x &\Rightarrow \varphi(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{x_1 - x_0} - 1}{x_1 - x_0} \\
&\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = e^{x_0}
\end{aligned}
\tag{8.99}
$$

Somit können auch alle weiteren *Ableitungsregeln* über den *Differentialquotienten* bestimmt werden. Es zeigt sich allerdings zur vorgestellten *Operatoralgebra*, dass dies beim *Differentialquotienten* komplexer erscheinen mag. Auch die Verbindung zur *Integration* kann so nicht dargelegt werden, welche mit auch über *Näherungsmethoden* in der Schule eingeführt wird und im nächsten Abschnitt erläutert wird.

8.18 Nachtrag: Ober- und Untersummen

Wie bereits schon im Abschnitt über den *Differentialquotienten* erwähnt wurde, wurde in diesem Buch zur Einführung der *Differential-* und *Integralrechnung* ein *Ansatz* verwendet, welcher nicht auf *Näherungsmethoden* beruht. Da viele Schulen allerdings einen *iterativen Einführungsansatz* verfolgen, soll in diesem Abschnitt die Herangehensweise zur *Integralrechnung* über *Näherungsmethoden* erläutert werden.

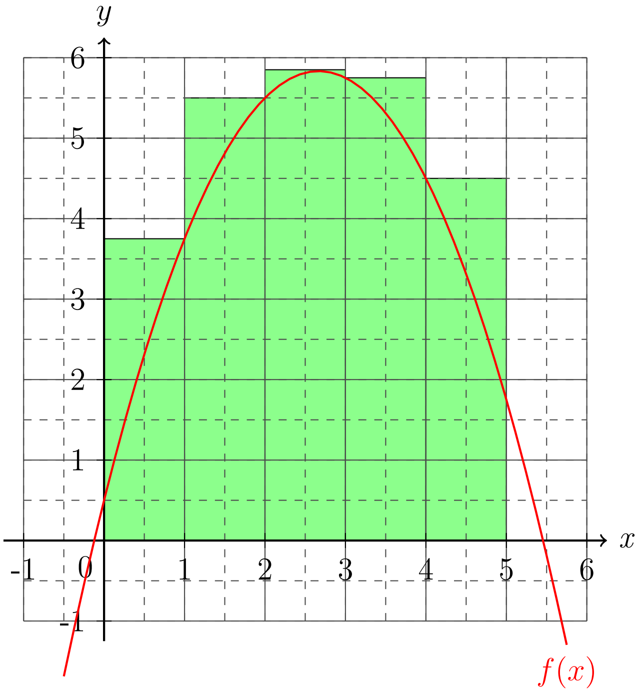
Um den *Flächeninhalt* zu bestimmen, der durch eine *Funktion*, der *Abszisse* und zwei *Intervallgrenzen definiert* ist, wird zu nächst der *Graph* der *Funktion* in ein *Koordinatensystem* gezeichnet. Durch die *Intervallgrenzen*, kann die *Länge* der *Abszisse* bestimmt werden und diese in beliebig viele *Teilstrecken* Δx unterteilt werden. Mit diesen *Teilstrecken* Δx können nun *Rechtecke* so gebildet werden, dass diese die *Funktion* an einer *Ecke* lediglich tangieren.

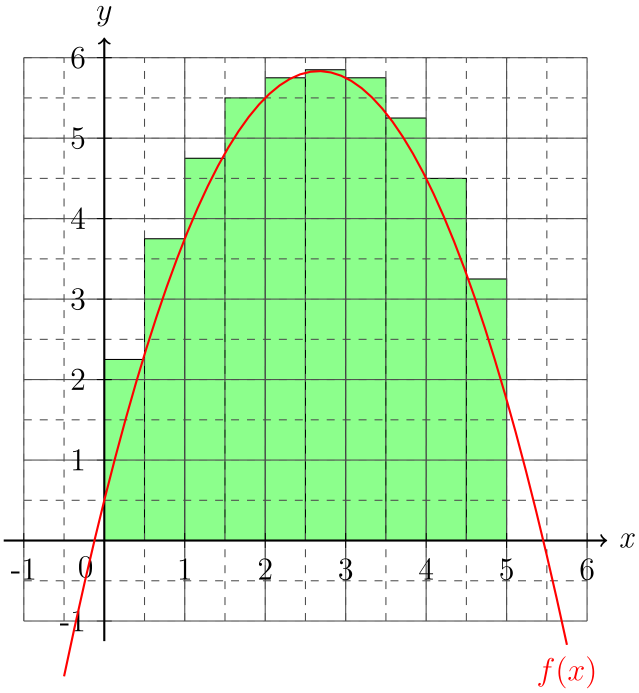


Wie in der Abbildung zu sehen ist, kann durch die Wahl der *Länge* der *Teilstrecken* $\Delta x = x_{k-1} - x_k$ die Genauigkeit der Berechnung des *Flächeninhalts* beeinflusst werden. Dabei kann die sogenannte *Untersumme* $U_{n,f(x)}(x)$ definiert werden. Diese orientiert sich jeweils an der linken Seite eines *Rechtecks* $f(x_{k-1})$ und wird über eine *diskrete Summe* gebildet.

$$U_{n,f(x)}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) \cdot \Delta x \tag{8.100}$$

Es besteht aber auch die Möglichkeit, dass die *Rechtecke* die *Funktion* in einem Eckpunkt schneiden.





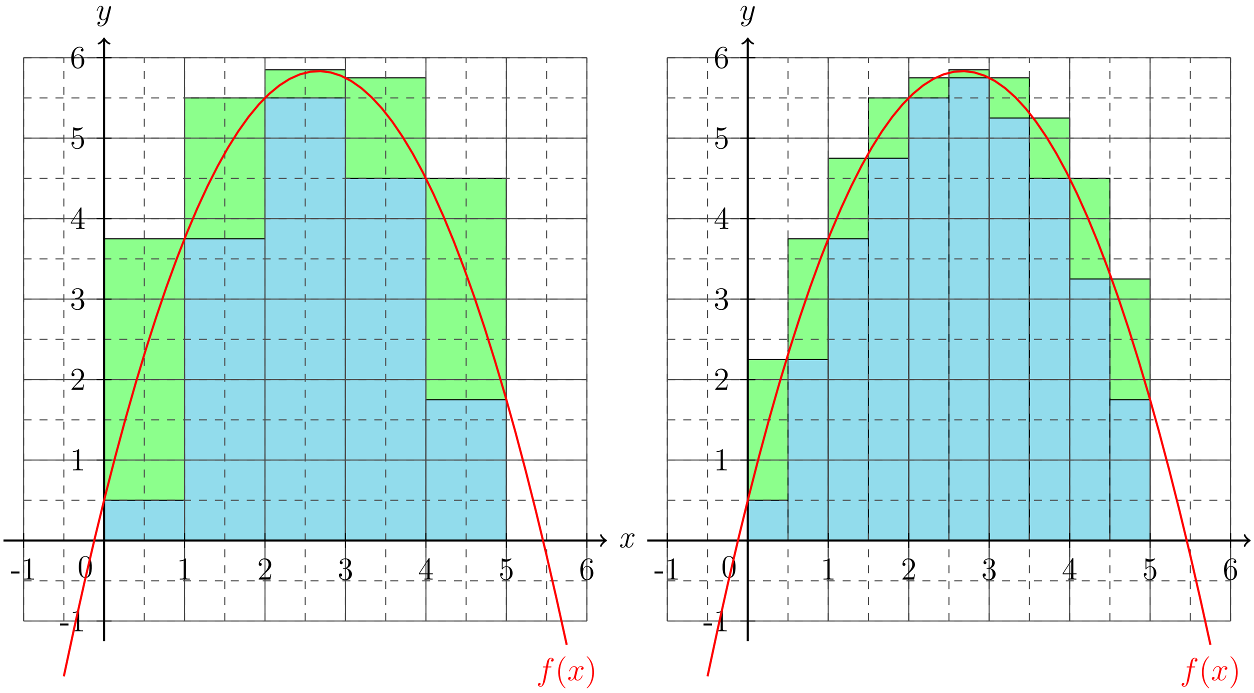
Dabei ergibt sich die *Definition* der sogenannte *Obersumme* $O_{n,f(x)}(x)$, welche sich jeweils an der rechten Seite eines *Rechtecks* $f(x_k)$ orientiert und über eine *diskrete Summe* gebildet wird.

$$O_{n,f(x)}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x \tag{8.101}$$

Bei den beiden *Definitionen* ist auffällig, dass die *Unter-* $U_{n,f(x)}(x)$ und *Obersumme* $O_{n,f(x)}(x)$ über einen *Eckpunktwert* des *Rechteckes* definiert sind, wobei in den Abbildungen sich stets jeweils an den höheren *Werten* orientiert wurde. Dies zeigt, dass eine weitere Fallunterscheidung in die Definition der *Summen* eingebunden werden muss. Dabei scheint die *Steigung* der *Funktion* eine zentrale Rolle zu spielen, da die vorgestellten *Definitionen* nur für *monoton wachsende Funktionen* ihre Gültigkeit besitzen. Allerdings kann durch die Verwendung des *Supremums* sup und des *Infimum* inf umgangen werden.

$$\begin{aligned} O_{n,f(x)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta x \cdot \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x) \right) \\ U_{n,f(x)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta x \cdot \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x) \right) \end{aligned} \tag{8.102}$$

Weiterhin muss beachtet werden, dass die *Obersumme* $O_{n,f(x)}(x)$ stets einen zu hohen *Wert* für den zu bestimmenden *Flächeninhalt* liefert, während die *Untersumme* $U_{n,f(x)}(x)$ stets zu kleine *Werte* hervorbringt. Dies wird in folgender Abbildung deutlich:



Somit kann folgende *Ungleichung* aufgestellt werden:

$$U_{n,f(x)}(x) \leq A_{[x_1,x_2]}\left(f(x)\right) \leq O_{n,f(x)}(x) \tag{8.103}$$

Außerdem zeigt sich, dass die Genauigkeit von der Anzahl der *Rechtecke* n abhängt, sodass über die Bildung des *Grenzwertes* $n \to \infty$ der eingeschlossene *Flächeninhalt* $A_{[x_1,x_2]}\left(f(x)\right)$ bestimmt werden kann.

$$A_{[x_1,x_2]}\left(f(x)\right) = \lim_{n\to\infty} U_{n,f(x)}(x) = \lim_{n\to\infty} O_{n,f(x)}(x) \tag{8.104}$$

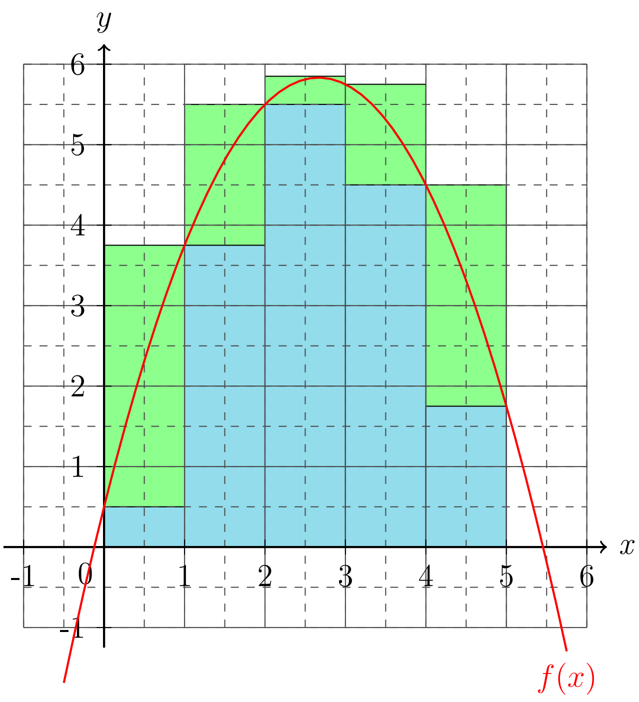
Durch die Verwendung des *Grenzwertes* wird aus der *diskreten Summe* $\sum\limits_{k=1}^{n}$ eine *kontinuierliche*, welche mit dem *Integral* $\int$ definiert wird. Dabei sind die *Intervallgrenzen* die *Grenzen* des *Integrals*. Auch neu *definiert* wird die sogenannte *Stammfunktion* $F(x)$, welche den *Flächeninhalt* vor der Betrachtung der *Grenzen* beschreibt. Hieraus ergibt sich folgende Schreibweise:

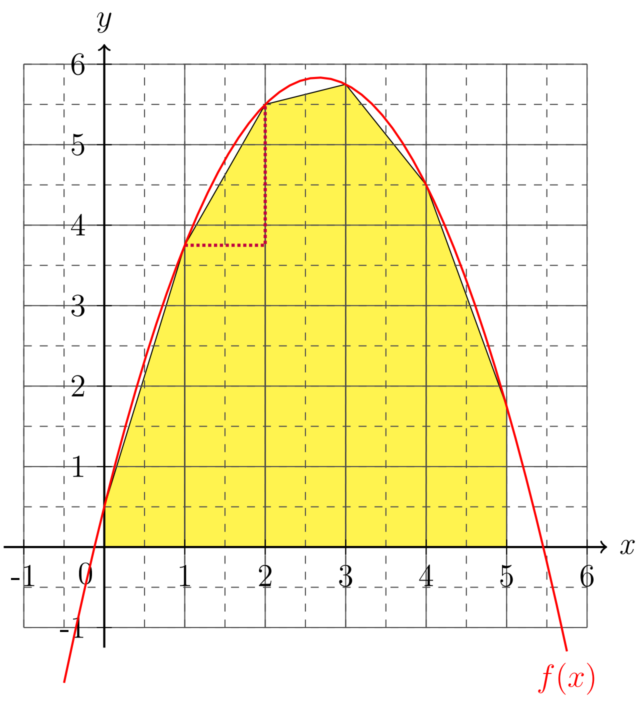
$$\begin{aligned} A_{[x_1,x_2]}\left(f(x)\right) &= \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx \\ \Rightarrow \quad A_{[x_1,x_2]}\left(f(x)\right) &= F(x)\big|_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1) \end{aligned} \tag{8.105}$$

Abschließend kann noch der Bezug zwischen der *Stammfunktion* $F(x)$ und der *Funktion* $f(x)$ dargestellt werden, welcher allerdings nicht unmittelbar aus den zu vorigen Rechnungen ersichtlich wurde. Hierbei wird die *Stammfunktion* testweise abgeleitet, woraus sich in der daraus folgenden Verallgemeinerung die ursprüngliche *Funktion* $f(x)$ ergibt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F(x) &= F'(x) = f(x) \\ \Rightarrow \quad F(x) &= \int f(x)dx \end{aligned} \tag{8.106}$$

Aus der *Unter-* $U_{n,f(x)}(x)$ und *Obersumme* $O_{n,f(x)}(x)$ können noch weitere *approximative Summenbeschreibungen* des eingeschlossenen *Flächeninhalts* $A_{[x_1,x_2]}(f(x))$ beschrieben werden. So kann beispielsweise zu der *Untersumme* stets ein *Dreieck* hinzu addiert werden. Dieses *Dreieck* wird gebildet, indem die *Untersumme* von der *Obersumme subtrahiert* und diese *Differenz* durch zwei *dividiert* wird.

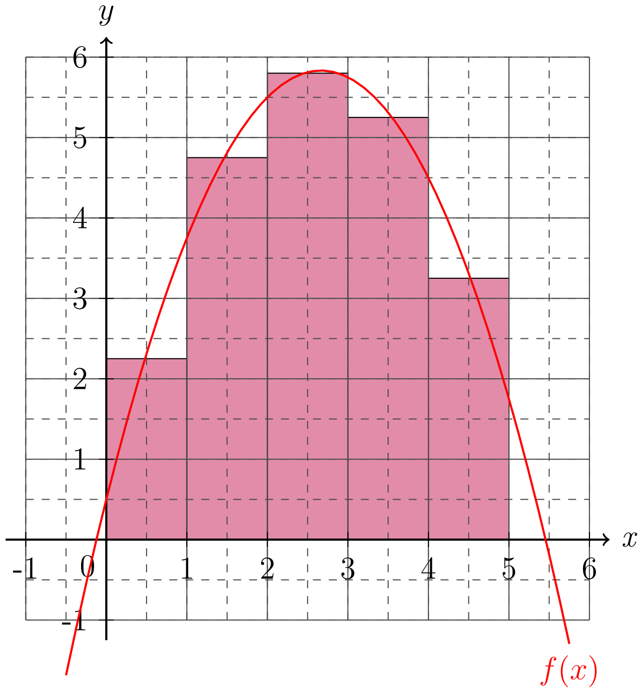




Hieraus ergibt sich die folgende Summe:

$$\begin{aligned} S_{n,f(x)}(x) &= U_{n,f(x)}(x) + \frac{O_{n,f(x)}(x) - U_{n,f(x)}(x)}{2} \\ S_{n,f(x)}(x) &= \frac{O_{n,f(x)}(x) + U_{n,f(x)}(x)}{2} \\ A_{[x_1,x_2]}(f(x)) &= \lim_{n\to\infty} S_{n,f(x)}(x) \end{aligned} \tag{8.107}$$

Aber auch vollständig andere Einteilungsverfahren sind denkbar, so ist im folgenden Beispiel der *Funktionswert* der Mitte des *Intervalls* gleich der *Höhe* des *Rechtecks*:



Hieraus ergibt sich wiederum folgende *Summe*:

$$\begin{aligned} R_{n,f(x)}(x) &= \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k-1} + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x \\ &= \sum_{k=1}^{n} f\left(x_{k} - \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x \\ A_{[x_1,x_2]}\left(f(x)\right) &= \lim_{n\to\infty} R_{n,f(x)}(x) \end{aligned} \tag{8.108}$$

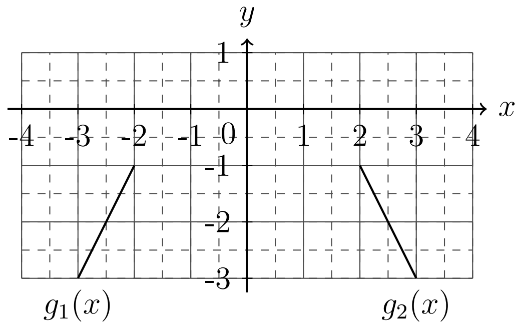
Es wird deutlich, dass die Herangehensweise bei der *approximativen iterativen* Bestimmung des eingeschlossenen *Flächeninhalts* $A_{[x_1,x_2]}\left(f(x)\right)$ viele *Ansätze* verfolgt werden können. Dabei stellt sich lediglich die Anzahl verschiedener *Operatoren* aus verschiedenen Teilbereichen der Mathematik eine Schwierigkeit da. So werden *diskrete Summen* und *Grenzwerte* mit den *Mengenoperatoren Supremum* und *Infimum* benötigt, um eine vollständige korrekte Beschreibung betrachten zu können. Aus diesem Grund wurde in diesem Buch ein *Ansatz* gewählt, welcher durch *vollständige Induktion*, nach der *Definition* des *Differentialoperators* aus bekannten Gegebenheiten, seine bewiesene Gültigkeit erlangt und der für die weiterführende Mathematik wie bei *Differentialgleichungen* notwendig wird.

8.19 Gemischten Differentiations- und Integrationsaufgaben

Aufgabe 1: *Die gesuchte Funktion schneidet die Abszisse bei einem Variablenwert von* $x = 2$ *und ist ein Polynom zweiter Ordnung. Außerdem besitzt die Funktion ein Maximum bei* $E_{max}(1|3)$. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

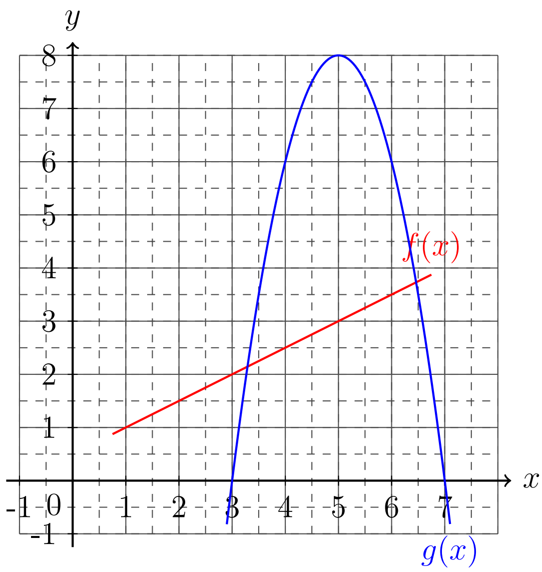
Aufgabe 2: *Die gesuchte Funktion dritten Grades besitzt einen Sattelpunkt bei* $S\left(1\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)$ *und schneidet die Abszisse bei* $x = -\frac{1}{4}$. *Bestimme die Funktionsgleichung.*

Aufgabe 3: *Finde eine Funktion zweiten Grades, die die beiden Geraden stetig verbindet.*



Aufgabe 4: *Aus einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche mit der Seitenlänge* $a = 6,6cm$ *und einer Höhe von* $8,2cm$ *soll ein Zylinder mit maximalen Volumen geschnitten werden. Wie groß ist das Volumen des größtmöglichen Zylinders?*

Aufgabe 5:

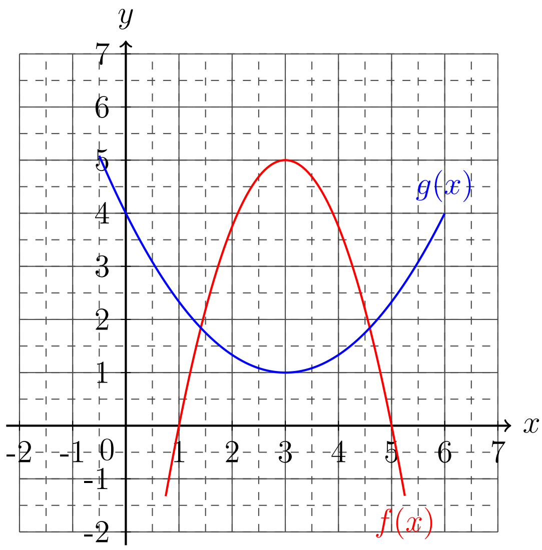


a) Rekonstruiere aus dem Funktionsgraphen die Funktionsgleichungen.

b) Berechne die Schnittstellen der Funktionen.

c) Berechne den durch die Funktionen eingeschlossenen Flächeninhalt.

Aufgabe 6:

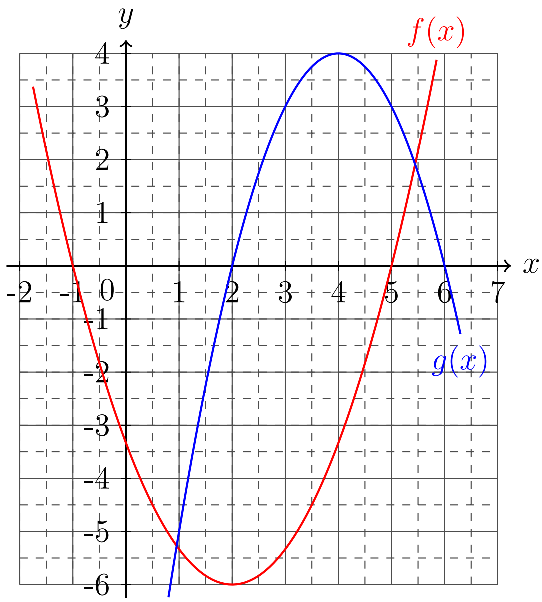


a) Rekonstruiere aus dem Funktionsgraphen die Funktionsgleichungen.

b) Berechne die Schnittstellen der Funktionen.

c) Berechne den durch die Funktionen eingeschlossenen Flächeninhalt.

Aufgabe 7:



a) Rekonstruiere aus dem Funktionsgraphen die Funktionsgleichungen.

b) Berechne die Schnittstellen der Funktionen.

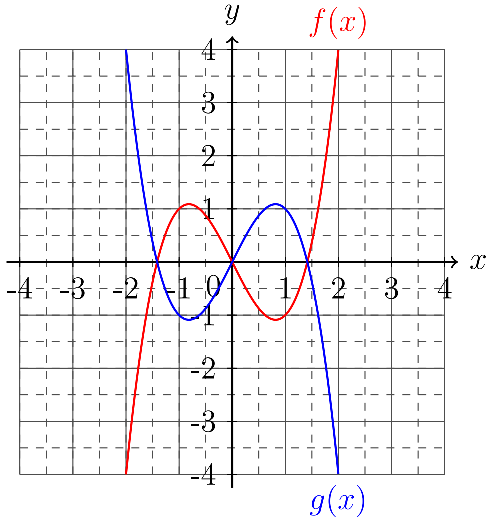
c) Berechne den durch die Funktionen eingeschlossenen Flächeninhalt.

Aufgabe 8:

a) Rekonstruiere aus dem Funktionsgraphen die Funktionsgleichungen.

b) Berechne die Schnittstellen der Funktionen.

c) Berechne den durch die Funktionen eingeschlossenen Flächeninhalt.

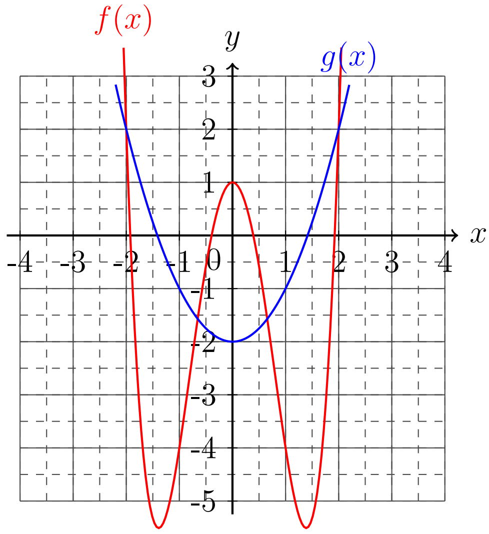


Aufgabe 9:

a) Rekonstruiere aus dem Funktionsgraphen die Funktionsgleichungen.

b) Berechne die Schnittstellen der Funktionen.

c) Berechne den durch die Funktionen eingeschlossenen Flächeninhalt.

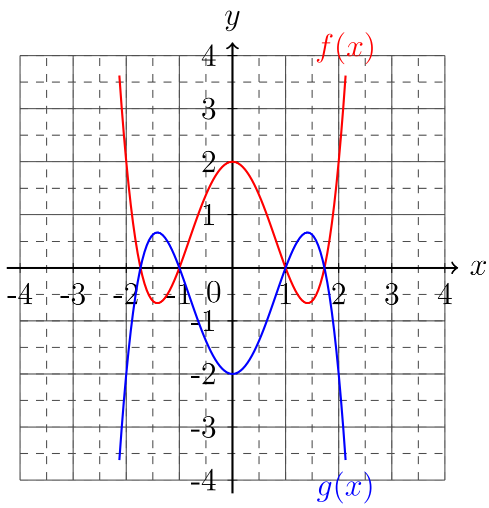


Aufgabe 10:

a) Rekonstruiere aus dem Funktionsgraphen die Funktionsgleichungen.

b) Berechne die Schnittstellen der Funktionen.

c) Berechne den durch die Funktionen eingeschlossenen Flächeninhalt.



Aufgabe 11: *Um die Wasser- und Stromversorgung zu gewährleisten wurde ein Staudamm konstruiert, der das Regenwasser der umliegenden Berge auffängt. Von dem darin gestauten Wasser werden die Felder einer Region sowie die naheliegende Stadt mit den da rumliegenden Dörfern versorgt. Durch das Ablassen des Wassers werden Turbinen in Bewegung gesetzt, sodass Strom produziert wird. Beantworte alle Fragen zu Wasserversorgung.*

a) Durch die relativ stabilen Wetterzyklen kann der Verlauf der Wassermenge in einem Stausee im Jahresmittel mit einer achsensymmetrischen Funktion 4. Ordnung im Intervall $[-6, 6]$ beschrieben werden. So wurde folgende Werte für die Speichermengen des Stausees gemessen: $f(2) = 19267,8$ Tausend Kubikmeter und $f(4) = 22533$ Tausend Kubikmeter Wasser. Außerdem konnte im zweiten Monat auch die tangentiale Änderungsrate bestimmt werden, welche $1453,2$ lag. Bestimme die Funktionsgleichung aus den gegebenen Informationen.

b) Der Staudamm wurde wir eine maximale Speicherkapazität von 25 Millionen Kubikmeter Wasser konstruiert. Berechne, ob der Staudamm dauerhaft unterhalb des Kapazitätsmaximum liegt.

c) Da die Turbinen des im Staudamm integrierten Wasserkraftwerks in einer bestimmten Höhe ihren Einlass besitzen, kann nur über einer bestimmten Füllmenge von $17,9$ Millionen Kubikmetern Strom produziert werden. Diese architektonische Maßnahme wurde getroffen, um die Wasserversorgung auch in länger anhaltenden ariden Zeiten zu gewährleisten. Berechne wie viele Monate kein Strom mit produziert werden kann.

d) Da die Füllmenge des Stausees Einfluss auf den Turbinendruck hat, kann als Approximation der Stromgewinnung ein Zehntel des eingeschlossenen Flächeninhalts über $17,9$ Millionen Kubikmetern in Kilowatt betrachtet werden. Berechne die approximierte Jahresleistung des Wasserkraftwerkes im Staudamm.

e) Durch das Wirtschaftswachstum der Region und der damit auch steigenden Nachfrage sowie einem Zuwachs der regionalen Bevölkerung steigt der Bedarf an Strom und Wasser, sodass die Ausgangsfunktion korrigiert werden müsste. Begründe welche der Funktionsgleichungen das richtige Verhalten darstellen würde.

$g(x) = -7,2x^4 - 0,6x^3 + 444,3x^2 + 98x + 17700$
$h(x) = -8,6x^4 + 420,1x^2 + 17293$
$k(x) = -6,7x^4 + 0,9x^3 + 377,3x^2 - 125x + 17700$

Aufgabe 12: *Bilde die Ableitungen der Funktionen.* (Lösung mit Rechenweg)

a) $f(x) = 5x^3 - x^{\frac{2}{7}} + \dfrac{2}{x^7}$

b) $f(x) = 2e^{3x} - \ln(x)$

c) $f(x) = e^{-2x^3-3x+2}$

d) $f(x) = 2x^3 e^{-4x}$

e) $f(x) = \left(3x^4 + \sqrt{x}\right)^{-6}$

f) $f(x) = e^{-2x}\cos(3x)$

g) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^4 e^{-x}\sin(3x)$

h) $f(x) = \sin(4x^2 + 3x - 1)e^{-3x^2+5x-9}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{(\sin(e^{-3x}))^4}$

j) $f(x) = \arctan(x)$

Aufgabe 13: *Bestimme die Definitions- und Wertemengen, eventuelle Symmetrien, den Ordinatenachsenabschnitt, das Verhalten im Unendlichen, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte, Sattelpunkte und das Monotonieverhalten der gesuchten Funktionen. Zeichne anschließend den Graphen der Funktion.* (Lösung mit Rechenweg)

a) Die gesuchte Funktion zweiter Ordnung besitzt eine Nullstelle bei $x = 5$ mit der Steigung von 2. Außerdem hat die gesuchte Funktion eine Extremstelle bei $x = 2$.

b) Die gesuchte quadratische Funktion verläuft durch den Koordinatenursprung und hat eine weitere Nullstelle bei $x = 8$. Die Steigung an der Stelle $x = 3$ beträgt $-\frac{1}{4}$.

c) Die gesuchte Funktion dritter Ordnung weist eine Punktsymmetrie auf und besitzt ein Maximum bei $(2|5)$.

d) Die gesuchte Funktion dritter Ordnung besitzt einen Wendepunkt bei $(-1|1)$ und eine Extremstelle bei 3 und verläuft durch den Koordinatenursprung.

e) Die gesuchte achsensymmetrische Funktion vierter Ordnung besitzt einen Wendepunkt bei $(-2|2)$. Außerdem verläuft die Tangente $t(x) = \frac{1}{2}x - 2$ parallel zur gesuchten Funktion an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe 14: *Gegeben sei die Funktion* $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - x$*, welche eine Tangente* $t_1(x)$ *an der Stelle* $x = 1$ *besitzt. Die Tangentengleichung für* $t_1(x)$ *wird wie folgt berechnet:* (Mit Musterlösung!)

$$\begin{aligned}
f(x=1) &= \frac{1}{2} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 = -\frac{5}{2} \\
f'(x) &= \frac{3}{2}x^2 - 4x - 1 \\
f(x=1) &= \frac{3}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = -\frac{7}{2} \\
-\frac{5}{2} &= -\frac{7}{2} \cdot 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 \\
t_1(x) &= -\frac{7}{2}x + 1
\end{aligned}$$

$a)$ Bestimme die Tangentengleichung für die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = -1$.

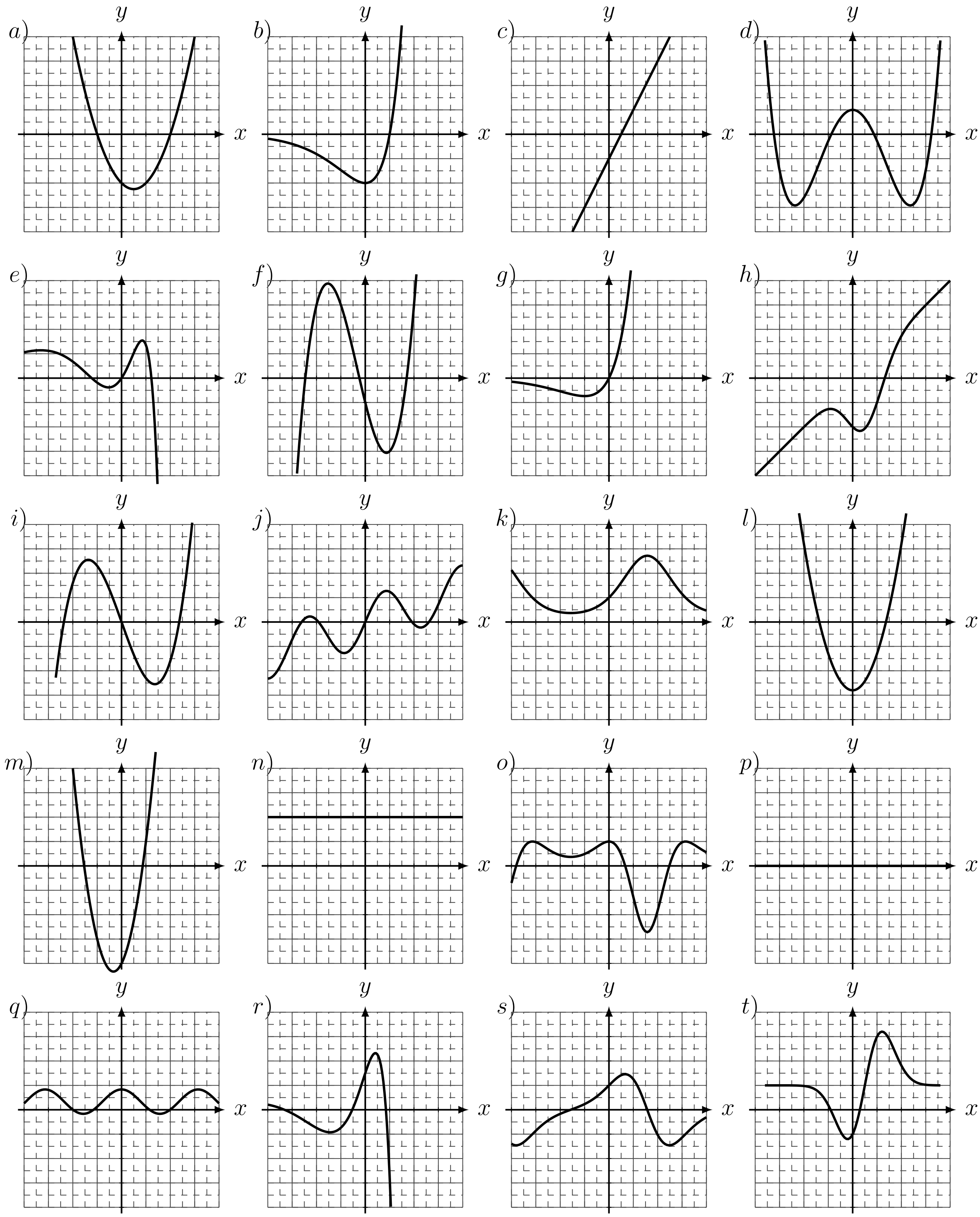
$b)$ Bestimme den Punkt an dem die Gerade $g(x) = -3x$ für die Funktion $f(x)$ eine Tangente darstellt.

$c)$ Begründe warum die Tangente $t_{\frac{4+\sqrt{22}}{3}}(x)$ die Steigung von 0 besitzen muss.

$d)$ Bestimme die orthogonale Geradengleichung zur Wendetangente im Wendepunkt.

$e)$ Bestimme den Schnittpunkt sowie den Schnittwinkel der Tangente aus dem Beispiel $t_1(x)$ mit der Wendetangente.

Aufgabe 15: *Gib die möglichen Verbindungen zwischen den verschiedenen Funktionen an. (Beispiel: der Graph von z) ist die Ableitung zum Graphen von y)).*



Aufgabe 16: *Gegeben sind die Funktionen* $f(x) = 2$ *für das Intervall* $]\,\infty; -2]$ *und* $g(x) = -2$ *für das Intervall* $[2, \infty\,[$. *Verbinde die Funktionen mit einer Funktion dritter Ordnung im Intervall* $[-2, 2]$, *sodass diese differenzierbar in einander übergehen.* (Achtung im Abitur wird die einfache Differenzierbarkeit auch „knickfrei" genannt, was mathematisch nicht definiert ist.)

Aufgabe 17: *Gegeben sei die Funktionsschar* $f_r(x) = \frac{3}{32}x^5 - rx^3$. *Berechne den Wert des Parameter des* r, *sodass die Funktion durch den Punkt* $P(2|-2)$ *verläuft. Bestimme die gemeinsamen Punkte der Funktionsschar und Ortskurve der Extrema.*

Aufgabe 18: *Gegeben seien die Funktionen* $f_y(x) = \frac{1}{12}x^3 + yx$ *und* $g_t(x) = tx^2 - \frac{9}{2}x - \frac{9}{4}$. *Berechne den Wert des Parameter des* t *und* y, *sodass die Funktionen im Punkt* $P(-3|4,5)$ *zweifach differenzierbar in einander sind.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.69) Lösungen zu den gemischten Differentiations- und Integrationsaufgaben.

9 Stochastik

Die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* basiert darauf, dass die Ergebnisse in *Verhältnissen* (2 : 3 „Zwei zu Drei“) oder in *Prozentwerten* 25% angeben werden. Beide dieser Angabearten basieren auf der *Bruchrechnung*. Folglich kann aus den *Verhältnissen* der *Prozentwert* bestimmt werden, da es sich um einen *Bruch* in einer Schreibweise mit dem *Divisionsoperator* handelt. Allerdings ist zu beachten, dass die erste *Darstellung* die sogenannte *Chance* ist, während die zweite *Darstellung* die *relative Häufigkeit* genannt wird. Bei der *Chance* ist die *Summe* der beiden Zahlen die gesamte *absolute Häufigkeit*, während diese bei der *relativen Häufigkeit* als *ungekürzten Nenner* zu finden ist. So ergibt sich für die *Chance*:

$$\begin{aligned} &\text{Anzahl der Treffer Ereignis 1} : \text{Anzahl der Treffer Ereignis 2} \\ &\Rightarrow \quad \text{Gesamtanzahl} = \text{Anzahl der Treffer Ereignis 1} + \text{Anzahl der Treffer Ereignis 2} \quad . \end{aligned} \tag{9.1}$$

Da die *Chance* nur schwer intuitiv einzuschätzen ist, wird in der Regel auf die *relative Häufigkeit* zurückgegriffen, welche oft in der *prozentualen Darstellung* zu finden ist. Für die *relative Häufigkeit* p gilt:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{Anzahl der Treffer}}{\text{Gesamtanzahl}} \quad . \tag{9.2}$$

Durch die Reduktion auf Treffer eines *Ereignisses* E kann somit immer ein alleiniges *Gegenereignis* $\bar{E}$ - also keine Treffer - definiert werden, sodass die *Wahrscheinlichkeiten* P der beiden *Ereignisse* sich stets zu 100% ausaddieren:

$$100\% = P(E) + P(\bar{E}) \quad . \tag{9.3}$$

Ein *Ereignis* kann immer auf das Ziehen von Kugeln aus einer Urne übersetzt werden, sodass im folgenden Abschnitt zunächst die verschiedenen Anordnungen von Kugeln - der *Kombinatorik* - und anschließend das Ziehen von Kugeln thematisiert wird.

Zuvor müssen die Begriffe „*Ereignis*“ und „*Ergebnis*“ und die daraus abgeleiteten Größen betrachtet werden. Dies ist am besten an zwei Würfeln dar zu stellen. So ist der Ergebnisraum Ω

hier als Summe der angezeigten Augen zu betrachten, sodass $\Omega = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ ist. Nun können die Ergebnisse aus verschiedene Ereignisse resultieren, so kann zum Beispiel das Ergebnis 4 durch die Ereignisse $\Sigma_4 =$ {{⚀; ⚂}; {⚁; ⚁}; {⚂; ⚀}} dargestellt werden.

Je nach Bezug können unterschiedliche Mittelwerte $\bar{x}$ existieren, allerdings wird hier in diesem Buch ausschließlich der arithmetische Mittelwert verwendet, welcher durch die Summe der Ergebnisse dividiert durch die Anzahl der Ergebnisse gegeben ist:

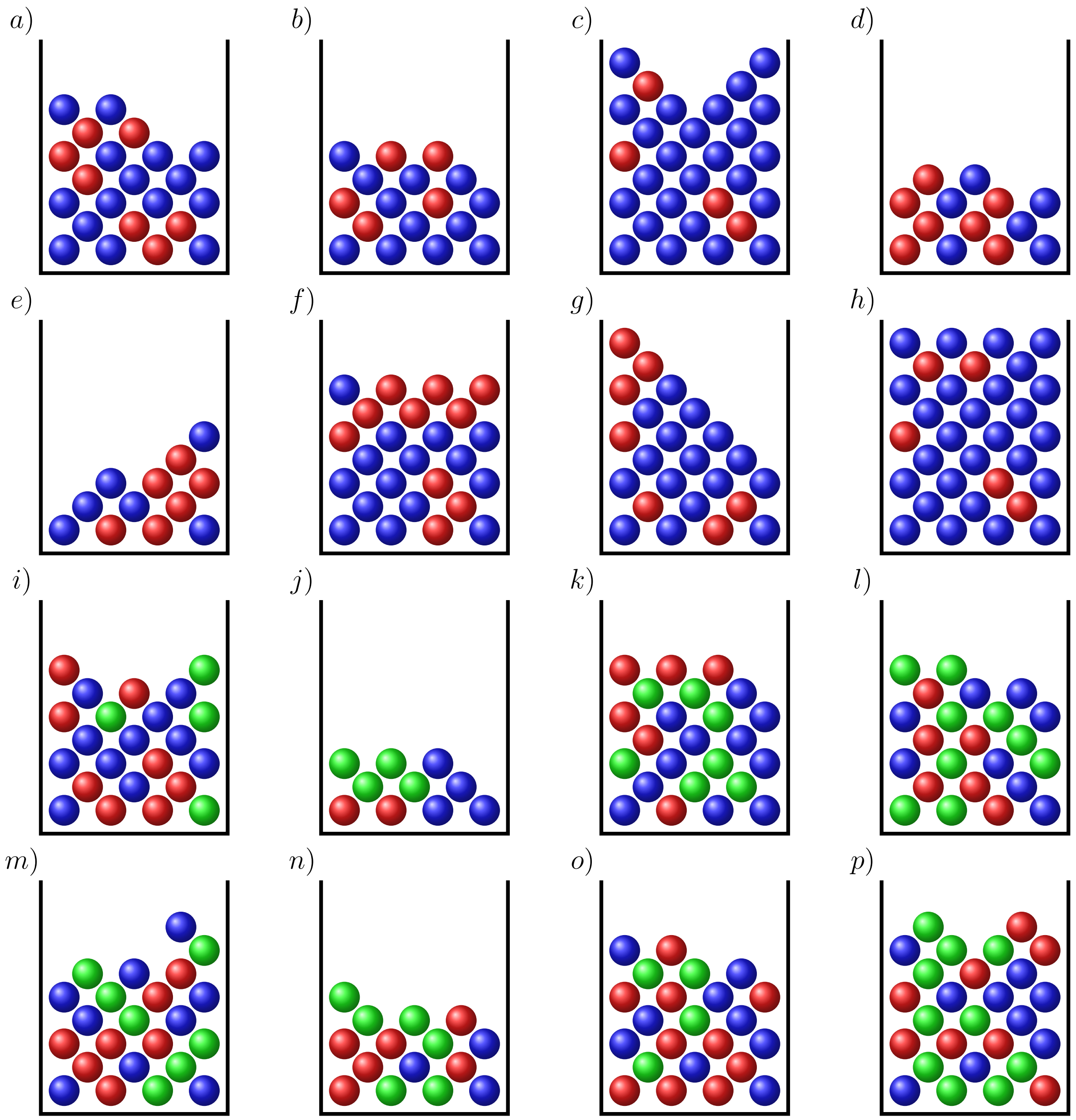
$$\bar{x}_{arithm} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \quad . \tag{9.4}$$

Um *Ergebnissmengen*, also zum Beispiel Messdaten, zu bewerten, ist oftmals auch die *Spannweite* R von Interesse, welche lediglich die Distanz zwischen den maximalen und minimalen *Wert* der *Ergebnissemenge* beschreibt. Die *Spannweite* bildet das einfachste *Streumaß*:

$$R = x_{max} - x_{min} \quad . \tag{9.5}$$

9.0.1 Übungsaufgaben zu den Grundlagen der Stochastik

Aufgabe 1: *In Behältern befinden sich Kugeln in verschiedenen Farben. Gib für jeden Beählter die Wahrscheinlichkeit für jede Farbe an.*



Aufgabe 2: *In einer Urne befinden sich 7 rote, 9 blaue und 16 grüne Kugeln. Es soll eine Kugel blind gezogen werden. Gib die Wahrscheinlichkeiten für jede Farbe an.*

Aufgabe 3: *Bei einer Verlosung befinden sich* 250 *Lose mit den Zahlen* 1 *bis* 250 *in einer Box. Alle Zahlen, die durch* 6 *teilbar sind, bedeuten, dass man gewonnen hat. Gib die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen an.*

Aufgabe 4: *Gib den arithmetischen Mittelwert und die Spannweite der dargestellten Ergebnismenge an.*

a) $\Omega = \{\epsdice{3}; \epsdice{2}; \epsdice{5}; \epsdice{6}; \epsdice{3}; \epsdice{4}; \epsdice{4}; \epsdice{2}; \epsdice{6}\}$

b) $\Omega = \{\epsdice{3}; \epsdice{2}; \epsdice{5}; \epsdice{6}; \epsdice{3}; \epsdice{4}; \epsdice{4}; \epsdice{2}; \epsdice{6}; \epsdice{1}; \epsdice{1}; \epsdice{1}; \epsdice{2}; \epsdice{3}; \epsdice{1}\}$

c) $\Omega = \{\{\epsdice{3}; \epsdice[black]{4}\}; \{\epsdice{5}; \epsdice[black]{5}\}; \{\epsdice{6}; \epsdice[black]{1}\}; \{\epsdice{2}; \epsdice[black]{6}\}; \{\epsdice{5}; \epsdice[black]{3}\}; \{\epsdice{5}; \epsdice[black]{6}\}\}$

d) $\Omega = \{\{\epsdice{1}; \epsdice[black]{1}\}; \{\epsdice{3}; \epsdice[black]{3}\}; \{\epsdice{2}; \epsdice[black]{1}\}; \{\epsdice{3}; \epsdice[black]{2}\}; \{\epsdice{5}; \epsdice[black]{1}\}; \{\epsdice{2}; \epsdice[black]{4}\}; \{\epsdice{1}; \epsdice[black]{4}\}; \{\epsdice{4}; \epsdice[black]{2}\}; \{\epsdice{3}; \epsdice[black]{2}\}\}$

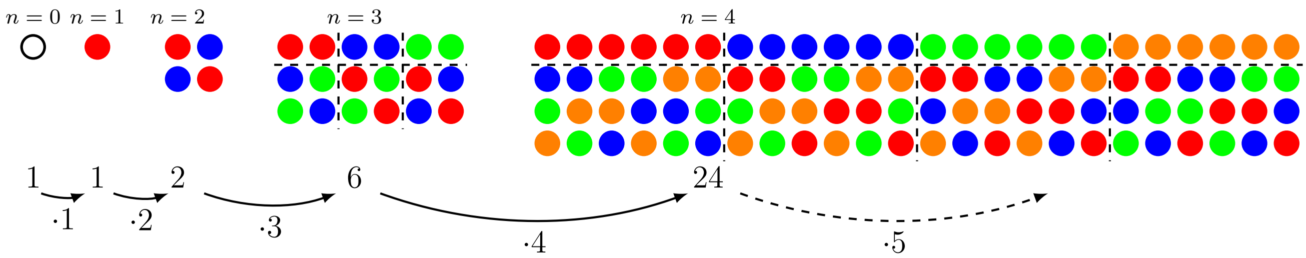
e) $\Omega = \{\{\epsdice[black]{3}; \epsdice{1}; \epsdice[black]{3}\}; \{\epsdice[black]{6}; \epsdice{6}; \epsdice[black]{4}\}; \{\epsdice[black]{5}; \epsdice{4}; \epsdice[black]{6}\}; \{\epsdice[black]{3}; \epsdice{2}; \epsdice[black]{1}\}; \{\epsdice[black]{3}; \epsdice{3}; \epsdice[black]{3}\}; \{\epsdice[black]{5}; \epsdice{1}; \epsdice[black]{2}\}\}$

f) $\Omega = \{\{\epsdice[black]{3}; \epsdice{1}; \epsdice[black]{3}; \epsdice{6}\}; \{\epsdice[black]{6}; \epsdice{6}; \epsdice[black]{4}; \epsdice{3}\}; \{\epsdice[black]{5}; \epsdice{4}; \epsdice[black]{6}; \epsdice{2}\}; \{\epsdice[black]{3}; \epsdice{2}; \epsdice[black]{1}; \epsdice{6}\}; \{\epsdice[black]{3}; \epsdice{3}; \epsdice[black]{3}; \epsdice{5}\}; \{\epsdice[black]{5}; \epsdice{1}; \epsdice[black]{2}; \epsdice{6}\}\}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.70) Lösungen zu den Grundlagen der Stochastik.

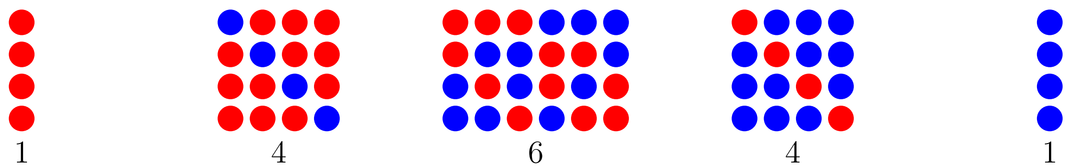
9.1 Kombinatorik

Die *Kombinatorik* ist ein Teilgebiet der Mathematik, welches sich mit der *Abzählbarkeit* bei *diskreten* Prozessen wie dem Anordnen von Kugeln beschäftigt. In diesem Buch wird im Wesentlichen nur auf die Aspekte eingegangen, die für ein Verständnis der grundlegenden *stochastischen* und *statistischen* Grundlagen benötigt werden. Aus diesem Grund soll die Anordnungsmöglichkeit von unterschiedlich farbigen Kugeln nach ihrer Anzahl der Startpunkt sein. Um 0 unterschiedliche Kugeln anzuordnen gibt es nur eine Anordnungsmöglichkeit, da nichts anzuordnen ebenfalls eine Anordnung ist und somit den Ausgangspunkt jeglicher Betrachtung bildet. In der folgenden Abbildung sind alle Anordnungen von Kugeln mit wachsender Anzahl (bis $n = 4$) dargestellt, wobei die Anordnung von oben nach unten betrachtet werden muss, während die jeweiligen Blöcke n darstellten und bei $n = 0$ starten.



Erkennbar wird, dass die Anzahl der Anordnungen, die sogenannten *Permutationen*, kontinuierlich ansteigen. Auch wird deutlich, dass bei der Anordnung für $n = 3$ die Elemente von $n = 2$ und bei der Anordnung für $n = 4$ die Elemente von $n = 3$ wiederzufinden sind, was durch die gestrichelten Linien gezeigt wird. Die Gesamtanzahl der *Permutationen* kann durch die *Fakultät* beschrieben werden. Dies lässt sich Anhand des Beispiels für $n = 4$ begründen, da also für die erste Kugel vier Optionen zur Auswahl stehen, danach können für die gewählte Kugel an der zweiten Position aus drei Optionen gewählt werden, danach aus zwei Optionen und abschließend nur noch aus einer Option, sodass sich $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ *Permutationen* ergeben.

Werden die *Permutationen* von mehreren Kugeln gleicher Farbe betrachtet, werden die *Permutationen*, die eine Wiederholung darstellen nicht extra gewertet.



In dem gezeigten Beispiel sind vier Kugeln zu sehen, welche nur auf die Farben rot und blau beschränkt sind. Von links nach rechts wächst in den Blöcken die Anzahl der blauen Kugeln.

Deutlich zu erkennen ist, dass es stets einen Block mehr gibt als die *Gesamtanzahl* der Kugeln. Auch die *Symmetrie* ist gut zu erkennen, da es keinen Unterschied in der Anzahl der *Permutationen* macht, welche Kugel welche Farbe hat, sondern lediglich die *Differenz* zwischen den roten und blauen Kugeln. Da allerdings bei $n = 4$ Kugeln generell 24 *Permutationen* bestehen, müssen die *Permutationen* der jeweiligen Blöcke durch eine stets gleiche Rechenoperation im Bezug zur Anzahl der jeweiligen Farbe erzeugt werden. Dies ist möglich, wenn durch die Anzahl der *Permutationen* gleicher Farbe *dividiert* wird, was bei zwei Farben auch durch den *Binominialkoeffizienten* dargestellt wird:

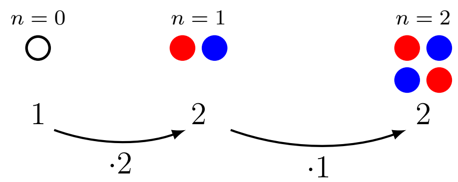
$$\frac{4!}{4! \cdot 0!} = 1 \qquad \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4 \qquad \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6 \qquad \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4 \qquad \frac{4!}{0! \cdot 4!} = 1$$

Dies kann durch die Anzahlfunktion # wie folgt verallgemeinert werden:

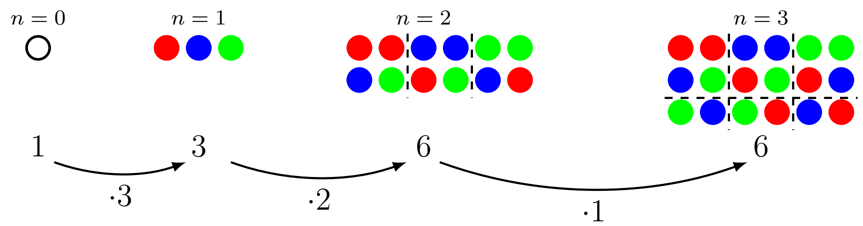
$$\#P = \frac{\#K!}{\#F_1!\#F_2!...\#F_N!} = \frac{\#K!}{\prod_{i=1}^{N} \#F_i!} \quad , \tag{9.6}$$

wobei die Anzahl der *Permutationen* $\#P$ gegeben ist durch die *Fakultät* der Anzahl aller Kugeln $\#K$ *dividiert* durch das *Produkt* der Anzahl der jeweiligen farbigen Kugeln $\#F_1$. Dabei gibt der *Index* die Farbe an und N die gesamte Anzahl aller Farben.

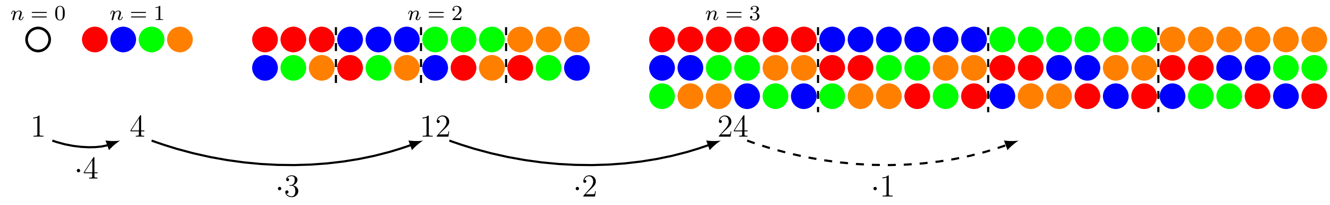
Ähnlich wie bei der wachsenden Anzahl von Kugeln mit neuen Farben, kann auch die Umkehrung betrachtet werden, bei der die Anzahl der unterschiedlichen farbigen Kugeln und deren Maximalanzahl gegeben ist. Im folgenden alle Anordnungsoptionen für zwei Farben mit unterschiedlicher Maximalanzahl von Kugeln n.



Für drei Farben mit unterschiedlicher Maximalanzahl von Kugeln n ergibt sich das folgende Bild:

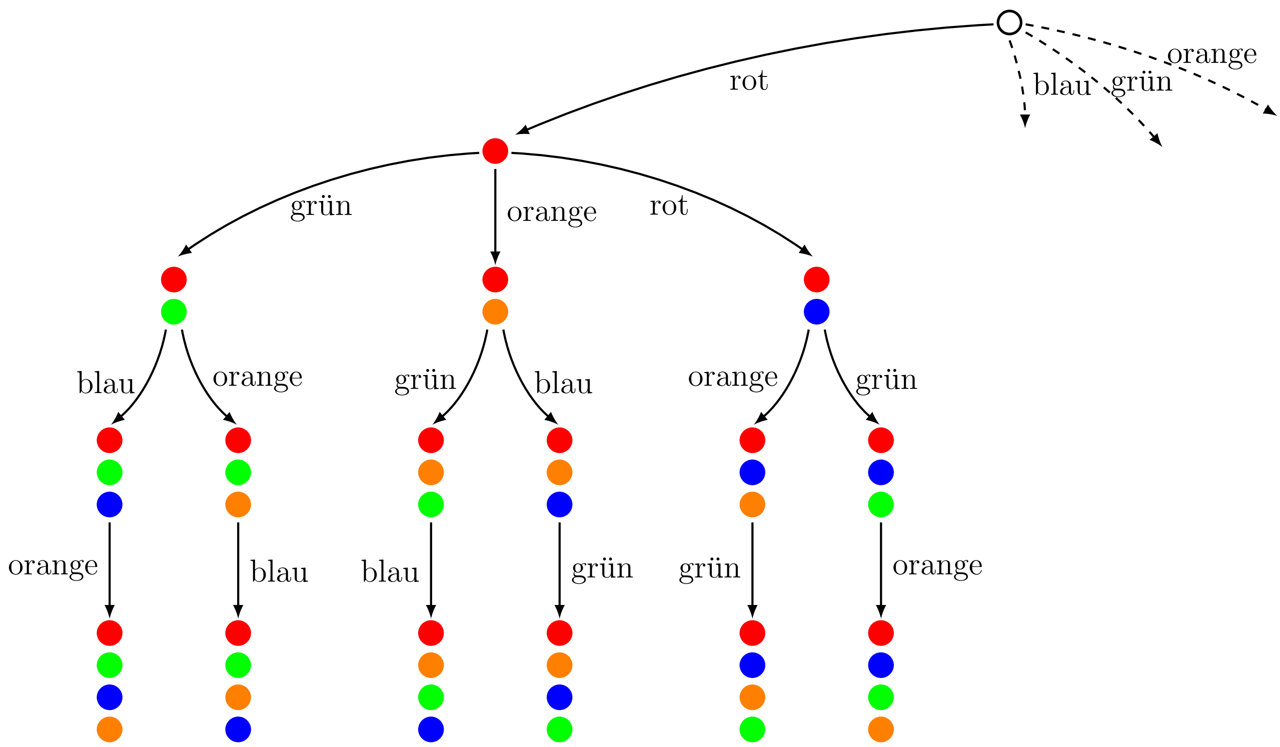


Für vier Farben mit unterschiedlicher Maximalanzahl von Kugeln n ergibt sich das folgende Bild:



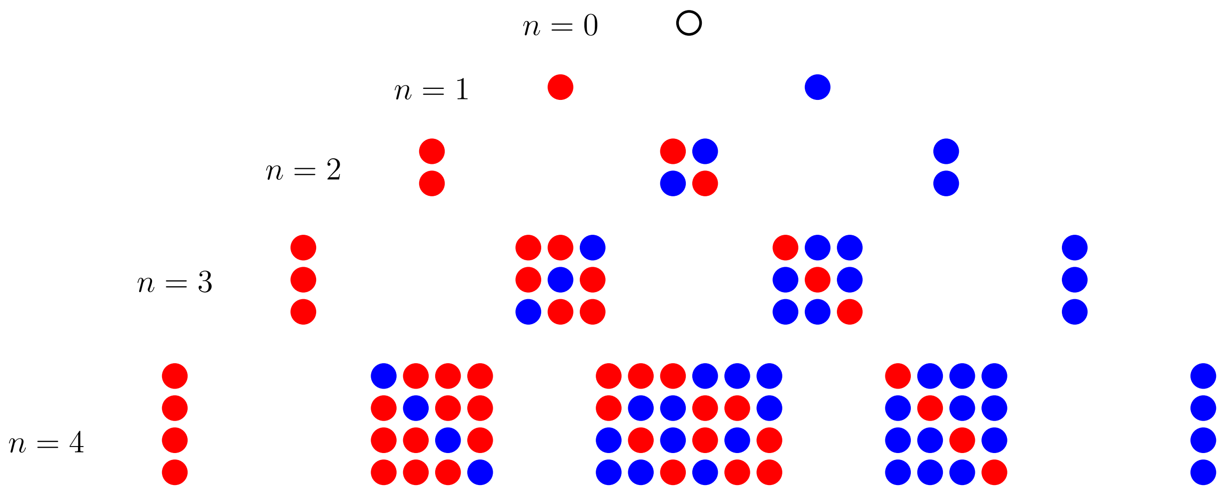
Dies Muster lässt sich vorsetzen, sodass sich für $n = 5$ die Anordnungsoptionen $1 \xrightarrow{\cdot 5} 5 \xrightarrow{\cdot 4} 20 \xrightarrow{\cdot 3} 60 \xrightarrow{\cdot 2} 120 \xrightarrow{\cdot 1} 120$ und für $n = 6$ die Anordnungsoptionen $1 \xrightarrow{\cdot 6} 6 \xrightarrow{\cdot 5} 30 \xrightarrow{\cdot 4} 120 \xrightarrow{\cdot 3} 360 \xrightarrow{\cdot 2} 720 \xrightarrow{\cdot 1} 720$ ergeben.

Generell gilt, dass bei Aufzeichnen von Kombinationen (oder Anordnungsmöglichkeiten) ein Schema überlegt werden sollte, da es sonst zu Dopplungen kommen kann oder gar Anordnungsoptionen übersehen werden können. Aus diesem Grund empfiehlt es sich, dass zunächst das erste Element (hier Kugelfarbe) festgesetzt wird, dann das zweite und so weiter. Ist eine erste Anordnung gefunden, sollten die letzten beiden Elemente vertauscht werden. Anschließend die letzten drei Elemente, wobei es sich empfiehlt, das drittletzte Element nur einmal zu wechseln bis die beiden letzten Elemente wieder vertauscht wurden. Dies kann auch als Baumdiagramm dargestellt werden:



wobei von den vier Anfangspfaden aus Platzgründen nur einer dargestellt wurde.

Werden Kugeln aus einer Urne gezogen, handelt es sich um ein *Zufallsexperiment* und die *Ereignisse* können in Treffer und Nichttreffer einsortiert werden, sodass in der Regel nur zwei *Ereignisse* betrachten werden müssen. In der folgenden Darstellung sind mit n die Anzahl der Ziehungen nach unten aufgetragen, während alle möglichen *Ergebnisse* der Ziehungen in Blöcken gleicher *Häufigkeit* in den jeweiligen Zeilen visualisiert sind.



Deutlich zu erkennen ist, dass die Anzahl der möglichen *Ergebnisse* mit dem *Quadrat* der Anzahl der Ziehungen zunimmt. Auch sind die verschiedenen *Permutationen* für die gleichen *Häufigkeiten* zu erkennen, sodass dies als die Anzahl der *Pfade*, die unter Vernachlässigung der Reihenfolge zum gleichen *Ergebnis* führen angesehen werden kann. Die jeweiligen *Permutationsmöglichkeiten* sind bei den *Baumdiagrammen* gegeben durch die *Binomialkoeffzienten*, welche schon aus dem Kapitel „Algebraische Grundlagen“ bekannt sind. So kann bei zwei Farben die Anzahl der *Pfade* darüber bestimmt werden, indem das *Pascal'sche Dreieck* betrachtet wird. Für mehr Farben ergeben sich auch mehr mögliche *Permutationen*. Die verschiedenen *Permutationen* für die jeweiligen *Pfade* bei mehreren Farben können über die *Reihe*

$$\left(\sum_{i=1}^{N} F_i \right)^n \quad , \tag{9.7}$$

wobei n der Anzahl der Ziehungen entspricht.

9.1.1 Übungsaufgaben zur Kombinatorik

Aufgabe 1: *Schreibe alle möglichen Anordnungen ohne Wiederholungen auf.*

a) $\{1, 2, 3\}$ *b*) $\{R, R, B\}$
c) $\{G, B, B, B\}$ *d*) $\{R, R, B, B\}$
e) $\{R, R, G, B\}$ *f*) $\{R, R, G, G, G\}$

Aufgabe 2: *Bestimme die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen.*

a) $\{1, 2, 3, 4\}$ *b*) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
c) $\{R, R, B, B, G\}$ *d*) $\{R, R, R, R, G\}$
e) $\{A, B, C, D, E, E\}$ *f*) $\{a, b, b, b, c, c, d, d, d, d\}$

Aufgabe 3: *Bestimme die Anzahl der Permutationen ohne Wiederholungen.*

a) $\{1, 2, 3, 4\}$ *b*) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
c) $\{R, R, B, B, G\}$ *d*) $\{R, R, R, R, G\}$
e) $\{A, B, C, D, E, E\}$ *f*) $\{a, b, b, b, c, c, d, d, d, d\}$

Aufgabe 4: *Bei einer Silvesterparty stoßen die Gäste mit den Gläsern an. Bestimme wie oft der Klang von zwei aneinander geschlagenen Gläsern bei* n *Gästen erklingt.*

a) $n = 2$ *b*) $n = 3$ *c*) $n = 4$ *d*) $n = 5$
e) $n = 6$ *f*) $n = 7$ *g*) $n = 8$ *h*) $n = 9$

Aufgabe 5: *Leite eine allgemeine Gleichung für die Aufgabe 4 her und beschreibe den Zusammenhang zum Pascal'schen Dreieck.*

Aufgabe 6: *Berechne wie viele Kombinationsmöglichkeiten bei den jeweiligen Menükarten geben kann. Beachte, dass pro Kategorie nur eine Auswahl pro Bestellung möglich sein soll.*

a)

Vorspeise	Hauptgericht	Beilage
Suppe	Fisch	Pommes
Salat	Schnitzel	Reis
	Gemüsepfanne	

b)

Vorspeise	Hauptgericht	Beilage
Suppe	Steak	Pommes
Salat	Schnitzel	Reis
	Gemüsepfanne	Nudeln
	Fisch	

c)

Vorspeise	Hauptgericht	Beilage
Suppe	Steak	Pommes
Salat	Schnitzel	Reis
	Gemüsepfanne	Nudeln
	Fisch	Salzkartoffeln

d)

Vorspeise	Hauptgericht	Beilage
Brot	Steak	Pommes
Salat	Schnitzel	Reis
	Gemüsepfanne	Nudeln
	Fisch	
	Wild	
	Suppe	

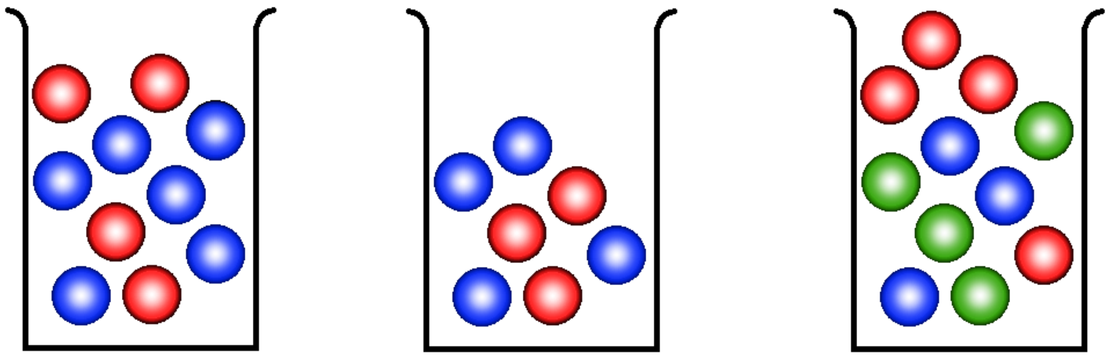
e)

Vorspeise	Hauptgericht	Beilage	Dessert	Getränk
Suppe	Fisch	Salzkartoffeln	Eis	Kaffee
Salat	Schnitzel	Reis	Pudding	Tee
	Gemüsepfanne	Nudeln		Wasser
				Bier

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.71) Lösungen zur Kombinatorik.

9.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Nahezu alle einfachen *Wahrscheinlichkeitsprobleme* können auf Ziehungen von Kugeln mit einer Farbe aus einem Behältnis übersetzt werden. Dabei gibt der *Nenner* des *Bruches*, der die *Wahrscheinlichkeit* beschreibt, die Gesamtanzahl der Kugeln an, während der *Zähler* die Anzahl der betrachteten Farbe der Kugeln angibt.



rot: $\frac{4}{10} = 40\%$

blau: $\frac{6}{10} = 60\%$

rot: $\frac{3}{7} \approx 42,86\%$

blau: $\frac{4}{7} \approx 57,14\%$

rot: $\frac{4}{11} = 36,\overline{36}\%$

blau: $\frac{3}{11} = 27,\overline{27}\%$

grün: $\frac{4}{11} = 36,\overline{36}\%$

Wenn nun Ziehungen aneinander gereiht werden und die *Wahrscheinlichkeit* für jeden einzelnen Zug bestimmt werden soll, dann muss zunächst geklärt werden, ob die gezogene Kugel wieder zurück gelegt wird oder eben nicht. Wenn es sich um eine Ziehung mit Zurücklegen (ZmZ) handelt, dann ist die jeweilige *Wahrscheinlichkeit* der Farbarten der Kugeln konstant. Wenn allerdings die Kugel nicht zurück gelegt wird, dann reduziert sich die Gesamtanzahl der Kugeln - der *Nenner* - und die Anzahl der Kugeln mit der Farbe, welche gezogen wurde, um eins. Während die Kugelanzahlen - der jeweilige *Zähler* - *konstant* bleiben.

rot: $\frac{5}{11} = 45,\overline{45}\%$

blau: $\frac{6}{11} = 54,\overline{54}\%$

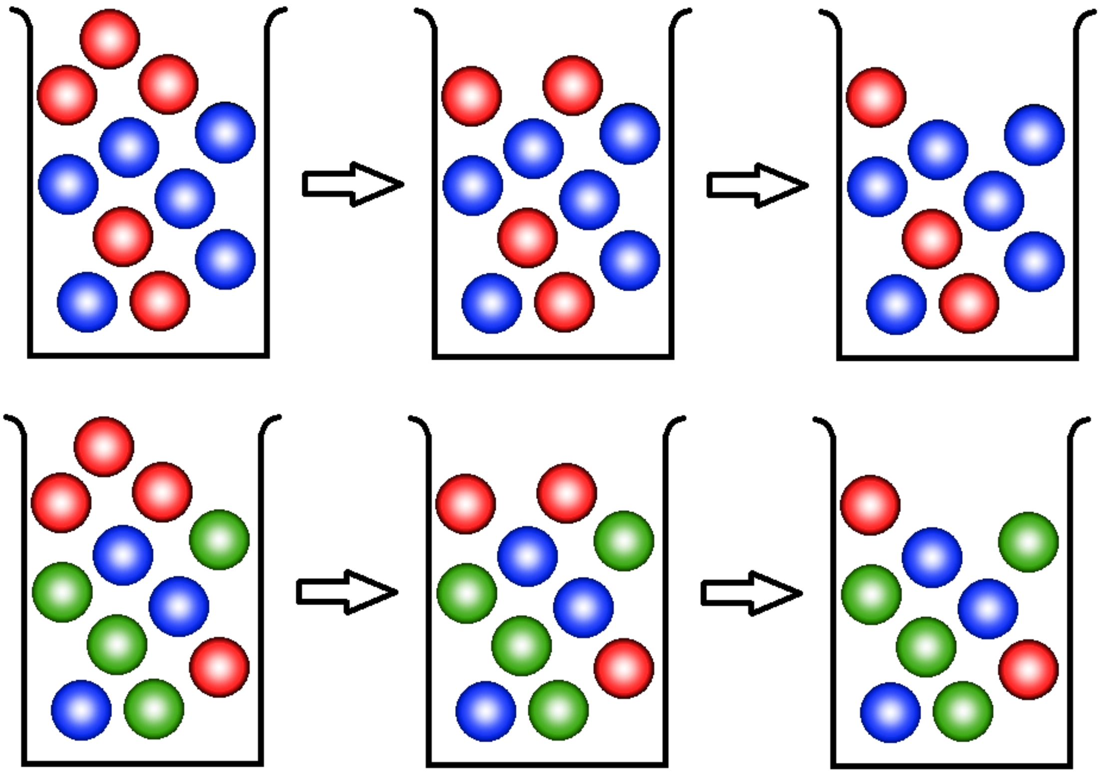
rot: $\frac{4}{10} = 40\%$

blau: $\frac{6}{10} = 60\%$

rot: $\frac{3}{9} = 33,\overline{3}\%$

blau: $\frac{6}{9} = 66,\overline{6}\%$

Dabei macht es keinen Unterschied, ob zwei, drei, vier oder mehr Farben vorhanden sind.

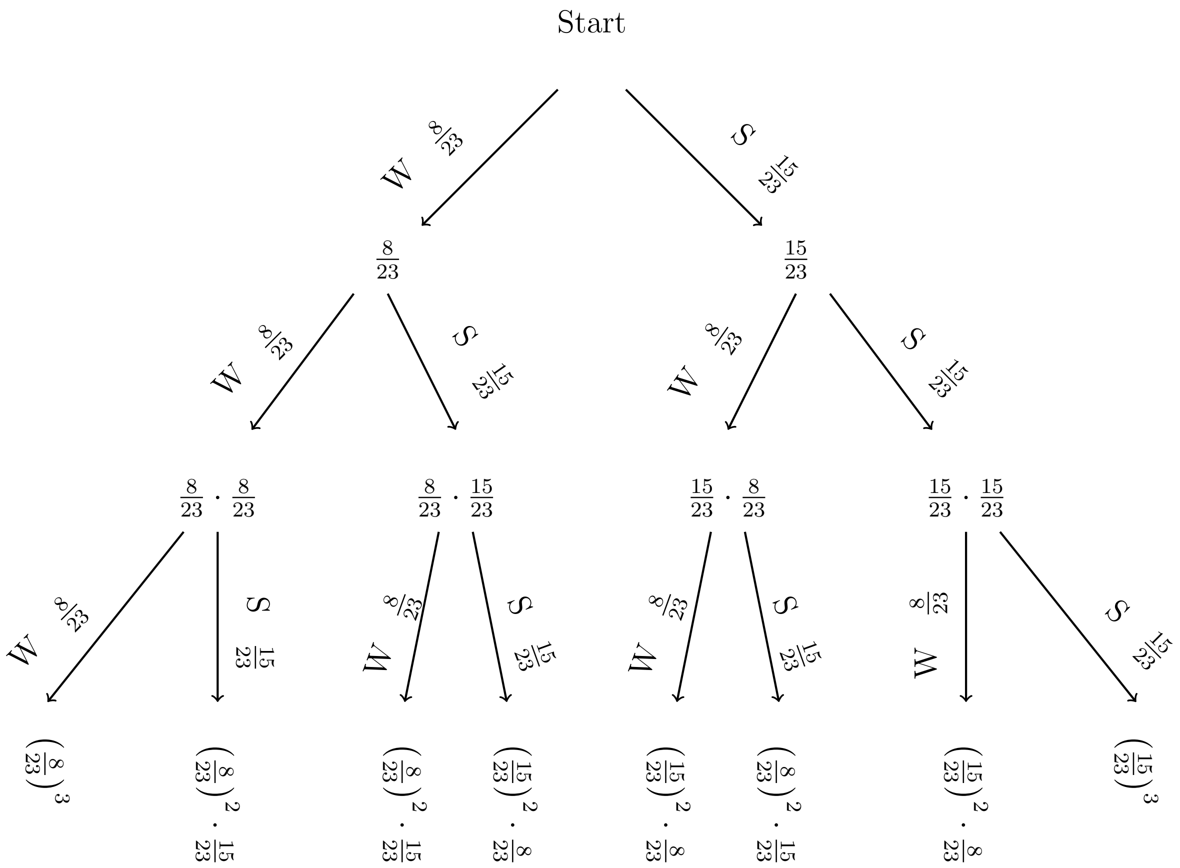


rot: $\frac{4}{11} = 36,\overline{36}\%$ rot: $\frac{3}{10} = 30\%$ rot: $\frac{2}{9} = 22,\overline{2}\%$

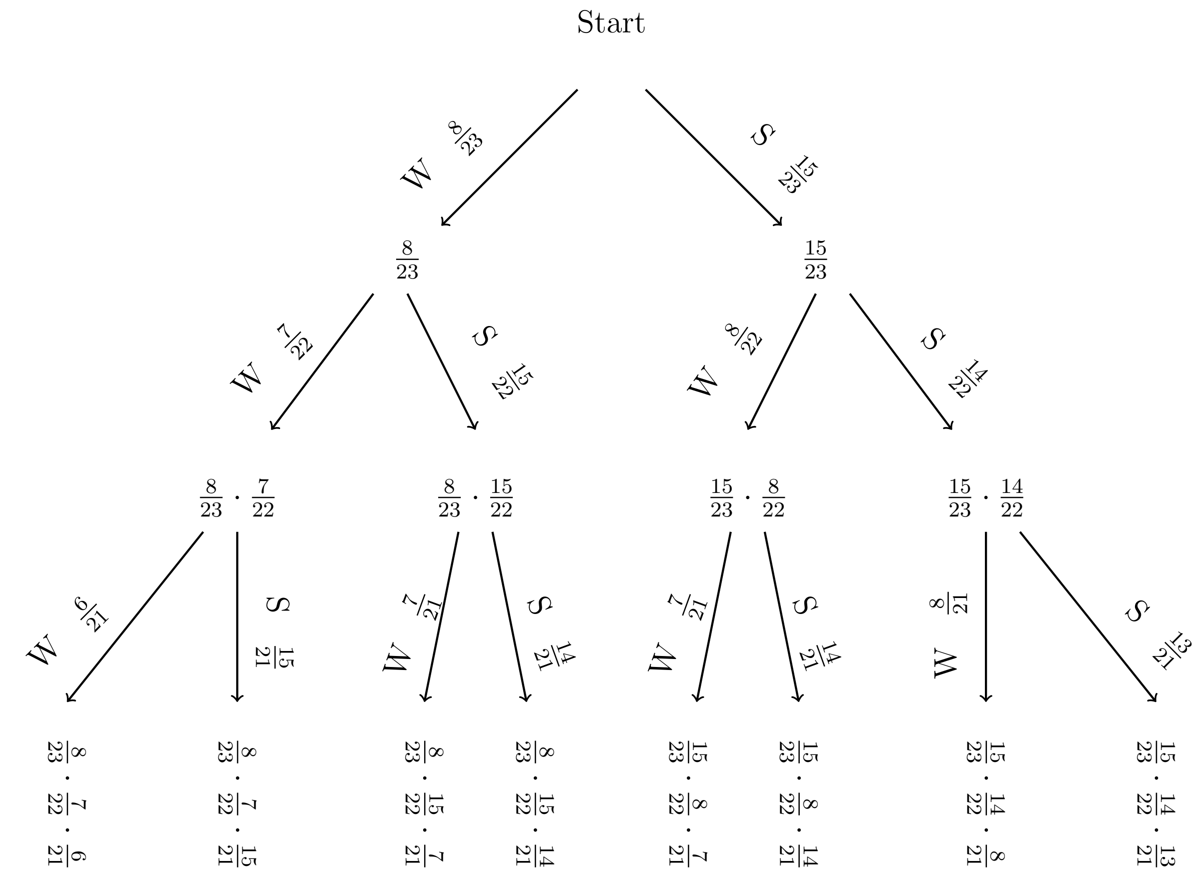
blau: $\frac{3}{11} = 27,\overline{27}\%$ blau: $\frac{3}{10} = 30\%$ blau: $\frac{3}{9} = 33,\overline{3}\%$

grün: $\frac{4}{11} = 36,\overline{36}\%$ grün: $\frac{4}{10} = 40\%$ grün: $\frac{4}{9} = 44,\overline{4}\%$

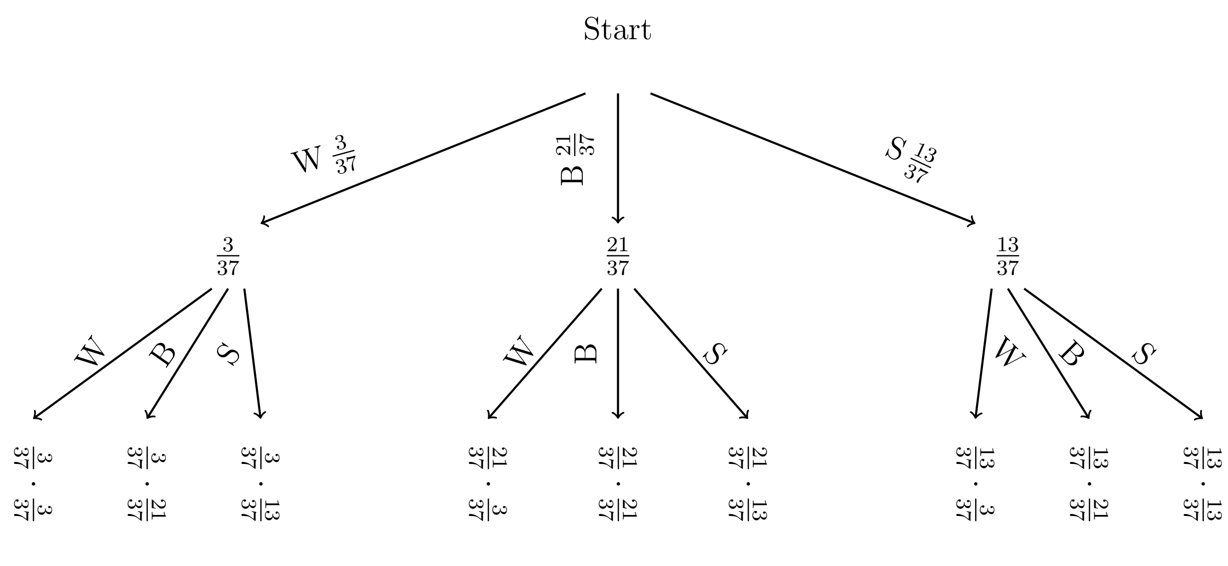
Sei im weiteren ein Gefäß gegeben in dem sich 8 weiße und 15 schwarze Kugeln befinden. Aus diesem Gefäß soll dreimal eine Kugel gezogen und anschließend wieder zurückgelegt werden. Wie hoch ist die *Wahrscheinlichkeit* für jede mögliche Reihenfolge der Ziehungen? Diese Frage lässt sich schnell durch ein sogenanntes *Baumdiagramm* beantworten. Dabei wird von einem Startwert, also 100% ausgegangen und dann die erste Ziehung vollführt. Anschließend wird von den neuen Startwerten ($100\% \cdot \frac{8}{23}$ und $100\% \cdot \frac{15}{23}$) erneut gezogen. Die Zugwahrscheinlichkeit wird dann mit dem vorangegangenen Startwert *multipliziert*. Da die *Summe* aller möglichen Einzelwahrscheinlichkeit wieder 100% ergeben muss, lassen sich die Zwischenwahrscheinlichkeiten bei aneinander gereihten Ziehungen leicht durch *Addition* überprüfen.



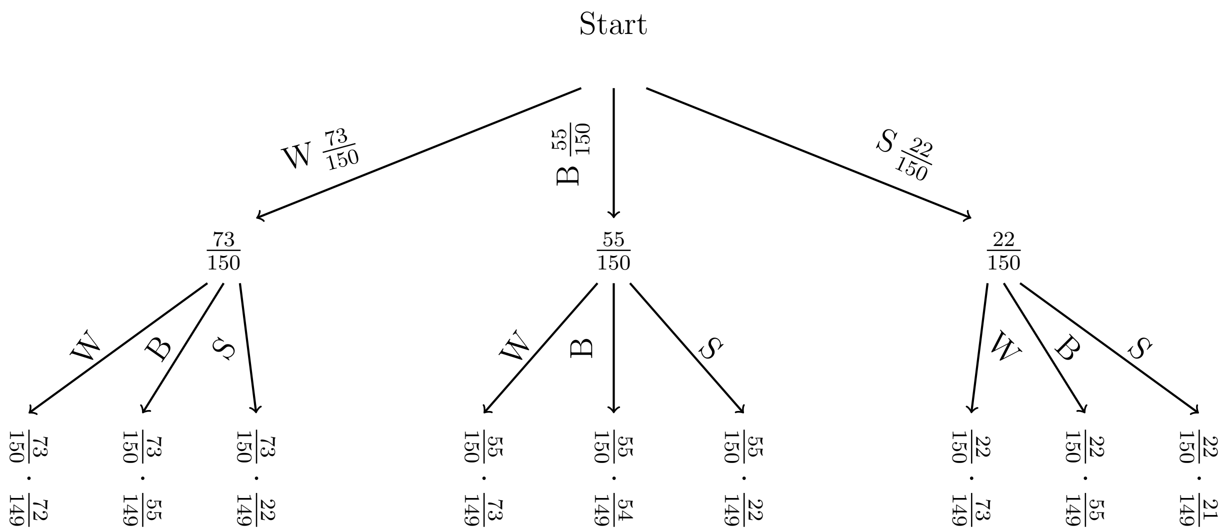
Das *Baumdiagramm* zeigt, wie sich so eine Ziehung fortsetzt und liefert die Endwahrscheinlichkeiten für jeden *Pfad*. Oftmals ist die Reihenfolge in der die Kugeln gezogen werden von keiner Bedeutung, sodass alle Pfade mit der gewünschten Anzahl der jeweiligen Kugeln *zusammenaddiert* werden müssen. Bei Ziehungen mit Zurücklegen muss lediglich die Anzahl der *Pfade* mit der Endwahrscheinlichkeit *multipliziert* werden.
Im nächsten Beispiel wird die gezogene Kugel nicht zurückgelegt. Bei einer Ziehung ohne Zurücklegen (ZoZ) reduziert sich bei jedem Schritt die Gesamtanzahl der Kugeln und je nach *Pfad* die Anzahl der Kugeln der zuvor gezogenen Farbe.



Es wird schon deutlich, dass für Ziehungen ohne Zurücklegen der *Nenner* durch einen *Bruch* von *Fakultäten* ausgedrückt werden kann. Für Ziehungen mit mehr Farben ändert sich dieses Verfahren lediglich nur durch die Anzahl der *Pfade* $\sum P$, welche stets durch die Anzahl der Farben F hoch der Ziehungen N gegeben ist. Seien zum Beispiel in einem Gefäß 13 schwarze, 3 weiße und 21 blaue Kugeln gegeben und nach irgendeinem Pfad nach zwei Ziehungen mit Zurücklegen gefragt, so ergibt sich das folgende *Baumdiagramm*.



Sei allerdings ein Gefäß mit 22 schwarzen, 73 weißen und 55 blauen Kugeln gegeben und nach irgendeinem *Pfad* nach zwei Ziehungen ohne Zurücklegen gefragt, so ergibt sich wiederum das folgende *Baumdiagramm*.



Im Wesentlichen können vier Grundfragen an eine *Wahrscheinlichkeitsrechnung* mit Baumdiagramm gestellt werden. Dabei geht es vorrangig im die Anzahl # von Kugeln einer bestimmten Farbe n_F. Dabei beschreibt die Raute # den mathematischen Begriff Anzahl, während n die gewünschte Anzahl und F die gewünschte Farbe ist. In diesen Grundfragen verbergen sich Schlüsselwörter oder deren sprachlichen Synonyme, welche mathematisch übersetzt werden müssen.

$$\begin{aligned} \text{höchstens:} \quad & \# \leq n_F \\ \text{weniger als:} \quad & \# < n_F \\ \text{mehr als:} \quad & \# > n_F \\ \text{mindestens:} \quad & \# \geq n_F \end{aligned} \tag{9.8}$$

Sei nach mindestens zwei blauen Kugeln gefragt, so ergibt sich auf das letzte Beispiel bezogen als *Wahrscheinlichkeit* der *Pfad* der zwei oder mehr blaue Kugeln zulässt: $\frac{55}{150} \cdot \frac{54}{149}$.

Bei vielen Aufgaben lohnt es sich nicht alle Pfade und somit alle Ereignisse E aufzusummieren, sondern viel mehr das Gegenereignis $\bar{E}$ zu bestimmen, denn es gilt:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) \tag{9.9}$$

Auch wird oftmals nach den Wahrscheinlichkeiten zu speziellen Ereigniskombinationen gefragt. Hierbei muss die Schreibweise beachtet werden, so ist die *Schnittmenge* der Ergebnisse $A \cap B$ wieder ein Ereignis, welches nur gegeben ist, wenn die Ereignisse A und B gegeben sind. Bei der Vereinigung $A \cup B$ entsteht ein neues Ereignis, wenn entweder eines der beiden Ereignisse oder beide eintreten. Für die Wahrscheinlichkeitsberechnung ergibt sich folgende Notation: $P(A \cap B)$ und $P(A \cup B)$. Einigen Eigenschaften der kombinierten Ereignisse sind im Folgenden aufgelistet:

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\
P(A \cap B) + P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\
A \setminus B &= A \cap \bar{B} \\
P(A \setminus B) &= P(A) - P(A \cap \bar{B}) \\
P(A \Delta B) &= P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)
\end{aligned} \tag{9.10}$$

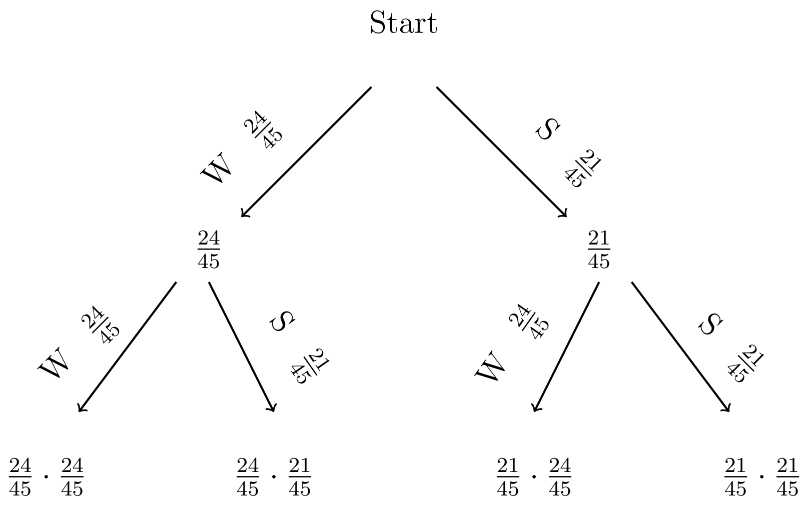
Baumdiagramme sind notwendig, um ein Verständnis für *Wahrscheinlichkeiten* aufzubauen. Im späteren Verlauf werden dann noch Systeme vorgestellt bei denen *Baumdiagramme* sich zeitlich nicht mehr lohnen würden, da die Zahl der Ziehungen gegen *Unendlich* laufen wird.

9.2.1 Übungsaufgaben zu Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1: *Beantworte die Fragen zum gezeigten Baumdiagramm.*

In einem Gefäß befinden sich schwarze und weiße Kugeln.

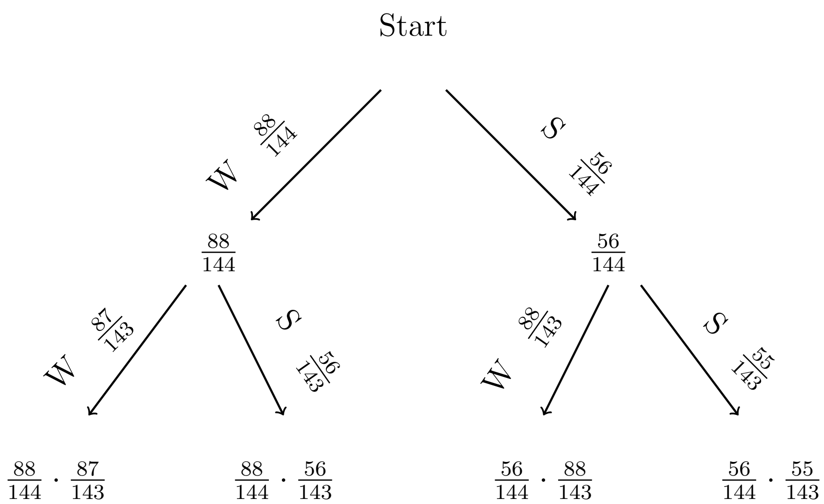
a) Wie viele schwarze Kugeln befinden sich im Gefäß?
b) Wie viele Kugeln befinden sich insgesamt im Gefäß?
c) Um was für eine Ziehung handelt es sich?
d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit genau zwei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zu erst eine weiße dann eine schwarze Kugel zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nur eine weiße Kugel zu ziehen?
g) Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit bei einer dritten Ziehung eine dritte weiße Kugel zu ziehen, wenn zuvor zwei weiße Kugeln gezogen wurden?
h) Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit bei einer dritten Ziehung eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn zuvor jeweils eine Kugel gezogen wurde?
i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei den im Baumdiagramm gezeigten Ziehungen mindestens eine weiße Kugel zu ziehen?
j) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei den im Baumdiagramm gezeigten Ziehungen höchstens zwei schwarze Kugel zu ziehen?



Aufgabe 2: *Beantworte die Fragen zum gezeigten Baumdiagramm.*

In einem Gefäß befinden sich schwarze und weiße Kugeln.

a) Wie viele weiße Kugeln befinden sich im Gefäß?
b) Wie viele Kugeln befinden sich insgesamt im Gefäß?
c) Um was für eine Ziehung handelt es sich?
d) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit genau zwei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zu erst eine weiße dann eine schwarze Kugel zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit nur eine weiße Kugel zu ziehen?
g) Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit bei einer dritten Ziehung eine dritte weiße Kugel zu ziehen, wenn zuvor zwei weiße Kugeln gezogen wurden?
h) Wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit bei einer dritten Ziehung eine schwarze Kugel zu ziehen, wenn zuvor jeweils zwei Kugel gezogen wurde?
i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei den im Baumdiagramm gezeigten Ziehungen mindestens eine weiße Kugel zu ziehen?
j) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei den im Baumdiagramm gezeigten Ziehungen mehr als zwei weiße Kugel zu ziehen?



Aufgabe 3: *Ergänze Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich schwarze (S), blaue (B) und weiße (W) Kugeln.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei der ersten Ziehung eine blaue Kugel zu ziehen?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zwei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?

c) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit genau zwei Kugeln mit gleicher Farbe zu ziehen?

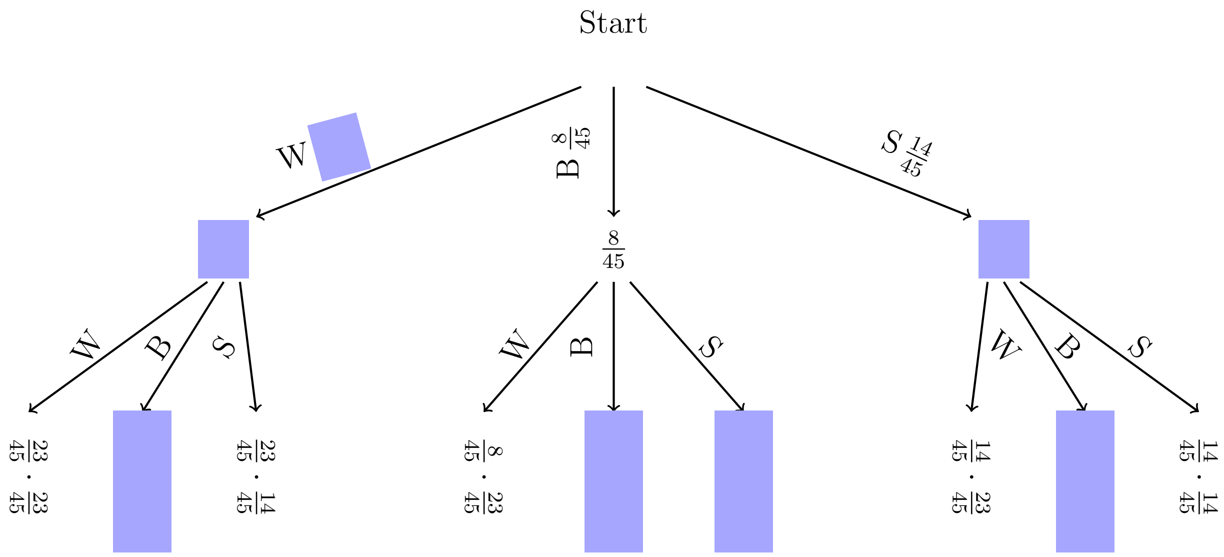
d) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit mindestens eine schwarz Kugel zu ziehen?

e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mehr als eine weiße Kugel zu ziehen?

f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit höhstens zwei blaue Kugeln zu ziehen?

g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eine weiße und eine schwarze Kugel zu ziehen?

h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit weniger als zwei weiße Kugeln zu ziehen?



Aufgabe 4: *Erstelle ein Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich 6 schwarze und 14 weiße Kugeln für drei Ziehungen mit Zurücklegen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei der ersten Ziehung eine weiße Kugel zu ziehen?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit drei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?

c) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit genau zwei weiße Kugeln zu ziehen?

d) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen?

e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei schwarze Kugeln zu ziehen?

f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mehr als eine weiße Kugel zu ziehen?

g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit weniger als zwei weiße Kugeln zu ziehen?

h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit höchstens zwei schwarze Kugel zu ziehen?

Aufgabe 5: *Erstelle ein Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich 11 schwarze und 15 weiße Kugeln für drei Ziehungen ohne Zurücklegen.
a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei der ersten Ziehung eine weiße Kugel zu ziehen?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit drei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
c) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit genau zwei weiße Kugeln zu ziehen?
d) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen?
e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mindestens zwei schwarze Kugeln zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit mehr als eine weiße Kugel zu ziehen?
g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit weniger als zwei weiße Kugeln zu ziehen?
h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit höchstens zwei schwarze Kugel zu ziehen?

Aufgabe 6: *Erstelle ein Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich 5 schwarze (S), 7 grüne (G) und 11 weiße (W) Kugeln für zwei Ziehungen mit Zurücklegen.
a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei der ersten Ziehung eine grüne Kugel zu ziehen?
b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit drei schwarze Kugeln hintereinander zu ziehen?
c) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit genau zwei weiße Kugeln zu ziehen?
d) Wie viele Pfade existieren für die Möglichkeit mindestens eine grüne Kugel zu ziehen?
e) Wie viele Pfade existieren bei drei Ziehungen für die Möglichkeit jede Kugel einmal zu ziehen?
f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen jede Kugel einmal zu ziehen?
g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen erst eine schwarze, dann eine grüne und dann eine weiße Kugel zu ziehen?
h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen die Kombination GGS zu ziehen?
i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen höchstens zwei schwarze Kugel zu ziehen?

Aufgabe 7: *Erstelle ein Baumdiagramm und beantworte die dazugehörigen Fragen.*

In einem Gefäß befinden sich 8 rote (R), 3 grüne (G) und 12 blaue (B) Kugeln für zwei Ziehungen ohne Zurücklegen.

a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit erst bei der ersten Ziehung eine blaue Kugel zu ziehen?

b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln hintereinander zu ziehen?

c) Wie viele Pfade existieren bei drei Ziehungen für die Möglichkeit von jeder Farbe eine Kugel zu ziehen?

d) Wie viele Pfade existieren bei drei Ziehungen für die Möglichkeit eine Farbe zweimal zu ziehen?

e) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Ziehungen mindestens zwei blaue Kugeln zu ziehen?

f) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Ziehungen mehr als eine rote Kugel zu ziehen?

g) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Ziehungen weniger als zwei grüne Kugeln zu ziehen?

h) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei zwei Ziehungen höchstens zwei rote Kugel zu ziehen?

i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen die Kombination GBB zu ziehen?

j) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen die Kombination BGB zu ziehen?

Weitere Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Selbstkontrolle sind online durch einen Klick hier zu finden!

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.72) Lösungen zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

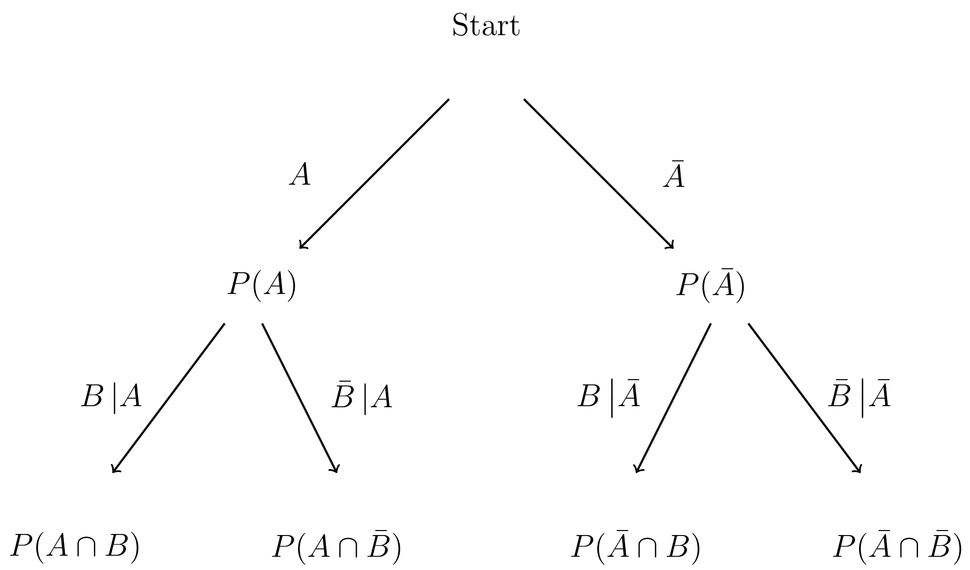
9.3 Bedingte und unbedingte Wahrscheinlichkeiten

Wenn in einem Experiment alle Ereignisse die gleiche *Wahrscheinlichkeit* besitzen, dann wird von einem *Laplace-Experiment* gesprochen. Dies ist zum Beispiel der Fall bei einem exakten *Würfel*. Wenn die Wahrscheinlichkeiten wie zum Beispiel bei einer Heftzwecke nicht gleich verteilt sind, dann liegt kein *Laplace-Experiment* vor. Allerdings können die Einzelwahrscheinlichkeiten für ein Ereignis immer über $P = \frac{\text{Anzahl der Ereignisse}}{\text{Gesamtanzahl der Ereignisse}}$ berechnet werden. Diese *Gleichung* erhält nur seine Gültigkeit, wenn die *Teilwahrscheinlichkeiten* schon bekannt sind oder unendlich viele Messungen vorgenommen wurden, was in einem späteren Abschnitt detaillierter erläutert wird.
Generell kann in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein *Ereignis* A mit einem einem *Gegenereignis* $\bar{A}$ verknüpft werden. Hieraus ergeben sich die *Axiome von Kolmogorov*, welche eine *Ergebnismenge* von zwei Ereignissen $\Omega = \{A, B\}$ vorsieht, wobei $B = \bar{A}$ angenommen werden kann. Somit ergeben sich folgende Möglichkeiten für den Ergebnisraum $\Sigma = \{\varnothing, A, B, \Omega\}$, welcher noch die Komponenten für „kein Ereignis passt zur Ergebnismenge" ($\varnothing$) sowie „Es ist gleich welches Ereignis aus der *Ergebnismenge* vorkommt" (Ω):

$$\begin{aligned} P(\varnothing) &= 0 \\ P(A) &= 1 - P(B) \\ P(\Omega) &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{9.11}$$

Für eine *Ergebnismenge* mit drei *Ereignissen* $\Omega = \{A_1, A_2, A_3\}$ verändert sich die zweite *Gleichung* zu $P(A_1) = 1 - P(A_2) - P(A_3)$.

Wenn zwei Behauptungen mit einander verknüpft sind, könne diese auch in einem *Baumdiagramm* dargestellt werden. So kann ein *Ereignisse* A als erstes betrachtet werden. Anschließend wird von den jeweiligen Ergebnisse der ersten Beobachtung das *Ereignis* B betrachtet:



wobei die Notation $B|A$ dafür steht, dass erst das *Ereignis* A eintrat und anschließend das Ereignis B. Eine andere Schreibweise ist $P_A(B) = P(B|A)$. Im *Baumdiagramm* zu erkennen ist auch, dass die *Wahrscheinlichkeit* $P(A \cap B)$ sich aus den *Teilwahrscheinlichkeiten* $P(A)$ und $P(B|A)$ ergibt. Dies ist die sogenannte *Bayes'sche Regel*:

$$P\left(A\left|B\right.\right) \cdot P(B) = P\left(B \cap A\right) \quad . \tag{9.12}$$

Über die *Bayes'sche Regel* und der *kommutativen* Eigenschaft, dass $P\left(B \cap A\right) = P\left(A \cap B\right)$ ist, ergibt sich die sogenannte erste *Pfadregel*:

$$P\left(A\left|B\right.\right) \cdot P(B) = P\left(B\left|A\right.\right) \cdot P(A) \quad . \tag{9.13}$$

Aus dem *Baumdiagramm* ist auch zu erkennen, dass die *Aufsummierung* aller Ereignisse einer Aufspaltungsstufe zu 100% ergeben. Somit ergibt sich die zweite *Pfadregel*:

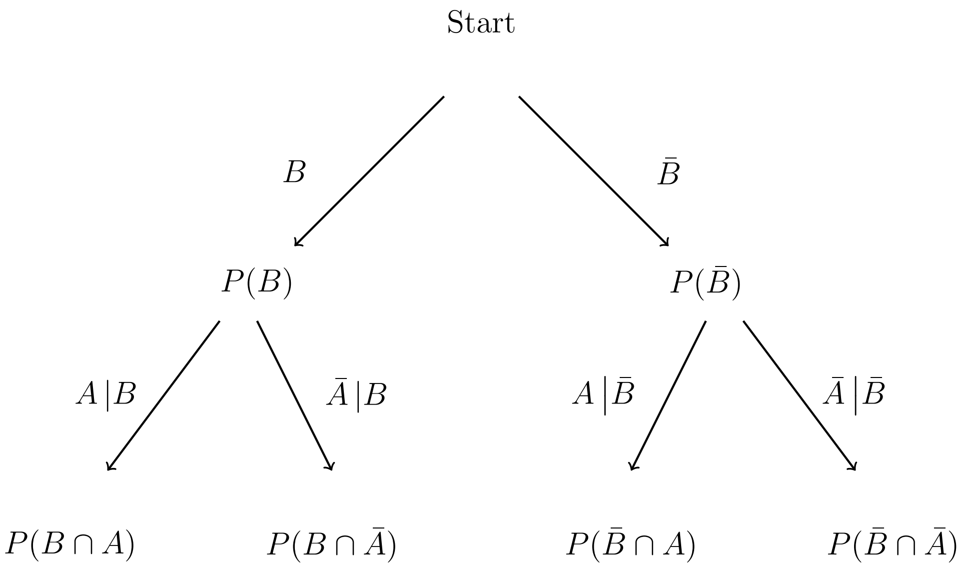
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad . \tag{9.14}$$

Unter der Verwendung der *Pfadregeln* können über die *Aufsummierungen* der Ergebnisse ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, also alle *Permutationen*, folgende Ausdrücke gefunden werden:

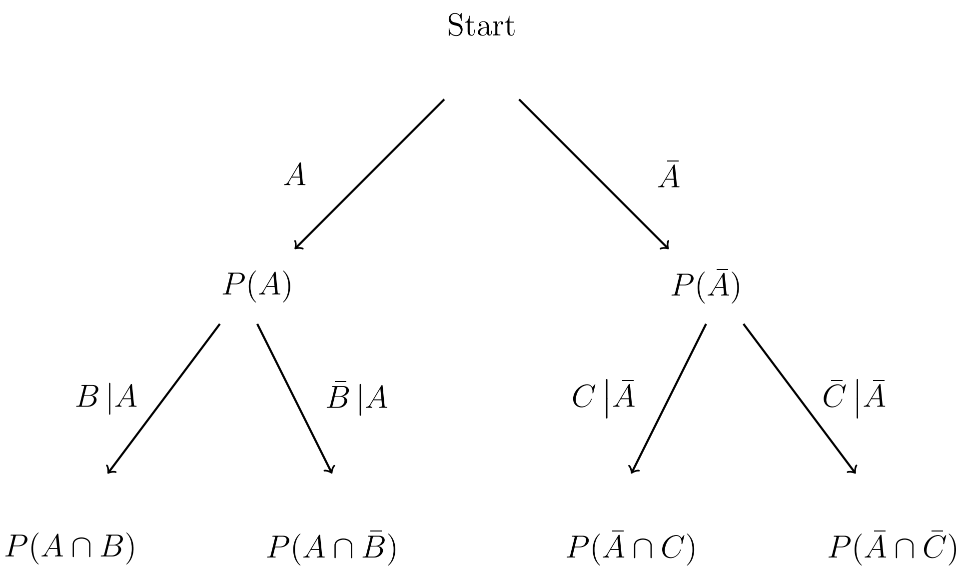
$$P(A) = P\left(B\left|A\right.\right) \cdot P(A) + P\left(B\left|\bar{A}\right.\right) \cdot P(\bar{A}) \quad . \tag{9.15}$$

$$P\left(A\left|B\right.\right) = \frac{P\left(B\left|A\right.\right) \cdot P(A)}{P\left(B\left|A\right.\right) \cdot P(A) + P\left(B\left|\bar{A}\right.\right) \cdot P(\bar{A})} \tag{9.16}$$

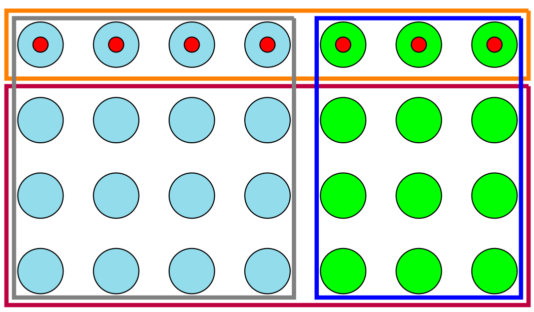
Wenn ein Experiment ein so genanntes Bernoulli-Experiment ist, dann sind die Ereignisse unabhängig von einander. Dies bedeutet, dass ein Wahrscheinlichkeitsbaum umgekehrt werden kann. Dieses umgekehrte Baumdiagramm wird auch Gegenbaum genannt. Wenn kein Bernoulli-Experiment vorliegt, ist die Erstellung des Gegenbaums nicht möglich.



Bei einer unbedingten Wahrscheinlichkeit handelt es sich stets um betrachtete Ereignisse, die nicht auseinander resultieren. Während die bedingte Wahrscheinlichkeit hier auch in den Teilwahrscheinlichkeiten nach dem ersten Ereignis unterscheidet. So kann nach dem Ereignis A das Ereignis B oder $\bar{B}$ eintreten, während wiederum bei $\bar{A}$ entweder C oder $\bar{C}$ eintreten könnten, obwohl diese auch den selben Sachzusammenhang besitzen können.



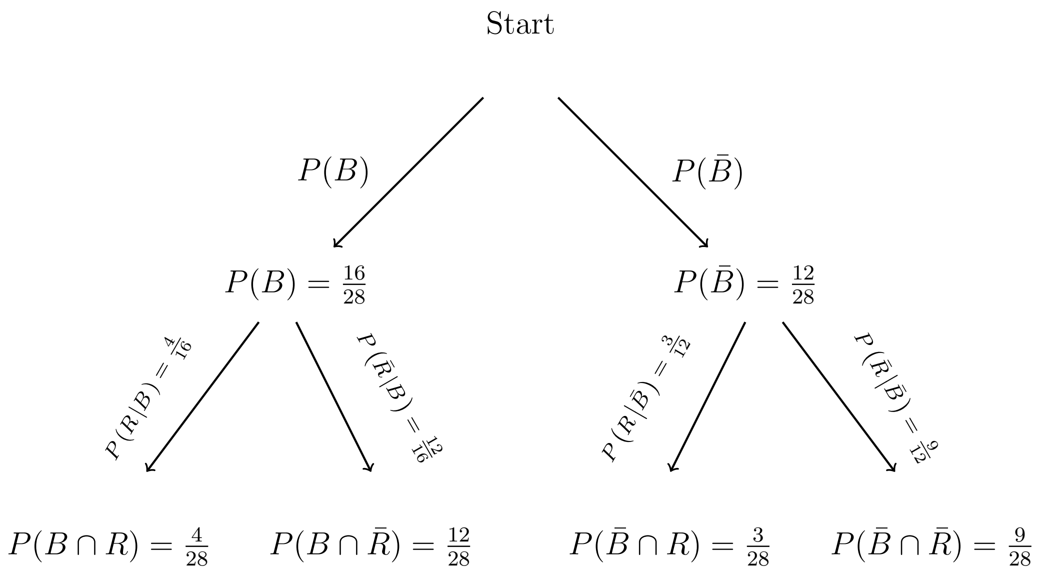
Das Prinzip einer unbedingten Wahrscheinlichkeit lässt sich am besten an einem Beispiel erläutern:



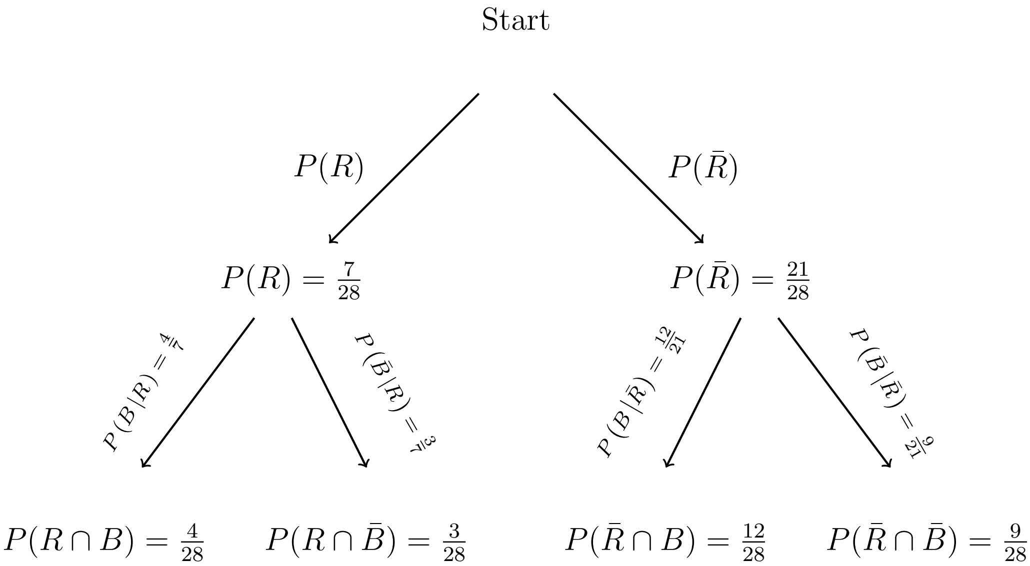
Im gewählten Beispiel sind blaue B und grüne Kreise $\bar{B}$ gezeichnet, wobei einige Kreise noch einen roten Kreis R sich beherbergen. Folgende relativen Häufigkeiten sind zu erkennen:

- blaue Kreise von allen Kreisen: $P(B) = \frac{16}{28}$
- grüne Kreise von allen Kreisen: $P(\bar{B}) = \frac{12}{28}$
- Kreise mit rotem Kreis von allen Kreisen: $P(R) = \frac{7}{28}$
- Kreise ohne rotem Kreis von allen Kreisen: $P(\bar{R}) = \frac{21}{28}$
- blaue Kreise mit rotem Kreis von allen Kreisen: $P(B \cap R) = \frac{4}{28}$
- grüne Kreise mit rotem Kreis von allen Kreisen: $P(\bar{B} \cap R) = \frac{3}{28}$
- blaue Kreise ohne rotem Kreis von allen Kreisen: $P(B \cap \bar{R}) = \frac{12}{28}$
- grüne Kreise ohne rotem Kreis von allen Kreisen: $P(\bar{B} \cap \bar{R}) = \frac{9}{28}$
- blaue Kreise mit rotem Kreis von den blaue Kreisen: $P(R\,|B\,) = \frac{4}{16}$
- blaue Kreise ohne rotem Kreis von den blaue Kreisen: $P(\bar{R}\,|B\,) = \frac{12}{16}$
- grüne Kreise mit rotem Kreis von den grünen Kreisen: $P(R\,\big|\bar{B}\,) = \frac{3}{12}$
- grüne Kreise ohne rotem Kreis von den grünen Kreisen: $P(\bar{R}\,\big|\bar{B}\,) = \frac{9}{12}$
- blaue Kreise mit rotem Kreis von den Kreisen mit rotem Kreis: $P(B\,|R\,) = \frac{4}{7}$
- grüne Kreise mit rotem Kreis von den Kreisen mit rotem Kreis: $P(\bar{B}\,|R\,) = \frac{3}{7}$
- blaue Kreise ohne rotem Kreis von den Kreisen ohne rotem Kreis: $P(B\,\big|\bar{R}\,) = \frac{12}{21}$
- grüne Kreise ohne rotem Kreis von den Kreisen ohne rotem Kreis: $P(\bar{B}\,\big|\bar{R}\,) = \frac{9}{21}$

Werden die relativen Häufigkeiten auf ein Baumdiagramm übertragen ergibt sich zum Beispiel:



und dem dazu gehörigen Gegenbaum:



Es wird deutlich, dass die Zweigwahrscheinlichkeiten sich je nach Diagrammaufbau verändern, sodass diese oftmals über dem Satz von Bayes berechnet werden müssen. Im nächsten Abschnitt wird eine andere Darstellung eingeführt, bei der nicht alle Informationen direkt ersichtlich sind, sodass es sich immer lohnt sich auf ein Baumdiagramm und dem Gegenbaum dazu zurückzubesinnen.

9.3.1 Übungsaufgaben zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 1: *Bei einem Arzt werden* 76% *gesetzlich versicherte Patienten behandelt. Insgesamt sind* 28% *der gesamten Patienten chronisch erkrankt, während* 20% *der privat versicherten Patienten chronisch krank sind. Berechne wie viel Prozent der gesetzlich versicherten chronisch erkrankt sind.*

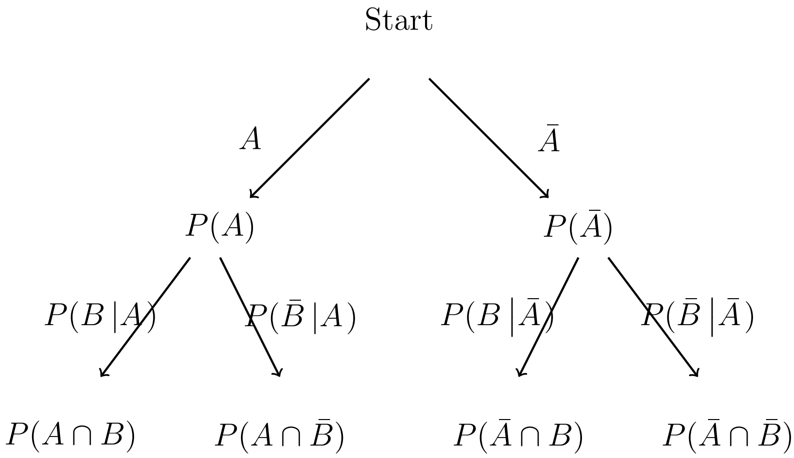
Aufgabe 2: *Bei einem Festival stammen* 16% *der Besucher aus dem Ausland, von denen* 45% *mit dem Auto angereist sind, während insgesamt* 79% *der Festivalbesucher mit dem Auto anreisten. Berechne wie viel Prozent der Festivalbesucher, die nicht aus dem Ausland kamen, nicht mit dem Auto angereist sind.*

Aufgabe 3: *In einer Gruppe aus* 45 *Menschen gaben* 22 *an ein Instrument zu spielen und* 34 *sich sportlich in einem Verein zu betätigen, wobei nur* 6 *beides verneinten. Berechne wie viel Prozent der Menschen sowohl ein Instrument spielen und im Sportverein sind.*

Aufgabe 4: *In einer Urne befinden sich* 32 *rote und* 23 *blaue Kugeln. Wenn aus dieser Urne eine rote Kugel gezogen wurde, dann soll aus einer Urne mit* 11 *schwarzen und* 37 *weißen Kugeln gezogen werden, während beim Ziehen einer blauen Kugel aus einer Urne mit* 25 *schwarzen und* 16 *weißen Kugeln gezogen werden. Berechne die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.73) Lösungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten.

9.4 Kontingenztafeln

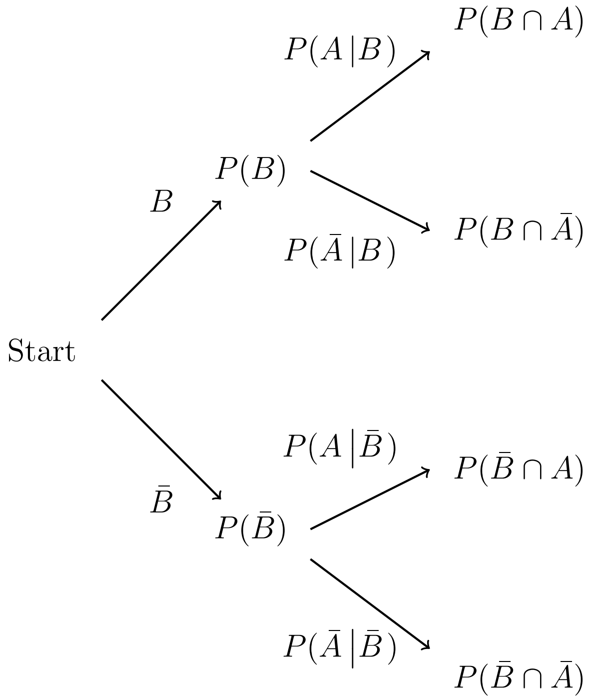


Das *Baumdiagramm* wird nicht selten als *Kontingenztafel* dargestellt, welche für die oben gewählte Form *Vierfeldertafel* genannt wird. Dabei werden die *Wahrscheinlichkeiten* eingetragen, um somit aussagen über die Korrelation der beiden Behauptungen machen zu können.

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\bar{A}\cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A\cap\bar{B})$	$P(\bar{A}\cap\bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

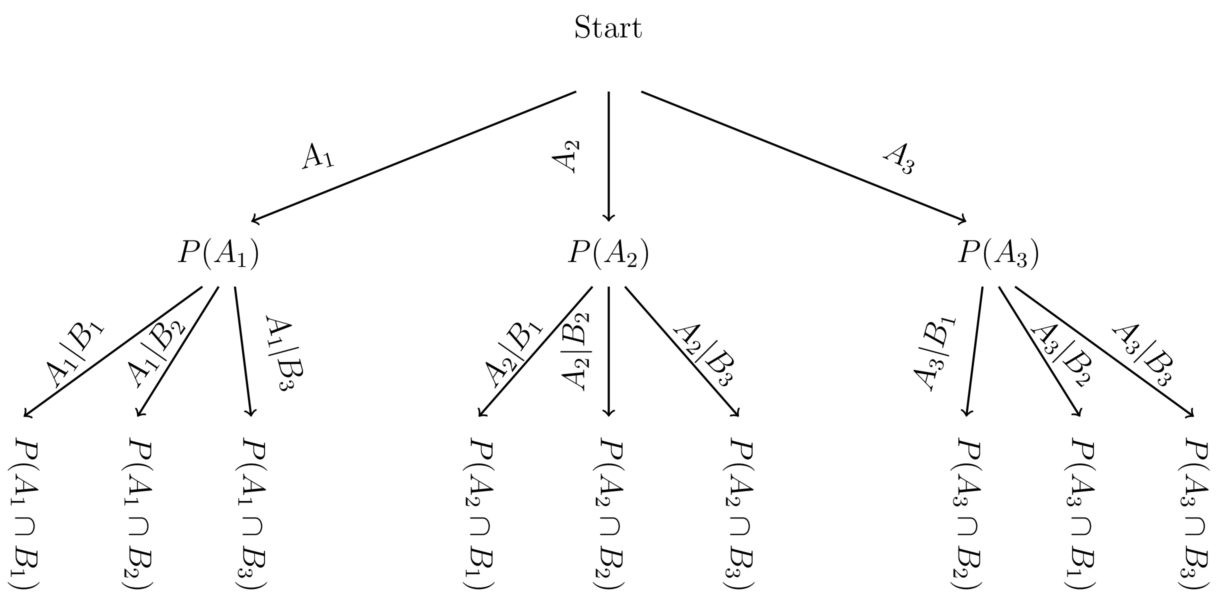
Deutlich zu erkennen ist, dass sich die *Summe* der Behauptungsereigniswahrscheinlichkeiten zu 1 ergeben müssen. Folglich reichen Teile an Informationen aus, um die restlichen Felder auszufüllen.

Zu dieser *Kontingenztafel* und dem vorherigen Baumdiagramm kann auch ein *Gegenbaum* erstellt werden, sodass anhand der Zweigwahrscheinlichkeiten deutlich wird, dass bei einer *bedingten Wahrscheinlichkeit* andere *Werte* angebracht werden müssen. Hierbei wurde das Baumdiagramm in der Orientierung der *Kontingenztafel* angepasst:



Kontingenztafeln können in beliebiger Zeilen- und Spaltennummer auftreten, sodass mit ihrer Hilfe viele stochastisch verknüpfte Aussagen überprüfen lassen. Im folgenden noch ein Beispiel für eine 3×3-*Kontingenztafel* mit entsprechenden *Baumdiagramm*.

	A_1	A_2	A_3	
B_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_2 \cap B_1)$	$P(A_3 \cap B_1)$	$P(B_1)$
B_2	$P(A_1 \cap B_2)$	$P(A_2 \cap B_2)$	$P(A_3 \cap B_2)$	$P(B_2)$
B_3	$P(A_1 \cap B_3)$	$P(A_2 \cap B_3)$	$P(A_3 \cap B_3)$	$P(B_3)$
	$P(A_1)$	$P(A_2)$	$P(A_3)$	1



Kommen mehr Behauptungsstufen hinzu kann *iterativ* vorgegangen werden:

	$A \cap B$	$\bar{A} \cap B$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cap \bar{B}$	
C	$P(A \cap B \cap C)$	$P(\bar{A} \cap B \cap C)$	$P(A \cap \bar{B} \cap C)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$	$P(C)$
$\bar{C}$	$P(A \cap B \cap \bar{C})$	$P(\bar{A} \cap B \cap \bar{C})$	$P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$	$P(\bar{C})$
	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	1

wobei sich die Spaltenanzahl nach den verschiedenen vorhergegangenden Optionen ergibt und die Zeilenanzahl oder die *Anzahl* der jetzigen Varianten. In diesem Beispiel wurden jeweils *Ereignis* und *Gegenereignis* als Option gewählt.

Innerhalb der Kontingenztafeln gelten je nach Art der Wahrscheinlichkeit unterschiedlich Rechenregeln:

- Für die unbedingte Wahrscheinlichkeit gilt:

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A)$	$P(\bar{A} \cap B) = P(B) \cdot P(\bar{A})$	$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P(\bar{A})$	$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$
	$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$1 = P(A) + (P\bar{A}) = P(B) + (P\bar{B})$

- Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt:

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$	$P(\bar{A} \cap B) = P_A(B) \cdot P(\bar{A})$	$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B}) = P_A(B) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P_A(\bar{B}) \cdot P(\bar{A})$	$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$
	$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$1 = P(A) + (P\bar{A}) = P(B) + (P\bar{B})$

wobei die Pfadregeln $P\left(A\,|B\right) \cdot P(B) = P\left(B \cap A\right)$ ausgenutzt werden könnten.

Wenn kein Bernoulli-Experiment vorliegt, ist die Verwendung von Kontingenztafeln nicht möglich.

9.4.1 Übungsaufgaben zu Kontingenztafeln

Aufgabe 1: *Fülle die Vierfeldertafeln für unbedingte Wahrscheinlichkeiten aus.*

	B	$\overline{B}$	
A			75%
$\overline{A}$			
	23%		

	B	$\overline{B}$	
A			
$\overline{A}$			1700
	8600		35000

	B	$\overline{B}$	
A	$\frac{3}{25}$		$\frac{2}{7}$
$\overline{A}$			
			1

	B	$\overline{B}$	
A			$\frac{4}{9}$
$\overline{A}$			
		95%	$1,8$

Aufgabe 2: *Von* 60000 *Produkten kommen nach einem Qualitätstest* 9 *fehlerhaft in den Verkauf. Bestimme mit einer Kontingenztafel die Wahrscheinlichkeit, dass der Test fehl schlägt. Durch den Test wurden* 1277 *Produkte als fehlerhaft gekennzeichnet.*

Aufgabe 3: *Um zu verhindern, dass fehlerhafte Produkte auf den Markt kommen, wird ein Test zur Qualitätssicherung vorgenommen. Dabei werden insgesamt* 3% *als fehlerhaft deklariert. Der Test hat eine Wahrscheinlichkeit von* $99,3\%$ *eine richtige Entscheidungsgrundlagen zu bietet. Berechne mit einer Kontingenztafel wie viele Produkte fehlerhaft auf dem Markt kommen und stelle ein Verhältnis dazu auf.*

Aufgabe 4: *Von rund* 25000 *Menschen wurden* 7600 *positiv getestet. Dabei liegt die Wahrscheinlichkeit, dass der Test korrekt funktioniert bei* 95%. *Stelle eine relative und absolute Kontingenztafel auf. Wenn der Test wiederholt werden würde, wie hoch wäre die Wahrscheinlichkeit das ein Mensch als negativ getestet wurde, obwohl dieser positiv ist?*

Aufgabe 5: *In einer Stadt mit einem Raucheranteil von* 30% *sind 20% der Raucher gegen das neue Nichtraucherschutzgesetz in Restaurants, während 90% der Nichtraucher für das neue Gesetz sind. Erstelle eine Vierfeldertafel.*

Aufgabe 6: *In einer Klasse mit* 26 *Schülern finden* 8 *Schüler, dass die Ferien ausgedehnt werden sollten. Insgesamt haben* 7 *Schüler eher schlechte Noten, wovon allerdings nur* 2 *Schüler gerne mehr Unterricht hätten. Stelle eine Vierfeldertafel auf.*

Aufgabe 7: *Bei einer Umfrage antworten von* 2500 *Befragten insgesamt* 147*, dass sie mit ihrem Einkommen zufrieden sind, wobei von dieser Gruppe* 129 *ein Studienabschluss besitzen. Insgesamt haben von den Befragten* 432 *einen Studienabschluss. Erstelle eine Vierfeldertafel und berechne den prozentualen Anteil der Befragten, die mit ihrem Einkommen zufrieden sind und kein Studienabschluss besitzen.*

Aufgabe 8: *Erstelle aus den gegebenen abstrakten Größen eine Vierfeldertafel.*

a) $P(A) = 0,34$; $P(\overline{B}) = 0,19$; $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,08$

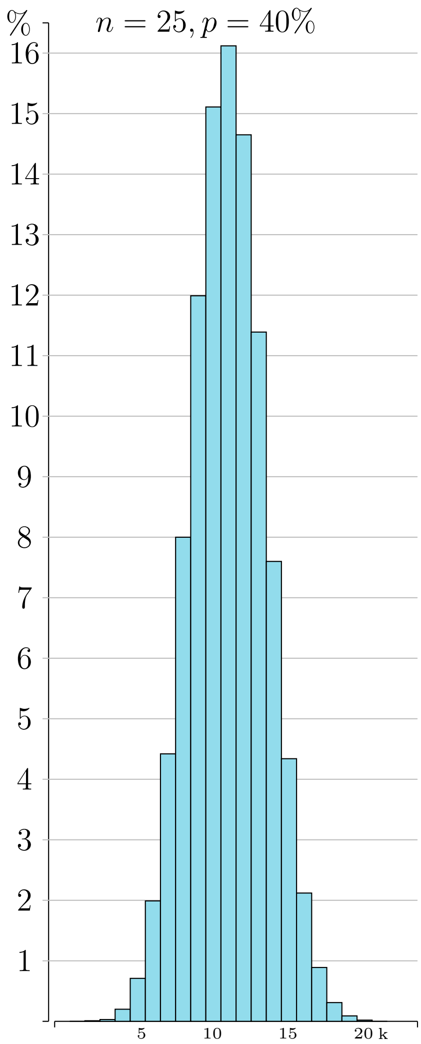
b) $P(B) = 0,42$; $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,21$; $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,03$

c) $P\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{2}{5}$; $P(\overline{B}) = \frac{4}{7}$; $P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{12}$

d) $P(A) = 22,4\%$; $P(B) = \frac{7}{11}$; $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,057$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.74) Lösungen zu Kontingenztafeln.

9.5 Binomialverteilung



Im Allgemeinen ist die *Binomialverteilung* als Fortsetzung einer *Ziehung mit Zurücklegen* zu sehen. Bei einem *Baumdiagramm* mit einem *Ereignis* E und einem *Gegenereignis* $\bar{E}$ kann bei häufigen Wiederholungen eine *Verteilung* in Form eines *Histogramms*, wie links zu sehen ist, beobachtet werden: Hierbei ist auf die *Abszisse* der *Parameter* k aufgetragen welcher für die *Anzahl* der *Ereignisse* E steht, während auf der *Ordinate* die *Wahrscheinlichkeit* in *Prozent*, der sogenannten *Wahrscheinlichkeitsdichte* $B(k)$, aufgetragen ist. Dabei ist die jeweilige Anzahl der identischen *Pfade* über den *Binomialkoeffizienten* $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ berücksichtigt, wobei n die *Gesamtanzahl* der Wiederholungen angibt. Der Parameter p beschreibt die *Einzelwahrscheinlichkeit* pro *Ereignis*. Somit ergibt sich folgende Überlegung für die *Wahrscheinlichkeitsdichte*:

$$\begin{aligned} B(X=k) &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (E(p))^k \left(\bar{E}(p)\right)^{n-k} \\ B(X=k) &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned} \tag{9.17}$$

Über die *Wahrscheinlichkeitsdichte* kann die *Wahrscheinlichkeit* für eine bestimmte Ansammlung von *Ereignissen* berechnet werden.

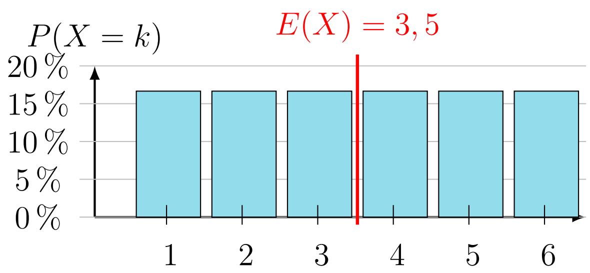
Um zu testen, dass die *Wahrscheinlichkeitsdichte* korrekt ist, werden alle Komponenten *aufsummiert*. Dabei muss das *Ergebnis* 100% betragen, sodass alle Fälle abgedeckt sind. Hierzu wird der sogenannte *Binomische Lehrsatz* $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k y^{k-n}$ verwendet, welcher in den Aufgaben zur *vollständigen Induktion* bewiesen wurde.

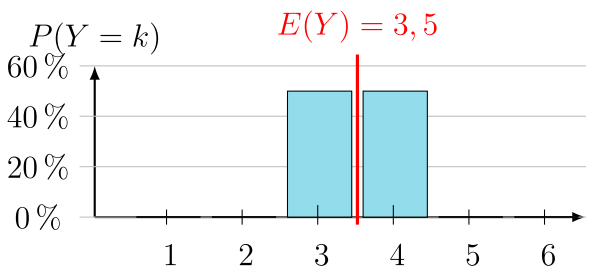
$$\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1^n = 1 = 100\% \tag{9.18}$$

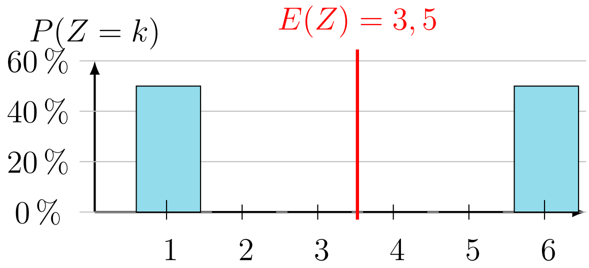
Bei einer *Verteilung* ist vor allem interessant, welcher *Wert* am häufigsten vorkommt. Dies ist der sogenannte *Erwartungswert* μ, wobei zu jedem *Summanden* der gesamten *Verteilung* noch einmal der *Parameter* k *multipliziert* wird.

$$
\begin{aligned}
\mu &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n} k \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n} k \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right) p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{l=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ l \end{array} \right) p^{l} (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= np \sum_{l=0}^{m} \left(\begin{array}{c} m \\ l \end{array} \right) p^{l} (1-p)^{m-l} \\
&= np \left(p + (1-p)\right)^m \\
\Rightarrow \quad \mu &= np
\end{aligned}
\tag{9.19}
$$

Die *Varianz* ist eine Hilfsgröße, welche das *Quadrat* zur *Standardabweichung* σ bildet. Diese Größe beschreibt die *Breite* und somit indirekt die *Höhe* der *Verteilung*. Um den Begriff der *Varianz* zu veranschaulichen dienen drei *Verteilungen*.







Alle drei *Zufallsgrößen* besitzen den gleichen *Erwartungswert* und unterscheiden sich dennoch deutlich. Die *Verteilung* zu Y besitzt die kleinste *Streuung*, während die *Verteilung* von Z die größte *Streuung* aufweist. Diese *Streuung* kann durch die *Standardabweichung* und somit auch der *Varianz* beschrieben werden. Sie ist ein *Maß*, welches mit der *Wahrscheinlichkeit* verknüpft ist, dass ein anderes *Ereignis* als der *Erwartungswert* $\mu = E(x)$ eintritt.

$$\begin{aligned} \text{Var}(x) &= E\left((x - E(x))^2\right) \\ &= E(x^2) - (E(x))^2 \\ &= np(1-p) \end{aligned} \tag{9.20}$$

Dabei wurde der *Satz von König-Huygens* verwendet:

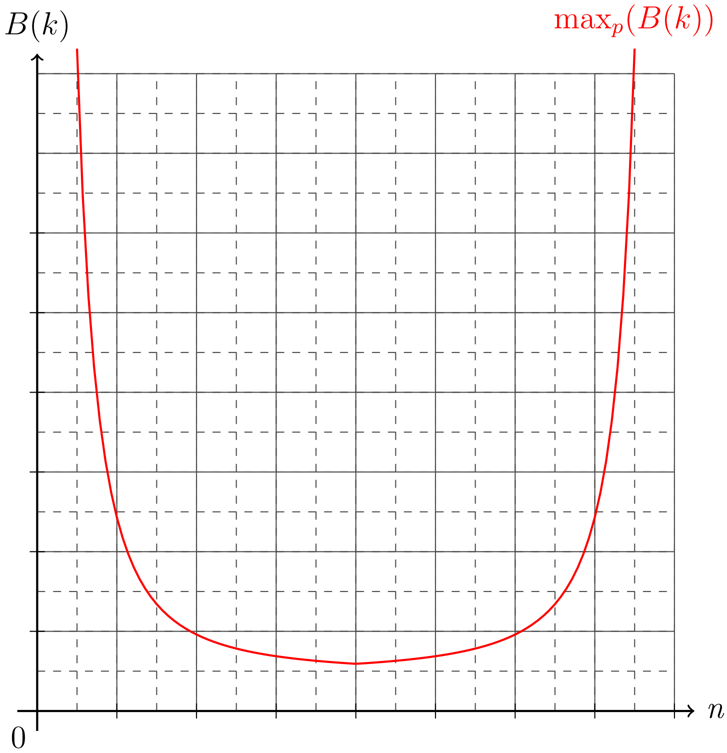
$$\begin{aligned} E\left((x - E(x))^2\right) &= E\left(x^2 - 2xE(x) + (E(x))^2\right) \\ &= E\left(x^2\right) - E\left(2xE(x)\right) + E\left((E(x))^2\right) \\ &= E\left(x^2\right) - 2E\left(x\right)E(x) + (E(x))^2 \\ &= E(x^2) - (E(x))^2 \end{aligned} \tag{9.21}$$

Die *Standardabweichung* σ ist durch die *Wurzel* der *Varianz* gegeben und gibt Aufschluss über die Verlässlichkeit von *Ergebnissen*. Sie beschreibt die *Breite* und somit auch die *Höhe* einer *Verteilung*. Auf ihre Bedeutung wird im folgenden Abschnitt zur *Gauß-Verteilung* detaillierter eingegangen.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{\text{Var}(x)} \\ \Rightarrow \quad \sigma_x &= \sqrt{E(x^2) - (E(x))^2} \\ &= \sqrt{np(1-p)} \end{aligned} \tag{9.22}$$

Interessant bei der *Binomialverteilung* ist die Beobachtung des *Erwartungswertes* μ unter der Veränderung der *Einzelereigniswahrscheinlichkeit* p. Dabei wandert das *Maximum* der *Verteilung* $\mu = \max_p(B(k))$ entlang einer *achsensymmetrischen Kurve*. Die *Symmetrieachse* befindet sich dabei genau bei der Hälfte der *Ereignisse* $\frac{n}{2}$, wobei das *Maximum* der *Binomialverteilung* dort zu finden ist, wenn $p = 50\%$ gilt. Zu den Werten $p \to 0\% \;\Rightarrow\; \mu \to 0$ wird das *Maximum* immer stärker ausgebildet und somit die *Standardabweichung* σ kleiner. Das gleiche gilt bei

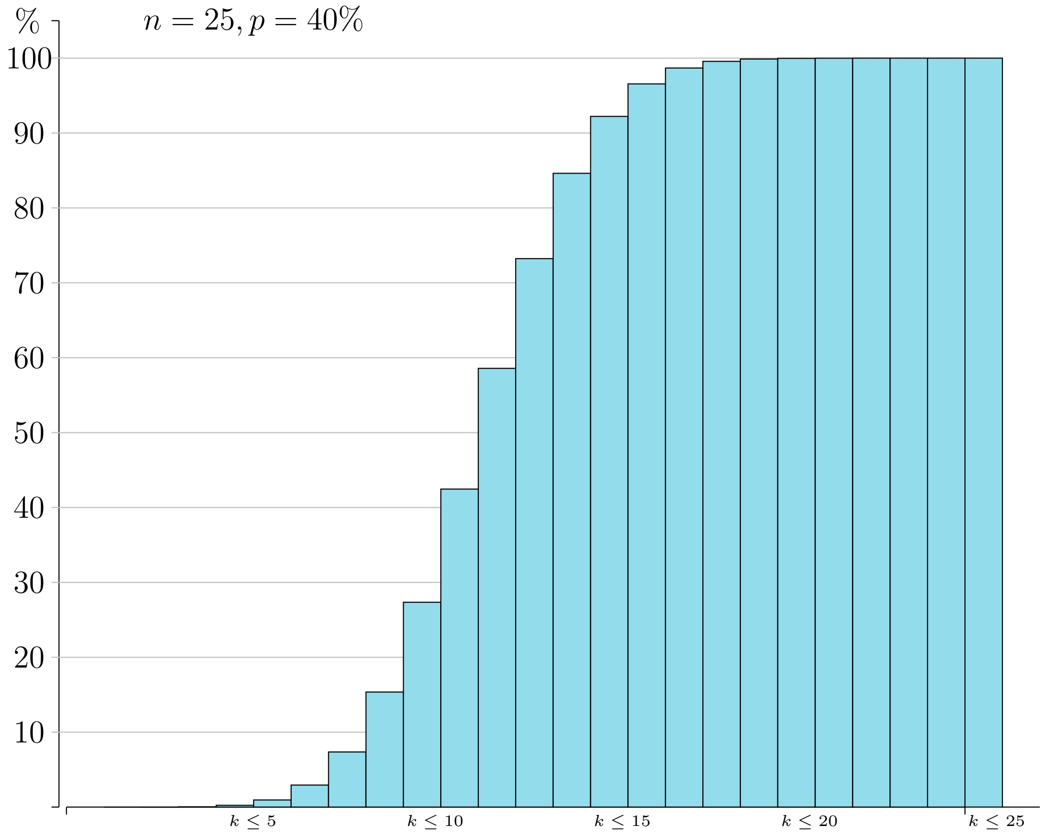
$p \to 100\% \;\Rightarrow\; \mu \to n$. Zur Mitte hin ($p \to 50\%$) nimmt die *Wahrscheinlichkeit* des *Erwartungswertes* μ ab, während die *Standardabweichung* σ zunimmt. Dies ist in der folgenden Abbildung noch einmal graphisch dargestellt.



Sobald Grenzen für ein Szenario bestimmt werden sollen, werden mehrere Teilwahrscheinlichkeiten von Ereignissen aufaddiert.

$$B(n,k,p,l) = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{9.23}$$

Diese Darstellung wird Komulative Verteilung genannt, welche in der folgenden Abbildung dargestellt ist. Auch zu erkennen sind die Axiome von Kolmogorov.


%
$n = 25, p = 40\%$
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
$k \leq 5$
$k \leq 10$
$k \leq 15$
$k \leq 20$
$k \leq 25$

9.5.1 Übungsaufgaben zu Binomialverteilungen

Aufgabe 1: *Bei einer Verlosung werden Lose in Form von Kugeln gezogen und die Wahrscheinlichkeit einen Gewinn zu bekommen beträgt genau* 35%. *Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau* 5 *von* 12 *Lose ein Gewinn sind. Die Kugeln werden nach der Ziehung wieder zurück in den Lostopf geworfen.*

Aufgabe 2: *Eine Reißzwecke fällt zu* 70% *auf die Seite. Berechne die Wahrscheinlichkeit für den Fall, dass nach* 10 *Würfen mindestens* 7 *mal die Reißzwecke auf dem Kopf fallen wird.*

Aufgabe 3: *Bei einem Würfelspiel werden vier Würfel verwendet. Berechne wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass nach* 8 *Würfen mit allen Würfeln auf allen vier Würfeln die gleiche Zahl oben liegt.*

Aufgabe 4: *Bei der Herstellung eines Produktes werden* 2% *Ausschuss hergestellt. Wie viele Produkte müssen mindestens hergestellt werden, damit zu* 68%, 95,5% *und* 99,7% *Wahrscheinlichkeit ein defektes Produkt dabei ist?*

Aufgabe 5: *Bei einem Multiple-Choice-Test hält sich nachhaltig das Gerücht, dass man diesen bestehen kann (mindestens* 50% *der Punkte) selbst wenn man keine Ahnung vom Thema hat. Berechne wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass man den Multiple-Choice-Test mit vier Auswahlmöglichkeiten bestehen kann.*

Aufgabe 6: *In einem Beutel befinden sich* 37 *blaue und* 17 *rote Kugeln, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau fünf von acht zufällig herausgezogenen Kugeln rot sind, wenn jede Kugel nach jeder Ziehung wieder zurückgelegt wird?*

Aufgabe 7: *Bei einer Produktion wird* 4% *Ausschuss hergestellt. Wie viele Produkte müssen mindestens gekauft werden, sodass genau vier beziehungsweise keines von hundert gekauften Produkte defekt sind?*

Aufgabe 8: *Ein Bienenvolk überlebt einen Winter zu* 55%. *Ein Imker besitzt acht Bienenstämme. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens drei Stämme einen Winter überleben.*

Aufgabe 9: *Ein Spielautomaten hat eine Gewinnwahrscheinlichkeit von* 20%. *Wenn mehr als* $\frac{1}{3}$ *der Spiele gewonnen werden, wird mehr Geld ausgeschüttet als eingeworfen wurde. Berechne die Wahrscheinlichkeit mit einer positiven Bilanz nach* 15 *Spielen nach Hause zu gehen.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.75) Lösungen zu Binomialverteilungen.

9.6 Hypergeometrische Verteilungen

Die hypergeometrische Verteilung beschreibt die Fortsetzung einer Ziehung ohne Zurücklegen. Hierbei kann die Verteilungsfunktion $H(k)$ durch n Ziehungen aus einer Menge M mit N gewünschten Optionen bei k Treffern über Binominialkoeffizient motiviert werden.

$$H(k) = P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N - M \\ n - k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} \tag{9.24}$$

In dieser Darstellung gibt der ersten Binominialkoeffizient $\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}$ die Anzahl der Möglichkeiten für die Treffer an, während der zweite Binominialkoeffizient $\begin{pmatrix} N - M \\ n - k \end{pmatrix}$ die Anzahl der möglichen Nichttreffer beschreibt. Der Binominialkoeffizient im Nenner $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$ gibt hierbei alle Möglichkeiten an, sodass sich hieraus im Nenner das Produkt der jeweiligen iterativen Gesamtanzahlen ergibt (Die Reduzierung der Faktorenwerte um eins je weiterer Ziehung.).
Hierbei vereinfacht sich der Erwartungswert $E(X)$ zu:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N - M \\ n - k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} = n\frac{M}{N} \quad , \tag{9.25}$$

während die Varianz σ^2 sich zur folgenden Form ergibt:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = Var(X) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N - M \\ n - k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} - \left(n\frac{M}{N}\right)^2 \\ &= n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} \quad . \end{aligned} \tag{9.26}$$

Ein Beispiel soll den Umgang mit der hypergeometrischen Verteilung verdeutlichen:

Sei die Aufgabe: „Auf vier Stellen bewerben sich 15 Personen, wovon fünf Erfahrung in genau dieser Position mitbringen würden. Die Vergabe dieser Arbeitsstellen erfolgt nach Losverfahren.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Personen mit Erfahrung unter den ermittelten Personen sind. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung."

Gegeben: $N = 15\ ,\ M = 5\ ,\ n = 4\ ,\ k = 3$.

$$H(k) = P(X = k) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15-5 \\ 4-3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}} = \frac{10 \cdot 10}{1365} = \frac{20}{273} \approx 7,326\% \tag{9.27}$$

Die Wahrscheinlichkeit das genau drei Personen mit Erfahrung ermittelt werden, liegt bei $7,326\%$.

$$E(X) = 4\frac{5}{15} = \frac{4}{3}\ , \tag{9.28}$$

Erwartet wird, dass $1,\bar{3}$ Stellen von einer Person mit Erfahrung besetzt werden.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{4\frac{5}{15}\left(1-\frac{5}{15}\right)\frac{15-4}{15-1}} \\ &= \sqrt{\frac{44}{63}} \approx 0,8357\ . \end{aligned} \tag{9.29}$$

9.6.1 Übungsaufgaben zu hypergeometrischen Verteilungen

Aufgabe 1: *Beweise die Chu-Vandermode-Identität.*

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

Aufgabe 2: *In einer Urne befinden sich* 8 *rote und* 17 *blaue Kugeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nach* 6 *Ziehungen ohne Zurücklegen genau* 2 *rote Kugeln gezogen wurden.*

Aufgabe 3: *In einer Urne befinden sich* 11 *rote und* 21 *blaue Kugeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nach* 9 *Ziehungen ohne Zurücklegen mehr als* 7 *blaue Kugeln gezogen wurden.*

Aufgabe 4: *In einer Urne befinden sich* 4 *rote,* 7 *grüne und* 12 *blaue Kugeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nach* 7 *Ziehungen ohne Zurücklegen weniger als* 3 *grüne Kugeln gezogen wurden.*

Aufgabe 5: *In einer Urne befinden sich* 25 *rote,* 38 *grüne und* 49 *blaue Kugeln. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass nach* 6 *Ziehungen ohne Zurücklegen weniger als* 3 *Kugeln, die gezogen wurden, nicht blau sind.*

Aufgabe 6: *Bei einem Kartenspiel hat jeder Spieler einen Kartenstapel mit* 60 *Karten zur Verfügung, welche vom Spieler vor dem Spiel frei zusammengestellt werden dürfen, wobei beachtet werden muss, dass keine Karte mehr als viermal im Stapel vorhanden sein darf. Zu Beginn des Spiel darf jeder Spieler* 7 *Karten ziehen. In diesem Szenario gewinnt Spieler A, wenn er eine ganz bestimmt Karte, welche viermal im Stapel ist, unter seinen Startkarten gezogen hat gegen Spieler B. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A mit alleine mit seinen Startkarten gewinnt.*

Aufgabe 7: *Im Lotto werden* 6 *Zahlen aus* 49 *gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit mindestens eine Zahl richtig getippt zu haben.*

Aufgabe 8: *Beim Skat werden die* 32 *Karten so verteilt, dass jeder der drei Spieler* 10 *Karten erhält. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler alle vier Buben ausgeteilt bekommt.*

Aufgabe 9: *Beim Doppelkopf werden die 48 Karten auf 4 Spieler verteilt. Es spielen in der Regel die beiden Spieler zusammen, die eine Kreuzdame auf der Hand haben. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spieler beider Kreuzdamen ausgeteilt bekommen hat.*

Aufgabe 10: *Berechne die Erwartungswerte und Standardabweichungen für die Aufgabe 2 bis 9.*

Aufgabe 11: *Zeige, die Richtigkeit der Gleichung.*

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k) = n \cdot \frac{M}{N}$$

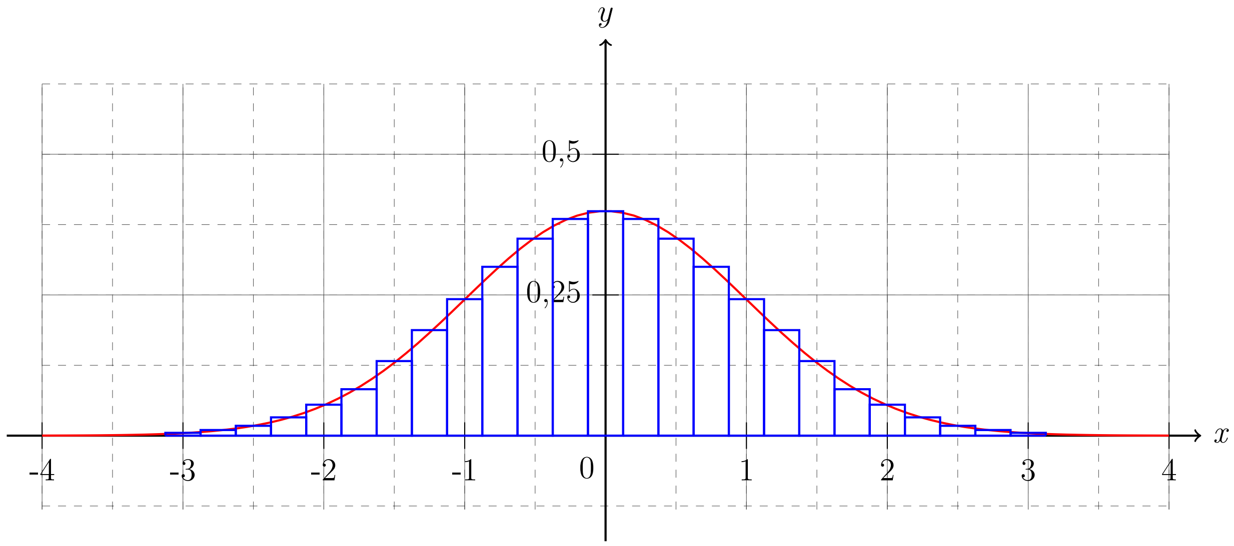
Aufgabe 12: *Zeige, die Richtigkeit der Gleichung.*

$$Var(X) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N-M \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} - \left(n\frac{M}{N}\right)^2 = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.76) Lösungen zu Binomialverteilungen.

9.7 Gauß-Verteilungen

Nach dem *Satz von Moivre-Laplace konvergiert* eine *diskrete Binomialverteilung* für $n \to \infty$ mit der *Wahrscheinlichkeit* $0 \leq p \leq 1$ gegen eine *kontinuierliche Gauß-Verteilung* (oftmals auch *Normalverteilung* genannt). Dies wird deutlichen, wenn man um eine *Binomialverteilung* einen *Graphen* zeichnet.



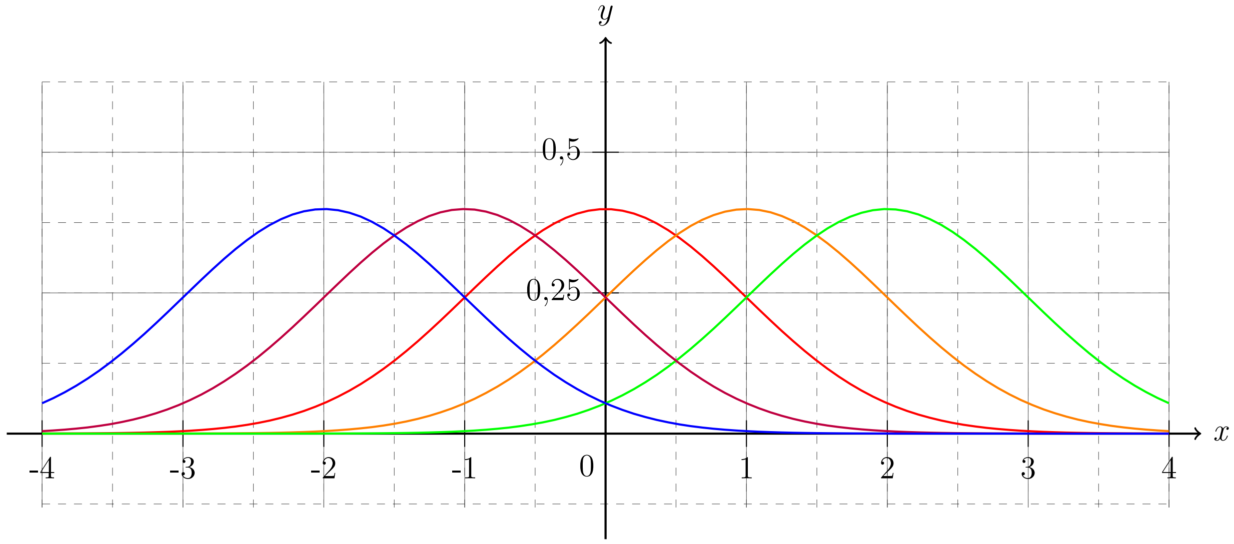
Für niedrige Werte von n kann die Gauß-Verteilung approximativ für eine Binomialverteilung, solange die Laplace-Bedingung $\sigma^2 = Var(x) = np(1-p) > 9$ (bezogen auf die Binomialverteilung) erfüllt ist. Die Laplace-Bedingung ist hierbei lediglich eine gut motivierte Faustregel, nach welcher die Fehler, die durch die approximative Abweichung zustande kommen, relativ gering bleiben.

Dabei ist die *Wahrscheinlichkeitsdichte* zum *Graphen* gegeben als:

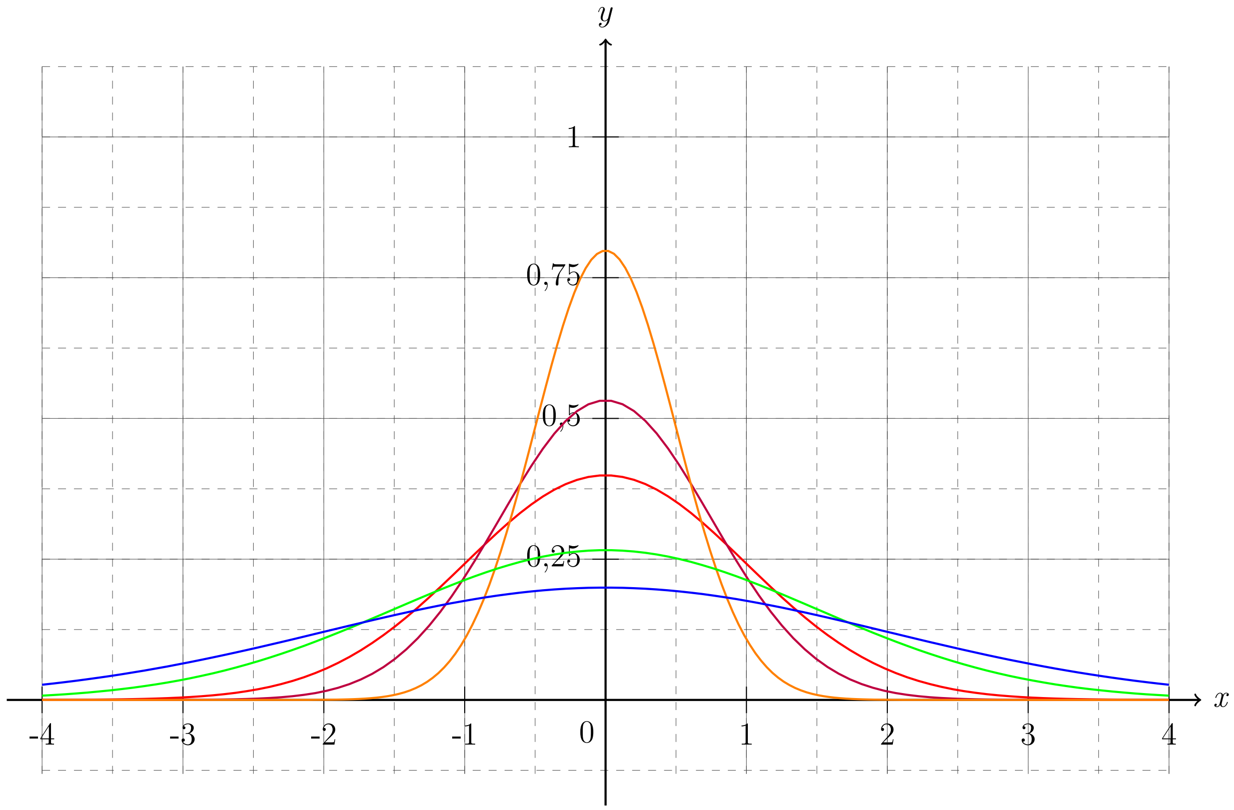
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \tag{9.30}$$

wobei σ die *Standardabweichung* und μ der *Erwartungswert* ist.

Durch *Variation* der *Parameter* zeigt sich deren Bedeutung. So ergibt eine *Veränderung* des *Erwartungswertes* μ eine Verschiebung des *Maximums*.



Während bei der *Variation* der *Standardabweichung* σ deutlich wird, das für höhere *Standardabweichungen* die *Funktion* staucht, sodass das *Maximum* weniger stark ausgeprägt und sich der *Graph* weniger schnell der *Abszisse asymptotisch* annähert.



Für die weitere Untersuchung der *Wahrscheinlichkeitsdichte* $\varphi(x)$ wird das *Gauß-Integral* benötigt:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \\
&= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} rdrd\theta \\
&= 2\pi \int_{0}^{\infty} e^{-r^2} rdr \qquad \text{mit: } s = -r^2 \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^{s} ds \\
&= \pi \left(e^0 - e^{-\infty}\right) \\
&= \pi \\
\Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt &= \sqrt{\pi}
\end{aligned} \tag{9.31}$$

Mit dem *Gauß-Integral* ist die Berechnung des *Erwartungswertes* möglich. So wird wie bei der *diskreten Binomialverteilung* eine *Aufsummierung* vollzogen (hier *kontinuierlich*):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad . \tag{9.32}$$

Folglich ergibt sich der *Erwartungswert* über *partielle Integration* und *Substitution* zu:

$$\begin{aligned}
E(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
\Rightarrow E(x) &= \mu
\end{aligned} \tag{9.33}$$

Ähnlich lässt sich auch die *Varianz* und somit auch die *Standardabweichung* der *Gauß-Verteilung* ermitteln:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(x) &= E\left((x - E(x))^2\right) \\
&= E(x^2) - (E(x))^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned} \tag{9.34}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sqrt{\mathrm{Var}(x)} \\
\Rightarrow \quad \sigma_x &= \sqrt{E(x^2) - (E(x))^2} \\
&= \sigma
\end{aligned} \tag{9.35}$$

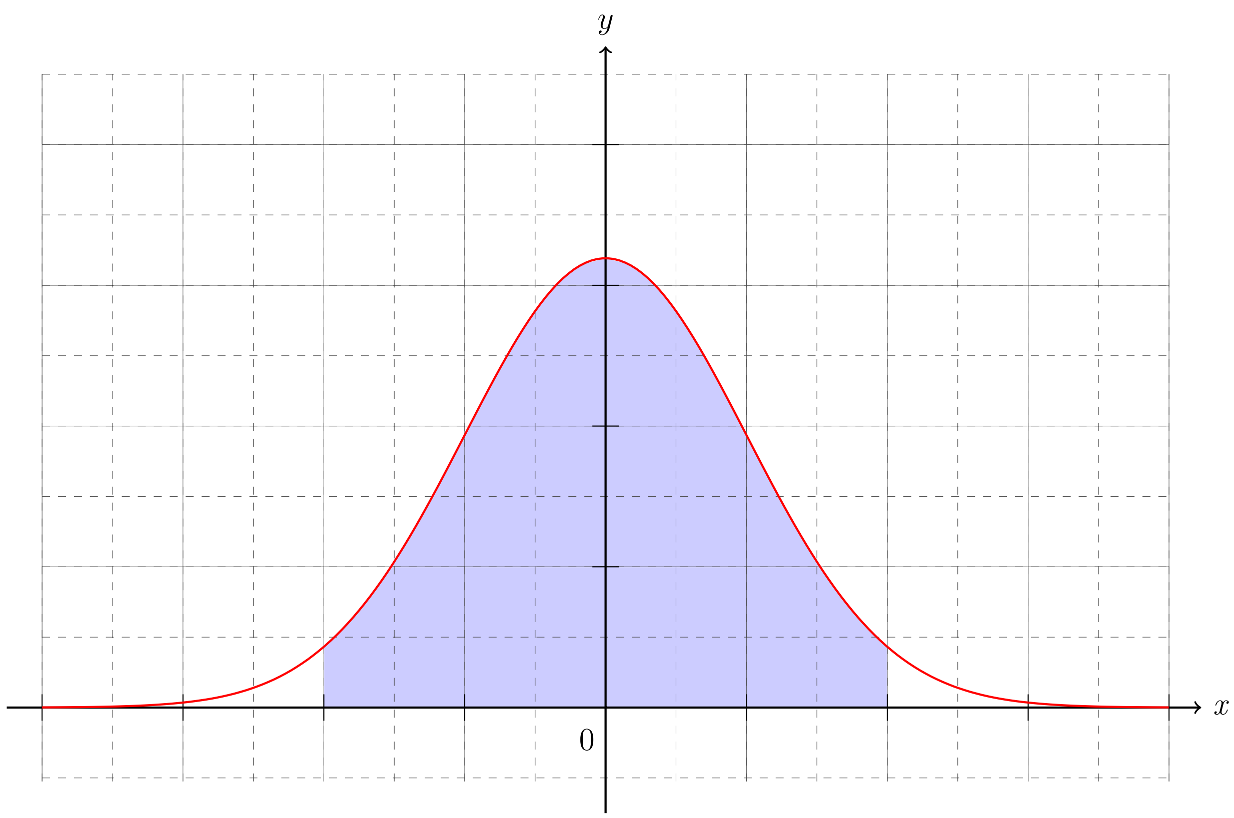
Auch durch die *Ableitungen* der *Funktion* können Eigenschaften der *Parameter* und der *Verteilung* erkannt werden, so ergibt sich aus der ersten *Ableitung* das *Maximum* der *Funktion*, welches *äquivalent* zum *Erwartungswert* ist:

$$\begin{aligned} \varPhi'(x) &= -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\varPhi(x) \\ \Rightarrow \quad x_{max} &= \mu \\ \Rightarrow \quad f(x_{max}) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \end{aligned} \tag{9.36}$$

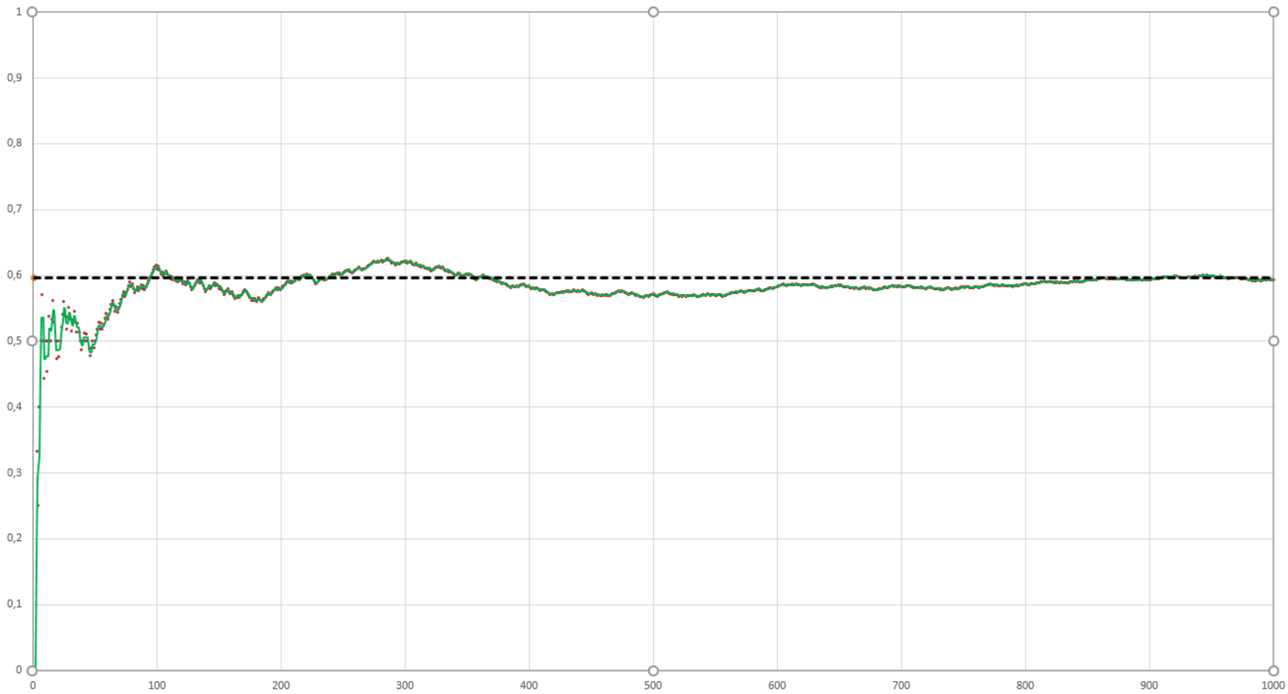
Bei der zweiten *Ableitung* der Bestimmung der *Wendepunkte* zeigt sich, dass *Addition* beziehungsweise *Subtraktion* der *Standardabweichung* σ zum *Erwartungswert* μ die *Wendestellen* ergibt:

$$\begin{aligned} \varPhi''(x) &= -\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2-1\right)\varPhi(x) \\ \Rightarrow \quad x_{Wendestelle} &= \mu \pm \sigma \\ \Rightarrow \quad f(x_{Wendestelle}) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}} \end{aligned} \tag{9.37}$$

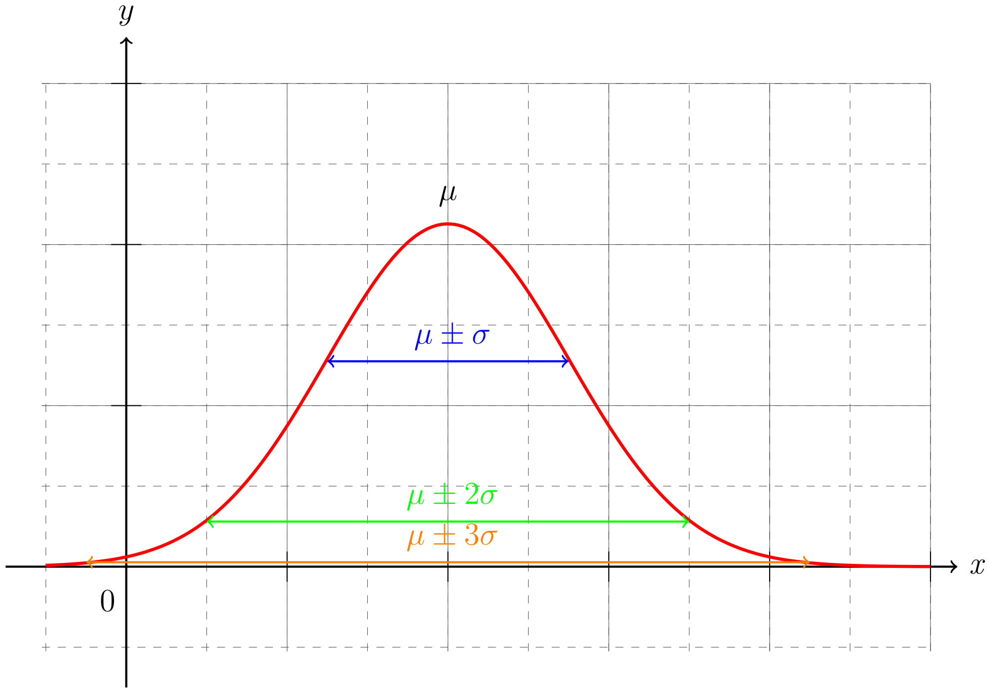
Die *Grenzen* des *Integrals* der *Funktion* $\varPhi(x)$ beschreiben den eingeschlossenen *Flächeninhalt* unter dem *Graphen* und oberhalb der *Abszisse*. Dieser *Flächeninhalt* ist für die *Grenzen* von $-\infty$ bis ∞ auf 1 *normiert*, sodass der eingeschlossene Anteil als *Maß* für die *Wahrscheinlichkeit* gilt.



Wie schon beim *Satz von Moivre-Laplace* erwähnt wurde, ist es wichtig eine hohe Anzahl von Wiederholungen des *Zufallsexperiment* zu haben, da es *stochastisch* möglich ist, dass in den ersten *Zufallsexperimenten* ein scheinbar anderer Erwartungswert gemessen werden kann. Durch das *Gesetz der Großen Zahlen*, welches sinnbildlich in der nächsten Abbildung dargestellt ist, ergibt sich, dass der *Erwartungswert* erst noch vielen Messungen präziser ermittelt werden kann, wobei stets ein Fehler bestehen bleibt. Dies wird durch die stochastische Konvergenz deutlich welche in der folgenden Darstellung durch die gestrichelte Linie zu erkennen ist.



Da der gemessene und theoretische *Erwartungswert* auseinander liegen können und somit es zu einer Verzerrung der Ergebnisse kommen kann, ist entscheidend wie genau die *Ereignisse* verteilt sein. So kann über die *Summe* aller *Ereignisse* im Vergleich zum *Flächeninhalt* der *Funktion* $\Phi(x)$ eine Aussage über die Korrektheit einer aufgestellten *Funktion* gemacht werden. Um solche *Hypothesen* zu bestätigen - *verifizieren* - oder zu widerlegen - *falsifizieren* - müssen die Ereignisse zu einem bestimmten *prozentualen* Anteil um den *Erwartungswert* μ angesiedelt sein. Dabei wird das *Maß* der Genauigkeit in vielen Wissenschaftsbereichen in Vielfachen der *Standardabweichung* σ angegeben.



Wie die Abbildung zeigt, ist mehr *Fläche* eingeschlossen je höher die *Vielfachen* der *Standardabweichung* σ sind. Einige *Vielfache* sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Integralgrenzen	Prozentualer Flächeninhalt	Verhältniswahrscheinlichkeit
$\pm 0,674490\sigma$	50%	$1:2$
$\pm\sigma$	$68,2689492\%$	$\approx 1:3,15$
$\pm 2\sigma$	$95,4499736\%$	$\approx 1:22$
$\pm 3\sigma$	$99,7300204\%$	$\approx 1:370$
$\pm 4\sigma$	$99,9936660\%$	$\approx 1:15788$
$\pm 5\sigma$	$99,9999426697\%$	$\approx 1:1744278$
$\pm 6\sigma$	$99,9999998027\%$	$\approx 1:506842372$

Außerdem sind in der Tabelle noch *Verhältniswahrscheinlichkeiten* aufgetragen, welche beschreiben wie groß ein *Fehler* noch sein könnte, wenn die *Hypothese* als wahr angenommen wird.

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1 \quad \text{mit: } z = \frac{x-\mu}{\sigma} \ \Rightarrow \ dx = \sigma dz \\ \Rightarrow &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1 \end{aligned} \tag{9.38}$$

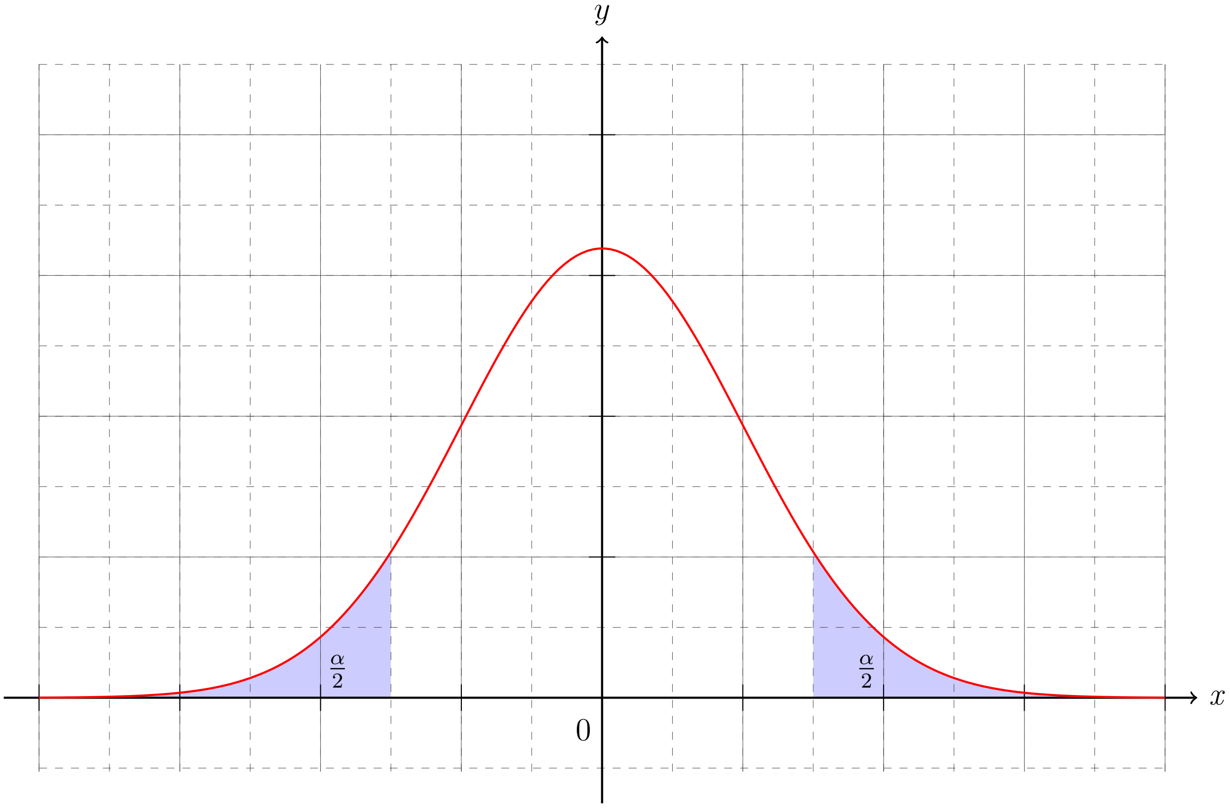
Um eine *Hypothese* effektiv zu überprüfen gibt es bestimmte Testverfahren, welche je nach Bedingung einen anderen aber ähnlichen *Ansatz* verfolgen.

- Linksseitiger Test: $\Phi\left(a \leq X\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

- Rechtsseitiger Test: $\Phi\left(X \leq a\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

- Beidseitiger Test: $\Phi\left(-a \leq X \leq a\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

Der beidseitige Test ist im folgenden *Koordinatensystem* dargestellt:



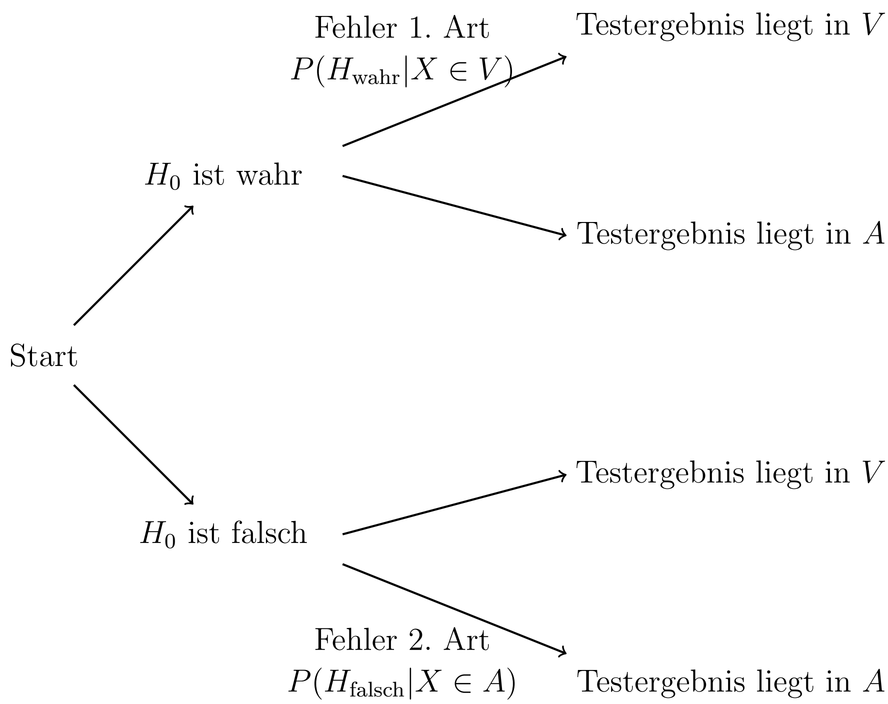
wobei der Fehler erster Art α der Nullhypothese verdeutlich wurde. Wird eine alternative Hypothese angenommen, dann existiert auch der Fehler zweiter Art β. Die beiden Fehler können wie folgt beschrieben werden:

- α-Fehler: Der *Fehler 1. Art* tritt auf, wenn das Testergebnis im *Verwerfungsbereich V* liegt, obwohl die Hypothese H_0 wahr ist.

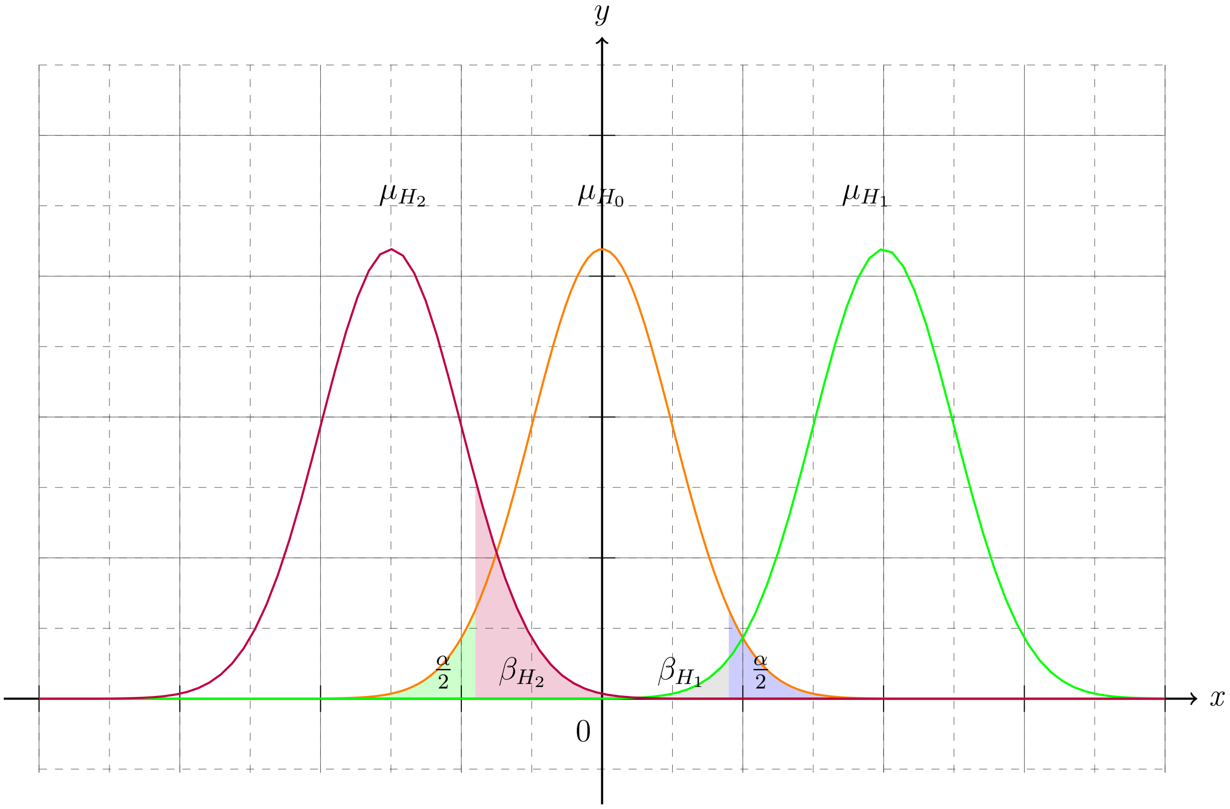
- β-Fehler: Der *Fehler 2. Art* tritt auf, wenn das Testergebnis im *Verwerfungsbereich V* liegt, obwohl die Hypothese H_0 falsch ist.

Der Zusammenhang zwischen den Fehlerarten kann in einer Tabelle dargestellt werden:
Der bedingte Aufbau innerhalb dieser scheinbaren *Kontingenztafel* wird erst deutlich, wenn eine Darstellung als *Baumdiagramm* betrachtet wird:

	Nullhypothese H_0 angenommen	alternative Hypothese (h_1) verworfen
H_0 wahr	richtig $(1-\alpha)$ (Spezifität)	Fehler 2. Art (β)
H_1 falsch	Fehler 1. Art (α)	richtig $(1-\beta)$ (Sensitivität, Power)



Im folgenden *Koordinatensystem* sind die Fehler als *Fläche* unterhalb der Gauß-Kurve visualisiert.



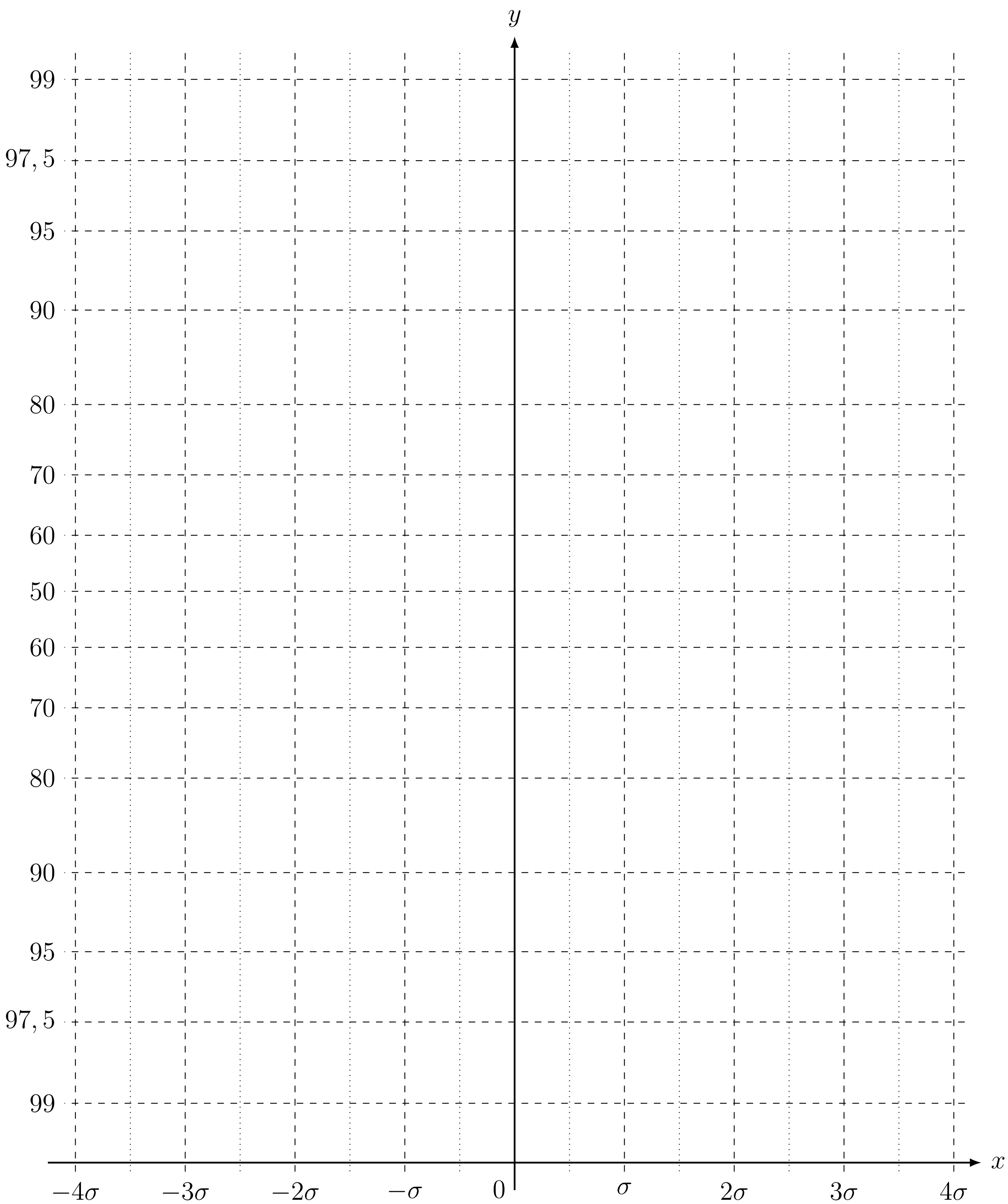
Für ein *Konfidenzintervall* (auch Vertrauensbereich genannt) wird in der Regel vom *Erwartungswert* ausgehend ein beidseitiges *Intervall* in vielfachen der *Standardabweichung* angegeben.

$$[\mu - z\sigma; \mu + z\sigma] \tag{9.39}$$

Hierbei kann der *Parameter* z bei einer *Gaußkurve* durch Tabellen (18.5) oder einem Taschenrechner bestimmt werden, welche ihre Werte jeweils durch *Näherungsverfahren* der *Integration* bekommen.

Ein solches *Konfidenzintervall* kann auch für eine *Ereigniswahrscheinlichkeit* ermittelt (geschätzt) werden. Hierbei wird die Messung als *Hypothese* angenommen, sodass bei k *Treffern* nach n *Versuchen* als *Ereigniswahrscheinlichkeit* $p_0 = \frac{k}{n}$ angenommen wird, woraus oftmals die *Standardabweichung* einer *Binomialverteilung* $\sigma = \sqrt{p_0 n(1-p_0)}$ wegen des *Satzes von Moivre-Laplace* zur Bestimmung von z ermittelt werden kann. Hierbei wird das *Konfidenzintervall* zu den Annahmen ausgerechnet und hieraus ergibt sich das *Konfidenzintervall* für die *Ereigniswahrscheinlichkeit* p: $[p_{min}; p_{max}] = \left[\frac{\mu - a\sigma}{n}; \frac{\mu + a\sigma}{n}\right]$

Die meisten *Verteilungen* lassen sich näherungsweise als *Normalverteilung approximieren* und sogar ganz beschreiben. Um den Bereich zu bestimmen, in dem diese Beschreibung möglich ist, kann das *Wahrscheinlichkeitsnetz* genutzt werden. So wird die jeweilige *Verteilung kumulativ* betrachtet und die *aufsummierte relative Häufigkeit* auf die *Ordinate* aufgetragen, während die gemessenen *Werte* auf der *Abszisse* so aufgetragen werden, dass diese in *Standardabweichungen* umgerechnet werden. Wenn diese *Wertepaare* in dem *Wahrscheinlichkeitsnetz* eine *Gerade* ergeben, kann die *Normalverteilung* als *Approximation* angenommen werden. Eine weitere Überprüfungsmöglichkeit ist der *Chi-Quadrat-Test* (χ^2), der in einem eigenen Abschnitt vorgestellt wird.



9.7.1 Übungsaufgaben zu Gauß-Verteilungen

Aufgabe 1: *Eine Normalverteilung ist durch den Erwartungswert* $\mu = 56,7$ *und einer Standardabweichung* $\sigma = 5,3$ *definiert. Berechne den rechtsseitigen* α*-Fehler, wenn der Verwerfungsbereich bei* $61,8$ *beginnt.*

Aufgabe 2: *Eine Normalverteilung ist durch den Erwartungswert* $\mu = 670$ *und einer Standardabweichung* $\sigma = 45$ *definiert. Bestimme die* 90%*-igen Konfidenzintervallsgrenzen.*

Aufgabe 3: *Bestimme durch einen linksseitigen Test den Fehler erster Art einer Normalverteilung, die durch die Standardabweichung* $\sigma = 28$ *und dem Erwartungswert* $\mu = 145$ *beschrieben wird. Der Annahmebereich beginnt bei* 112.

Aufgabe 4: *Zwei Normalverteilungen mit* $\mu_0 = 78$ *und* $\mu_1 = 84$ *sowie* $\sigma_0 = \sigma_1 = 5,7$ *werden betrachtet. Berechne den Fehler 1. und 2. Art für das Annahmeintervall* $[68,2; 93,4]$ *und gib an welche Hypothese wahrscheinlicher ist.*

Aufgabe 5: *Bestimme das* 85%*-ige Konfidenzintervall für eine hypergeometrische Verteilung, welche durch die Werte* $n = 175$, $N = 2500$ *und* $M = 1400$ *beschrieben wird.*

Aufgabe 6: *Bestimme das* 60%*-ige Konfidenzintervall einer Binomialverteilung, welche durch* $p = 0,\bar{2}$ *und* $n = 750$ *beschrieben wird.*

Aufgabe 7: *Eine Normalverteilung ist durch den Erwartungswert* $\mu = 4450$ *und einer Standardabweichung* $\sigma = 158$ *definiert. Bestimme die* 93%*-igen Konfidenzintervallsgrenzen (*93% *aller Ereignisse sollen in diesem Intervall liegen).*

Aufgabe 8: *Zwei Normalverteilungen mit* $\mu_0 = 1644$ *und* $\mu_1 = 1765$ *sowie* $\sigma_0 = 136$ *und* $\sigma_1 = 141$ *werden betrachtet. Berechne den Fehler 1. und 2. Art für das Annahmeintervall* $[1582; 1844]$ *und gib an welche Hypothese wahrscheinlicher ist.*

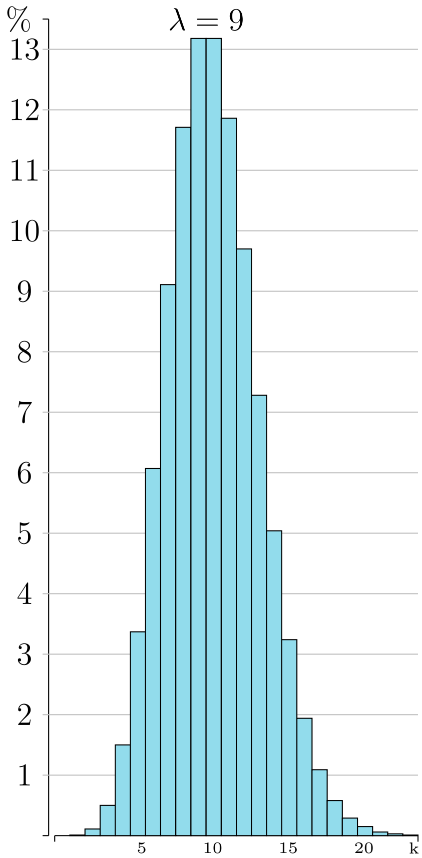
Aufgabe 9: *Bei einem Test wurden* 380 *Treffer nach* 2000 *Versuchen erzielt. Bestimme ein* 95%*-iges Konfidenzintervall für Trefferwahrscheinlichkeit.*

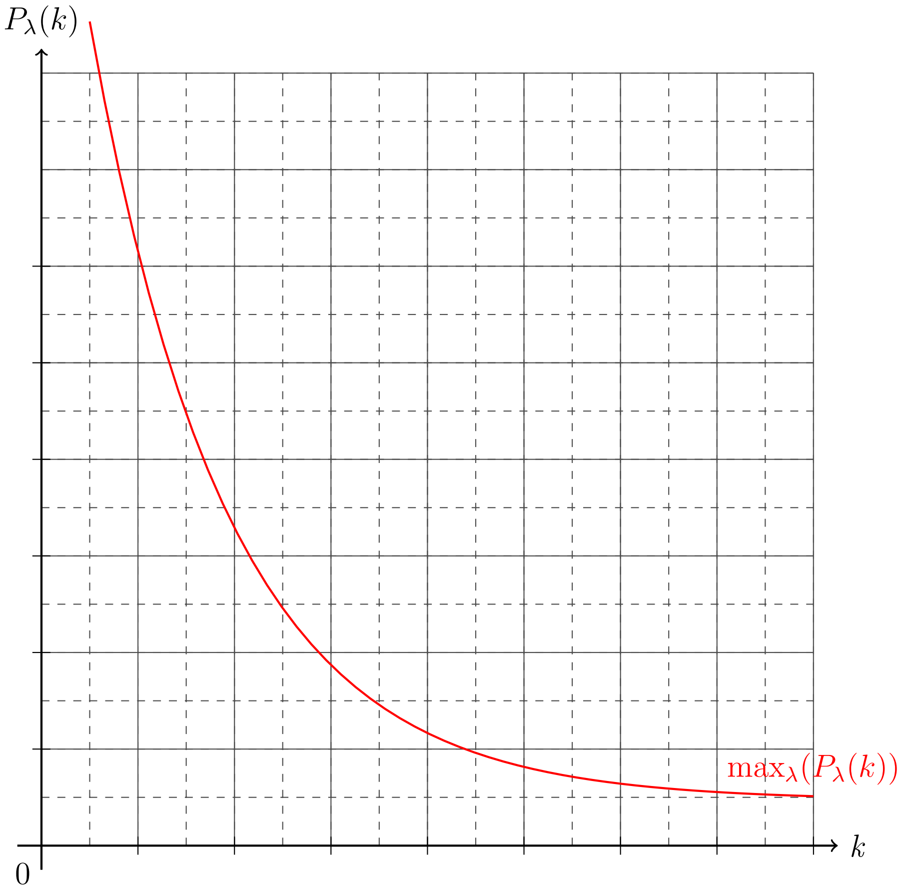
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.77) Lösungen zu Gauß-Verteilungen.

9.8 Weitere Verteilungen

Poissonverteilung
Wahrscheinlichkeitsdichte

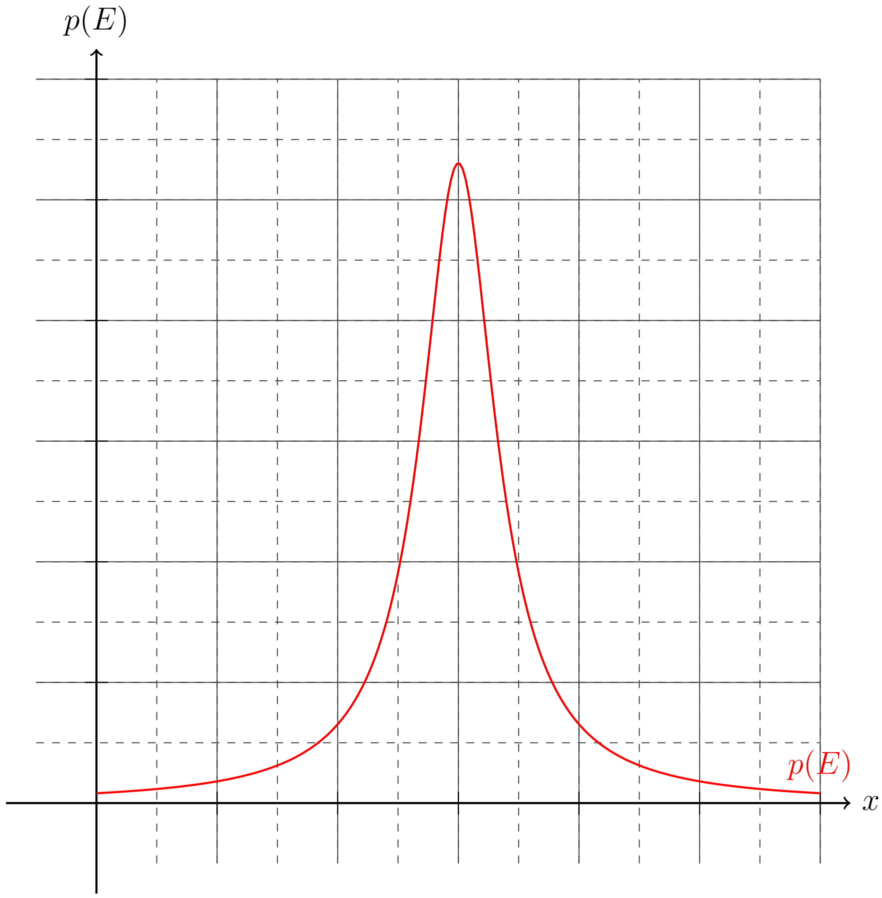
$$\begin{aligned} P_\lambda(k) &= \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \\ \Rightarrow \quad E(x) &= \lambda \\ \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(x) &= \lambda \\ \Rightarrow \quad \sigma &= \sqrt{\lambda} \end{aligned} \tag{9.40}$$





Cauchyverteilung (Breit-Wigner)
Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(E) = \frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma}{(E-M)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \tag{9.41}$$



Lévy-Verteilung Gamma-Verteilung Chi-Quadrat-Verteilung

9.8.1 Übungsaufgaben zu Verteilungen

Aufgabe 1: .

$a)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.78) Lösungen zu Permutationen.

10 Vektoren

Ein *Vektor* ist eine Abkürzung um, die beim Übergang von zweidimensionalen zu dreidimensionalen *Koordinatensystemen* sich erhöhende Informationsmenge pro *Punkt*, in einer allgemeinen Schreibweise zu untersuchen. Da später noch mehr *Dimensionen* hinzu kommen können und da der *Koordinatenursprung* beliebig ist, lohnt es sich eine Abkürzung einzuführen.
Ein *Vektor* ist eine Richtungsangabe mit einer bestimmten *Länge*,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad , \tag{10.1}$$

wobei die Schreibweise $\vec{x}$ signalisiert, dass die Größe x eine *Richtung* hat und somit eine *vektorielle* Größe ist. Sie beschreibt dabei den *Punkt* X und somit dem *Abstand* zum *Koordinatenursprung* O.

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} \tag{10.2}$$

Somit wird aus dem Punkt $P(1|2|3)$ der Vektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Diese Größe hat im Beispiel der Gleichung (10.1) drei *Dimensionen*, was durch die drei *Parameter* a, b und c in den Klammern zu erkennen ist. Dabei zeigt der *Vektor* a-Schritte in die ersten *Dimension* (nach einer Konvention wird diese oft x genannt), b-Schritte in die zweite *Dimension* (nach einer Konvention wird diese oft y genannt) und c-Schritte in die dritte *Dimension* (nach einer Konvention wird diese oft z genannt). Neben der oben beschriebenen Schreibweise, existiert noch eine weitere, welche je nach Aufgabenart ebenso häufig verwendet wird:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z \\ &= a\hat{e}_x + b\hat{e}_y + c\hat{e}_z \\ &= a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \quad , \end{aligned} \tag{10.3}$$

Dabei ist zu sehen, dass die Bezeichnung $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ und $\hat{e}_3$ eingeführt wurde, denn diese Schreibweise lässt sich problemlos um weitere Dimensionen erweitern. Dabei ist der sogenannte *Einheitsvektor* $\hat{e}_1$ wie folgt zu verstehen:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hat{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{10.4}$$

Die Gleichung (10.3) zeigt auch schon wie die *Addition* und die *Subtraktion* von *Vektoren* zu verstehen ist:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \\ &= \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad , \\ \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \tag{10.5}$$

wobei die jeweiligen *Dimensionen aufaddiert* werden. Somit wird von nun an zwischen *Skalaren* und *Vektoren* unterschieden. Dabei sind die Rechenarten, welche in den Kapiteln zuvor vorgestellt wurden, für *Skalare* gültig. In den folgenden Abschnitten werden mehr Rechenregeln für die *Vektoren* vorgestellt.

Ein *Skalar*, welcher mit ein einem *Vektor multipliziert* wird, wirkt dabei auf jede *Dimension*:

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix} \quad , \tag{10.6}$$

Dabei ist die *vektorielle* Schreibweise wie ein *Gleichungssystem* zu verstehen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = a + \lambda p \\ y = b + \lambda q \\ z = c + \lambda r \end{cases} \tag{10.7}$$

Es zeigt sich, dass *Vektoren* durch andere *Vektoren* dargestellt werden können. Solche zusammengesetzten *Vektoren* bilden sogenannte *Linearkombinationen* aus eine beliebige Anzahl von *Vektoren*:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + ... = \sum_{k=1}^{n} a_k \vec{v}_k \quad . \tag{10.8}$$

Dazu ein Beispiel zur Verdeutlichung:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad . \tag{10.9}$$

Da man in einigen weiterführenden Büchern anderen Schreibweisen von *Vektoren* begegnen und es deswegen oftmals zu Verwirrungen kommen kann, sind die verschiedenen Schreibweisen hier aufgeführt. In diesem Buch wird die am weitesten verbreitete Schreibweise mit dem Pfeil verwendet.

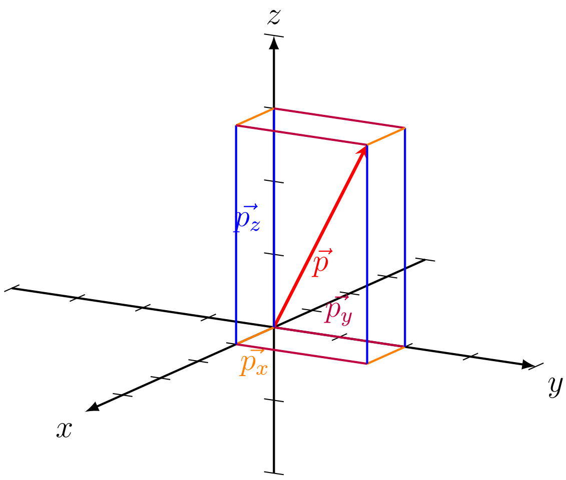
$$\begin{aligned} \vec{a} &= \boldsymbol{a} \\ &= \underline{a} \\ &= \mathfrak{a} \end{aligned} \tag{10.10}$$

Im folgenden werden mehr Eigenschaften der Vektoren vorgestellt.

Kollineare Vektoren sind *Vektoren*, die entweder *parallel* oder *antiparallel* sind, was mit dem *Skalarprodukt* überprüft werden kann.

Komplanare Vektoren liegen in einer *Ebene*. Dies kann überprüft werden, indem getestet wird, ob die *Vektoren* eine *Linearkombination* bilden.

Der *Vektor* $\overrightarrow{AB}$ der die *Strecke* zwischen zwei *Punkten* A und B beschreibt, ist die *Differenz* zwischen den Vektoren, die die *Punkte* beschreiben: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
Wird ein Vektor in einem dreidimensionalen Koordinatensystem eingezeichnet, sind die Anfangs- und Endkoordinaten nicht direkt intuitiv zu erkennen. Um einen Um einen Punkt auszulesen lohnt es bei bestimmten Abszissen-, Ordinaten- und Applikatenwerten parallele Geraden zu einer Achse zu zeichnen, wenn ein Quader zwischen Anfangs- und Endpunkt entsteht, können die x-, y- und z-Komponenten ausgelesen werden.



10.0.2 Übungsaufgaben zur Vektoraddition

Aufgabe 1: *Berechne den resultierenden Vektor.*

$a)\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} =$ $\qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$c)\ \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} =$ $\qquad d)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} =$

$e)\ 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\qquad f)\ 2\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} =$

$g)\ 6\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$ $\qquad h)\ 8\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$i)\ 1,2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 4,5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$ $\qquad j)\ 0,25\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1,4\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$k)\ \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$ $\qquad l)\ \frac{5}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$

Aufgabe 2: *Berechne den resultierenden Vektor.*

$a)\ (3\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 4\hat{e}_3) + (2\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3) =$

$b)\ (4\hat{e}_1 - 7\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) + (3\hat{e}_1 - \hat{e}_2 - 7\hat{e}_3) =$

$c)\ 7\,(-6\hat{e}_1 + 1\hat{e}_2 - 4\hat{e}_3) + 4\,(-2\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 + 5\hat{e}_3) =$

$d)\ 2\,(7\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + 7\hat{e}_3) - 3\,(5\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) =$

$e)\ 3,2\,(-2\hat{e}_1 + 4\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3) + 1,5\,(-5\hat{e}_1 + 6\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3) =$

$f)\ 6,1\,(\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3) + 0,7\,(3\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 - 4\hat{e}_3) =$

$g)\ \frac{1}{2}\,(8\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 + 1\hat{e}_3) + \frac{7}{3}\,(4\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - 8\hat{e}_3) =$

$h)\ \frac{5}{4}\,(2\hat{e}_1 - 7\hat{e}_2 - 5\hat{e}_3) - \frac{5}{7}\,(9\hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 + \hat{e}_3) =$

$i)\ \frac{6}{5}\,(-5\hat{e}_1 - 3\hat{e}_2 + 5\hat{e}_3) - \frac{1}{6}\,(-3\hat{e}_1 + 6\hat{e}_2 - 2\hat{e}_3) =$

$j)\ \frac{8}{9}\,(3\hat{e}_1 + 2\hat{e}_2 - 3\hat{e}_3) + \frac{7}{10}\,(-2\hat{e}_1 - 9\hat{e}_2 + 3\hat{e}_3) =$

Aufgabe 3: *Berechne den resultierenden Vektor.*

$$a)\quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$b)\quad \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} =$$

$$c)\quad 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$d)\quad 6\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$e)\quad 1,2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 4,5\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0,25\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 1,4\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$f)\quad \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{7}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 4: *Bestimme die skalaren Parameter.*

$$a)\quad \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$b)\quad \begin{pmatrix} 6 \\ 52 \\ -39 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$c)\quad \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -33 \\ -125 \\ 139 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$d)\quad \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -15 \\ -4 \\ 56 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$e)\quad \frac{1}{77}\begin{pmatrix} -780 \\ 840 \\ -267 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f)\quad \frac{1}{221}\begin{pmatrix} 518 \\ -236 \\ -576 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: *Bestimme die skalaren Parameter.*

a) $$\begin{pmatrix} -15 \\ 23 \\ 27 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 54 \\ -28 \\ -13 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $$\frac{1}{24} \begin{pmatrix} 60 \\ 137 \\ -21 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d) $$\frac{1}{30} \begin{pmatrix} -1141 \\ 7 \\ 122 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

e) $$\frac{1}{126} \begin{pmatrix} 1930 \\ 1555 \\ -1517 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

f) $$\frac{1}{7163} \begin{pmatrix} 53992 \\ -66714 \\ 35362 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: *Überprüfe, ob die angegebenen Vektoren Linearkombinationen der anderen Vektoren sind und bestimme gegebenenfalls die skalaren Parameter.*

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 13 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\frac{1}{20} \begin{pmatrix} 100 \\ 25 \\ 36 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) $\frac{1}{35} \begin{pmatrix} 83 \\ 114 \\ 67 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

h) $\frac{1}{36} \begin{pmatrix} 489 \\ -347 \\ -524 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

i) $\frac{1}{88} \begin{pmatrix} -467 \\ 322 \\ 736 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$

j) $\frac{1}{247} \begin{pmatrix} 1901 \\ -2404 \\ 826 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

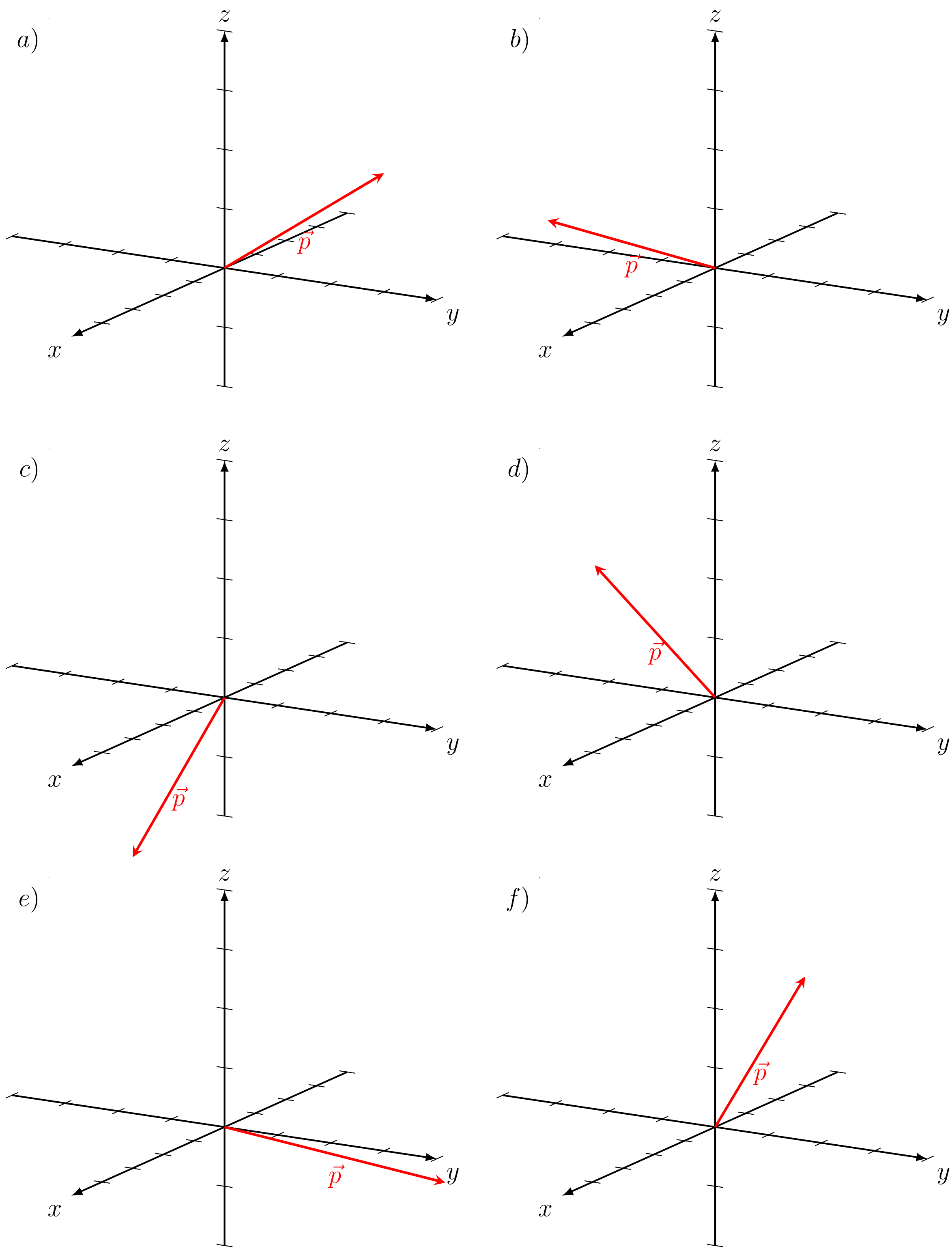
k) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 49 \\ 98 \\ -84 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

l) $\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 2 \\ 69 \\ 117 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 320 \\ 656 \\ -872 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

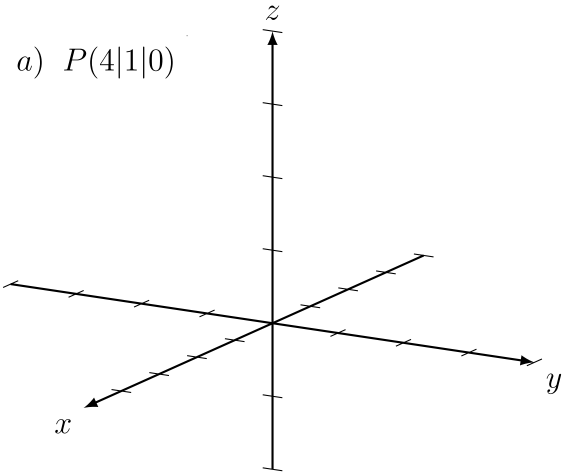
n) $\begin{pmatrix} 140 \\ -86 \\ 171 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7: *Bestimme die Koordinaten des Punktes P.*

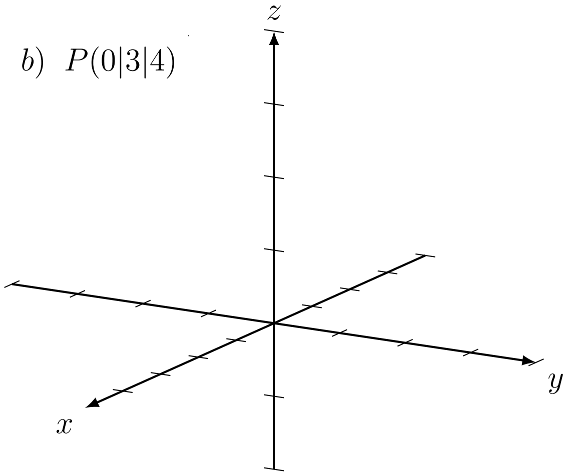


Aufgabe 8: *Zeichne den Vektor $\overrightarrow{OP}$ in die gegebenen Koordinatensysteme ein.*

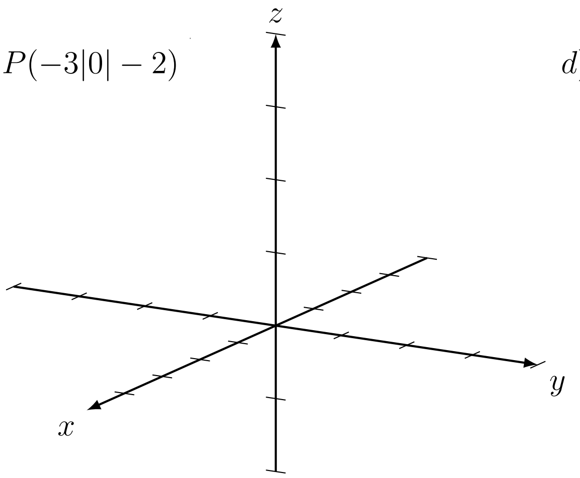
a) $P(4|1|0)$



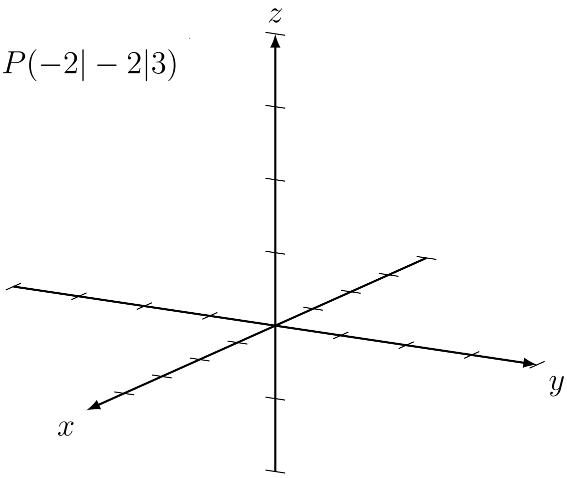
b) $P(0|3|4)$



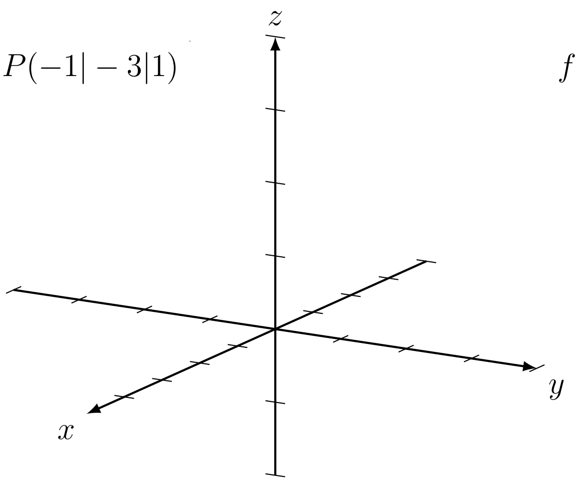
c) $P(-3|0|-2)$



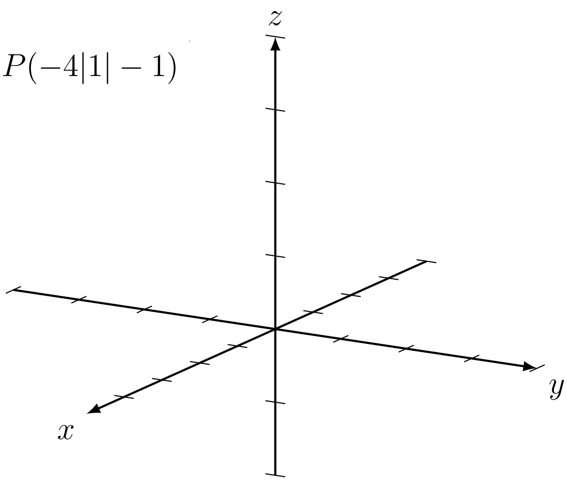
d) $P(-2|-2|3)$



e) $P(-1|-3|1)$



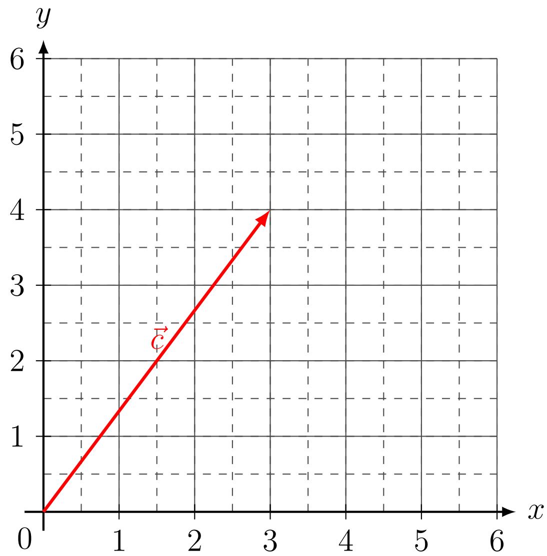
f) $P(-4|1|-1)$



Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.79) Lösungen zu Vektoraddition.

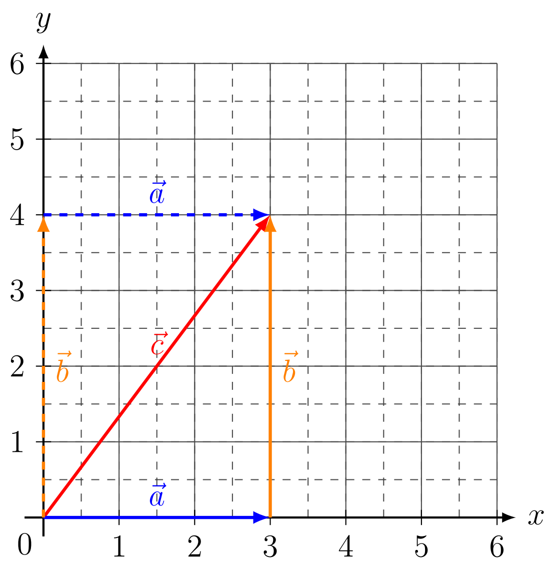
10.1 Länge von Vektoren

Wie bereits beschrieben sind *Vektoren* Richtungsangaben in mehrdimensionalen *Räumen*. Um die Eigenschaften eines *Vektors* zu veranschaulichen, wird ein zweidimensionales *Koordinatensystem* mit den *Dimensionen* x und y verwendet. Zunächst soll ein *Vektor* veranschaulicht werden:



Dabei wurde der *Vektor* $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dargestellt. Durch die andere Schreibweise, wird die *Addition* nochmal verdeutlicht und anschließend veranschaulicht:

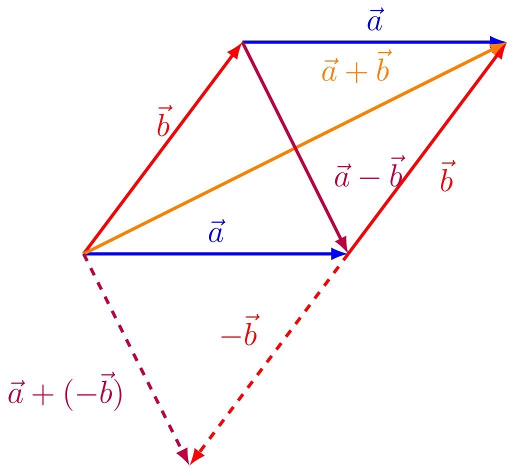
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{10.11}$$



Dabei ist schon zu erkennen, dass die *Vektoraddition kommutativ* ist.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{10.12}$$

Die *Subtraktion* von *Vektoren* kann verstanden werden, indem die Richtung des *Vektors invertiert* und anschließend eine *Addition* durchgeführt wird. Da jeder *Vektor* auch eine Richtung besitzt und dies bei der *Subtraktion* oftmals für Verwirrungen sorgen kann, wird die *Addition* und *Subtraktion* nochmals an einem *Parallelogramm* verdeutlicht.



Die *Länge* des *Vektors* kann über die *euklidische Norm* (auch *Vektornorm*) $\|\vec{a}\|_V = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ bestimmt werden, welche der Betragsschreibweise $|x| = \sqrt{x^2}$ ähnelt.

$$\begin{aligned} d = \left|\vec{d}\right| &= \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{3\hat{e}_1 \cdot 3\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 \cdot 0\hat{e}_2} \\ &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned} \tag{10.13}$$

Wie zu sehen ist die Berechnung der *Vektorlänge* vergleichbar mit dem *Satz des Pythagoras* zu vergleichen, so ergibt sich für drei *Dimensionen*

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad . \tag{10.14}$$

Lediglich muss beachtet werden, dass $\hat{e}_n \cdot \hat{e}_n = 1$ ist und dass die jeweiligen Einträge der *Vektoren* mit sich selbst, wie in Gleichung (10.13) gezeigt, *multipliziert aufaddiert* werden.

$$\begin{aligned} \vec{r} &= a\hat{e}_1 + b\hat{e}_2 + c\hat{e}_3 \\ \Rightarrow |\vec{r}| &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad . \end{aligned} \tag{10.15}$$

Die *Einheitsvektoren* $\hat{e}$ werden auch *normierte Vektoren* genannt, da ihre *Länge* genau 1 beträgt. Sie lassen sich wie folgt berechnen:

$$\hat{e}_r = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r} \quad . \tag{10.16}$$

10.1.1 Übungsaufgaben zur Vektornorm

Aufgabe 1: *Bestimme die Länge der Vektoren.*

$a)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $b)\ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $c)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ $d)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$e)\ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $f)\ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $g)\ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $h)\ \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$i)\ \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ $j)\ \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ $k)\ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ $l)\ \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$m)\ \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $n)\ \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 13 \end{pmatrix}$ $o)\ \begin{pmatrix} -6 \\ -17 \\ 23 \end{pmatrix}$ $p)\ \begin{pmatrix} -83 \\ 41 \\ 79 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: *Normiere die Vektoren.*

$a)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b)\ \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ $c)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ $d)\ \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e)\ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$ $f)\ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $g)\ \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $h)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$i)\ \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ $j)\ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $k)\ \begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 8 \end{pmatrix}$ $l)\ \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

$m)\ \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $n)\ \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}$ $o)\ \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $p)\ \begin{pmatrix} -37 \\ 7 \\ -43 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: *Normiere die Vektoren.*

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 9 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ -5 \\ 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \\ -3 \\ 9 \\ -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 9 \\ -7 \\ 5 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: *Normiere die Vektoren und beschreibe den Zusammenhang.*

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: *Normiere die resultierenden Vektoren.*

$a)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $c)\ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d)\ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $e)\ \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ $f)\ \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

$g)\ \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 13 \end{pmatrix}$ $h)\ \begin{pmatrix} -6 \\ -17 \\ 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -83 \\ 41 \\ 79 \end{pmatrix}$ $i)\ \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

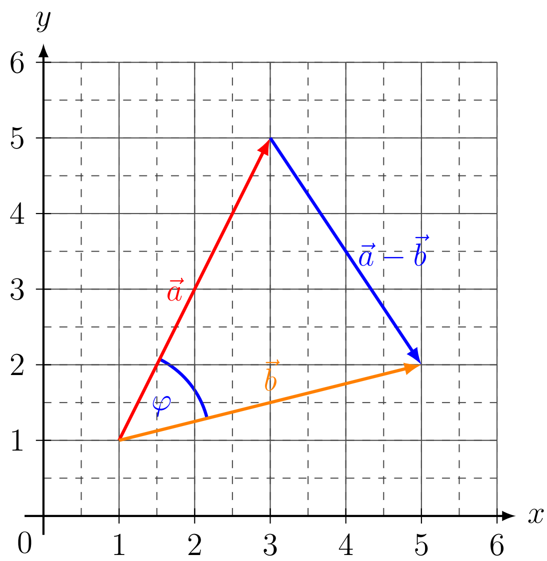
$j)\ 2\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$ $k)\ \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$ $l)\ \frac{3}{4}\begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{5}{6}\begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix}$

$m)\ \frac{2}{7}\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{8}{9}\begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $n)\ \frac{4}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{7}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $o)\ \frac{7}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{5}{4}\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.80) Lösungen zu Vektornorm.

10.2 Skalarprodukt

Wie schon bei der *Addition* von *Vektoren* aus Gleichung (10.5) werden die jeweiligen Einträge der *Vektoren* miteinander verrechnet. Dabei kommt es beim *Produkt* von zwei *Vektoren* zu einer Besonderheit, denn dieses bildet ein *Skalar*, sodass alle *vektoriellen* Eigenschaften verloren gehen. Aus diesem Grund wird dieses *Produkt* auch *Skalarprodukt* genannt. Der Grund für die Bildung des *Skalars* wurde im vorhergehenden Abschnitt über die *Länge* eines *Vektors* schon erwähnt und soll im Folgenden weiter untersucht werden. Hierbei wird der *Winkel* zwischen den Vektoren $\measuredangle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \varphi$ eine Rolle spielen, da der *Winkel* zwischen den *Einheitsvektoren* im *kartesischen Koordinatensystem* $\hat{e}_n$ stets 90° beträgt, was wiederum nicht für die *Winkel* zwischen *Vektoren* gelten muss.
Um das Skalarprodukt herzuleiten werden zwei beliebige linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ betrachtet. Mit diesen Vektoren kann durch die Subtraktion ein weiter Vektor gewonnen werden, sodass ein Dreieck aufgespannt wird.



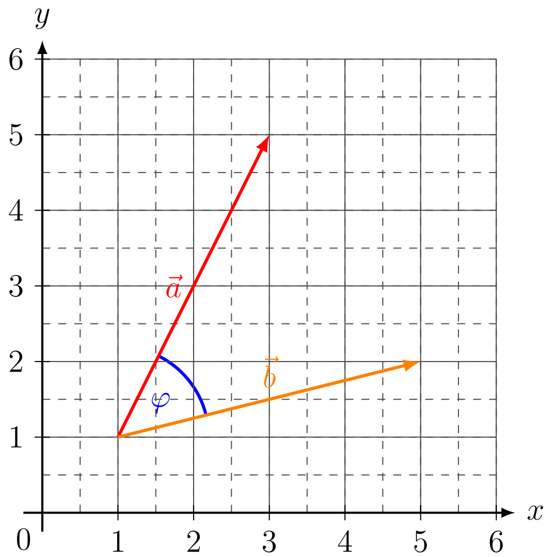
Durch das aufgespannte Dreieck kann mit dem Kosinussatz der Winkel φ bestimmt werden. Hierzu werden die Beträge der Vektoren benötigt:

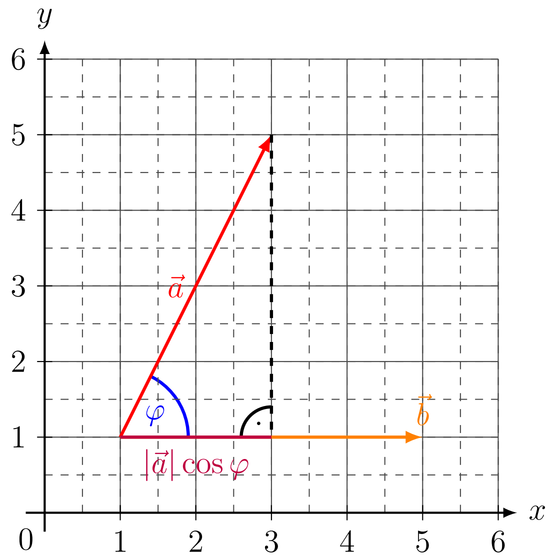
$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ \left|\vec{b}\right| &= \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \\ \left|\vec{a}-\vec{b}\right| &= \sqrt{\left(a_x - b_x\right)^2 + \left(a_y - b_y\right)^2 + \left(a_z - b_z\right)^2} \end{aligned} \tag{10.17}$$

Diese Ausdrücke werden nun in den Kosinussatz eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 &= |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\,|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi \\
(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2+(a_z-b_z)^2 &= a_x^2+a_y^2+a_z^2+b_x^2+b_y^2+b_z^2-2\,|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi \\
a_x^2+a_y^2+a_z^2+b_x^2+b_y^2+b_z^2-2a_xb_x-2a_yb_y-2a_zb_z &= a_x^2+a_y^2+a_z^2+b_x^2+b_y^2+b_z^2-2\,|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi \\
-2a_xb_x-2a_yb_y-2a_zb_z &= -2\,|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi \\
a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z &= |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi \\
\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi
\end{aligned}
\tag{10.18}
$$

Die letzte Zeile der Gleichung (10.18) wird deutlich, wenn es zu einer graphischen Veranschaulichung und somit zur geometrischen Interpretation kommt:





In der linken Veranschaulichung ist die Ausgangssituation zu sehen, während in der rechten Darstellung unter der Verwendung von *trigonometrischen* Beziehungen deutlich wird, dass das *Skalarprodukt* ein *rechtwinkliges Dreieck* erzeugt - es wird von einer *orthogonalen Projektion* gesprochen. Dabei fallen insbesondere drei Spezialfälle auf:

$$
\begin{aligned}
&\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos 90^\circ = 0 \quad \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \\
&\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos 0^\circ = |a||b| \quad \Rightarrow \vec{a}||\vec{b} \\
&\vec{a}\cdot\vec{b} = |a||b|\cos 180^\circ = -|a||b| \quad \Rightarrow \vec{a}||\vec{b}\ ,
\end{aligned}
\tag{10.19}
$$

wobei durch die *Orthogonalität* der ersten Zeile die *axiomatische* Rechnung aus dem vorherigen Abschnitt $\hat{e}_n\cdot\hat{e}_n = 0$ (für *kartesische Koordinatensysteme*) untermauert werden kann. Im zweiten und dritten Spezialfall kann eine *Parallelität* festgestellt werden, wobei im zweiten Fall die Richtungen der *Vektoren* übereinstimmen, während im dritten Fall die Richtungen der *Vektoren* entgegengesetzt zu einander sind. Im dritten Fall wird davon gesprochen, dass die

Vektoren antiparallel zu einander sind.

Das *Skalarprodukt* zwischen drei *Vektoren* hängt von der Reihenfolge ab, was wiederum bedeutet, dass das *Skalarprodukt* zwischen *Vektoren* nicht *assoziativ* ist. Das *Skalarprodukt* ist allerdings *kommutativ*.

$$\begin{gathered} \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \neq \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \end{gathered} \tag{10.20}$$

Da in anderen weiterführenden Mathematikbüchern andere Schreibweisen des *Skalarproduktes* vorgefunden werden können, werden diese hier kurz vorgestellt.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \circ \vec{b} \quad \text{sehr unüblich} \\ &= \vec{a} \bullet \vec{b} \quad \text{selten} \\ &= \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle \quad \text{sehr häufig} \end{aligned} \tag{10.21}$$

Die letztere Schreibweise ist die am häufigsten verwendete in der höheren Mathematik, allerdings soll in diesem Buch, wie auch in der Schule, die Verbindung zur *Multiplikation* aufrecht erhalten werden, sodass die bereits eingeführte Schreibweise beibehalten wird. Anders als bei der *Multiplikation* von *Skalaren* kann bei der *Vektorrechnung* der *Skalarproduktoperator* $\cdot$ nicht weggelassen werden.

10.2.1 Übungsaufgaben zum Skalarprodukt

Aufgabe 1: *Berechne das Skalarprodukt.*

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ *i)* $\begin{pmatrix} -11 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ *k)* $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ *l)* $\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ *n)* $\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$ *o)* $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ -15 \\ -3 \end{pmatrix}$ *q)* $\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *r)* $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ -19 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: *Berechne das Ergebnis.*

$a)\ \left[\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-8\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\-8\end{pmatrix}$ $\qquad b)\ \begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-6\\-7\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}\right]$

$c)\ \left[\begin{pmatrix}-3\\9\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\9\\0\end{pmatrix}$ $\qquad d)\ \begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}3\\9\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}\right]$

$e)\ \left[\begin{pmatrix}-4\\-5\\-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\11\end{pmatrix}$ $\qquad f)\ \begin{pmatrix}6\\9\\-3\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-2\\16\\9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}\right]$

$g)\ \left[\begin{pmatrix}5\\7\\21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}7\\0\\-3\end{pmatrix}$ $\qquad h)\ \begin{pmatrix}5\\-7\\-9\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\-2\\1\end{pmatrix}\right]$

$i)\ \left[\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-7\\-3\\-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}6\\8\\3\end{pmatrix}$ $\qquad j)\ \begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}-4\\6\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\-3\end{pmatrix}\right]$

Aufgabe 3: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \right]$

d) $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$

e) $\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

f) $\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right]$

g) $\left[\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \right]$

i) $\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right]$

j) $\left[\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

k) $\left[\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

l) $\left[\begin{pmatrix} -17 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$

Aufgabe 4: *Bestimme den Winkel zwischen den Vektoren.*

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ *b)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ *f)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *h)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ *j)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

k) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}$ *l)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: *Bestimme einen orthonormalen (orthogonal und normiert) Vektor zum gegebenen Vektor.*

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$ *d)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *f)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ *g)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ *h)* $\vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ -13 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: *Bestimme einen orthonormalen Vektor zu den beiden gegebenen Vektoren ist.*

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

g) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ h) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

i) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ j) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

k) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix}$ l) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 17 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.81) Lösungen zum Skalarprodukt.

10.3 Matrizen

In diesem Abschnitt sollen die Grundlagen für den Umgang mit *Matrizen* gelegt werden, dabei wird nicht explizit auf alle einzelnen Eigenschaften von *Matrizen* eingegangen. In späteren Abschnitten werden noch weitere Eigenschaften vorgestellt, welche für weitere Rechnungen benötigt werden. Für mehr Informationen wird empfohlen weiterführende Literatur aufzusuchen.

Matrizen bilden die Basis der *linearen Algebra*. Sie haben die Form von Zahlen in einer Tabelle, welche mit einer Klammer umschlossen sind. Dabei sind die *Matrizen* nach der Anzahl der Zeilen und Spalten $M_{m\times n}$ definiert.

$$M_{2\times2}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\quad,\qquad M_{3\times3}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\quad,\qquad M_{2\times3}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \tag{10.22}$$

In der Regel wird *Index* nicht mitgeschrieben, da sich die Zeilen und Spalten im Kontext ergeben oder ihre Anzahl in Texten zuvor erwähnt wurde. Um die Eigenschaften der Matrizen zu untersuchen, wird zunächst die sogenannte *Einheitsmatrix* $\mathbb{1}$ betrachtet, welche nur auf ihrer diagonalen *Einträge* besitzt. Mit einer $n\times n$-*Einheitsmatrix* $\mathbb{1}_{n\times n}$ kann jede $n\times n$-*Matrix* multipliziert werden, ohne dass sich der Wert der $m\times n$-*Matrix* verändert.

$$\begin{gathered}\mathbb{1}_{2\times2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad,\qquad \mathbb{1}_{3\times3}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbb{1}_{n\times n}\cdot M_{n\times n}=M_{n\times n}\cdot\mathbb{1}_{n\times n}=M_{n\times n}\end{gathered} \tag{10.23}$$

Matrizen können mit *Skalaren* λ *multipliziert* werden, wobei jeder Eintrag mit dem *skalaren Faktor multipliziert* wird.

$$\begin{aligned}\lambda M_{2\times3}&=\lambda\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \\ &=\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{10.24}$$

In einer *Matrix* kann jeder *Eintrag* einen stark von den anderen *Einträgen* abweichenden Namen erhalten, jedoch empfiehlt es sich die *Einträge* einer *Matrix* nach Zeilen- und Spaltennummer im *Index* zu beschriften, sodass auch komplexere Rechnungen übersichtlicher bleiben:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{10.25}$$

Matrizen können nur miteinander *addiert* werden, wenn sie die gleiche Spalten- und Zeilenanzahl besitzen. Dabei werden die jeweiligen *Einträge* miteinander *addiert*:

$$\begin{aligned} M_{2\times 3} + N_{2\times 3} &= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h & k & l \\ m & n & o \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+h & b+k & c+l \\ d+m & e+n & f+o \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.26}$$

10.3.1 Determinante und Spur

Die *Spur* einer Matrix A kann gebildet werden, indem alle *Diagonaleinträge* aufsummiert werden. Die Spur kann weitere Informationen einer *Matrix* offenlegen.

$$\mathrm{spur}(A) = \mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{10.27}$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft von *Matrizen* ist die *Determinante*, welche wie folgt für 2×2-Matrizen definiert ist:

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{10.28}$$

Für *Matrizen* mit mehr *Einträgen*, kann die Gleichung (10.28) ausgenutzt werden. So kann die *Determinante* bei einer 3×3-*Matrix* bestimmt werden, indem die 3×3-*Determinante* auf insgesamt drei 2×2-*Determinanten* reduziert wird. Dazu wird als erstes eine Zeile oder Spalte gewählt. Aus diese Zeile beziehungsweise Spalte wird der erste *Eintrag* betrachtet und die von ihm ausgehende Zeile und Spalte gestrichen, sodass eine 2×2-*Matrix* übrig bleibt. Die *Determinante* dieser *Matrix* wird mit dem betrachteten *Eintrag multipliziert*. Anschließende wird dies Prozedere mit den weiteren *Einträgen* der ausgesuchten Zeile beziehungsweise Spalte durchgeführt und *Terme* dann anschließend *alternierend aufsummiert*:

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \det \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \quad . \end{aligned} \tag{10.29}$$

Das gezeigte Verfahren, der *Laplace-Entwicklungssatz*, kann bei beliebigen $n \times n$-*Matrizen* angewendet werden.
Aber auch andere Verfahren erlauben es die Determinante zu bestimmen. So besagt die *Regel*

von Sarrus, dass die *Produkte* der *Einträge* der von oben links nach unten rechts gehenden Diagonalen *aufaddiert* werden und anschließend die *Produkte* der *Einträge* der von oben rechts nach unten links gehenden Diagonalen *subtrahiert* werden.

$$\begin{aligned}\det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}\end{aligned} \tag{10.30}$$

Zur Hilfe bei der Berechnung kann die *Matrix* nach unten oder nach rechts erweitert werden:

$$\det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \end{vmatrix} . \tag{10.31}$$

10.3.2 Matrixmultiplikation

Wenn *Matrizen* mit anderen *Matrizen multipliziert* werden, ist die jeweilige Anzahl von Spalten und Zeilen der Matrizen von Bedeutung. Bei einer *Multiplitkation* von *Matrizen* ist die *Zeilenanzahl* der ersten *Matrix* gleich der Zeilenanzahl der *Ergebnismatrix* sowie die Spaltenanzahl der zweiten *Matrix* gleich der Spaltenanzahl der *Ergebnismatrix*.

$$A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = C_{m\times n} \tag{10.32}$$

Zur Veranschaulichung der Matrixmultiplikation dienen die nächsten drei Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} \tag{10.33}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} \tag{10.34}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bw+cy & av+bx+cz \\ du+ew+fy & dv+ex+fz \end{pmatrix} \tag{10.35}$$

Somit gilt:

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad . \tag{10.36}$$

10.3.3 Transponierte Matrix

Wenn die Nicht-*Diagonaleinträge* einer *Matrix* an der *Diagonale* wie beim *Spiegeln* vertauscht werden, dann wurde die *Matrix transponiert*.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tag{10.37}$$

Dabei werden auch die Anzahl der Zeilen und Spalten vertauscht.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \tag{10.38}$$

Die *Transponierung* ^{T} hat folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= A^T + B^T \\ (\lambda A)^T &= \lambda A^T \\ (A^T)^T &= A \\ (A \cdot B)^T &= B^T \cdot A^T \\ (A+B)^T &= A^T + B^T \\ \operatorname{tr}(A^T) &= \operatorname{tr}(A) \\ \det(A^T) &= \det(A) \end{aligned} \tag{10.39}$$

Unter Berücksichtigung der *Matrixmultiplikation* wird eine weitere Eigenschaft des *Skalarproduktes* deutlich, denn die *Vektoren* können auch als *Matrizen* geschrieben werden, sodass sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \\ &= ad + be + cf \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e & f \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad & ae & af \\ bd & be & bf \\ cd & ce & cf \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.40}$$

Somit kommt es oftmals zu Verwirrungen, wenn das *Skalarprodukt* das selbe *Operatorenaussehen* besitzt wie die *Matrixmultiplikation*. Aus diesem Grund wird in vielen weiterführenden Büchern für das *Skalarprodukt* die Schreibweise $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ verwendet.

10.3.4 Inverse Matrix

Zu jeder *Matrix* A^1 existierte auch eine *inverse Matrix* A^{-1}, sodass die *Multiplikation* dieser beiden sich zu $\mathbb{1}$ ergeben:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1} \quad . \tag{10.41}$$

Die Bestimmung einer *inversen Matrix* kann über verschiedene Wege geschehen und wird mit dem zunehmenden Wissen stets leichter. So ergeben sich unter anderem durch die Einführung von „Komplexen Zahlen“ weitere Optionen. Hier soll ein Verfahren vorgestellt werden, welches durch die Kenntnisse, die in diesem Buch bereits vorgestellt wurden, verwendet werden kann. Dazu wird eine Beispiel *Matrix* M angenommen, welche *invertiert* werden soll:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad . \tag{10.42}$$

Unter der Verwendung der Gleichung (10.41) und der Benennung jeder einzelner Komponenten der *inversen Matrix* M^{-1}, können mehrere *Gleichungen* aufgestellt werden. Diese *Gleichungen* müssen mit der *Äquivalenzumformung* nach den *Unbekannten* aufgelöst werden, sodass M^{-1} vollständig bestimmt werden kann:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+4b & 2c+4d \\ 5a+7b & 5c+7d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow I.\ 2a+4b &= 1 \\ II.\ 2c+4d &= 0 \\ III.\ 5a+7b &= 0 \\ IV.\ 5c+7d &= 1 \quad . \end{aligned} \tag{10.43}$$

Die *Invertierung* von *Matrizen* genügt des Weiteren folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\left(A^{-1}\right)^{-1} &= A \\
(A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1} \\
(\lambda A)^{-1} &= \lambda^{-1} A^{-1} \\
(A^{-1})^T &= (A^T)^{-1} \\
\det\left(A^{-1}\right) &= (\det A)^{-1} \quad .
\end{aligned} \tag{10.44}$$

10.3.5 Charakteristisches Polynom

$$\det\left(A - \lambda \mathbb{1}\right) = 0 \tag{10.45}$$

10.3.6 Übungsaufgaben zu Matrizen

Aufgabe 1: *Transponiere die Matrizen.*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ -2 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & -11 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 8 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -5 & -7 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 5 \\ -6 & 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 2 & 9 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & -6 & 8 & 9 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 8 \\ -9 & 6 & 5 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & -8 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 8 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 4 & 8 & -9 \\ 0 & 7 & 0 & -4 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -6 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 0 & -7 & 5 & -4 & 8 \\ 3 & -8 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -6 & 2 & 5 & -9 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & -2 & 6 & 1 & -1 & 6 \\ 8 & 4 & -6 & 3 & 3 & 0 & 8 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 & 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: *Bestimme die Spur der Matrizen A.*

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -9 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 & 7 & -1 \\ 7 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ 6 & -8 & 4 & 5 \\ -6 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & -7 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 1 \\ -5 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 6 & -4 & 7 \\ 9 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 1 & 9 \\ 3 & -4 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 8 & 3 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & -6 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & -6 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 8 & 8 \\ 9 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & -4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3: *Bestimme die Determinante der Matrizen A.*

a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 \\ -9 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 6 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 6 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \\ -3 & 8 & 4 & 5 \\ -6 & 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 8 & 4 \\ 6 & -9 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 & 1 \\ -5 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & -4 & 7 \\ 9 & 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 2 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 1 & 9 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & -6 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & -6 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 8 & 8 \\ 9 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 9 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & -8 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4: *Multipliziere die Matrizen aus.*

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} =$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} =$

e) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 5 & -8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$

f) $\begin{pmatrix} 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} =$

g) $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} =$

h) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 8 \end{pmatrix} =$

i) $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -5 \\ 6 & -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} =$

j) $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$

k) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & -8 & -1 \end{pmatrix} =$

l) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -4 & -2 & 7 \\ 9 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 7 & 6 & 0 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} =$

m) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 5 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} =$

n) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 6 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 2 & 8 & 2 \\ 7 & 6 & 7 \end{pmatrix} =$

o) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

p) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 7 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 8 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \\ 7 & -6 & -4 \end{pmatrix} =$

q) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ -3 & 3 & 5 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} =$

r) $\begin{pmatrix} -7 & 3 & -6 & 3 \\ 2 & -8 & 2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} =$

s) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 8 \\ -9 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} =$

t) $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix} =$

u) $\begin{pmatrix} -6 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 8 & 9 & 4 \\ 4 & -9 & 5 & -3 \\ 4 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} =$

v) $\begin{pmatrix} 6 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & 8 \\ -9 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 5 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} =$

w) $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \\ -2 & 9 & -5 & 3 \\ -1 & 5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 8 & 4 \\ 6 & 1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} =$

x) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -2 & -4 \\ -5 & 4 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & -9 & -11 \\ -1 & -5 & 3 & 9 \end{pmatrix} =$

Aufgabe 5: *Bestimme die inverse Matrix.*

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ *i)* $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ -9 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ *k)* $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *l)* $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 8 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 5 \\ -8 & 2 & 6 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ *n)* $\begin{pmatrix} 1 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ *o)* $\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \\ -7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -1 \\ 7 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *q)* $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 4 \\ 7 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$ *r)* $\begin{pmatrix} 7 & 6 & -9 \\ 0 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: *Bestimme die Eigenwerte der Matrix.*

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *i)* $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ *k)* $\begin{pmatrix} -3 & 5 & -2 \\ 3 & 7 & 6 \\ -4 & 0 & -10 \end{pmatrix}$ *l)* $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 9 & 8 & -4 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 9 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ *n)* $\begin{pmatrix} 8 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix}$ *o)* $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -9 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 9 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ *q)* $\begin{pmatrix} -5 & 9 & -1 \\ 6 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ *r)* $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \\ 9 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7: *Transponiere die Matrizen.* (Mit Musterlösung!)

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & 8 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: *Bestimme die Spur der Matrizen.* (Mit Musterlösung!)

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: *Bestimme die Determinanten der Matrizen.* (Mit Musterlösung!)

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: *Bestimme die Eigenwerte der Matrizen.* (Mit Musterlösung!)

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.82) Lösungen zu Matrizen.

10.4 Kreuzprodukt

Im in *vektoriellen Räumen geometrische* Eigenschaften von Körpern beschreiben zu können, wird oftmals eine *orthogonale Strecke* zu einer *Fläche* benötigt. Aus diesem Grund soll in diesem Abschnitt ein *Operator* gefunden werden, der einen *orthogonalen Vektor* zu einer *Ebene* bildet, welche durch zwei andere *Vektoren* aufgespannt wurde. Dies kann mathematisch in folgende Forderung übersetzt werden:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &\overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &\overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} \perp \vec{c} \end{aligned} \tag{10.46}$$

Mit dem ausgeschriebenen *Skalarprodukt* ergibt sich ein *Gleichungssystem* mit dem die einzelnen Komponenten des gesuchten *Vektors* $\vec{c}$ bestimmt werden können. Da sich die *Herleitungen* für die einzelnen Komponente ähneln wird hier die Rechnung für den zu erst wegfallenden *Index* 2 gezeigt.

$$\begin{array}{rrl} I. & a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0 & |\cdot(-b_2) \\ II. & b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0 & |\cdot a_2 \\ \hline I. & -b_2a_1c_1 - b_2a_2c_2 - b_2a_3c_3 = 0 & \\ II. & a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_2b_3c_3 = 0 & \\ \hline I.+II. & -b_2a_1c_1 - b_2a_3c_3 + a_2b_1c_1 + a_2b_3c_3 = 0 & |\text{ausklammern} \\ I.+II. & (a_2b_1 - a_1b_2)\,c_1 + (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_3 = 0 & |-(a_2b_1 - a_1b_2)\,c_1 \\ I.+II. & (a_2b_3 - a_3b_2)\,c_3 = (a_1b_2 - a_2b_1)\,c_1 & |:(a_2b_3 - a_3b_2)\,c_1 \\ I.+II. & \dfrac{c_3}{c_1} = \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_2b_3 - a_3b_2} & \end{array} \tag{10.47}$$

Durch Wiederholung dieser Rechnung für die anderen beiden *Indizes* ergibt sich eine *Gleichungen*, welche von nun an per *Definition* durch den *Operator* des *Kreuzproduktes* $\times$ beschreiben wird.

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} := \vec{a} \times \vec{b} \tag{10.48}$$

Auch ein Bezug zu einer *Determinante* kann hergestellt werden:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \det \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & x & a \\ \hat{e}_2 & y & b \\ \hat{e}_3 & z & c \end{vmatrix} \\ &= yc\hat{e}_1 + xc\hat{e}_2 + xb\hat{e}_3 - zb\hat{e}_1 - za\hat{e}_2 - ya\hat{e}_3 \\ &= \begin{pmatrix} yc - zb \\ za - xc \\ xb - ya \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{10.49}$$

Woraus sich die Rechenhilfe:

$$\begin{pmatrix} \cancel{2} \\ 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ \cancel{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{5} \\ 6 \\ 7 \\ 5 \\ 6 \\ \cancel{7} \end{pmatrix}$$

ergibt, wobei die Einträge der *Vektoren* zweimal untereinander geschrieben werden. Anschließend werden die ersten und letzten Einträge gestrichen, um dann die *Produkte* der roten Pfeile von den *Produkten* der grünen Pfeile zu im ersten, zweiten beziehungsweise dritten Eintrag zu *subtrahieren*.

Das *Kreuzprodukt* kann auch für den zwei *dimensionalen Raum* $\mathbb{R}^2$ oder *höherdimensionale Räume* $\mathbb{R}^n \; \forall \; 1 < n \in \mathbb{N}$ über die *Determinante* definiert werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \det \begin{vmatrix} x & a \\ y & b \end{vmatrix} = xb - ay \quad , \tag{10.50}$$

wobei im zwei *dimensionalen Raum* $\mathbb{R}^2$ kein zusätzlicher *orthogonaler Vektor* gefunden wird, sondern die *orthogonale Projektion* der *Länge* der *Höhe* des aufgespannten *Parallelogramms* betrachtet wird. In höher *dimensionalen Räumen* $\mathbb{R}^n \; \forall \; 2 < n \in \mathbb{N}$ werden hingegen immer $n-1$ *Vektoren* für die *Definition* benötigt, um einen *orthogonalen Vektor* zu diesen *Vektoren* zu bestimmen. Da eine *Determinante* nur von $m \times m$-*Matrizen* bestimmt werden kann, existiert kein *isomorpher* Ausdruck im *eindimensionalen Räumen* (kein mathematisch nahezu gleichwertiger Ausdruck).

Das *Kreuzprodukt* besitzt folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \lambda\vec{a} &= 0 \\ \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} \qquad \text{(antikommutativ)} \\ \lambda\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= \vec{a} \times \lambda\vec{b} = \lambda\vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{(homogen)} \\ \vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \qquad \text{(distributiv)} \end{aligned} \tag{10.51}$$

Des Weiteren gelten folgende Spezialfälle:

$$\begin{aligned} \vec{a} \perp \vec{b} &\Rightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = ab \\ \vec{a} || \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{b} &\Rightarrow \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} \\ \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \end{aligned} \tag{10.52}$$

Insbesondere werden folgende *Identitäten* besonders häufig verwendet:

- Jacobi-Identität:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0 \tag{10.53}$$

- *Graßmann-Identität*:

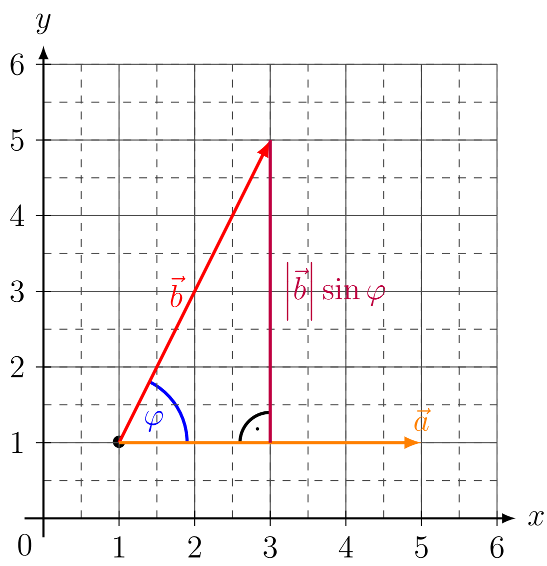
$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \tag{10.54}$$

- Lagrange-Identität:

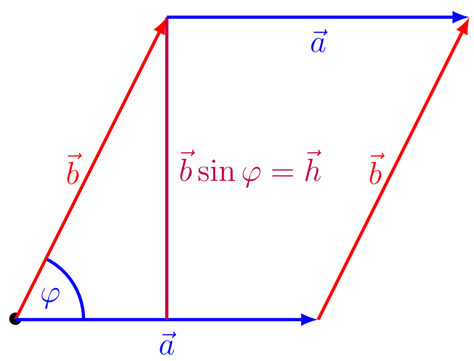
$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right) \tag{10.55}$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left(\vec{c} \times \vec{d}\right) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right) \quad \text{mit: } \vec{a} = \vec{c} \text{ und } \vec{b} = \vec{d} \\ \Rightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2 \quad \text{mit: } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \\ \Rightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\left(1 - \cos^2\varphi\right) \quad \text{mit: } 1 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\varphi \\ \Rightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| &= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \end{aligned} \tag{10.56}$$

Über die Rechnung zur *Lagrange-Identität* kann wie auch schon beim *Skalarprodukt* die Bedeutung des *Kreuzproduktes* anhand eines *Dreieckes* erläutert werden. Hierbei bildet der *Betrag* des *Kreuzproduktes* zwischen zwei *Vektoren* $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ die fehlende *Seite* eines *rechtwinkligen Dreieckes* $\left|\vec{b}\right| \sin\varphi$.



Somit zeigt sich, dass die Bedeutung des *Betrages* des *Kreuzproduktes* zwischen zwei *Vektoren* $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ identisch mit dem *Flächeninhalt* A eines *Parallelogramms* ist.



Hieraus ergibt sich zur Flächenberechnung folgende Gleichung:

$$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi \tag{10.57}$$

10.4.1 Übungsaufgaben zum Kreuzprodukt

Aufgabe 1: *Beweise die Graßmann-Identität über einen direkten Beweis.* (Mit Musterlösung!)

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$$

Aufgabe 2: *Beweise die Lagrange-Identität über einen direkten Beweis.* (Keine Lösung!)

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$$

Aufgabe 3: *Beweise die Jacobi-Identität über einen direkten Beweis.* (Keine Lösung!)

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$$

Aufgabe 4: *Berechne die Kreuzprodukte.*

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ *f)* $\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ *h)* $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ *i)* $\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ *k)* $\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$ *l)* $\begin{pmatrix} -14 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 17 \\ -9 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ *n)* $\begin{pmatrix} -11 \\ 21 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ *o)* $\begin{pmatrix} -19 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -13 \\ -23 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: *Berechne die Kreuzprodukte.*

a) $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\left[\begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$

d) $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

e) $\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$

f) $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

g) $\left[\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 19 \\ -21 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$

h) $\left[\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} 21 \\ 29 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 83 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right]$

i) $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]\right]$

j) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]\right]$

k) $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$

l) $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]\right]\right]$

m) $\left[\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}\right] \times \left\{\left[\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 13 \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}\right]\right\}$

Aufgabe 6: *Berechne das Ergebnis.*

a) $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\left[\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$

d) $\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}\right] - \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}\right]$

e) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

f) $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}\right]\right]$

g) $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]\right]$

h) $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}\right]\right]$

i) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \left[\left[\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right]$

j) $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\right]$

k) $\left[\begin{pmatrix} -13 \\ -17 \\ 29 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \times \left[\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$

l) $\left[\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\right] + \left\{\left[\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}\right]\right]\right\} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7: *Löse alle möglichen Klammern auf, benutze die Identitäten.*

a) $\left(\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}+\vec{c}\right)\right)\cdot\vec{d}$

b) $\left[\kappa\vec{a}\times\left(\vec{d}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{d}\right)+\nu\vec{d}-\vec{g}\right]\cdot\mu\vec{a}$

c) $\left(\vec{r}\times\left(\vec{s}\times\vec{t}\right)+\vec{t}\left(\vec{r}\cdot\vec{s}\right)\right)\cdot\vec{s}$

d) $\left[\vec{a}\times\left[\vec{b}+\vec{c}\times\vec{g}\right]+\vec{c}\times(\vec{g}\times\vec{a})-\vec{g}\times(\vec{c}\times\vec{a})\right]\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.83) Lösungen zum Kreuzprodukt.

10.5 Vektorielle Geraden

Wie schon im Kapitel „Geometrie“ werden auch in diesem Kapitel nach und nach immer komplexere geometrische Formen eingeführt. Hierbei wird in diesem Kapitel eine *vektorielle* Beschreibung und die damit verbundenen Eigenschaften vorgestellt.

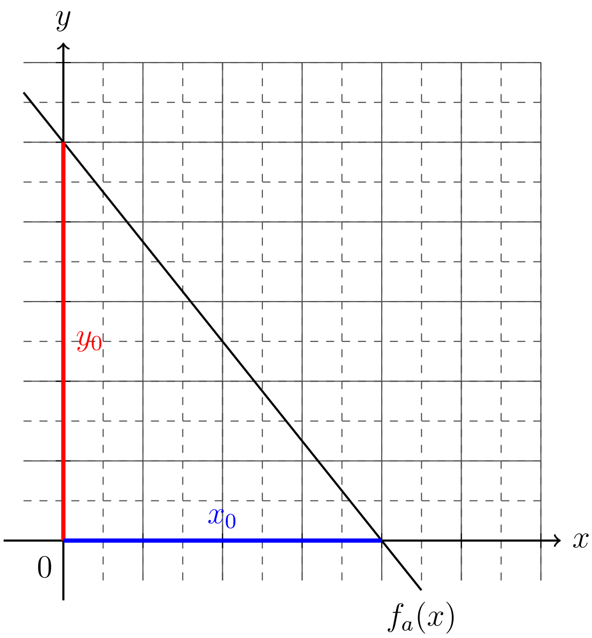
Die *vektorielle Gerade* erinnert in der Form der *Gleichung* an die *Geradenfunktionsgleichen*, sodass hier schon ersichtlich wird, dass das Anwendungsfeld von *Vektoren* noch wesentlich weitreichender sein wird.

$$\vec{f} = \vec{b} + \chi \vec{m} \tag{10.58}$$

Diese bekannte Form der *Gerade* wird *Parameterform* genannt. Allerdings gibt es noch weitere Darstellungen, so zum Beispiel die *Achsenabschnittsform*:

$$1 = \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} \quad , \tag{10.59}$$

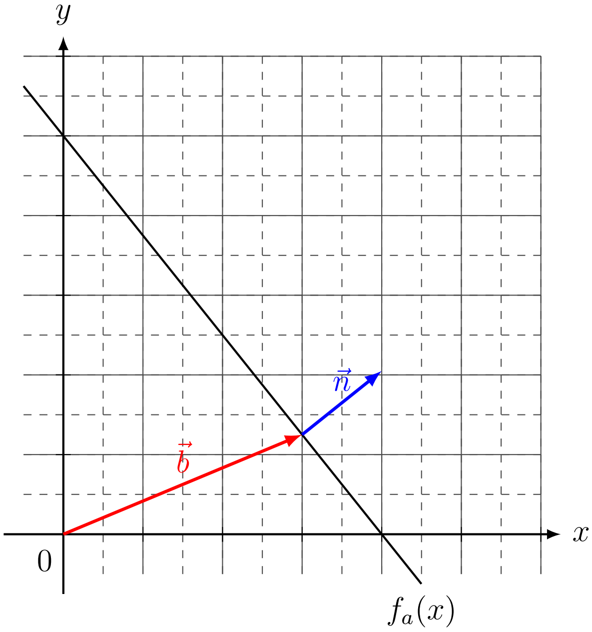
wobei die *Parameter* x_0, y_0 und z_0 Informationen über die *Achsenschnittwerte* beherbergen. Dies lässt sich leicht an einer graphischen *Darstellung* im zweidimensionalen *Raum* veranschaulichen:



Aber auch eine Form, welche über die *Orthogonalitätsbedingung* von *Vektoren* definiert ist, existiert. Diese wird *Normalform* genannt:

$$\left(\vec{f} - \vec{b}\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \vec{n} \quad . \tag{10.60}$$

Dabei bildet $\vec{b}$ einen *Vektor* vom *Koordinatenursprung* zur *Gerade*, während $\vec{n}$ ein *orthogonaler Vektor* zur *Gerade* ist.

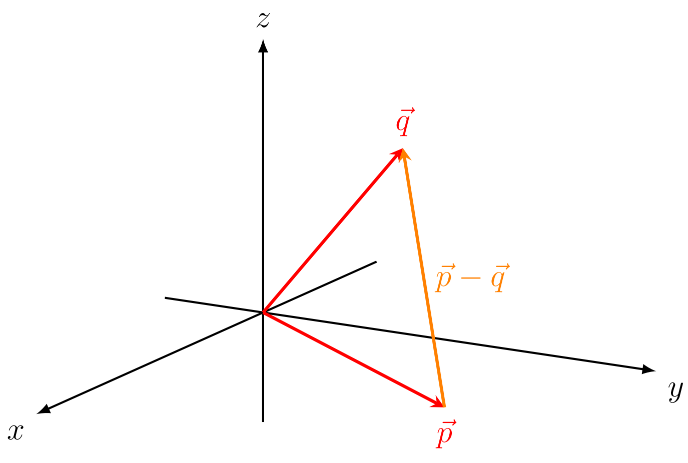


Durch die graphische Darstellung der *Normalform* wird deutlich, dass es einen Spezialfall gibt, welcher gegeben ist, wenn der *Vektor* $\vec{b}$ seine geringste *Länge* besitzt. Dadurch bildet dieser den *Abstand* zwischen *Gerade* und *Koordinatenursprung* d. Hieraus ergibt sich die *Hesse'sche Normalform*:

$$\left(\vec{f}-\vec{b}\right)\cdot\vec{n}_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{f}\cdot\vec{n}_0 = d \;\;, \tag{10.61}$$

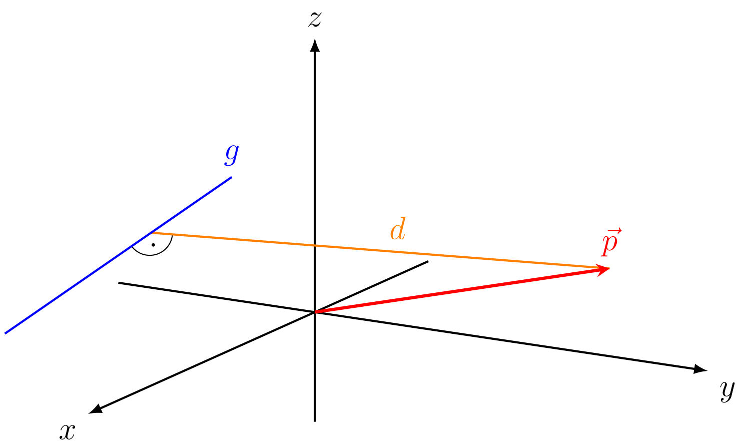
wobei $\vec{n}_0$ ein *orthogonaler* und *normierter* (*orthonormaler*) *Vektor* und d der *Abstand* der *Gerade* zum *Koordinatenursprung*.

Der *Abstand* zwischen zwei *Punkten*, welche durch *Vektoren* beschreiben werden, kann durch den *Betrag* der *Differenz* der *Vektoren* ermittelt werden:



$$d(P,Q) = |\vec{q} - \vec{p}| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2} \ . \tag{10.62}$$

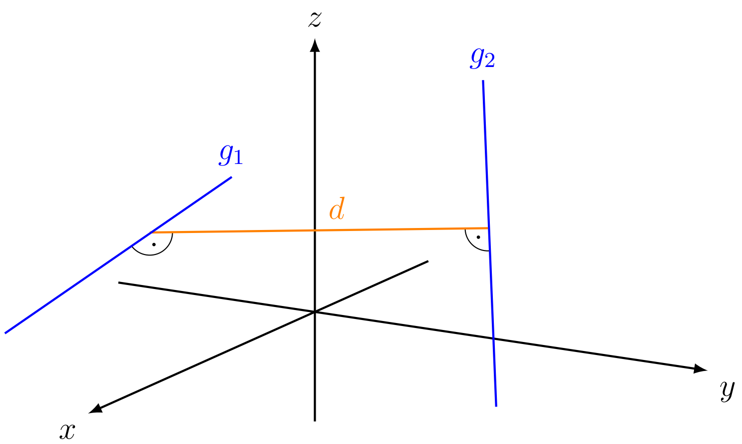
Um hingegen den *Abstand* zwischen einen *Punkt* und einer *Geraden* zu bestimmen, muss ein *orthogonaler Vektor* zur *Gerade* gefunden werden, der auf den *Punkt* zeigt. Dazu wird das *Kreuzprodukt* verwendet:



$$d(P,g) = \frac{\left|\vec{m} \times \left(\vec{p} - \vec{b}\right)\right|}{|\vec{m}|} \ , \tag{10.63}$$

wobei die *Differenz* $\left(\vec{p} - \vec{b}\right)$ die Information der *Abstandslänge* beinhaltet und die *Steigung* der *Geraden* $\vec{m}$ über das *Kreuzprodukt* die *Orthogonalität* erzwingt, aus diesem Grund wird auch die *normierte Steiung* verwendet $\frac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$.

Während bei den *Abstand* zwischen zwei *Geraden* ein *Vektor* gefunden werden muss, der zu beiden *Geraden orthogonal* ist:



$$d(g_1, g_2) = \frac{\left|(\vec{m_1} \times \vec{m_2}) \cdot \left(\vec{b_1} - \vec{b_2}\right)\right|}{|\vec{m_1} \times \vec{m_2}|} \quad . \tag{10.64}$$

Auch hier gibt die *Differenz* Aufschluss über die *Distanz* und das *Kreuzprodukt* über die *Orthogonalität*.

Wenn ein *Abstand* gefunden werden kann, dann sind die beiden *Geraden windschief* zueinander. Das bedeutet, dass sie keinen *Schnittpunkt* besitzen und auch nicht *parallel* zueinander sind. Falls die *Geraden* einen *Schnittpunkt* besitzen, ist der *Winkel* zwischen den *Geraden* oftmals interessant:

$$\varphi(g_1, g_2) = \arccos\left(\frac{\vec{m_1} \cdot \vec{m_2}}{|\vec{m_1}|\,|\vec{m_2}|}\right) \quad , \tag{10.65}$$

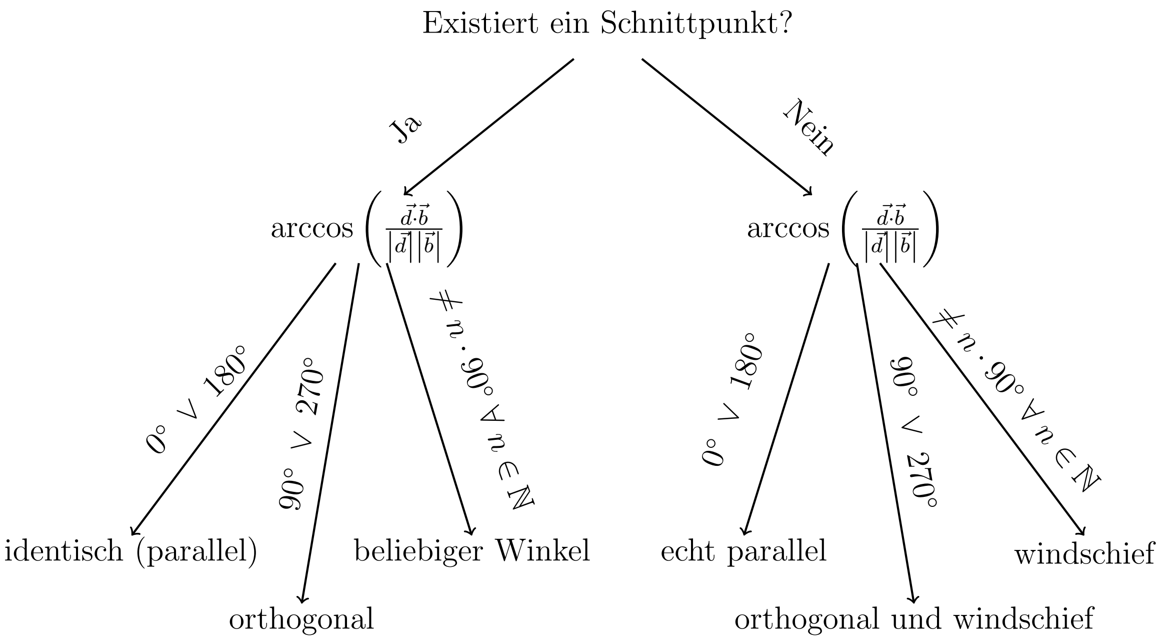
wobei durch das *Skalarprodukt* der *normierten Steigungen* $\vec{m_1}$ und $\vec{m_2}$ ein *rechtwinkliges Dreieck* aufgespannt wird, sodass über den *Kosinus der Winkel* bestimmt werden kann.
Der *Punkt* auf der *Geraden* (oder später auch *Ebene*), welcher als Ausgangspunkt für die *Abstandsberechnung* gilt, wird *Lotfußpunkt* genannt. Hierbei gilt für eine *Abstandsberechnung* zwischen einer *Geraden* und einem *Punkt* Q:

$$\vec{x}_0 = \vec{m}t_0 + \vec{q} \ , \qquad t_0 = \frac{(\vec{q} - \vec{b}) \cdot \vec{m}}{|\vec{m}|^2} \quad , \tag{10.66}$$

wobei $\vec{q} \cdot \vec{m}$ der *Abstand* zwischen dem *Punkt* der *Gerade* und $\vec{m}$ der *Normalenvektor* und gleichzeitig der *Richtungsvektor* zum *Punkt* hin ist. Dabei wurde der *Punkt* Q durch den *Vektor* $\vec{q}$ bestimmt und anschließend *normiert* in die Richtung der *Geraden* gegangen $\frac{(\vec{q}-\vec{b})\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|^2}$.

Um die *Lagebeziehung* zwischen zwei *Geraden* zu bestimmen kann ein Fallunterscheidungsbaum mithilfe des *Skalarprodukts* aufgestellt werden: Gegeben seien die *Geraden*:

$$\begin{aligned} g_1 &: \quad \vec{x} = \vec{a} + \mu\vec{b} \\ g_2 &: \quad \vec{x} = \vec{c} + \mu\vec{d} \end{aligned} \tag{10.67}$$


Existiert ein Schnittpunkt?
Ja
Nein
$\arccos\left(\frac{\vec{d}\cdot\vec{b}}{|\vec{d}||\vec{b}|}\right)$
$\arccos\left(\frac{\vec{d}\cdot\vec{b}}{|\vec{d}||\vec{b}|}\right)$
$0° \vee 180°$
$90° \vee 270°$
$\neq n \cdot 90° \forall n \in \mathbb{N}$
identisch (parallel)
orthogonal
beliebiger Winkel
$0° \vee 180°$
$90° \vee 270°$
$\neq n \cdot 90° \forall n \in \mathbb{N}$
echt parallel
orthogonal und windschief
windschief

10.5.1 Übungsaufgaben zu vektoriellen Geraden

Aufgabe 1: *Bestimme den Abstand zwischen den beiden Punkten.*

a) $P\,(3|0|5)\,,Q\,(2|-1|1)$

b) $P\,(5|3|2)\,,Q\,(4|7|-3)$

c) $P\,(2|-8|4)\,,Q\,(1|0|5)$

d) $P\,(6|5|4)\,,Q\,(-9|0|0)$

e) $P\,(-4|5|2)\,,Q\,(4|8|7)$

f) $P\,(1|0|8)\,,Q\,(1|3|7)$

g) $P\,(0|-7|-2)\,,Q\,(8|-5|2)$

h) $P\,(2|2|3)\,,Q\,(-2|4|3)$

i) $P\,(-5|-3|1)\,,Q\,(5|-7|0)$

j) $P\,(3|2|3)\,,Q\,(3|4|9)$

k) $P\,(5|7|-3)\,,Q\,(-4|8|-6)$

l) $P\,(-2|9|4)\,,Q\,(6|3|9)$

m) $P\,(1|5|-6)\,,Q\,(-1|-3|3)$

n) $P\,(6|-7|3)\,,Q\,(7|8|2)$

o) $P\,(-9|-5|2)\,,Q\,(2|11|-21)$

Aufgabe 2: *Bestimme den Abstand zwischen den Punkt und der Geraden.*

a) $P\,(2|0|5)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\1\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$

b) $P\,(4|3|0)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-8\\4\\0\end{pmatrix}$

c) $P\,(1|-2|5)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\7\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}$

d) $P\,(-8|3|7)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-6\\4\end{pmatrix}$

e) $P\,(3|-2|-4)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-8\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\4\\-4\end{pmatrix}$

f) $P\,(4|-6|3)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\8\\2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}$

g) $P\,(-4|7|-9)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-7\\3\\-9\end{pmatrix}$

h) $P\,(-3|4|2)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-4\\-7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-9\\8\end{pmatrix}$

i) $P\,(3|4|-9)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-8\\-8\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}0\\5\\-7\end{pmatrix}$

j) $P\,(-9|-7|3)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-5\\4\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}8\\-7\\7\end{pmatrix}$

k) $P\,(-5|4|6)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\7\\-8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-6\\2\\4\end{pmatrix}$

l) $P\,(-8|5|-4)\,,g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-9\\4\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}6\\11\\-17\end{pmatrix}$

Aufgabe 3: *Bestimme den Abstand zwischen den Geraden.*

$$a)\ \ g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \ g_1 : \vec{x} = -\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \ g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \ g_1 : \vec{x} = -\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \ g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$f)\ \ g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g)\ \ g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h)\ \ g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$i)\ \ g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$j)\ \ g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, g_2 : \vec{x} = -\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: *Bestimme, ob der angegebene Punkt auf der Geraden liegt.*

$$a)\;\; g:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(1|4|-7)$$

$$b)\;\; g:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(-3|-11|5)$$

$$c)\;\; g:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(5|3|0)$$

$$d)\;\; g:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(-13|6|19)$$

$$e)\;\; g:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(2|-10|-14)$$

$$f)\;\; g:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(-4|-1|-9)$$

Aufgabe 5: *Bestimme, ob die gegebenen Geraden einen Schnittpunkt besitzen und bestimme diesen gegebenenfalls.*

$$a)\ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$b)\ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\6\\16\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\3\\11\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$c)\ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\5\\1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$d)\ g_1:\ \vec{x}=-4\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=3\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

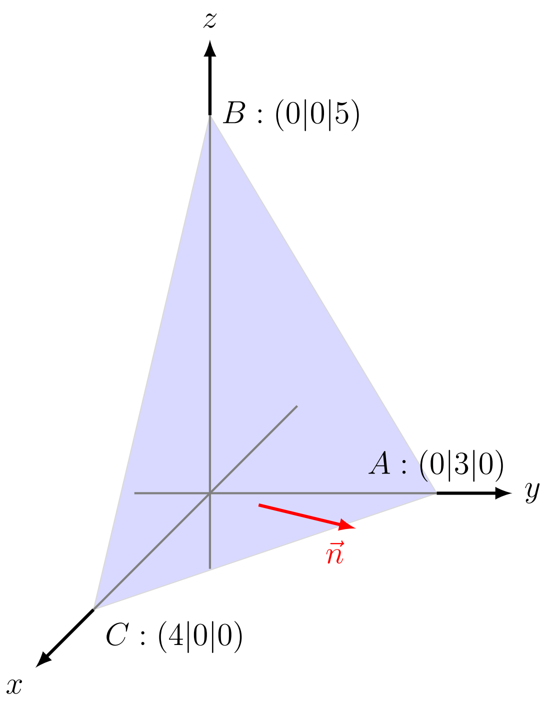
$$e)\ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-5\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\-6\\3\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-9\\8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$f)\ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}9\\-11\\19\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-2\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\4\\-5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: *Gegeben sei das Viereck definiert durch die Punkte $A(2|1|0)$, $B(10|3|8)$, $C(8|5|6)$ und $D(4|3|2)$. Gib zu allen möglichen Geraden eine Geradengleichung an. Bestimme welche dieser Geraden sich schneiden. Erläutere wie sich die Situation, was passieren würde, wenn sich bei einem der Punkte an einer Koordinate etwas verändern würde.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.84) Lösungen zu vektoriellen Geraden.

10.6 Vektorielle Ebenen



Wie schon die *Gerade* kann mit einer zusätzlichen Information eine *Ebene* im *Raum* aufgespannt werden. Dies sieht bei der *Parameterform* wie folgt aus:

$$\begin{aligned} E &: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\, \overrightarrow{AB} + \mu\, \overrightarrow{AC} \\ E &: \vec{x} = \vec{p} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v} \ . \end{aligned} \tag{10.68}$$

Allerdings können auch andere *Darstellungen* für die *Ebene* gewählt werden:
Es existieren die die *Koordiantenform*

$$\begin{aligned} E &: 3x + y = 2z \\ E &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + y = 2z\right\} \ , \end{aligned} \tag{10.69}$$

die *Achsenabschnittsform*

$$1 = \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} \ , \tag{10.70}$$

die *Normalform*

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n} \ , \tag{10.71}$$

sowie die *Hesse'sche Normalform*

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0 \Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{n}_0 = d \ . \tag{10.72}$$

Wie zwischen den jeweiligen *Darstellungsformen* gewechselt werden kann, wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.
Wie schon bei den *Geraden* können verschiedene Beziehungen zwischen *Ebenen* und anderen Objekten im *Raum* bestimmt werden.
So kann der *Abstand* zwischen einem *Punkt* und einer *Ebene* durch den *Normalvektor* $\vec{n}$ bestimmt werden, da dieser *orthogonal* auf der *Ebene* steht.

$$d(P,E) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p} - d|}{|\vec{n}|} \tag{10.73}$$

Nur wenn eine *Gerade parallel* zur *Ebene* verläuft, existiert kein *Schnittpunkt*. Um den *Schnittwinkel* zwischen der *Gerade* und *Ebene* zu bestimmen, kann ebenfalls über den *Normalen-* $\vec{n}$ der Ebene und den *Steigungsvektor* $\vec{m}$ der *Geraden* ermittelt werden.

$$\varphi(g, E) = 90^\circ - \arccos\left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}|\,|\vec{n}|}\right) \tag{10.74}$$

Ähnlich verhält sich dies bei dem *Schnittwinkel* der *Ebenen*.

$$\varphi(E_1, E_2) = \arccos\left(\frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|}\right) \tag{10.75}$$

Außerdem ist meistens die *Schnittgerade* zwischen den *Ebenen* oder der *Schnittpunkt* einer *Ebene* und einer *Gerade* für viele Probleme interessant. Bei einem *Schnittpunkt* zwischen einer *Ebene* und einer *Geraden* genügt die Gleichsetzung der *Geradengleichung* mit der *Ebenengleichung*. Das *Gleichungssystem* mit den *Parametern* muss anschließend für den *Geradenparameter* gelöst werden. Wenn dieser *Parameterwert* in die *Geradengleichung* eingesetzt wird, ergibt dies die *Schnittpunktkoordinaten*. Alternativ kann auch die *Geradengleichung* in die *Normalform* eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
g &: \vec{x} = \vec{b} + \rho\vec{m} \\
E &: d = \vec{n} \cdot \vec{x} \\
&\Rightarrow \quad d = \vec{n} \cdot \left(\vec{b} + \rho\vec{m}\right) \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{m}} \\
\Rightarrow \quad S &: \vec{x} = \vec{b} + \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{b}}{\vec{n} \cdot \vec{m}}\vec{m}
\end{aligned} \tag{10.76}$$

Um die *Schnittgeraden* zweier *Ebenen* zu bestimmen, existieren verschiedenste Wege. In diesem Buch wird empfohlen eine *Ebene* in *Parameterform* und eine in *Normalform* zu bringen. Aus der *Parameterform* entstehen drei *Gleichungen*, welche in die *Ebene* mit der *Normalform* eingesetzt werden kann. Anschließend kann nach einem der beiden *Parameter* aufgelöst werden. Die gefundene *Gleichung* für einen *Parameter* wird wieder in die *Ebene* in *Parameterform* eingesetzt und vereinfacht. Die resultierende *Gleichung* gibt die *Schnittgerade* an.

$$\begin{aligned}
&E_1 : \vec{x} = \vec{p} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v} \\
E_1 :& \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
&E_2 : d = \vec{n} \cdot \vec{x} \\
&E_2 : d = n_1(p_1 + \mu u_1 + \nu v_1) + n_2(p_2 + \mu u_2 + \nu v_2) + n_3(p_3 + \mu u_3 + \nu v_3) \\
\Rightarrow \quad & g : \vec{x} = \left(\vec{p} + \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{p}}{\vec{n} \cdot \vec{u}}\vec{u}\right) + \tau\left(\vec{v} + \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{v}}{\vec{n} \cdot \vec{u}}\vec{u}\right)
\end{aligned} \tag{10.77}$$

Der *Lotfußpunkt* einer Ebene bezüglich einer *Abstandsrechnung* zu einem *Punkt* verhält sich analog zu dem *Lotfußpunkt* einer *Gerade* bezüglich einer *Abstandsrechnung* zu einem *Punkt* Q,

$$\vec{x}_0 = \vec{n}t_0 + \vec{q} \ , \qquad t_0 = \frac{d - \vec{n} \cdot \vec{q}}{|\vec{n}|^2} \ , \tag{10.78}$$

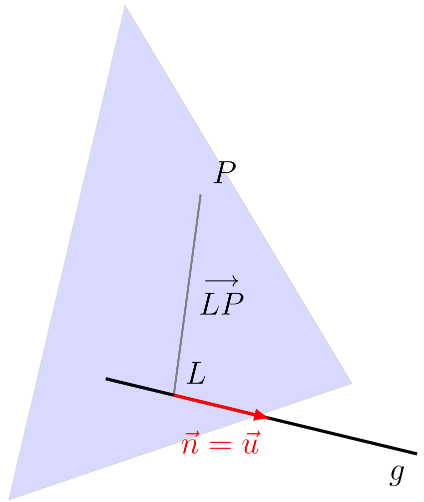
wobei $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$, $\vec{n}$ der *Normalenvektor* der *Ebene* und $\vec{p}$ der *Ortsvektor* zur *Ebene* ist.
Im weitesten Sinne wurde eine *Geradengleichung* aufgestellt, welche den *Normalenvektor* der *Ebene* als *Richtungsvektor* und den betrachteten *Punkt* als *Aufpunkt* besitzt. Anschließend wurde der *Schnittpunkt* dieser *Hilfsgerade* und der *Ebene* berechnet.

Soll der *Lotfußpunkt* F einer *Geraden* $g: \ \vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}$ zu einem *Punkt* P bestimmt werden, wird eine *Hilfsebene* H in *Normalenform* ausgenutzt. Somit ergibt sich folgende *Ebenengleichung*:

$$H: \ 0 = \left[\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right] \cdot \vec{u} \ , \tag{10.79}$$

Diese *Ebenengleichung* kann in die *Koordinatenform* gebracht und die *Geradengleichung* eingesetzt werden, sodass der *Schnittpunkt*, der den *Lotfußpunkt* darstellt, berechnet werden kann.

In der folgenden Abbildung ist zu erkennen, dass die Gerade orthogonal zur Hilfsebene stehen muss, sodass der Vektor zwischen dem Lotfußpunkt L und dem betrachteten Punkt P den Abstand zwischen diesen Punkten beschreibt.



Es wird auch deutlich, dass der Lotfußpunkt durch das Aufstellen der Hilfsebene in der Normalenform mit anschließendem Einsetzen der Geradengleichung in die Normalenform als Schnittpunkt zu bestimmen ist. Auch kann dieses Bild verwendet werden, um zu erkennen, dass über eine Hilfsgeraden mit dem Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor der Lotfußpunkt bezüglich einer Ebene bestimmt werden kann.

10.6.1 Übungsaufgaben zu vektoriellen Ebenen

Aufgabe 1: *Bestimme den Normalenvektor der Ebene.*

$$a)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$b)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$c)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\-7\\-8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}$$

$$d)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}6\\3\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$e)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\7\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-5\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-4\\-4\end{pmatrix}$$

$$f)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\-9\\-5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\-2\\8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-9\\11\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: *Bestimme den Abstand zwischen der Ebene und dem Koordinatenursprung.*

$$a)\ E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}=0 \qquad b)\ E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\5\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\7\end{pmatrix}=0$$

$$c)\ E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\-3\\8\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-8\end{pmatrix}=0 \qquad d)\ E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-7\\8\\-9\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\11\end{pmatrix}=0$$

$$e)\ E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-5\\0\\8\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-7\\-2\\5\end{pmatrix}=0 \qquad f)\ E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}6\\4\\-3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\7\\-17\end{pmatrix}=0$$

Aufgabe 3: *Bestimme den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt.*

$a)\ E: \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}=4 \text{ und } \vec{y}=\begin{pmatrix}-4\\-3\\3\end{pmatrix}$ $\qquad b)\ E: \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=3,4 \text{ und } \vec{y}=\begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}$

$c)\ E: \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}=\frac{8}{3} \text{ und } \vec{y}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ $\qquad d)\ E: \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-9\end{pmatrix}=\frac{23}{4} \text{ und } \vec{y}=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$

$e)\ E: \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}-12\\0\\5\end{pmatrix}=\sqrt{122} \text{ und } \vec{y}=\begin{pmatrix}7\\5\\8\end{pmatrix}$ $\qquad f)\ E: \vec{x}\cdot\begin{pmatrix}7\\-11\\-8\end{pmatrix}=\pi \text{ und } \vec{y}=\begin{pmatrix}-13\\1\\-7\end{pmatrix}$

Aufgabe 4: *Bestimme den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt beschrieben durch den Vektor $\vec{y}$.*

$$a)\ E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}=0 \quad \text{und} \quad \vec{y}=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$b)\ E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\8\\-5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\\-2\end{pmatrix}=0 \quad \text{und} \quad \vec{y}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$c)\ E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-2\\-7\\4\end{pmatrix}=0 \quad \text{und} \quad \vec{y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$d)\ E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\-7\\8\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}=0 \quad \text{und} \quad \vec{y}=\begin{pmatrix}3\\2\\7\end{pmatrix}$$

$$e)\ E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-11\\3\\8\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\8\\0\end{pmatrix}=0 \quad \text{und} \quad \vec{y}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-7\end{pmatrix}$$

$$f)\ E: \left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-9\\0\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}8\\-8\\7\end{pmatrix}=0 \quad \text{und} \quad \vec{y}=\begin{pmatrix}7\\-18\\4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: *Bestimme den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt beschrieben durch den Vektor $\vec{y}$.*

$$a)\ \ E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \ E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \ E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \ E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \ E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$f)\ \ E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6: *Bestimme, ob der angegebene Punkt auf der Ebene liegt.*

$$a)\;\; E:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(28|-30|-47)$$

$$b)\;\; E:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(3|15|-4)$$

$$c)\;\; E:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(9|-3|9)$$

$$d)\;\; E:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(1|5|-1)$$

$$e)\;\; E:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 24 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(5|8|9)$$

$$f)\;\; E:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P\,(0|3|0)$$

Aufgabe 7: *Bestimme, den Schnittpunkt zwischen der Geraden und der Ebene.*

$a)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$

$b)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\-6\\5\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$

$c)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-1\\-5\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-6\\3\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$

$d)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$

$e)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-1\\-4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-6\\1\\1\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-4\\7\\2\end{pmatrix}$

$f)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-8\\2\\-5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\3\\6\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\6\\1\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}5\\-2\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}9\\-3\\4\end{pmatrix}$

$g)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-4\\7\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\3\\-7\end{pmatrix}$

$h)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}12\\5\\-8\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-7\\4\\3\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}$

$i)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\-4\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-5\\7\\6\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\2\\-7\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}-4\\2\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}$

$j)\ g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\6\\-7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-5\\-5\\8\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-7\\-2\\9\end{pmatrix}+\sigma\begin{pmatrix}3\\-6\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}$

Aufgabe 8: *Prüfe, ob die Geraden eine Ebene aufspannen und gib gegebenenfalls eine Ebenengleichung an.*

$$a)\ \ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\8\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-6\\-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$b)\ \ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\6\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\1\\-3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$c)\ \ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$d)\ \ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\8\\9\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\-2\\-3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$e)\ \ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\9\\-19\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}9\\5\\10\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$f)\ \ g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-9\\2\\3\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}\quad\wedge\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-2\\-7\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: *Prüfe, ob die Gerade und der Punkt eine Ebene aufspannen und gib gegebenenfalls eine Ebenengleichung an.*

$$a)\;\; g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P(3|-5|5)$$

$$b)\;\; g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P(-2|7|-4)$$

$$c)\;\; g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P(-2|-2|1)$$

$$d)\;\; g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P(1|-6|-2)$$

$$e)\;\; g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P(1|4|3)$$

$$f)\;\; g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P(-5|6|-7)$$

Aufgabe 10: *Bestimme den Winkel zwischen der Geraden und Ebene.*

$$a)\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b)\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$c)\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$d)\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$e)\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f)\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11: *Bestimme die Schnittgerade der Ebenen.*

$$a)\ E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \ \wedge\ E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$b)\ E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \wedge\ E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \ \wedge\ E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$d)\ E_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \ \wedge\ E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 19 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12: *Bestimme die Schnittgerade der Ebenen.*

$$a)\ E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-9\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\3\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}\ \wedge\ E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\1\\-7\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\2\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\1\\-7\end{pmatrix}$$

$$b)\ E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\-4\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\ \wedge\ E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\-4\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\6\\1\end{pmatrix}$$

$$c)\ E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}9\\-2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-8\\-3\\7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-7\\5\\2\end{pmatrix}\ \wedge\ E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\7\\3\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-4\\7\end{pmatrix}$$

$$d)\ E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\2\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix}\ \wedge\ E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\1\\-6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}$$

$$e)\ E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\3\\-8\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}7\\0\\-8\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-6\\-7\\1\end{pmatrix}\ \wedge\ E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-4\\9\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\7\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\-6\\3\end{pmatrix}$$

$$f)\ E_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}4\\7\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-6\\5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}6\\7\\0\end{pmatrix}\ \wedge\ E_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-9\\-7\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0\\-8\\7\end{pmatrix}$$

Aufgabe 13: *Bestimme die Schnittschnittwinkel zwischen den Ebenen.*

$$a)\ E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$b)\ E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$c)\ E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$d)\ E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e)\ E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \wedge E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$f)\ E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} \wedge E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14: *Gegeben sei das Fünfeck definiert durch die Punkte* $A(1|2|3)$*,* $B(5|8|11)$*,* $C(3|12|17)$*,* $D(-1|6|9)$ *und* $E(-2|1|2)$*. Überprüfe, ob es zu einer der Seiten eine parallel Diagonale gibt. Untersuche, ob die Punkte alle in einer Ebene liegen.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.85) Lösungen zu vektoriellen Ebenen.

10.7 Wechsel von Darstellungsformen

In einem *Vektorraum* können *Objekte* auf verschiedene Arten dargestellt werden, wobei die *Parameterform* die geläufigste ist.

$$E:\ \vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \tag{10.80}$$

Bei einer *Ebene* gibt es zwei *Spannvektoren* $\vec{u}$ und $\vec{v}$, welche in der *Ebene* liegen und diese somit aufspannen. Der *Vektor* $\vec{p}$ wird *Ortsvektor* genannt und besitzt die Information, wie weit die *Ebene* vom *Koordinatenursprung* entfernt ist. Außerdem existieren noch der *Normalenvektor* $\vec{n}$ sowie der *Einheitsnormalenvektor* $\vec{n}_0$, welche beide *orthogonal* auf der *Ebene* stehen. Dies lässt folgende Beziehungen aufstellen:

$$\begin{aligned} &\vec{n}\perp\vec{u} \ \wedge\ \vec{n}\perp\vec{v} \\ \Rightarrow\quad &\vec{n}\cdot\vec{u} = 0 \ \wedge\ \vec{n}\cdot\vec{v} = 0\ , \\ \Rightarrow\quad &\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v}\ . \end{aligned} \tag{10.81}$$

Mit diesen Beziehungen kann schnell aus der *Parameterform* in die *Normalenform*

$$E:\ (\vec{x} - \vec{p})\cdot\vec{n} = 0 \tag{10.82}$$

oder die *Hesse'sche Normalenform*

$$E:\ (\vec{x} - \vec{p})\cdot\vec{n}_0 = 0 \tag{10.83}$$

gewechselt werden. Über die *Hesse'sche Normalenform* kann in weitere *Darstellungsformen* gewechselt werden. Dabei wird die Eigenschaft des *Einheitsnormalenvektor* $\vec{n}_0$ ausgenutzt, welcher bei der *Multiplikation* mit dem *Ortsvektor* $\vec{p}$ den kürzesten *Abstand* zur *Ebene* d ergibt.

$$(\vec{x} - \vec{p})\cdot\vec{n}_0 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{p}\cdot\vec{n}_0 = d \tag{10.84}$$

So kann durch die *Aufsummierung* der jeweiligen *Koordinatenprodukte* in die *Koordinatenform* gewechselt werden.

$$E:\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d \tag{10.85}$$

Bei der *Achsenabschnittsform* wird lediglich die rechte Seite der *Gleichung* auf 1 gebracht und der *Quotient* der *Parameter* umbenannt.

$$\begin{aligned} E &: \frac{n_1 x_1}{d} + \frac{n_2 x_2}{d} + \frac{n_3 x_3}{d} = 1 \\ E &: \frac{x_1}{\frac{d}{n_1}} + \frac{x_2}{\frac{d}{n_2}} + \frac{x_3}{\frac{d}{n_3}} = 1 \\ E &: \frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1 \end{aligned} \tag{10.86}$$

Dieser Wechsel zwischen den *Darstellungsformen* kann oftmals mathematische Probleme vereinfachen und genauso bei anderen Objekten, wie *Geraden*, im *Vektorraum* durchgeführt werden.

Um von einer *Normalform* zu einer *Parameterform* zu wechseln können die Eigenschaften aus der *Gleichung* (10.81) verwendet werden, so lassen sich bei leichten Zahlen, die *Spannvektoren* bis auf ein *Vorzeichen* genau bestimmen, welches mit den *skalaren Vorfaktoren* kompensiert werden kann. Ein Beispiel:

$$\begin{aligned} E : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{n} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ E : 0 &= \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{10.87}$$

In dem Beispiel wurde aus der *Parameterform* die *Normalform* bestimmt, nun soll der Prozess umgekehrt werden. Dazu wird die Eigenschaft aus *Gleichung* (10.81) ausgenutzt.

$$\begin{aligned} \vec{n} \perp \vec{v} \Rightarrow 0 = \vec{n} \cdot \vec{v} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ 0 &= -2v_1 - 2v_2 - v_3 \end{aligned} \tag{10.88}$$

Diese *Gleichung* kann nur erfüllt werden für: $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \mp 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$.

Bei Zahlen die nicht eindeutig erkennbar sind, kann eine andere Methode verwendet werden.

Dazu wird die *Normalform* in die *Koordinatenform* überführt und nach der x_3-Komponente aufgelöst.

$$
\begin{aligned}
E:\ 0 &= \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow E : 0 &= -2x_1 - 2x_2 - x_3 + 10 \\
x_3 &= -2x_1 - 2x_2 + 10
\end{aligned}
\tag{10.89}
$$

Nun wird die *Gleichung* umsortiert und anschließend die *Werte* $x_1 = \lambda$ und $x_2 = \mu$ umbenannt. Abschließend werden die Komponenten von $\vec{x}$ unter einander geschrieben und die *Spannvektoren* ausgelesen.

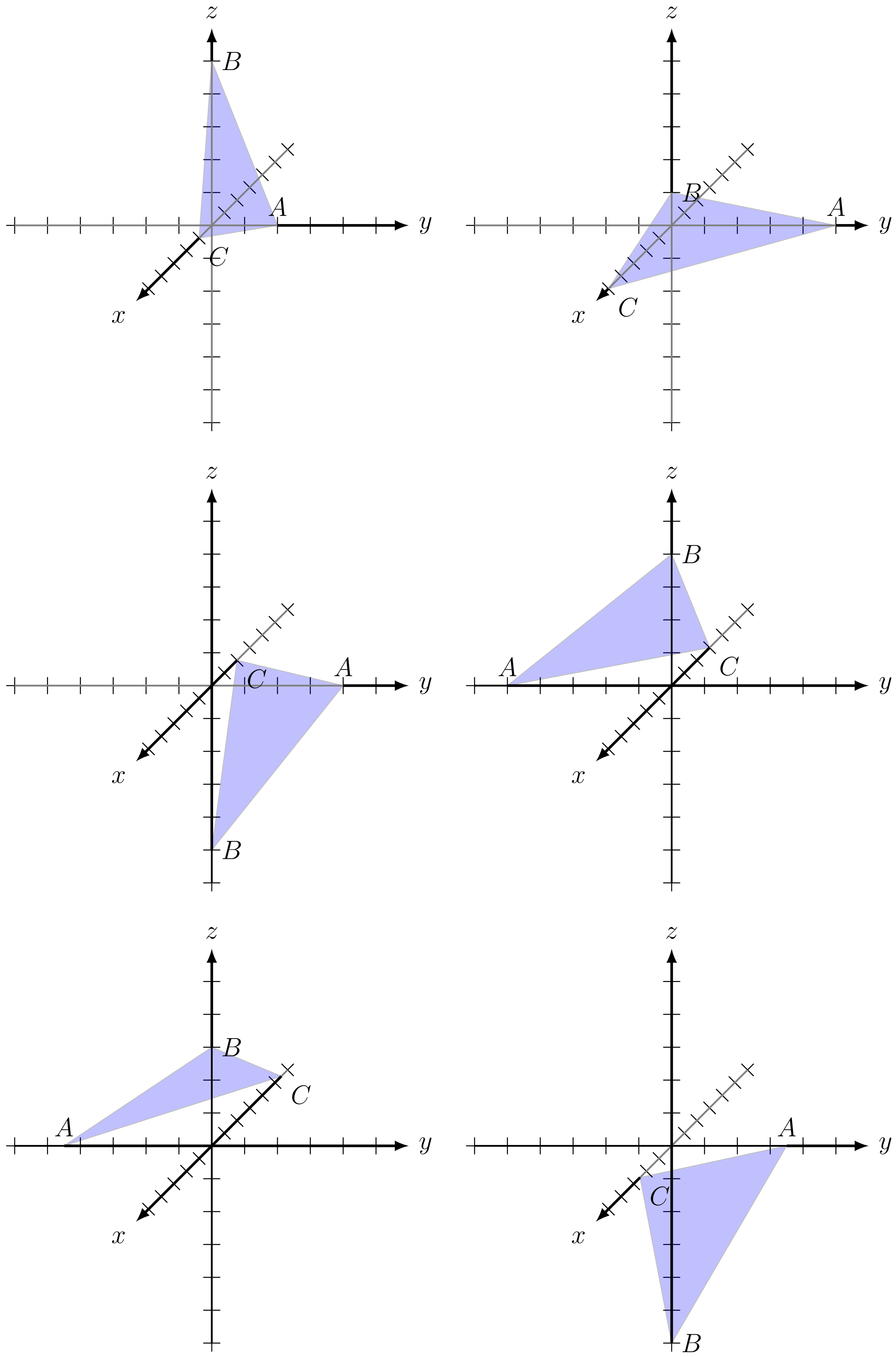
$$
\begin{array}{rcccc}
x_1 = & 0 & + 1\lambda & + 0 \\
x_2 = & 0 & + 0 & + 1\mu \\
x_3 = & 10 & - 2\lambda & - 2\mu \\
E : \vec{x} = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} & + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} & + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Es fällt auf, dass sich $\vec{p}$ verändert hat und dass die *Spannvektoren* einen *Vorzeichenwechsel* unterworfen wurden. Allerdings beschreiben diese *Vektoren* die gleiche *Ebene* wie die, die zum Anfang des Beispiels gewählt wurde, somit können die *Vorzeichen* umgedreht werden und der *Ortsvektor* $\vec{p}$ ersetzt werden, welcher durch die vorherige *Darstellungsform* bekannt ist.

Je nach *Darstellung* kann die Überprüfung, ob ein *Punkt* auf einer *Ebene* liegt anders aussehen. Dabei wird bei der *Parameterdarstellung* $E : \vec{x} = \vec{a}+\mu\vec{b}+\lambda\vec{c}$ der *Punkt* P zu einem *Vektor* $\vec{OP}= \vec{p}$ umgeformt, der den *Punkt* P beschreibt. Anschließend wird dieser für $\vec{x}$ eingesetzt. Das daraus resultierte *Gleichungssystem* muss abschließend gelöst werden. Wenn eine Lösung existiert, befindet sich der *Punkt* auf der *Ebene*. Bei der *Koordinatenform* $E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$, wobei $\vec{n}$ der *Normalenvektor* und d der *Abstand* zum *Koordinatenursprung* ist, werden die einzelnen *Einträge* von $\vec{p}$ eingesetzt. Gibt die *Gleichung* einen wahren Sachverhalt wieder, liegt der *Punkt* auf der *Ebene*.

10.7.1 Übungsaufgaben zu Darstellungsformen

Aufgabe 1: *Bestimme die Ebenengleichung aus der Grafik und übersetze diese in alle Darstellungsformen.*



Aufgabe 2: *Überführe die Ebenengleichungen in die Achsenabschnittsform.*

a) $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 35$

b) $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

f) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

g) $\frac{x_1}{4} + 3x_3 = 9$

h) $\frac{1}{3}\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$

Aufgabe 3: *Überführe die Ebenengleichungen in die Koordinatenform.*

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

c) $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = 3$

d) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

f) $\frac{x_1}{5} + 2x_3 = 1$

g) $\frac{x_1}{4} + \frac{3x_2}{8} - \frac{5}{4}x_3 = 1$

h) $\frac{2}{7}\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - 17 = 0$

Aufgabe 4: *Überführe die Ebenengleichungen in die Normalenform.*

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 5$

c) $\frac{1}{5}\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 7$

d) $2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3 = 0$

e) $\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{4} = 1$

f) $15 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

g) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

h) $\frac{x_1}{4} + x_2 - 2x_3 = 1$

Aufgabe 5: *Überführe die Ebenengleichungen in die Hesse'sche Normalenform.*

a) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

b) $7x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 9$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 4$

e) $\frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{5} - \frac{x_3}{2} = 1$

f) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

g) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

h) $\frac{x_1}{7} + x_2 = 1$

Aufgabe 6: *Überführe die Ebenengleichungen in die Parameterform.*

a) $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 17$

b) $\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{6} + \frac{x_3}{12} = 1$

c) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

d) $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

e) $5x_3 - 2x_1 - x_2 = 4$

f) $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

g) $3x_1 - 7x_3 + 2x_2 = 9$

h) $\frac{x_3}{5} - \frac{x_2}{9} + x_1 = 1$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.86) Lösungen zu Darstellungsformen.

10.8 Vektorielle Geometrie

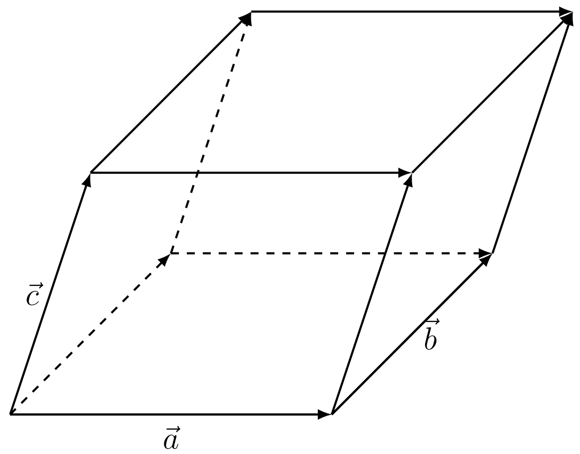
Wie bereits zur Einführung des *Kreuzproduktes* an der Darstellung eines *Dreiecks* ersichtlich war, besteht ein Zusammenhang zwischen dem *Betrag* eines *Kreuzproduktes* und dem *Flächeninhalt* eines *Parallelogramms*.

$$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi \tag{10.90}$$

Wenn diese *Fläche* mit einer *Höhe multipliziert* wird, dann kann ein *Volumen* assoziiert werden

$$V = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \ . \tag{10.91}$$

Dieses *Produkt* wird auch *Spatprodukt* genannt, da das beschriebene *Prisma* auch *Parallelotops* oder *Spat* genannt wird.



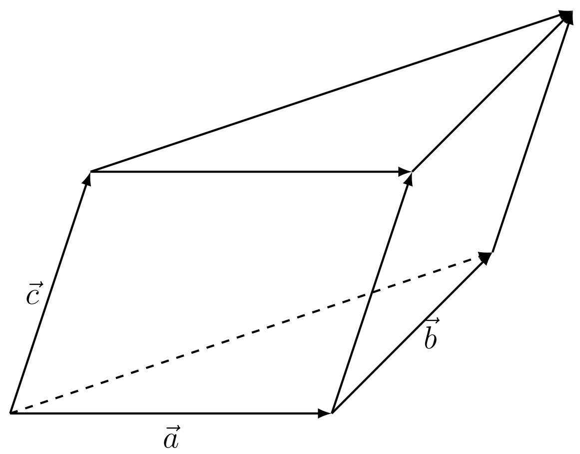
Durch die Struktur des *Spatprodukts* lässt sich eine Verbindung zu einer *Determinante* aufbauen:

$$V = \det \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det \left|\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right| \ . \tag{10.92}$$

Beim *Spatprodukt* besteht die Möglichkeit die *Vektoren* zyklisch zu vertauschen, da alle *Seitenflächen* als *Grundfläche* dienen können:

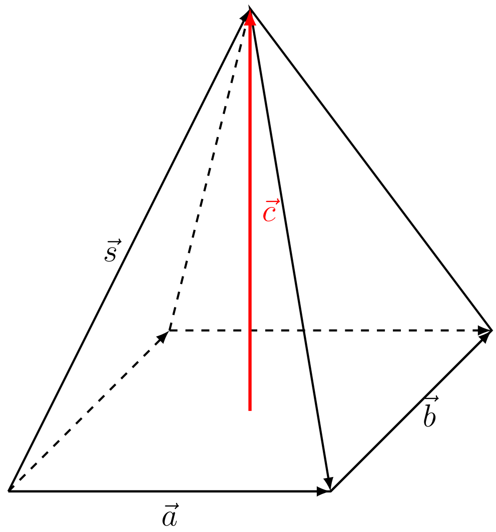
$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \ . \tag{10.93}$$

Bei einem *Dreiecksprisma* bildet, wie der Name schon vermuten lässt, ein *Dreieck* die *Grundfläche*, sodass bei der *Volumenberechnung* der *Faktor* $\frac{1}{2}$ hinzuzufügen ist.



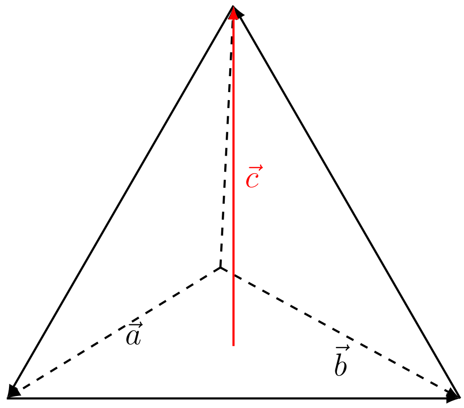
$$V = \frac{1}{2} \det \left| \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right| \tag{10.94}$$

Wie schon bei der allgemeinen *Geometrie* ist ein *Prisma* in drei *Spitzkörper* mit gleichem *Volumen* trennbar, sodass bei der Betrachtung einer *Viereckspyramide* der Faktor $\frac{1}{3}$ hinzugezogen werden muss.



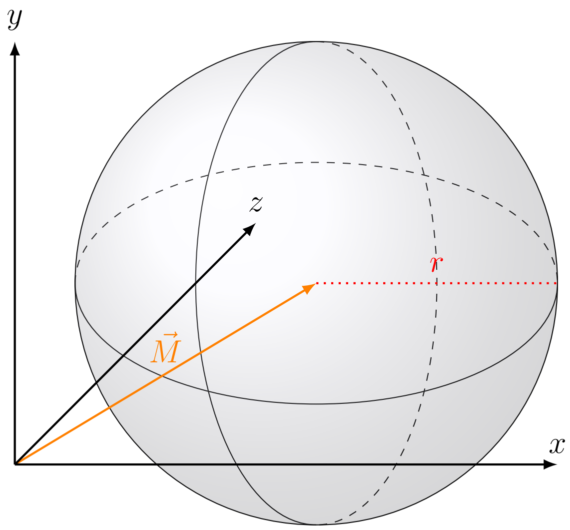
$$V = \frac{1}{3} \left| \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) \right| \tag{10.95}$$

Beim *Tetraeder* kommen beide zuvor beschriebenen Eigenschaften zusammen, sodass der *Faktor* $\frac{1}{6}$ resultiert.



$$V = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right| \tag{10.96}$$

Bei der *Kugel* wird lediglich der *Mittelpunkt* $\vec{M}$ und der *Radius* r benötigt.



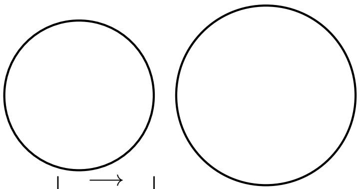
Da die die *Differenz* zwischen dem *Ortsvektor* des *Mittelpunktes* M und einem *Punkt* auf der *Oberfläche* der *Kugel* $\vec{x}$ auch den *Radius* r als *Abstand* besitzen, kann eine direkte Beziehung als *definierende Gleichung* aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} \\ r^2 &= \left|\vec{x}-\vec{M}\right|^2 \\ r^2 &= (x-c)^2+(y-d)^2+(z-e)^2 \quad .\end{aligned} \tag{10.97}$$

Durch einen Wechsel der *Koordinatensysteme* von einem *kartesischem* in ein *radiales Koordinatensystem*, können die *Koordinatenbeziehungen*

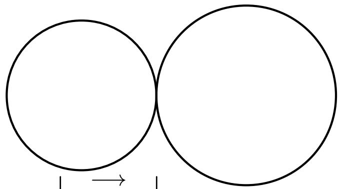
$$\begin{aligned} x &= c + r\cos\varphi\cos\theta \\ y &= d + r\cos\varphi\sin\theta \\ z &= e + r\sin\varphi \end{aligned} \tag{10.98}$$

festgehalten werden. Da in den Naturwissenschaften viele Phänomene *radialsymmetrisch* sind, werden viele Rechnungen auch in *radialen Koordinaten* durchgeführt.
Oftmals ist die *Lagebeziehung* zwischen zwei *Kugeln* interessant. Dazu wird lediglich der *Abstand* der *Mittelpunkte* der beiden *Kugeln* M_1 und M_2 mit der *Summe* aus den *Radien* r_1 und r_2 verglichen. Wobei $r_1 \geq r_2$ gilt.



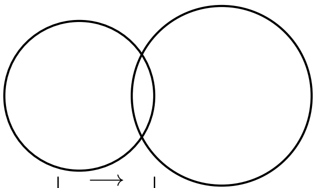
$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| > r_1 + r_2$

keine Schnittpunkte



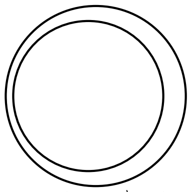
$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = r_1 + r_2$

ein Berührpunkt



$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 + r_2$
$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| > r_1 - r_2$

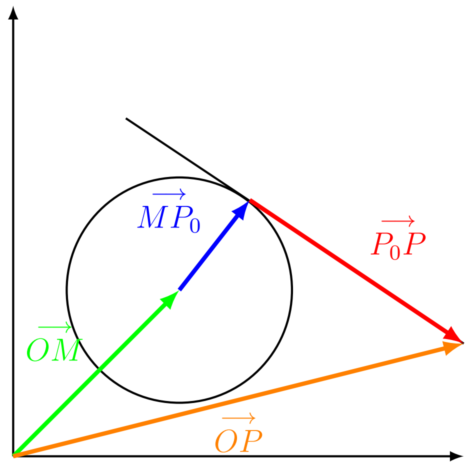
ein Schnittkreis



$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 + r_2$
$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 - r_2$

keine Schnittpunkte

Auch die *Lagebeziehungen* zwischen einer *Kugel* und einer *Ebene* sind häufig von Bedeutung, hierbei ist besonders häufig eine *Tangentialebene* gesucht.



Hierbei existieren zwei Szenarien. Im ersten Szenario ist der *Berührpunkt* P_0 sowie die *Kugelgleichung* bekannt, während im zweiten Szenario die *Ebene* und die *Kugelgleichung* bekannt sind, um die *Lagebeziehungen* zu überprüfen. Es gilt, dass der *Radius* r *orthogonal* auf der *Geraden* g im *Punkt* P_0 liegt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PP_0} \cdot \overrightarrow{MP_0} &= 0 \\ \left[\vec{x} - \overrightarrow{OP_0}\right] \cdot \overrightarrow{MP_0} &= 0 \\ \text{mit:} \quad \overrightarrow{MP_0} &= \mu\vec{n} \end{aligned} \tag{10.99}$$

wobei die Argumente der *Kugelgleichung* in die gefundene *Gleichung* eingesetzt werden kann.

$$\begin{aligned} [\vec{x} - \vec{p}_0] \cdot \vec{n} &= 0 \\ K: \; (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow E: \; n_x(x - x_M) + n_y(y - y_M) + n_z(z - z_M) &= r^2 \end{aligned} \tag{10.100}$$

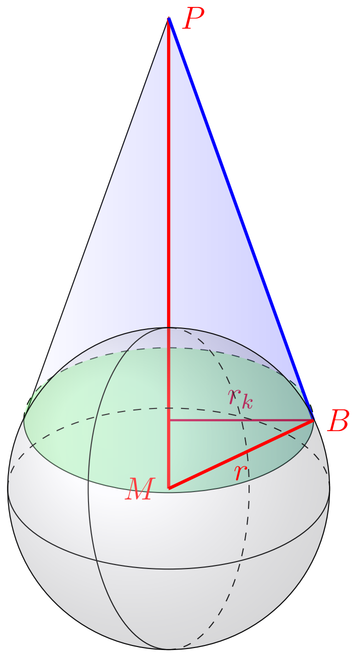
Um das Ergebnis zu überprüfen, beziehungsweise um zu testen, ob es sich bei einer *Ebene* tatsächlich um eine *Tangentialebene* handelt, kann der *Abstand* zwischen dem *Mittelpunkt* der *Kugel* M und der *Ebene* E bestimmt wird. Ist der *Abstand* $d(M, E) = r$, dann handelt es sich um eine *Tangentialebene*.
Wenn die *Kugel-* und *Ebenengleichung* bekannt sind, kann der *Berührpunkt* P_0 durch die *Gerade* durch den *Mittelpunkt* M und dem *Berührpunkt* P_0 bestimmt werden:

$$g: \; \vec{x} = \overrightarrow{OM} + \lambda\vec{n} \quad , \tag{10.101}$$

wobei $\vec{n}$ der *Normalenvektor* der *Ebene* ist. Wird die *Geradengleichung* in die *Ebenengleichung* (in *Koordinatenform*) eingesetzt, kann der *Parameter* λ bestimmt werden, sodass anschließend durch das Einsetzen des gefundenen *Parameterwertes* λ in die *Geradengleichung* und somit P_0 bestimmt werden kann.

Um einen *Kreis* im *dreidimensionalen Raum* zu beschreiben, werden zwei zueinander *orthogonale Vektoren* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ benötigt, die den selben *Betragswert* besitzen:

$$\begin{aligned} k: \; \vec{x} &= \overrightarrow{OM} + \cos(\lambda)\vec{u} + \sin(\lambda)\vec{v} \quad , \\ r &= |\vec{u}| = |\vec{v}| \quad . \end{aligned} \tag{10.102}$$



Eine Gerade g soll durch den Punkt P verlaufen und dabei eine Tangente zur Kugel K mit dem Mittelpunkt M bilden. Im Berührpunkt B auf der entstehenden Kreislinie ist der Radius orthogonal zur Strecke $\overline{PB}$. Die Ebene, in der der Kreis aus den Berührpunkten liegt, wird Polarebene (in grün) genannt, wobei der Vektor zwischen den Mittelpunkt M und dem Aufpunkt der Geraden P einen Normalenvektor beschreibt. Somit ergibt sich die Ebenengleichung in der Normalenform:

$$\begin{aligned}
E:\ 0 &= \left(\vec{x}-\vec{b}\right)\cdot(\vec{n})\\
E:\ 0 &= \left(\vec{x}-\vec{b}\right)\cdot(\vec{p}-\vec{m})\\
E:\ 0 &= \left(\vec{x}-\vec{m}-\vec{b}+\vec{m}\right)\cdot(\vec{p}-\vec{m})\\
E:\ 0 &= \left[(\vec{x}-\vec{m})-\left(\vec{b}-\vec{m}\right)\right]\cdot(\vec{p}-\vec{m})\\
E:\ 0 &= (\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m})-\left(\vec{b}-\vec{m}\right)\cdot(\vec{p}-\vec{m})
\end{aligned} \tag{10.103}$$

wobei $(\vec{p}-\vec{m})$ als $\left(\vec{b}-\vec{m}\right)+\left(\vec{p}-\vec{b}\right)$ dargestellt werden kann.

$$\begin{aligned}
E:\ 0 &= (\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m})-\left(\vec{b}-\vec{m}\right)\cdot\left[\left(\vec{b}-\vec{m}\right)+\left(\vec{p}-\vec{b}\right)\right]\\
E:\ 0 &= (\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m})-\left(\vec{b}-\vec{m}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{m}\right)+\underbrace{\left(\vec{b}-\vec{m}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{b}\right)}_{=0}\\
E:\ 0 &= (\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m})-\underbrace{\left(\vec{b}-\vec{m}\right)^2}_{r^2}
\end{aligned} \tag{10.104}$$

$$\Rightarrow\quad E:\ r^2 = (\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m})$$

Somit kann die Polarebene beschrieben werden ohne einen Berührpunkt B zu berechnen.

10.8.1 Übungsaufgaben zur vektoriellen Geometrie

Aufgabe 1: *Bestimme den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, welches durch die gegebenen Punkte beschrieben wird.*

a) $A\,(2\,|{-3}|\,2) \quad \wedge \quad B\,(-1\,|1|-4) \quad \wedge \quad C\,(-3\,|4|-1)$

b) $A\,(7\,|4|-5) \quad \wedge \quad B\,(-6\,|4|\,3) \quad \wedge \quad C\,(-14\,|14|-10)$

c) $A\,(5\,|{-2}|\,5) \quad \wedge \quad B\,(4\,|1|\,2) \quad \wedge \quad C\,(1\,|{-10}|-8)$

d) $A\,(6\,|{-2}|\,3) \quad \wedge \quad B\,(5\,|2|\,6) \quad \wedge \quad C\,(-9\,|9|\,8)$

e) $A\,(5\,|{-7}|\,8) \quad \wedge \quad B\,(2\,|1|\,1) \quad \wedge \quad C\,(19\,|17|\,12)$

f) $A\,(5\,|4|\,3) \quad \wedge \quad B\,(5\,|0|\,8) \quad \wedge \quad C\,(8\,|5|\,12)$

Aufgabe 2: *Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks, welches durch die gegebenen Punkte beschrieben wird.*

a) $A\,(-7\,|1|\,3) \quad \wedge \quad B\,(-2\,|{-3}|\,2) \quad \wedge \quad C\,(3\,|2|-5)$

b) $A\,(-7\,|{-2}|\,2) \quad \wedge \quad B\,(1\,|0|-4) \quad \wedge \quad C\,(9\,|{-3}|\,5)$

c) $A\,(4\,|3|-2) \quad \wedge \quad B\,(1\,|{-2}|\,1) \quad \wedge \quad C\,(5\,|{-3}|\,5)$

d) $A\,(1\,|2|-3) \quad \wedge \quad B\,(5\,|{-1}|-2) \quad \wedge \quad C\,(6\,|2|\,3)$

e) $A\,(11\,|7|\,5) \quad \wedge \quad B\,(2\,|1|\,7) \quad \wedge \quad C\,(-3\,|{-2}|-7)$

f) $A\,(-4\,|0|\,9) \quad \wedge \quad B\,(5\,|{-3}|\,7) \quad \wedge \quad C\,(8\,|3|\,4)$

Aufgabe 3: *Berechne alle Winkel in den Dreiecken aus Aufgabe 2.*

Aufgabe 4: *Bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks.*

a) $A\,(1\,|1|\,1) \quad \wedge \quad B\,(1\,|2|-1) \quad \wedge \quad C\,(-3\,|{-2}|-3)$

b) $A\,(1\,|{-3}|\,2) \quad \wedge \quad B\,(0\,|{-2}|\,1) \quad \wedge \quad C\,(3\,|3|\,3)$

c) $A\,(6\,|4|\,1) \quad \wedge \quad B\,(3\,|{-1}|-4) \quad \wedge \quad C\,(3\,|{-3}|-2)$

d) $A\,(-1\,|0|\,4) \quad \wedge \quad B\,(6\,|{-7}|-2) \quad \wedge \quad C\,(17\,|10|-9)$

e) $A\,(-5\,|4|\,2) \quad \wedge \quad B\,(6\,|5|\,3) \quad \wedge \quad C\,(8\,|{-17}|-9)$

f) $A\,(4\,|{-3}|-3) \quad \wedge \quad B\,(7\,|9|\,5) \quad \wedge \quad C\,(47\,|{-21}|\,35)$

Aufgabe 5: *Bestimme den fehlenden Eckpunkt der Rechtecke aus Aufgabe 4.*

Aufgabe 6: *Bestimme den Flächeninhalt des Parallelogramms.*

a) $A\,(2\,|1|\,1) \quad \wedge \quad B\,(-3\,|2|-2) \quad \wedge \quad C\,(0\,|4|-5)$

b) $A\,(4\,|5|\,3) \quad \wedge \quad B\,(1\,|1|\,2) \quad \wedge \quad C\,(-1\,|2|-2)$

c) $A\,(4\,|2|-3) \quad \wedge \quad B\,(-3\,|4|-7) \quad \wedge \quad C\,(-2\,|7|\,6)$

d) $A\,(-4\,|3|\,3) \quad \wedge \quad B\,(0\,|9|-8) \quad \wedge \quad C\,(5\,|-7|\,6)$

e) $A\,(-4\,|-7|\,3) \quad \wedge \quad B\,(8\,|5|-5) \quad \wedge \quad C\,(7\,|-3|-6)$

f) $A\,(6\,|7|-5) \quad \wedge \quad B\,(3\,|8|\,6) \quad \wedge \quad C\,(11\,|-7|\,15)$

Aufgabe 7: *Bestimme den fehlenden Eckpunkt der Parallelogramme aus Aufgabe 6.*

Aufgabe 8: *Berechne alle Winkel in den Parallelogramme aus Aufgabe 6.*

Aufgabe 9: *Berechne das Volumen des Spats, welcher durch die gegebenen Vektoren aufgespannt wird.*

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$

Aufgabe 10: *Berechne das Volumen der Pyramide, welche durch die gegebenen Vektoren und der gegebene Höhe beschrieben wird.*

$a)\ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad h = 6LE$

$b)\ \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad h = 8LE$

$c)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad h = 11LE$

$d)\ \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad h = 4LE$

$e)\ \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad h = 17LE$

$f)\ \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad h = 25LE$

Aufgabe 11: *Berechne den Punkt S, der die Spitze der Pyramide beschreibt, welche in Aufgabe 10 und dem gegebenen Punkt A beschrieben ist.*

$a)\ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$d)\ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 12: *Berechne das Volumen der Pyramide, welche durch die gegebenen Punkte beschrieben wird.*

a) $A\,(1\,|1|\,1) \quad \wedge \quad B\,(1\,|1|\,7) \quad \wedge \quad C\,(1\,|5|\,7) \quad \wedge \quad S\,(-3\,|3|\,4)$

b) $A\,(4\,|-2|\,4) \quad \wedge \quad B\,(6\,|4|-7) \quad \wedge \quad C\,(2\,|3|-3) \quad \wedge \quad S\,(5,650\,|7,839|\,4,985)$

c) $A\,(5\,|4|\,3) \quad \wedge \quad B\,(8\,|-6|-7) \quad \wedge \quad C\,(6\,|-7|\,4) \quad \wedge \quad S\,(0,617\,|-2,029|\,2,564)$

d) $A\,(-7\,|-4|\,3) \quad \wedge \quad B\,(-2\,|-2|-4) \quad \wedge \quad C\,(1\,|0|\,2) \quad \wedge \quad S\,(-0,282\,|-7,332|\,2,918)$

e) $A\,(4\,|-3|-3) \quad \wedge \quad B\,(3\,|-1|\,1) \quad \wedge \quad C\,(-2\,|1|-4) \quad \wedge \quad S\,(-2,959\,|-6,498|-1,741)$

f) $A\,(2\,|-4|-5) \quad \wedge \quad B\,(5\,|3|\,0) \quad \wedge \quad C\,(3\,|-1|-3) \quad \wedge \quad S\,(1,275\,|-3,725|-1,551)$

Aufgabe 13: *Berechne die Höhen der Pyramiden aus Aufgabe 12.*

Aufgabe 14: *Bestimme die Lagebeziehung zwischen den Kugeln.*

a) $K_1 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 9 \quad \wedge \quad K_2 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = 4$

b) $K_1 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 5 \quad \wedge \quad K_2 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 12$

c) $K_1 : (x-5)^2 + (y+4)^2 + (z+6)^2 = 3 \quad \wedge \quad K_2 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}\right| = 3$

d) $K_1 : (x-3)^2 + y^2 + (z+4)^2 = 16 \quad \wedge \quad K_2 : x^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 1$

e) $K_1 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 49 \quad \wedge \quad K_2 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = 2$

f) $K_1 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = 36 \quad \wedge \quad K_2 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = 25$

g) $K_1 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}\right| = 60 \quad \wedge \quad K_2 : (x-6)^2 + (y+4)^2 + (z+7)^2 = 28$

h) $K_1 : \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = 144 \quad \wedge \quad K_2 : (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 55$

Aufgabe 15: *Berechne das Volumen der Kugel mit dem Mittelpunkt M und einem beliebigen Punkt auf der Oberfläche P_0.*

a) $(-5\,|-2|-1) \quad \wedge \quad (-8\,|-2|\,3)$

b) $(-11\,|-9|\,7) \quad \wedge \quad (-5\,|-3|\,4)$

c) $(4\,|-3|-3) \quad \wedge \quad (-3\,|-5|\,6)$

d) $(3\,|-4|\,6) \quad \wedge \quad (1\,|-2|\,3)$

e) $(2\,|3|-5) \quad \wedge \quad (3\,|4|-3)$

f) $(4\,|3|\,7) \quad \wedge \quad (3\,|2|\,2)$

Aufgabe 16: *Berechne den Abstand $d(O_K, E)$ zwischen der Kugeloberfläche der Kugel K und der Ebene E und interpretiere die Ergebnisse bezüglich auf die Lagebeziehungen zwischen der Kugel und der Ebene.*

a) $K: \quad \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right|^2 = 1 \quad \wedge \quad E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $K: \quad \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}\right|^2 = 9 \quad \wedge \quad E: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 18 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

c) $K: \quad (x+4)^2 + (y+5)^2 + (z+6)^2 = 16 \quad \wedge \quad E: \quad -8x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 11$

d) $K: \quad \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right|^2 = 6{,}25 \quad \wedge \quad E: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$

e) $K: \quad (x-1)^2 + (y+9)^2 + (z-4)^2 = 16 \quad \wedge \quad E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $K: \quad \left|\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}\right|^2 = 8 \quad \wedge \quad E: \quad 9x_1 - 12x_2 + 4x_3 = 90$

Aufgabe 17: *Überprüfe, ob die gegebene Gleichung eine Kreisgleichung darstellt und bestimmt anschließend den Flächeninhalt des gegebenenfalls dargestellten Kreises.*

$$a)\ k:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\3\\-6\end{pmatrix}+\cos(\lambda)\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}+\frac{5}{3\sqrt{6}}\sin(\lambda)\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$b)\ k:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}+\frac{7}{5\sqrt{2}}\cos(\lambda)\begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix}+\frac{7}{\sqrt{85}}\sin(\lambda)\begin{pmatrix}6\\0\\-7\end{pmatrix}$$

$$c)\ k:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}+\frac{10}{\sqrt{21}}\cos(\lambda)\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}+\frac{5}{\sqrt{42}}\sin(\lambda)\begin{pmatrix}-6\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$d)\ k:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-7\\-5\end{pmatrix}+\frac{3}{\sqrt{14}}\cos(\lambda)\begin{pmatrix}9\\-3\\-6\end{pmatrix}+\frac{9}{\sqrt{14}}\sin(\lambda)\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$e)\ k:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-5\\-11\end{pmatrix}+\frac{5}{\sqrt{54}}\cos(\lambda)\begin{pmatrix}-8\\0\\6\end{pmatrix}+\frac{5}{\sqrt{27}}\sin(\lambda)\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}$$

$$f)\ k:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+\frac{4}{\sqrt{69}}\cos(\lambda)\begin{pmatrix}-21\\12\\6\end{pmatrix}+\frac{6}{\sqrt{69}}\sin(\lambda)\begin{pmatrix}14\\-8\\4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 18: *Gib eine Ebenen Gleichung für die dargestellten Flächen aus Aufgabe 17 an.*

Aufgabe 19: *Bestimme die Tangentialebene E zu der Kugel K für den gegebenen Mittelpunkt M im gegebenen Punkt auf der Kugel P_0.*

a) $M\,(3\,|2|\,1)\ \wedge\ P_0\,(3\,|-3|\,6)$

b) $M\,(-1\,|5|\,6)\ \wedge\ P_0\,(-5\,|-4|\,4)$

c) $M\,(-4\,|-3|-7)\ \wedge\ P_0\,(2\,|2|\,3)$

d) $M\,(6\,|-7|\,2)\ \wedge\ P_0\,(1\,|4|-1)$

e) $M\,(5\,|4|\,2)\ \wedge\ P_0\,(6\,|-6|\,5)$

f) $M\,(5\,|-9|\,5)\ \wedge\ P_0\,(3\,|-7|\,2)$

g) $M\,(-9\,|0|-6)\ \wedge\ P_0\,(-8\,|4|-4)$

h) $M\,(11\,|-3|\,2)\ \wedge\ P_0\,(3\,|-4|\,7)$

Aufgabe 20: *Bestimme, ob die Ebene E eine Tangentialebene zu der Kugel K ist. Bestimme gegebenenfalls den Berührpunkt P_0.*

$$a)\ K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 6 \ \wedge\ E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$b)\ K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}\right]^2 = 13 \ \wedge\ E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$c)\ K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}\right]^2 = 33 \ \wedge\ E: -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 56$$

$$d)\ K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right]^2 = 94 \ \wedge\ E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ -15 \\ 15 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$e)\ K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 66 \ \wedge\ E: 3x_1 + 7x_2 - 6x_3 = 74$$

$$f)\ K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^2 = 98 \ \wedge\ E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 21: *Bestimme eine Tangente t zu der Kugel K für den gegebenen Mittelpunkt M im gegebenen Punkt auf der Kugel P_0.*

$a)\ M(2|6|5) \ \wedge\ P_0(-5|9|1)$

$b)\ M(3|-1|7) \ \wedge\ P_0(4|-5|-4)$

$c)\ M(6|4|-4) \ \wedge\ P_0(-6|4|-8)$

$d)\ M(0|-2|4) \ \wedge\ P_0(1|-3|5)$

$e)\ M(-9|-1|3) \ \wedge\ P_0(-6|3|2)$

$f)\ M(-5|4|-7) \ \wedge\ P_0(-4|-2|-11)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.87) Lösungen zur vektoriellen Geometrie.

10.9 Gemischte Aufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1: *Bestimme den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt.*

$$a)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P(6|-3|7)$$

$$b)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad P(0|1|-4)$$

Aufgabe 2: *Bestimme den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt.*

$a)\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \quad \wedge \quad P(3|-5|-2)$ $\qquad$ $b)\ 4x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 9 \quad \wedge \quad P(-4|0|9)$

Aufgabe 3: *Bestimme den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt.*

$$a)\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad P(8|-2|-1)$$

$$b)\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad P(-1|5|-3)$$

Aufgabe 4: *Bestimme den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt.*

$$a)\ \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 5 \quad \wedge \quad P(6|-4|-5) \qquad b)\ \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} = 13 \quad \wedge \quad P(-1|-1|9)$$

Aufgabe 5: *Bestimme den Abstand zwischen der Ebene und dem Punkt.*

a) $\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{9} = 1 \quad \wedge \quad P(4|-4|3)$ *b)* $\frac{2x_1}{3} + \frac{x_2}{5} + \frac{6x_3}{7} = 1 \quad \wedge \quad P(-5|2|5)$

Aufgabe 6: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen der Ebene und der Geraden.*

$$a)\ g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen der Ebene und der Geraden.*

$$a)\ g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E : 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 21$$

$$b)\ g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E : -7x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 45$$

Aufgabe 8: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen der Ebene und der Geraden.*

$$a)\ g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$b)\ g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 9: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen der Ebene und der Geraden.*

$$a)\;\; g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\4\\4\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}3\\7\\-4\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-7\end{pmatrix}=15$$

$$b)\;\; g:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\7\\6\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}-4\\6\\-5\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}=31$$

Aufgabe 10: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen der Ebene und der Geraden.*

$$a)\;\; g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-6\\1\\4\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\frac{x_1}{5}-\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{9}=1$$

$$b)\;\; g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\rho\begin{pmatrix}9\\-3\\7\end{pmatrix}\quad\wedge\quad E:\frac{3x_1}{5}+\frac{7x_2}{4}+\frac{5x_3}{8}=1$$

Aufgabe 11: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen den Ebenen.*

a) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 6$

c) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

d) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = 16$

e) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : -\frac{x_1}{4} + \frac{2x_2}{5} - \frac{x_3}{6} = 1$

Aufgabe 12: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen den Ebenen.*

a) $E_1 : x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 20 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $E_1 : 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 54 \quad \wedge \quad E_2 : -6x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 34$

c) $E_1 : 7x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 13 \quad \wedge \quad E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

d) $E_1 : -x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 28$

e) $E_1 : -4x_1 + 5x_2 + x_3 = 17 \quad \wedge \quad E_2 : \frac{x_1}{5} - \frac{7x_2}{8} + \frac{7x_3}{6} = 1$

Aufgabe 13: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen den Ebenen.*

$$a)\ E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$b)\ E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2: 3x_1 + 11x_2 + 5x_3 = -52$$

$$c)\ E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0$$

$$d)\ E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = 44$$

$$e)\ E_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2: -\frac{x_1}{3} - \frac{x_2}{8} + \frac{14x_3}{15} = 1$$

Aufgabe 14: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen den Ebenen.*

$$a)\ E_1: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 85 \quad \wedge \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$b)\ E_1: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -13 \end{pmatrix} = 124 \quad \wedge \quad E_2: x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 12$$

$$c)\ E_1: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix} = 3 \quad \wedge \quad E_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$d)\ E_1: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = 842 \quad \wedge \quad E_2: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 15$$

$$e)\ E_1: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 18 \quad \wedge \quad E_2: \frac{x_1}{2} - \frac{8x_2}{7} + \frac{4x_3}{3} = 1$$

Aufgabe 15: *Bestimme den Schnittwinkel zwischen den Ebenen.*

a) $E_1 : \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{6} - \frac{x_3}{5} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $E_1 : -\frac{3x_1}{4} + x_2 + \frac{x_3}{8} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : 4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 94$

c) $E_1 : \frac{x_1}{4} - \frac{6x_2}{5} - \frac{2x_3}{7} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

d) $E_1 : \frac{x_1}{12} + \frac{5x_2}{16} + \frac{23x_3}{6} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 102$

e) $E_1 : \frac{x_1}{7} - \frac{4x_2}{9} + \frac{2x_3}{11} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : \frac{x_1}{6} + \frac{3x_2}{5} + \frac{9x_3}{10} = 1$

Aufgabe 16: *Bestimme den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden.*

a) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 17: *Bestimme den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden.*

a) $E : 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 15 \quad \wedge \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $E : -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 68 \quad \wedge \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 18: *Bestimme den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden.*

$$a)\ E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\3\end{pmatrix}=0 \quad\wedge\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$b)\ E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\5\\-5\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}6\\1\\-4\end{pmatrix}=0 \quad\wedge\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-2\\6\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}4\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

Aufgabe 19: *Bestimme den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden.*

$$a)\ E:\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}=37 \quad\wedge\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}9\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$b)\ E:\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-5\end{pmatrix}=128 \quad\wedge\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\-11\\-5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 20: *Bestimme den Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden.*

$$a)\ E:\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{7}-\frac{x_3}{8}=1 \quad\wedge\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}6\\-4\\-5\end{pmatrix}$$

$$b)\ E:-\frac{5x_1}{6}+\frac{7x_2}{4}-\frac{11x_3}{7}=1 \quad\wedge\quad g:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-4\\-8\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\4\\-9\end{pmatrix}$$

Aufgabe 21: *Kreuze in der Tabelle an ob der dargestellte Term einen Vektor oder ein Skalar entspricht oder ob der Term eine nicht definierte Rechnung beherbergt.*

Term	Vektor	Skalar	nicht definiert
$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$			
$\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^2} \times \vec{a}$			
$\vec{z} \times (\vec{x} \cdot \vec{y})$			
$(\vec{z} \times \vec{a}) \cdot \left(\vec{s} \times \vec{h}\right)$			
$\frac{(\vec{a} \cdot \vec{c})}{\vec{d}}$			
$\lambda\vec{z} - (\vec{s} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{z}$			
$\vec{v} \times (\mu\vec{u} - \lambda\vec{c})^2$			
$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$			
$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 - \vec{c} \cdot \vec{s}$			
$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$			
$\frac{a \times \vec{b}}{\|\vec{r}\|^3}$			
$\left[\mu\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \times \vec{c}\right] \cdot \vec{v}$			
$\|\vec{a} \times (\vec{z} \times \vec{v})\|$			

Aufgabe 22: *Bestimme den Schnittgerade der Ebenen.*

a) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : 4x_1 - x_3 = 72$

c) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 0$

d) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 90$

e) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad E_2 : \frac{13x_2}{25} - \frac{27x_3}{83} = 1$

Aufgabe 23: *Bestimme den Schnittgerade der Ebenen.*

a) $E_1 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E_1 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = 55 \quad \wedge \quad E_2 : -2x_1 + 7x_2 + 9x_3 = 24$

c) $E_1 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

d) $E_1 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -9 \end{pmatrix} = 1024 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$

e) $E_1 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 23 \quad \wedge \quad E_2 : \frac{5x_1}{6} - \frac{x_2}{11} + \frac{9x_3}{16} = 1$

Aufgabe 24: *Bestimme den Schnittgerade der Ebenen.*

a) $E_1 : -3x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 6 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $E_1 : 11x_1 - 4x_2 = 76 \quad \wedge \quad E_2 : 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -13$

c) $E_1 : -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 49 \quad \wedge \quad E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

d) $E_1 : 6x_1 + 11x_2 + 31x_3 = 496 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} = 32$

e) $E_1 : x_1 + 17x_2 - x_3 = 64 \quad \wedge \quad E_2 : \dfrac{8x_1}{7} + \dfrac{9x_2}{5} - \dfrac{11x_3}{8} = 1$

Aufgabe 25: *Bestimme den Schnittgerade der Ebenen.*

a) $E_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $E_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2 : -9x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 78$

c) $E_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -9 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

d) $E_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} = 305$

e) $E_1 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \wedge \quad E_2 : \dfrac{3x_1}{4} - \dfrac{4x_2}{5} + \dfrac{7x_3}{8} = 1$

Aufgabe 26: *Bestimme den Schnittgerade der Ebenen.*

a) $E_1 : \frac{x_1}{4} + \frac{8x_2}{3} + \frac{x_3}{7} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $E_1 : \frac{6x_1}{5} - \frac{3x_2}{7} + \frac{8x_3}{9} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 14$

c) $E_1 : \frac{x_1}{6} - \frac{11x_3}{4} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

d) $E_1 : \frac{9x_1}{4} - \frac{x_2}{7} + \frac{8x_3}{7} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -12 \\ -13 \end{pmatrix} = 123$

e) $E_1 : -\frac{7x_1}{3} + 6x_2 - \frac{3x_3}{4} = 1 \quad \wedge \quad E_2 : -\frac{11x_2}{2} + \frac{9x_3}{8} = 1$

Aufgabe 27: *Ein Parallelogramm wird am Punkt $A(0|3|0)$ durch die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ aufgespannt. Löse alle Teilaufgaben.*

a) Gib eine Ebenengleichung in Koordinatenform an, in der das Parallelogramm liegt.

b) Berechne die Werte für a, bei dem der Flächeninhalt des Parallelogramms $A = 2\,FE$ groß ist.

c) Gib für $a = -1$ die Koordinaten des den fehlenden Eckpunkt D an.

Aufgabe 28: *Gegeben sei die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Löse alle Teilaufgaben.*

a) Gib eine Ebenengleichung in Koordinatenform der Ebene E an.

$b)$ Berechne die Werte von a, bei der die Ebene E parallel auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

$c)$ Berechne die Werte von a, bei der die Ebene E orthogonal zu $F: 3 = 2x_1 - x_2 - 5x_3$ ist.

Aufgabe 29: *Berechne die Werte von t, bei der der Punkt $P(1|t|t^2)$ auf der Ebene $E: 4 = x_1 - 2x_2 + x_3$ liegt.*

Aufgabe 30: *Berechne die Werte von t, bei der der Punkt $P(9-3t|-t^2|4t^3-8)$ auf der Ebene $E: 12 = 4x_1 - 18x_2 + 3x_3$ liegt.*

Aufgabe 31: *Berechne die Werte für a, sodass die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a^2 \\ -2a \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zu einander sind. Berechne den Schnittpunkt für diesen Wert von a.*

Aufgabe 32: *Berechne den Schnittpunkt der Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$. Zeige, dass der Schnittpunkt unabhängig von a ist.*

Aufgabe 33: *Berechne die Werte für a, sodass die Ebenen $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zu einander sind.*

Aufgabe 34: *Gegeben sei die Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P_a(-2|a|1-a)$.*

$a)$ Berechne den Lotfußpunkt bezüglich des Abstand zwischen der Ebene E und der Punkte P_a.

b) Berechne den Abstand zwischen der Ebene E und der Punkte P_a.

c) Berechne die Gerade der Lotfußpunkte auf der Ebene E bezüglich der Punkte P_a.

Aufgabe 35: *Gegeben sei* $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *und* $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Berechne die Werte von a, für die die Gerade g parallel zur Ebene E steht.*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.88) Lösungen zu den gemischten Aufgaben zu Vektoren.

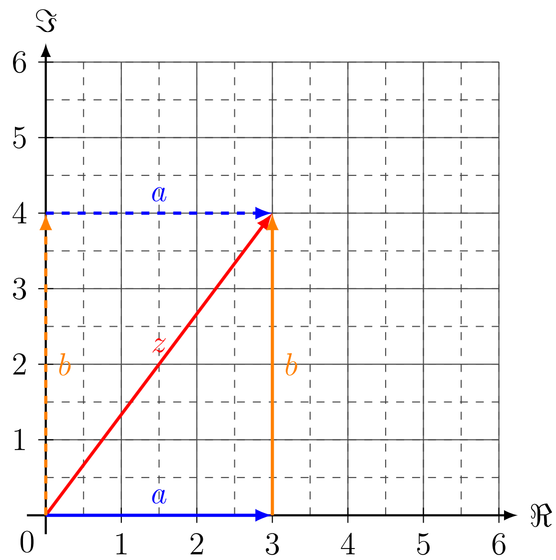
11 Komplexe Zahlen

Die *Menge* der *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ ist die letzte Erweiterung der allgemeinen *Zahlenmengen*. Dabei wird die Zahl $i = \sqrt{-1}$ eingeführt. Durch die Verbindung mit der *Wurzelfunktion* wird schon eine periodische Eigenschaft der neuen Zahl deutlich:

$$\begin{aligned} i &:= \sqrt{-1} \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -\sqrt{-1} = -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= \sqrt{-1} = i \end{aligned} \tag{11.1}$$

11.1 Rechnen mit komplexen Zahlen

Die *komplexen Zahlen* können graphisch veranschaulicht werden, indem ein *Koordinatensystem* benutzt wird. Dazu werden auf der *Abszisse* die *realen Zahlen* $\Re = \mathrm{Re}$ (die bekannten *reelle Zahlen* $\mathbb{R}$) und auf die *Ordinate* die neuen Zahlen - die sogenannten *imaginären Zahlen* $\Im = \mathrm{Im}$.



Dabei wird deutlich, dass der *Realteil* $\Re$ und der *Imaginärteil* $\Im$ von einander getrennt sind. Dabei bildet die Kombination der beiden Zahlenteile die *komplexe Zahl* $z = a + bi = 3 + 4i$. Der *Realteil* $\Re$ und der *Imaginärteil* $\Im$ kann durch folgende *Operatoren* bestimmt werden:

$$\Re(z) = \mathrm{Re}(z) = a = 3 \\ \Im(z) = \mathrm{Im}(z) = b = 4 \quad . \tag{11.2}$$

Im Folgenden werden zwei *komplexe Zahlen* verwendet um die *Grundrechenarten* mit *komplexen Zahlen* zu erläutern:

$$z_1 = a + bi \quad , \\ z_2 = c + di \quad . \tag{11.3}$$

Wie schon die Veranschaulichung durch das *Koordinatensystem* zeigte, sind die *Realteile* und die *Imaginärteile* separiert zu betrachten. So ist es nicht verwunderlich, dass die *Addition* und *Subtraktion* ebenfalls separat im *Real-* und *Imaginärteil* durchgeführt.

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i \\ z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i \tag{11.4}$$

Bei der *Multiplikation* muss lediglich das *Distributivgesetz* angewendet werden. Anschließend müssen alle *Terme* nach *Real-* und *Imaginärteil* sortiert werden. Hierbei sollten die vorgestellten Eigenschaften aus Gleichung (11.1) beachtet werden.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= (ac + bdi^2) + (adi + bci) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned} \tag{11.5}$$

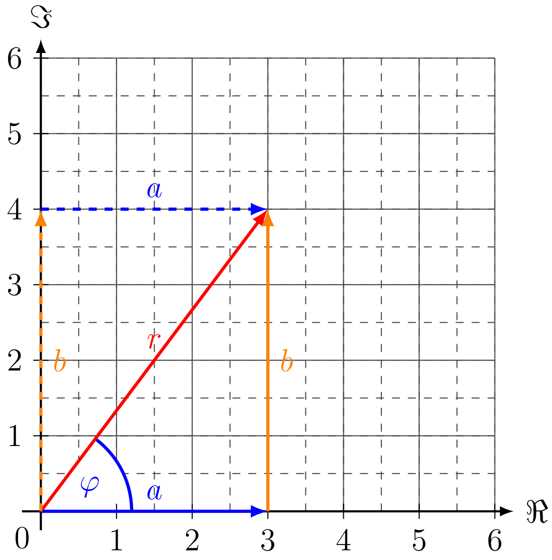
Bei der *Division* von *komplexen Zahlen*, sollte der *Bruch* so erweitert werden, dass i aus dem *Nenner* verschwindet. Dies gelingt mithilfe der sogenannten dritten *binomischen Formel*. Anschließend müssen die *Terme* im *Zähler* nach *Real-* und *Imaginärteil* sortiert werden.

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a + bi)}{(c + di)} \\ &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \end{aligned} \tag{11.6}$$

Nachdem die *Grundrechenarten* mit *komplexen Zahlen* erläutert wurden, muss noch der *Betrag* einer *komplexen Zahl* eingeführt werden. Wie im *Koordinatensystem* schon zu ersehen war, kann der *Betrag* der dargestellten Zahl mit dem *Satz des Pythagoras* ermittelt werden:

$$|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad . \tag{11.7}$$

Eine *komplexe Zahl* kann ebenso über die *Exponentialfunktion* dargestellt werden.



$$z_1 = a + bi = re^{i\varphi} \tag{11.8}$$

Dabei werden die *Parameter* a und b in andere *Parameter* r und φ ungerechnet. Wenn der *Parameter* r festgesetzt wird lässt sich eine Beziehung zum *Einheitskreis* bei der Einführung der *trigonometrischen Funktionen* erkennen, sodass folgende *Identität* nach kurzer Überlegung offensichtlich wird:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{11.9}$$

Mit den *komplexen Zahlen* kommt auch die *Konjugation* ins Spiel. Bei einer *komplexen Konjugation* wird das *Vorzeichen* des *Imaginärteils invertiert* - also umgedreht.

$$\begin{aligned} \overline{z_1} &= \overline{a + bi} = a - bi \\ &= \overline{re^{i\varphi}} = re^{-i\varphi} \end{aligned} \tag{11.10}$$

Die *Konjugation* unterliegt folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ \overline{z_1} \cdot z_1 &= |z_1|^2 = a^2 + b^2 \\ \overline{z_1} + z_1 &= 2\Re(z_1) \\ \overline{z_1} + z_1 &= 2i\Im(z_1) \\ \overline{\overline{z_1}} &= z_1 \end{aligned} \tag{11.11}$$

Die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$ werden in der weiterführenden Mathematik für nahezu alle Fachbereiche häufig vorkommen. Eine besonders häufige Anwendung ist die *Fourier-Transformation*, welche im Kapitel „Weiterführende Analysis“ erläutert wird.

11.1.1 Übungsaufgaben zu komplexen Zahlen

Aufgabe 1: *Bestimme Real- $\Re$ und Imaginärteil $\Im$ der komplexen Zahlen.*

$a)\ z = 1 + 2i$ $\quad b)\ z = 3 - 8i$

$c)\ z = -4 + i$ $\quad d)\ z = 7i$

$e)\ z = 6$ $\quad f)\ z = -7 + 5i$

$g)\ z = -\frac{4}{5} + \frac{6}{7}i$ $\quad h)\ z = -\frac{9}{4} - \frac{7}{3}i$

$i)\ z = \sqrt{2} - i\ln 6$ $\quad j)\ z = -e - \pi i$

Aufgabe 2: *Addiere die komplexen Zahlen.*

$a)\ z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = 6 + 2i$ $\quad b)\ z_1 = 7 + 2i$ und $z_2 = 1 + 5i$

$c)\ z_1 = 3 + 8i$ und $z_2 = 2 - 5i$ $\quad d)\ z_1 = 11 + 3i$ und $z_2 = 8i - 9$

$e)\ z_1 = 2,4 + 5,7i$ und $z_2 = 8,2 + 1,9i$ $\quad f)\ z_1 = 6,4 + 0,3i$ und $z_2 = 7,05 - 1,2i$

$g)\ z_1 = 1,54 + 5,93i$ und $z_2 = 4,3i - 0,67$ $\quad h)\ z_1 = 0,04 + 2,35i$ und $z_2 = 1,98 + 9,87i$

$i)\ z_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2}i$ und $z_2 = \frac{8}{5} + \frac{7}{8}i$ $\quad j)\ z_1 = \frac{7}{4} - \frac{7}{3}i$ und $z_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{7}i$

$k)\ z_1 = \frac{4}{11} + \frac{7}{10}i$ und $z_2 = \frac{2}{5} - \frac{3}{8}i$ $\quad l)\ z_1 = \frac{6}{7} + \frac{7}{12}i$ und $z_2 = \frac{13}{5} - \frac{7}{6}i$

$m)\ z_1 = \frac{4}{5} - 0,64i$ und $z_2 = \frac{15}{7} + 5,3i$ $\quad n)\ z_1 = 6,54 + \frac{3}{20}i$ und $z_2 = 3,28 + \frac{5}{3}i$

$o)\ z_1 = \frac{3}{4} - 1,33i$ und $z_2 = 0,79 + \frac{8}{5}i$ $\quad p)\ z_1 = 3,21 + 0,003i$ und $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}i$

$q)\ z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$ $\quad r)\ z_1 = \sqrt{11} + \sqrt{23}i$ und $z_2 = \sqrt{21} + \sqrt{13}i$

$s)\ z_1 = \ln 5 + i\ln 15$ und $z_2 = \ln 8 + i\ln 2$ $\quad t)\ z_1 = \log_4 11 + \pi i$ und $z_2 = e\mathrm{lb}5 + i\lg 32$

Aufgabe 3: *Subtrahiere die komplexen Zahlen* $(z_1 - z_2)$.

a) $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = 6 + 2i$

b) $z_1 = 7 + 2i$ und $z_2 = 1 + 5i$

c) $z_1 = 3 + 8i$ und $z_2 = 2 - 5i$

d) $z_1 = 11 + 3i$ und $z_2 = 8i - 9$

e) $z_1 = 2,4 + 5,7i$ und $z_2 = 8,2 + 1,9i$

f) $z_1 = 6,4 + 0,3i$ und $z_2 = 7,05 - 1,2i$

g) $z_1 = 1,54 + 5,93i$ und $z_2 = 4,3i - 0,67$

h) $z_1 = 0,04 + 2,35i$ und $z_2 = 1,98 + 9,87i$

i) $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2}i$ und $z_2 = \frac{8}{5} + \frac{7}{8}i$

j) $z_1 = \frac{7}{4} - \frac{7}{3}i$ und $z_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{7}i$

k) $z_1 = \frac{4}{11} + \frac{7}{10}i$ und $z_2 = \frac{2}{5} - \frac{3}{8}i$

l) $z_1 = \frac{6}{7} + \frac{7}{12}i$ und $z_2 = \frac{13}{5} - \frac{7}{6}i$

m) $z_1 = \frac{4}{5} - 0,64i$ und $z_2 = \frac{15}{7} + 5,3i$

n) $z_1 = 6,54 + \frac{3}{20}i$ und $z_2 = 3,28 + \frac{5}{3}i$

o) $z_1 = \frac{3}{4} - 1,33i$ und $z_2 = 0,79 + \frac{8}{5}i$

p) $z_1 = 3,21 + 0,003i$ und $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}i$

q) $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$

r) $z_1 = \sqrt{11} + \sqrt{23}i$ und $z_2 = \sqrt{21} + \sqrt{13}i$

s) $z_1 = \ln 5 + i \ln 15$ und $z_2 = \ln 8 + i \ln 2$

t) $z_1 = \log_4 11 + \pi i$ und $z_2 = e\mathrm{lb}5 + i \lg 32$

Aufgabe 4: *Multipliziere die komplexen Zahlen.*

a) $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = 6 + 2i$

b) $z_1 = 7 + 2i$ und $z_2 = 1 + 5i$

c) $z_1 = 3 + 8i$ und $z_2 = 2 - 5i$

d) $z_1 = 11 + 3i$ und $z_2 = 8i - 9$

e) $z_1 = 2,4 + 5,7i$ und $z_2 = 8,2 + 1,9i$

f) $z_1 = 6,4 + 0,3i$ und $z_2 = 7,05 - 1,2i$

g) $z_1 = 1,54 + 5,93i$ und $z_2 = 4,3i - 0,67$

h) $z_1 = 0,04 + 2,35i$ und $z_2 = 1,98 + 9,87i$

i) $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2}i$ und $z_2 = \frac{8}{5} + \frac{7}{8}i$

j) $z_1 = \frac{7}{4} - \frac{7}{3}i$ und $z_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{7}i$

k) $z_1 = \frac{4}{11} + \frac{7}{10}i$ und $z_2 = \frac{2}{5} - \frac{3}{8}i$

l) $z_1 = \frac{6}{7} + \frac{7}{12}i$ und $z_2 = \frac{13}{5} - \frac{7}{6}i$

m) $z_1 = \frac{4}{5} - 0,64i$ und $z_2 = \frac{15}{7} + 5,3i$

n) $z_1 = 6,54 + \frac{3}{20}i$ und $z_2 = 3,28 + \frac{5}{3}i$

o) $z_1 = \frac{3}{4} - 1,33i$ und $z_2 = 0,79 + \frac{8}{5}i$

p) $z_1 = 3,21 + 0,003i$ und $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}i$

q) $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$

r) $z_1 = \sqrt{11} + \sqrt{23}i$ und $z_2 = \sqrt{21} + \sqrt{13}i$

s) $z_1 = \ln 5 + i \ln 15$ und $z_2 = \ln 8 + i \ln 2$

t) $z_1 = \log_4 11 + \pi i$ und $z_2 = e\mathrm{lb}5 + i \lg 32$

Aufgabe 5: *Dividiere die komplexen Zahlen* $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$.

$a)$ $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = 6 + 2i$

$b)$ $z_1 = 7 + 2i$ und $z_2 = 1 + 5i$

$c)$ $z_1 = 3 + 8i$ und $z_2 = 2 - 5i$

$d)$ $z_1 = 11 + 3i$ und $z_2 = 8i - 9$

$e)$ $z_1 = 2,4 + 5,7i$ und $z_2 = 8,2 + 1,9i$

$f)$ $z_1 = 6,4 + 0,3i$ und $z_2 = 7,05 - 1,2i$

$g)$ $z_1 = 1,54 + 5,93i$ und $z_2 = 4,3i - 0,67$

$h)$ $z_1 = 0,04 + 2,35i$ und $z_2 = 1,98 + 9,87i$

$i)$ $z_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{2}i$ und $z_2 = \frac{8}{5} + \frac{7}{8}i$

$j)$ $z_1 = \frac{7}{4} - \frac{7}{3}i$ und $z_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{7}i$

$k)$ $z_1 = \frac{4}{11} + \frac{7}{10}i$ und $z_2 = \frac{2}{5} - \frac{3}{8}i$

$l)$ $z_1 = \frac{6}{7} + \frac{7}{12}i$ und $z_2 = \frac{13}{5} - \frac{7}{6}i$

$m)$ $z_1 = \frac{4}{5} - 0,64i$ und $z_2 = \frac{15}{7} + 5,3i$

$n)$ $z_1 = 6,54 + \frac{3}{20}i$ und $z_2 = 3,28 + \frac{5}{3}i$

$o)$ $z_1 = \frac{3}{4} - 1,33i$ und $z_2 = 0,79 + \frac{8}{5}i$

$p)$ $z_1 = 3,21 + 0,003i$ und $z_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}i$

$q)$ $z_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}i$ und $z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{7}i$

$r)$ $z_1 = \sqrt{11} + \sqrt{23}i$ und $z_2 = \sqrt{21} + \sqrt{13}i$

$s)$ $z_1 = \ln 5 + i \ln 15$ und $z_2 = \ln 8 + i \ln 2$

$t)$ $z_1 = \log_4 11 + \pi i$ und $z_2 = e\mathrm{lb}5 + i \lg 32$

Aufgabe 6: *Komplex konjugiere die komplexen Zahlen.*

$a)$ $z = 2 + 3i$

$b)$ $z = 6 - 9i$

$c)$ $z = -4 - i$

$d)$ $z = 8$

$e)$ $z = -3i$

$f)$ $z = -4 + 2i$

$g)$ $z = -\frac{5}{7} + \frac{9}{8}i$

$h)$ $z = -\frac{4}{3} - \frac{7}{9}i$

$i)$ $z = \sqrt{5} - i \ln 8$

$j)$ $z = e - \pi i$

Aufgabe 7: *Bestimme Betrag der komplexen Zahlen.*

a) $z = 4 + 7i$	*b)* $z = 2 - 2i$
c) $z = 7 - 2i$	*d)* $z = 1 - 7i$
e) $z = 3 + 8i$	*f)* $z = -7 + 5i$
g) $z = -\frac{1}{6} + \frac{5}{8}i$	*h)* $z = -\frac{3}{5} - \frac{9}{10}i$
i) $z = \sqrt{7} - i\ln 3$	*j)* $z = -e + \pi i$

Aufgabe 8: *Gegeben sind sechs komplexe Zahlen. Berechne das Ergebnis mit diesen Zahlen. Bestimme anschließend vom Ergebnis die komplex konjugierte Zahl, den Betrag sowie Real- $\Re$ und Imaginärteil $\Im$.*

$z_1 = 2 + 4i$ und $z_2 = 5 - i$ und $z_3 = 4 + 5i$ und
$z_4 = 3i - 5$ und $z_5 = 3 + 7i$ und $z_6 = -4 - 3i$

a) $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 =$	*b)* $z_6 + z_5 - z_1 - z_3 =$
c) $z_2 \cdot z_6 + z_1 \cdot z_4 =$	*d)* $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_5}{z_4} =$
e) $z_2 \cdot z_6 - z_1 \cdot z_4 =$	*f)* $\frac{z_6}{z_3} - z_1 \cdot z_2 =$
g) $\frac{z_6}{z_3} \cdot z_2 - z_1 =$	*h)* $z_5\left(z_2 + z_6\right) + z_4 =$
i) $\left(z_2 + z_6\right)\left(z_4 - z_1\right) =$	*j)* $\left(z_3 + z_2\right)^2 - z_6 =$

Aufgabe 9: *Berechne den Wert des Terms, wenn* $z_1 = 4 + 2i$, $z_2 = 1 - 3i$, $z_3 = -3 + i$ *und* $z_4 = -2 - 5i$ *gilt.* (Mit Musterlösung!)

a) $z_1 + z_2 + z_3 =$

b) $\bar{z}_4 - z_3 + z_1 =$

c) $z_2 \cdot z_4 =$

d) $z_4 \cdot \bar{z}_1 - z_3 =$

e) $(z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_3 + z_4)$

f) $\frac{z_3}{z_1} =$

g) $\frac{z_2 - z_1}{z_4} =$

h) $z_3 - \frac{z_1}{z_2} =$

i) $\Im(z_2 - z_4) =$

j) $\Re(z_2 \cdot z_4) =$

k) $\Im(z_2 - z_4) + \Re(z_3 - z_1)i =$

l) $\Re\left(\frac{z_4}{z_3}\right) =$

m) $z_1 \cdot z_1 =$

n) $z_2 \cdot \bar{z}_2 =$

Aufgabe 10: *Beweise die Gleichung über einen direkten Beweis für* $f(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$. (Mit Musterlösung!)

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 - (f'(x))^2}dx = f'(a) - f'(b)$$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.89) Lösungen zu komplexen Zahlen.

11.2 Komplexe Matrizen

Adjungierte Matrix

$$\begin{pmatrix} a & ib \\ c & id \end{pmatrix}^{\dagger} = \overline{\begin{pmatrix} a & ib \\ c & id \end{pmatrix}}^{T} = \overline{\begin{pmatrix} a & ib \\ c & id \end{pmatrix}^{T}} = \begin{pmatrix} a & c \\ -ib & -id \end{pmatrix} \tag{11.12}$$

$$\begin{aligned} (A+B)^{\dagger} &= A^{\dagger} + B^{\dagger} \\ (\lambda A)^{\dagger} &= \overline{\lambda} A^{\dagger} \\ (A^{\dagger})^{\dagger} &= A \\ (A \cdot B)^{\dagger} &= B^{\dagger} \cdot A^{\dagger} \\ (A+B)^{\dagger} &= A^{\dagger} + B^{\dagger} \\ \det(A^{\dagger}) &= \overline{\det(A)} \\ \mathrm{tr}(A^{\dagger}) &= \overline{\mathrm{tr}(A)} \\ (A^{-1})^{\dagger} &= (A^{\dagger})^{-1} \end{aligned} \tag{11.13}$$

$$A^{\dagger} = \mathrm{adj}(A) = A^{*} = A^{+} = A^{H} \tag{11.14}$$

hmmm –¿

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\dagger} \tag{11.15}$$

¡– hmmm

11.2.1 Übungsaufgaben zu komplexen Matrizen

Aufgabe 1: .

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.90) Lösungen zu komplexen Matrizen.

12 Weiterführende Analysis

12.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Differentialgleichungen beschreiben Zusammenhänge zwischen einer *Funktion* und seinen *Ableitungen*. Diese *Gleichungen* können über *Integration* und *Ableitungsansätze* gelöst werden. Generell sind zwei *Differentialgleichungstypen* mit jeweils zwei Unterarten mit den bereits vorgestellten Methoden lösbar. In diesem Abschnitt werden die *Differentialgleichungen* erster *Ordnung* vorgestellt, also dem Zusammenhang zwischen der *Funktion* und seiner ersten *Ableitung*. Dabei wird jeder *Differentialgleichung* in zwei Teile aufgeteilt, in den *homogenen* und *inhomogenen* Teil, welche man über jeweils andere Methoden lösen kann.

$$\underbrace{f(x) - \omega f'(x)}_{homogen} = \underbrace{k}_{inhomogen} \tag{12.1}$$

Um diese beispielhafte *Differentialgleichung* zu lösen, wird stets zu erst die *homogene Differentialgleichung* gelöst. Dazu wird sich der bekannten *Operatoralgebra* bemächtigt und alles was sich auf die *Variable* x bezieht auf die eine Seite des Gleichheitszeichen und alles was sich auf die *Funktionsvariable* f bezieht auf die andere Seite des Gleichheitszeichen gebracht.

$$
\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{\omega} f'(x) &= 0 \\
f - \frac{1}{\omega}\frac{df}{dx} &= 0 && \Big| + \frac{1}{\omega}\frac{df}{dx} \\
f &= \frac{1}{\omega}\frac{df}{dx} && |\cdot dx \\
f dx &= \frac{1}{\omega} df && |: f \\
dx &= \frac{1}{\omega}\frac{1}{f} df && \Big| \int \\
\int dx &= \int \frac{1}{\omega}\frac{1}{f} df \\
x + c &= \frac{1}{\omega} \ln(f) && |\cdot \omega \\
x\omega + c\omega &= \ln(f) && \big| e^{()} \\
e^{x\omega + c\omega} &= f(x) \\
\Rightarrow f_H(x) &= e^{x\omega + c\omega} \\
f_H(x) &= e^{x\omega + c\omega} \\
f_H(x) &= e^{x\omega} \cdot e^{c\omega} \\
f_H(x) &= A e^{x\omega}
\end{aligned}
\tag{12.2}
$$

Dieses Verfahren wird *Separation der Variablen* genannt. Dieses Verfahren zeichnet sich wie gezeigt dadurch aus, dass die *Variablen* separiert werden, eine *Integration* durchgeführt und anschließend nach der *Funktionsvariablen* aufgelöst wird. Bei der *Integration* darf niemals die *Integrationskonstante* c vergessen werden. Im letztem Schritt wurden die *Konstanten* zusammengefasst und durch A *substituiert*.

Nachdem die *homogene* Lösung der *Differentialgleichung* gefunden wurde, muss noch die *inhomogene Gleichung* bestimmt werden. Dies wird in der Regel durch den *Ansatz* „*Variation der Konstanten*“ bewerkstelligt. Für diesen *Ansatz* wird die *substituierte* zusammengefasste *Konstant* A in Abhängigkeit der *Variable* x gesetzt.

$$
\begin{aligned}
f_H(x) &= A e^{x\omega} \\
\Rightarrow \text{ Ansatz:} \quad f_A(x) &= A(x) e^{x\omega} \\
f_A'(x) &= \omega A(x) e^{x\omega} + A'(x) e^{x\omega}
\end{aligned}
\tag{12.3}
$$

Dieser *Ansatz* $f_A(x)$ mit seiner *Ableitung* $f_A'(x)$ wird in die *Differentialgleichung* eingesetzt und anschließend für die entstehende *Differentialgleichung* der ehemaligen *Konstante* gelöst.

$$
\begin{aligned}
f(x) - \frac{1}{\omega} f'(x) &= k \\
\Rightarrow A(x)e^{x\omega} - \frac{1}{\omega}\left(\omega A(x)e^{x\omega} + A'(x)e^{x\omega}\right) &= k \\
\frac{1}{\omega} A'(x)e^{x\omega} &= k \qquad |\text{Separation der Variablen} \\
\frac{1}{\omega}\frac{dA}{dx} e^{x\omega} &= k \qquad \Big|: \frac{e^{x\omega}}{\omega dx} \\
dA &= \omega k e^{-x\omega} dx \qquad \Big| \int \\
\int dA &= \int \omega k e^{-x\omega} dx \\
\Rightarrow A(x) &= -k e^{-x\omega} + c
\end{aligned}
\tag{12.4}
$$

Die Lösung für $A(x)$ wird in den *Ansatz* aus Gleichung (12.3) eingesetzt, sodass die *inhomogene* Lösung - die *partikuläre* Lösung - $f_p(x)$ gefunden wurde:

$$
\begin{aligned}
f_A(x) &= A(x)e^{x\omega} \qquad \text{mit } A(x) = -ke^{-x\omega} + c \\
\Rightarrow f_p(x) &= \left(-ke^{-x\omega} + c\right) e^{x\omega} \\
\Rightarrow f_p(x) &= -k + ce^{x\omega} \quad .
\end{aligned}
\tag{12.5}
$$

Die gesamte Lösung der *Differentialgleichung* ergibt sich durch die *Addition* der *homogenen* $f_H(x)$ und der *partikulären* Lösung $f_p(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_H(x) + f_p(x) \\
\Rightarrow f(x) &= Ae^{x\omega} - k + ce^{x\omega} \\
f(x) &= (A + c)e^{x\omega} - k \\
f(x) &= Be^{x\omega} - k \quad .
\end{aligned}
\tag{12.6}
$$

Durch spezielle Bedingungen an die *Differentialgleichung* kann die *Konstante* B genaustens bestimmt werden. Wie mit diesen *Randbedingungen* umgegangen wird, wird in einer späteren Version des Buches detailliert in Beispielen ausgeführt.

12.1.1 Übungsaufgaben zu Differentialgleichungen 1. Ordnung

Aufgabe 1: *Löse die homogenen Differentialgleichungen durch Separation der Variablen.*

$a)\ x\dot{x} - 5t = 0$ $\quad b)\ r\sin(z)dz - (1-\cos(z))dr = 0$

$c)\ xy' + y = 0$ $\quad d)\ \dot{r} + r\cos(t) = 0$

$e)\ -\lambda N = \dot{N}$ $\quad f)\ y^2y' + x^2 = 1$

$g)\ z^2 = z'x$ $\quad h)\ s + T\dot{s} = 0$

$i)\ L\dot{I} + RI = 0$ $\quad j)\ y' - y = -y'x^2$

$k)\ \dot{x}\sin(kx) = -t$ $\quad l)\ y' + \dfrac{\sin(kx)}{y^{-\frac{3}{2}}} = 0$

Aufgabe 2: *Bestimme die Funktionsgleichung für $y(x)$, die die Differentialgleichung erfüllt.* (Mit Musterlösung!)

$a)\ y' - g = 0$ $\quad b)\ y'y - r = 0$

$c)\ y' - yx = 0$ $\quad d)\ \dfrac{y'}{y^2} - kt = 0$

$e)\ y' + y'x^2 = 1$ $\quad f)\ y'' = z$

$g)\ xy'' - r = 0$ $\quad h)\ y' - y = 2rt$

Aufgabe 3: *Finde die inhomogenen Lösungen der Differentialgleichungen durch Variation der Konstanten.*

a) *b)*

Aufgabe 4: *Löse die inhomogenen Differentialgleichungen durch Separation der Variablen und Variation der Konstanten.*

a) *b)*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.91) Lösungen zu Differentialgleichungen 1. Ordnung.

12.2 Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die zweite *Differentialgleichungsart* ist die *Differentialgleichung* zweiter *Ordnung*. Diese stellt einen Zusammenhang zwischen der *Funktion*, der ersten und der zweiten *Ableitung* auf. In diesem Abschnitt werden die *inhomogenen Differentialgleichungen* zweiter *Ordnung* ausgelassen, da sie selten in der Naturwissenschaft vorkommen und individueller mit verschiedenen speziellen *Ansätzen* behandelt werden müssen. *Inhomogene Differentialgleichungen* zweiter *Ordnung* werden in einer späteren Version des Buches ausführlicher erläutert.

$$f''(x) + \gamma f'(x) - \omega^2 f(x) = 0 \tag{12.7}$$

Um eine *homogene Differentialgleichung* zweiter *Ordnung* zu lösen, wird in der Regel der *Exponentialansatz*

$$f(x) = Ae^{\lambda t} \tag{12.8}$$

und die damit verbundenen *Ableitungen* verwendet

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lambda A e^{\lambda t} \\ f''(x) &= \lambda^2 A e^{\lambda t} \end{aligned} \tag{12.9}$$

und in die *Differentialgleichung* eingesetzt

$$\lambda^2 A e^{\lambda t} + \gamma \lambda A e^{\lambda t} - \omega^2 A e^{\lambda t} = 0 \quad . \tag{12.10}$$

Mittels dieses *Ansatzes* wurde die unbekannte *Funktion* $f(x)$ durch den unbekannten *Parameter* λ ersetzt. Der *Parameter* A kann durch *Randbedingungen* ungleich Null gewählt werden. Durch die Eigenschaften der *Exponentialfunktion* und der Irrelevanz des *Parameters* A kann die Gleichung für λ über *quadratische Ergänzung* gelöst werden.

$$\begin{aligned} \lambda^2 A e^{\lambda t} + \gamma \lambda A e^{\lambda t} - \omega^2 A e^{\lambda t} &= 0 && \Big| : Ae^{\lambda t} \\ \lambda^2 + \gamma\lambda - \omega^2 &= 0 && \Big| + \frac{\gamma^2}{4} \\ \lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{\gamma^2}{4} - \omega^2 &= \frac{\gamma^2}{4} && \Big| + \omega^2 \\ \lambda^2 + \gamma\lambda + \frac{\gamma^2}{4} &= \frac{\gamma^2}{4} + \omega^2 \\ \left(\lambda + \frac{\gamma}{2}\right)^2 &= \frac{\gamma^2}{4} + \omega^2 && \Big| \sqrt{} \\ \lambda_{1,2} + \frac{\gamma}{2} &= \pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega^2} && \Big| - \frac{\gamma}{2} \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega^2} \end{aligned} \tag{12.11}$$

Diese beiden Lösungen für den *Parameter* λ werden in den *Ansatz* $f(x) = Ae^{\lambda t}$ eingesetzt und die beiden Lösungen zusammen *addiert*:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= Ae^{\lambda_1 t} + Ae^{\lambda_2 t} \\
f(x) &= Ae^{\left(-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+\omega^2}\right)t} + Ae^{\left(-\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+\omega^2}\right)t} \quad .
\end{aligned}
\tag{12.12}
$$

Über den *Exponentialansatz* kann jede *homogene Differentialgleichung* zweiter *Ordnung* gelöst werden.

12.2.1 Übungsaufgaben zu Differentialgleichungen 2. Ordnung

Aufgabe 1: *Löse die homogenen Differentialgleichungen durch den exponentiellen Ansatz.* (Mit Musterlösung!)

a) $0 = y''(x) - my'(x)$

b) $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0$

c) $f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = 0$

d) $4f''(x) = 6f'(x) + f(x)$

e) $f''(x) = 3f(x) - 10f'(x)$

f) $f'''(x) + 2f''(x) + 5f'(x) = 0$

Aufgabe 2: *Finde die homogenen Lösungen der Differentialgleichungen durch den angebenen Ansatz.*

a) *b)*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.92) Lösungen zu Differentialgleichungen 2. Ordnung.

12.3 Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung

12.3.1 Übungsaufgaben zu inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung

Aufgabe 1: *Finde die inhomogenen Lösungen der Differentialgleichungen und den Ansatz zur Lösung.*

a) *b*)

Aufgabe 2: *Löse die inhomogenen Differentialgleichungen.*

a) *b*)

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.93) Lösungen zu inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung.

12.4 Distributionen

Eine *Distribution* ist im tieferem Sinne keine *Funktion*. Die δ-*Distribution* kann durch *Funktionen* und *Grenzwerte* ausgedrückt werden und ist ausschließlich unter einem *Integral* vorzufinden. Die δ-*Distribution* besitzt folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx &= f(0) \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx &= f(a) \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx &= 1 \\
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx &= 1 \\
\int_{a}^{b} \delta(x-c)f(x)dx &= \begin{cases} f(c) & ,\forall a<c<b \\ \frac{1}{2}f(c) & ,\forall a=c \vee b=c \\ 0 & ,\forall c<a<b \vee a<b<c \end{cases} \\
\delta(-x) &= \delta(x) \\
\delta(ax) &= \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad \forall a \neq 0 \\
\delta(h(x)) &= \frac{1}{|h'(a)|}\delta(x-a) \qquad \text{mit: } h(a)=0 \wedge h'(a) \neq 0 \text{ für: } \exists! x_N = a \\
\delta(h(x)) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|h'(a_n)|}\delta(x-a_n) \qquad \text{mit: } h(a_n)=0 \wedge h'(a_n) \neq 0 \\
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-a) &= -f'(a) \\
H'(x) &= \delta(x)
\end{aligned} \tag{12.13}$$

Wobei $H(x)$ eine spezielle *Stufenfunktion* ist. Es handelt sich um die *Heaviside-Funktion*. Sie ist definiert durch:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & ,\forall x<0 \\ \frac{1}{2} & ,\forall x=0 \\ 1 & ,\forall x>0 \end{cases} \tag{12.14}$$

Die δ-*Distribution* wurde in der Physik eingeführt um analytische Probleme zu umgehen und auf die physikalischen Messungen anzupassen. So kann bei einer elektrischen Punktquelle die Quellladung durch die δ-*Distribution* beschrieben, während sich ohne sie zuvor eine *Unendlichkeit* auftat.

12.4.1 Übungsaufgaben zu Distributionen

Aufgabe 1: *Löse die Integrale mit Distribution.*

$a)$ $b)$

Aufgabe 2: *Zeige die Richtigkeit der Gleichungen.*

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.94) Lösungen zu Distributionen.

12.5 Kurvenintegral

12.5.1 Übungsaufgaben zu Kurvenintegralen

Aufgabe 1: .

a) *b)*

Aufgabe 3: *Berechne die Oberfläche des Rotationskörpers um die Abszisse in den angegebenen Grenzen.*

a) $f(x) = x^2 - 3x \ \ \forall\, x \in [0; x_N]$

b) $f(x) = x^2 - x - 2 \ \ \forall\, x \in [x_{N_1}; x_{N_2}]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{4}e^x \ \ \forall\, x \in [0; 3]$

d) $f(x) = 2\sqrt{x} \ \ \forall\, x \in [2; 8]$

e) $f(x) = 3\sqrt{3x} - x \ \ \forall\, x \in [0; x_N]$

f) $f(x) = \ln(x) \ \ \forall\, x \in \left[\dfrac{1}{3}; 6\right]$

g) $f(x) = x^3 - 3x - 2 \ \ \forall\, x \in [x_{N_1}; x_{N_2}]$

h) $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \dfrac{9}{4} \ \ \forall\, x \in [x_{N_1}; x_{N_2}]$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.95) Lösungen zu Kurvenintegralen.

12.6 Ringintegral

12.6.1 Übungsaufgaben zu Ringintegralen

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.96) Lösungen zu Ringintegralen.

12.7 Fourier-Transformation

12.7.1 Übungsaufgaben zur Fourier-Transformation

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.97) Lösungen zur Fourier-Transformation.

12.8 Faltung

12.8.1 Übungsaufgaben zu Faltungen

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.98) Lösungen zu Faltungen.

12.9 Gemischte Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 1: *Löse die Differentialgleichung und führe bei der gefunden Funktionsgleichung eine Kurvendiskussion durch.*

a) *b)*

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.99) Lösungen zu den gemischten Aufgaben zur Analysis.

13 Vektoranalysis

13.1 Tensoren

13.1.1 Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \forall i = j \\ 0 & , \forall i \neq j \end{cases} \tag{13.1}$$

13.1.2 Levi-Civita-Symbol

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von (1,2,3) ist.} \\ -1 & \text{, falls } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von (1,2,3) ist.} \\ 0 & \text{, falls mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \tag{13.2}$$

13.2 Gradient

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{13.3}$$

$$\operatorname{grad}\left(f(x,y,z)\right) = \vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{13.4}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(f+g) &= \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g \\ \vec{\nabla}(fg) &= g\vec{\nabla} f + f\vec{\nabla} g \end{aligned} \tag{13.5}$$

$$\frac{df}{dt} = \vec{\nabla} f \frac{d\vec{x}}{dt} \tag{13.6}$$

13.2.1 Übungsaufgaben zum Gradient

Aufgabe 1: *Bestimme den Gradienten der Funktionen.* (Mit Musterlösung!)

a) $f(x, y, z) = 3x^3y - 5z + 3yz^2$

b) $g(x, y, z) = z^y + e^{xz}$

c) $h(x, y, z) = \ln(xy) - \cos(4x^3z)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.100) Lösungen zum Gradient.

13.3 Divergenz

$$\operatorname{div}\left(\vec{F}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{13.7}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G} \tag{13.8}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (g\vec{F}) &= g\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) + \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} g\right) \\ \operatorname{div}(g\vec{F}) &= g\operatorname{div}\left(\vec{F}\right) + \vec{F} \cdot \operatorname{grad}(g) \end{aligned} \tag{13.9}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{G} \times \vec{F}) &= \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} G_y F_z - G_z F_y \\ G_z F_x - G_x F_z \\ G_x F_y - G_y F_x \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial\left(G_y F_z - G_z F_y\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(G_z F_x - G_x F_z\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(G_x F_y - G_y F_x\right)}{\partial z} \end{aligned} \tag{13.10}$$

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}(f)\right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f\right) = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) f = \vec{\nabla}^2 f = \Delta f \tag{13.11}$$

13.3.1 Übungsaufgaben zur Divergenz

Aufgabe 1: *Bestimme die Divergenz der Vektorfunktion.* (Mit Musterlösung!)

$$a)\ \vec{F} = \begin{pmatrix} 5yz \\ 3x + 5x^2y \\ z^3y + 6xz \end{pmatrix} \qquad b)\ \vec{G} = \begin{pmatrix} 2\sin(3x) \\ \cos(3y + z) \\ ie^{3iz^2x} \end{pmatrix} \qquad c)\ \vec{H} = \begin{pmatrix} xyz \\ z^2 - x^2 \\ \sqrt{5z} \end{pmatrix}$$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.101) Lösungen zur Divergenz.

13.4 Rotation

$$\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}F_z - \frac{\partial}{\partial z}F_y \\ \frac{\partial}{\partial z}F_x - \frac{\partial}{\partial x}F_z \\ \frac{\partial}{\partial x}F_y - \frac{\partial}{\partial y}F_x \end{pmatrix} \tag{13.12}$$

$$\operatorname{rot}\left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G} \tag{13.13}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times (g\vec{F}) &= g\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) + \left(\vec{\nabla} g\right) \times \vec{F} \\ \operatorname{rot}(g\vec{F}) &= g\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) + \operatorname{grad}(g) \times \vec{F} \end{aligned} \tag{13.14}$$

13.4.1 Übungsaufgaben zur Rotation

Aufgabe 1: *Beweise die Identität.*

$$\operatorname{div}\left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G}\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) - \vec{F}\operatorname{rot}\left(\vec{G}\right)$$

Aufgabe 2: *Beweise die Identität.*

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)\right) = \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\left(\vec{F}\right)\right) - \Delta\vec{F}$$

Aufgabe 3: *Beweise die Identität.*

$$\operatorname{rot}\left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$$

Aufgabe 4: *Beweise die Identität.*

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad}\left(f\right)\right) = 0$$

Aufgabe 5: *Beweise die Identität.*

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)\right) = 0$$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.102) Lösungen zur Rotation.

13.5 Koordinatenwechsel

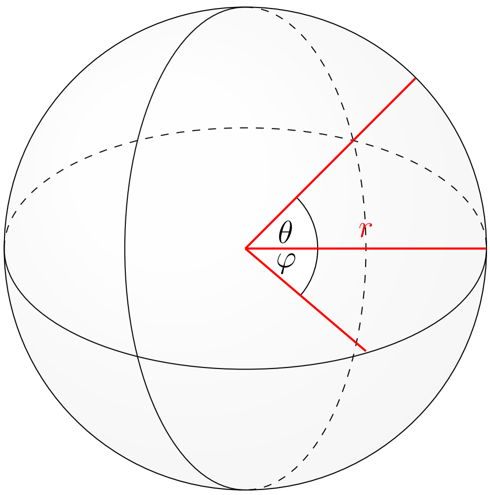
Vektoren Koordinaten
Zylinder

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\varphi \\
y &= \rho \sin\varphi \\
z &= z
\end{aligned}
\tag{13.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{e}_\rho &= \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
\hat{e}_\varphi &= \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
\hat{e}_\theta &= \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right|} \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{13.16}
$$

Kugelkoordinaten

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\varphi \\
y &= r \sin\theta \sin\varphi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}
\tag{13.17}
$$



$$\begin{aligned}
\hat{e}_r &= \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
\hat{e}_\varphi &= \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{pmatrix} \\
\hat{e}_\theta &= \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{13.18}$$

Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned}
J &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\theta & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\theta & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\
J^{-1} &= \frac{\partial(r,\theta,\varphi)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi & \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta} & \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{13.19}$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} \tag{13.20}$$

$$\begin{aligned}
\det J &= r^2 \sin\theta \\
dV &= r^2\sin\theta \; dr \; d\theta \; d\varphi \\
dA &= r^2\sin\theta \; d\theta \; d\varphi
\end{aligned} \tag{13.21}$$

Metrik und und flaches Linienelement

$$g = J^T J \quad \Rightarrow \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi \tag{13.22}$$

13.5.1 Übungsaufgaben zu Koordinatenwechseln

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.103) Lösungen zu Koordinatenwechseln.

13.6 Satz von Gauß

$$\oiint_{\partial(V)} \vec{A} d\vec{F} = \iiint_V \operatorname{div}\left(\vec{A}\right) dV \tag{13.23}$$

13.6.1 Übungsaufgaben zum Satz von Gauß

Aufgabe 1: .

$a)$ $b)$

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.104) Lösungen zum Satz von Gauß.

13.7 Satz von Stokes

$$\oint_{\partial(\mathcal{F})} \vec{A} d\vec{r} = \iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}\left(\vec{A}\right) dr \tag{13.24}$$

13.7.1 Übungsaufgaben zum Satz von Stokes

Aufgabe 1: .

a) *b*)

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.105) Lösungen zum Satz von Stokes.

14 Fehlerrechnung

Fehler entstehen bei jeder Messung. Deswegen muss zu jeder wissenschaftlichen Rechnung mit Vorhersage von *Werten* eine *Fehlerrechnung* angefertigt werden. Dabei werden die *systematischen* (*Fehler* durch Methoden oder Aufbau des Experiments) und *stochastischen Fehler* (Abweichungen der Messergebnisse) angegeben. In diesem Abschnitt werden die *stochastischen Fehler* thematisiert, da die *systematischen Fehler* komplexeren Anfangsbedingungen unterliegen, welche allerdings schlussendlich, nach der Bestimmung des anfänglichen Fehlerwertes, mit der gleichen Mathematik über *Fehlerfortpflanzung* in die betrachtete Größe ungerechnet.

14.1 Standardabweichungen

Die *Standardabweichung* ist eine wichtige Größe der *Fehlerrechnung*, wie auch in der *Stochastik*. Um die *Standardabweichung* zu bestimmen, wird zu nächst der *Mittelwert* $\bar{x}$ der Messwerte x_k bestimmt.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \tag{14.1}$$

Hierbei ist N die Gesamtanzahl der Messungen. Es wird deutlichen, dass der *Mittelwert* über die *Summe* der Messwerte *dividiert* durch die *Gesamtanzahl* der Messungen ermittelt wird.
Mittels des *Mittelwertes* kann nun die *Standardabweichung*, als *Wurzel* der *Varianz* $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(x)}$ *definiert* werden:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})^2} \tag{14.2}$$

Durch die *Differenz* wird die Abweichung nach Oben und Unten bestimmt, während durch die *Aufsummierung* der *Quadrate* eine *Standardisierung* unternommen wird. Da durch die Abweichung kleiner wird, je mehr Messergebnisse verwendet werden, wird durch die *Gesamtanzahl* geteilt.

Da die Klammer oftmals etwas sperrig erscheint, kann diese mit den *Verschiebungssatz* in zwei *Summen* ohne *Mittelwerte* übersetzt werden:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}(x_k-\bar{x})^2 &= \sum_{k=1}^{N}\left(x_k^2-2x_k\bar{x}+\bar{x}^2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N}x_k^2-\sum_{k=1}^{N}2x_k\bar{x}+\sum_{k=1}^{N}\bar{x}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N}x_k^2-2N\bar{x}\bar{x}+N\bar{x}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N}x_k^2-\frac{N}{N}N\bar{x}^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N}x_k^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}x_k\right)^2
\end{aligned}
\tag{14.3}
$$

Die *Unsicherheit* u ist durch die *Standardabweichung* definiert.

$$
u=\frac{1}{\sqrt{N}}\sigma \tag{14.4}
$$

14.1.1 Übungsaufgaben zur Standardabweichung

Aufgabe 1: *Bestimme aus den gegebenen Daten die Mittelwerte, Standardabweichungen und Unsicherheiten.*

a) 14; 12; 19; 17; 15; 15; 16; 17; 11; 13

b) 23; 21; 25; 22; 24; 19; 24; 24; 26; 21; 28; 20; 23

c) 45; 43; 51; 37; 43; 47; 44; 49; 39; 42; 46; 48

d) 7; 6; 6; 7; 4; 9; 2; 5; 6; 3; 3; 8; 9; 8; 2; 6

e) 123; 146; 98; 145; 111; 174; 89; 151; 127; 144; 178; 94; 167; 137; 133; 108; 147; 129

f) 268; 211; 279; 207; 288; 264; 214

g) 18; 15; 19; 17; 13; 11; 18; 17; 16; 14; 18; 19; 17; 17; 14; 14; 15; 14; 16; 17; 19; 18; 13; 13; 13; 19; 18; 12; 14; 16

h) 58; 65; 61; 52; 56; 55; 61; 59; 54; 62; 60; 60; 57; 59; 49; 66; 62; 51; 44; 68; 63; 64; 57; 58; 53; 67; 62

i) 684; 601; 574; 803; 597; 635

j) 74; 76; 75; 75; 73; 76; 74; 74; 73; 77; 73; 73; 76; 75; 75; 74; 74; 73; 75; 75; 76; 76; 74; 75; 74; 76; 77; 76

k) 54; 59; 51; 57; 50; 55; 55; 51; 48; 62; 57; 51; 52; 60

l) 1023; 1147; 953; 892; 976; 1002; 1084; 1065; 1047; 977; 899; 1096; 1023; 1058; 1106; 944; 967; 921; 1040; 1145; 909

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.106) Lösungen zur Standardabweichung.

14.2 Lineare Regression

In den Naturwissenschaften werden oftmals *lineare* Zusammenhänge untersucht. Mit der „*Linearen Regression*“ kann aus den *Messwerten* eine *Geradengleichung* bestimmt werden. Dabei werden die *Parameter* m und b der *Geraden* als fehlerbehaften Größen angesehen.

$$y = mx + b \tag{14.5}$$

Über der *Summe der kleinsten Quadrate* können die *Parameter* bestimmt werden. Diese Methode findet eine häufige Anwendung.

$$m' = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \qquad\qquad b' = \bar{y} - m'\bar{x} \tag{14.6}$$

Der *Steigungsparameter* m' wurde zuvor über ein *Steigungsdreieck* bestimmt. In direkter Assoziation dazu wird durch einen *Quotienten* aus *Standardabweichungen* ein standardisiertes *Steigungsdreieck* aufgestellt. Nach der Bestimmung des *Steigungsparameters* kann mit den *Mittelwerten* $\bar{x}$ und $\bar{y}$ der *Ordinatenachsenabschnitt* b' bestimmt werden. Die *Mittelwerte* und *Standardabweichungen* sind gegeben als:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k & \bar{y} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_k \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) & \sigma_x^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})^2 \quad . \end{aligned} \tag{14.7}$$

Hieraus resultiert die *Standardabweichung* für die *Funktionswerte* y:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{k=1}^{N} [y_k - (m'x_k + b')]^2} \quad . \tag{14.8}$$

Mit σ_y kann die *Standardabweichung* der *Parameter* berechnet werden, hier können folgende Ausdrücke gefunden werden:

$$\sigma_{m'} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{m'} = \sigma_y \sqrt{\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})^2}} \tag{14.9}$$

$$\sigma_{b'} = \bar{y} - \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}\bar{x} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{b'} = \sigma_y \sqrt{\frac{1}{N}\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{N} (x_k - \bar{x})^2}} \tag{14.10}$$

Bei einer *Ursprungsgerade* (*direkter Proportionalität*) $y = ax$ ist nur ein *Parameter* a zu bestimmen. Dieser ergibt sich analog zu den *Parameterausdrücken* die bereits vorgestellt wurden:

$$a = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} x_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2} \quad , \tag{14.11}$$

mit der *Standardabweichung*

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{N-1} \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} d_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{N} x_k^2}} \quad , \qquad \text{mit:} \;\; d_k = y_k - a x_k \quad . \tag{14.12}$$

14.2.1 Übungsaufgaben zur linearen Regression

Aufgabe 1: *Fülle die fehlenden Felder der Tabelle aus.*

a)

Aufgabe 2: *Bestimme die Ursprungsgradengleichung und gib die Unsicherheit an.*

a)

Aufgabe 3: *Bestimme die Gradengleichung und gib die Unsicherheit an.*

a)

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.107) Lösungen zur linearen Regression.

14.3 Fehlerfortpflanzung

Wenn mit einer fehlerbehafteten Größe weiter gerechnet werden muss, muss auch der *Fehler* mit vererbt werden. Diese Prozedur wird *Fehlerfortpflanzung* genannt. Dabei wird der *funktionelle* Zusammenhang zwischen der neuen y und der ersten fehlerbehafteten Größe x betrachtet. Dabei wird die Größe mit dem *Fehler* $x + \mathit{\Delta} x$ betrachtet. Der *Fehler* $\mathit{\Delta} x$ muss deutlich kleiner sein, als die Größe x. Erst dieses *Größenverhältnis* zwischen der Größe und dem *Fehler* lässt eine signifikante Aussage machen, sodass erst dann die Werte verwendbar werden. Durch dieses *Größenverhältnis*, ist eine *Taylor-Entwicklung* möglich.

$$\begin{aligned} y = y(x) \quad &\Rightarrow y(x+\mathit{\Delta} x) = y(x) + \frac{1}{1!}\frac{dy(x)}{dx}\mathit{\Delta} x + \frac{1}{2!}\frac{d^2y(x)}{dx^2}\left(\mathit{\Delta} x\right)^2 + \mathcal{O}\left((\mathit{\Delta} x)^3\right) \\ &\Rightarrow y(x+\mathit{\Delta} x) \approx y(x) + \frac{dy(x)}{dx}\mathit{\Delta} x \\ &\Rightarrow y(x+\mathit{\Delta} x) - y(x) = \mathit{\Delta} y = \frac{dy}{dx}\mathit{\Delta} x \end{aligned} \tag{14.13}$$

Da der *Fehlerwert* $\mathit{\Delta} x$ in der Regel sehr viel kleiner ist als die Messgröße x, kann die *Taylor-Entwicklung approximativ* in ersten *Ordnung* abgebrochen werden. Durch *Umstellen* der resultierenden *Gleichung* kann ein direkter Zusammenhang der Abweichungen, und somit auch den *Unsicherheiten*, der Messgrößen über ein *Differential* $\frac{\partial y}{\partial x}$ gefunden werden.

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta} y &= \frac{\partial y}{\partial x}\mathit{\Delta} x \\ \Rightarrow \quad u_y &= \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| u_x \end{aligned} \tag{14.14}$$

Wenn eine Größe y von mehreren Größen x_i abhängt, welche von einander unabhängig sind, werden die Ausdrücke *aufaddiert*:

$$\mathit{\Delta} y(x_1, x_2, ...) = \frac{\partial y}{\partial x_1}\mathit{\Delta} x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\mathit{\Delta} x_2 + ... \quad . \tag{14.15}$$

So ergibt sich daraus die *Unsicherheit*:

$$u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}u_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}u_2\right)^2 + ...} \quad . \tag{14.16}$$

14.3.1 Übungsaufgaben zur Fehlerfortpflanzung

Aufgabe 1: *Bestimme den Fehler der resultierenden Größe.*

a)

Aufgabe 2: *Bestimme den Fehler der resultierenden Größe.*

a)

Aufgabe 3: *Bestimme den Fehler der resultierenden Größe.*

a)

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.108) Lösungen zur Fehlerfortpflanzung.

15 Nährungsverfahren

Oftmals reichen die *algebraischen* Kenntnisse nicht aus oder sind nicht zwingend erforderlich, wenn bestimme Probleme gelöst werden müssen. Aus diesem Grund wurden *Näherungsverfahren* entwickelt, welche nur eine gewissen Genauigkeit bieten können. In der angewandten Mathematik, wie den Ingenieurwissenschaftlich, sind exakte Lösungen kaum möglich und auch weit von der Anwendbarkeit entfernt, denn die Genauigkeit beim Messen und der Herstellung ist beschränkt. Aber auch die Zeitersparnis kann ein Argument sein, um *Näherungsverfahren* zu benutzen.

15.1 Newton Verfahren

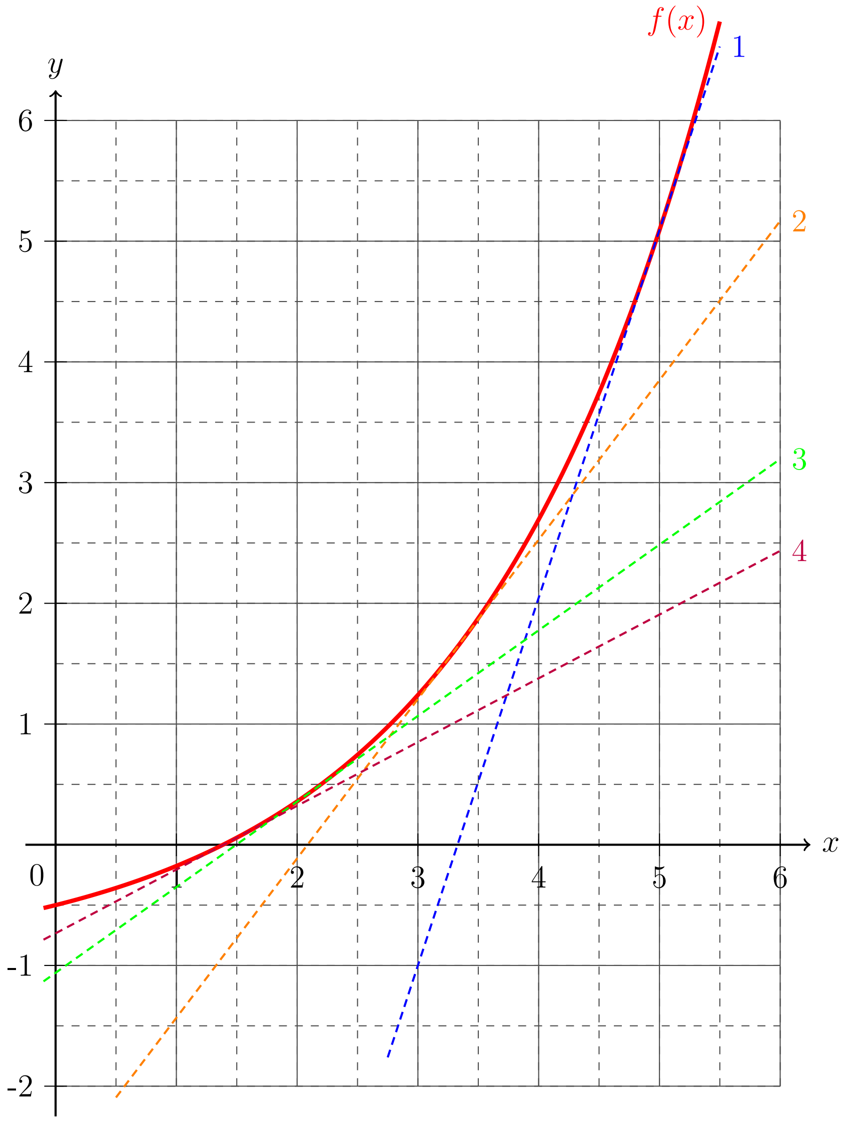
Für Probleme der *Analysis* wird oftmals das sogenannte *Newton Verfahren* benutzt, durch die Wahl eines bestimmten *Anfangspunktes* x_0 beginnt. Um diesen *Punkt* wird eine *Tangente* $t(x_0)$ auf gestellt und deren *Nullstelle* bestimmt. Die gefundene *Nullstelle* wird wiederum benutzt um eine neue *Tangente* $t(x_1)$ zu konstruieren, deren *Nullstelle* wiederum bestimmt wird. Dieses Verfahren wird immer wieder angewandt, sodass aus der *Tangentengleichung* eine *iterative* Gleichung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} t(x) &= f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) \\ t(x_{n+1}) = 0 &= f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) \\ 0 &= f'(x_n)\,x_{n+1} - f'(x_n)\,x_n + f(x_n) \\ f'(x_n)\,x_{n+1} &= f'(x_n)\,x_n - f(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad . \end{aligned} \tag{15.1}$$

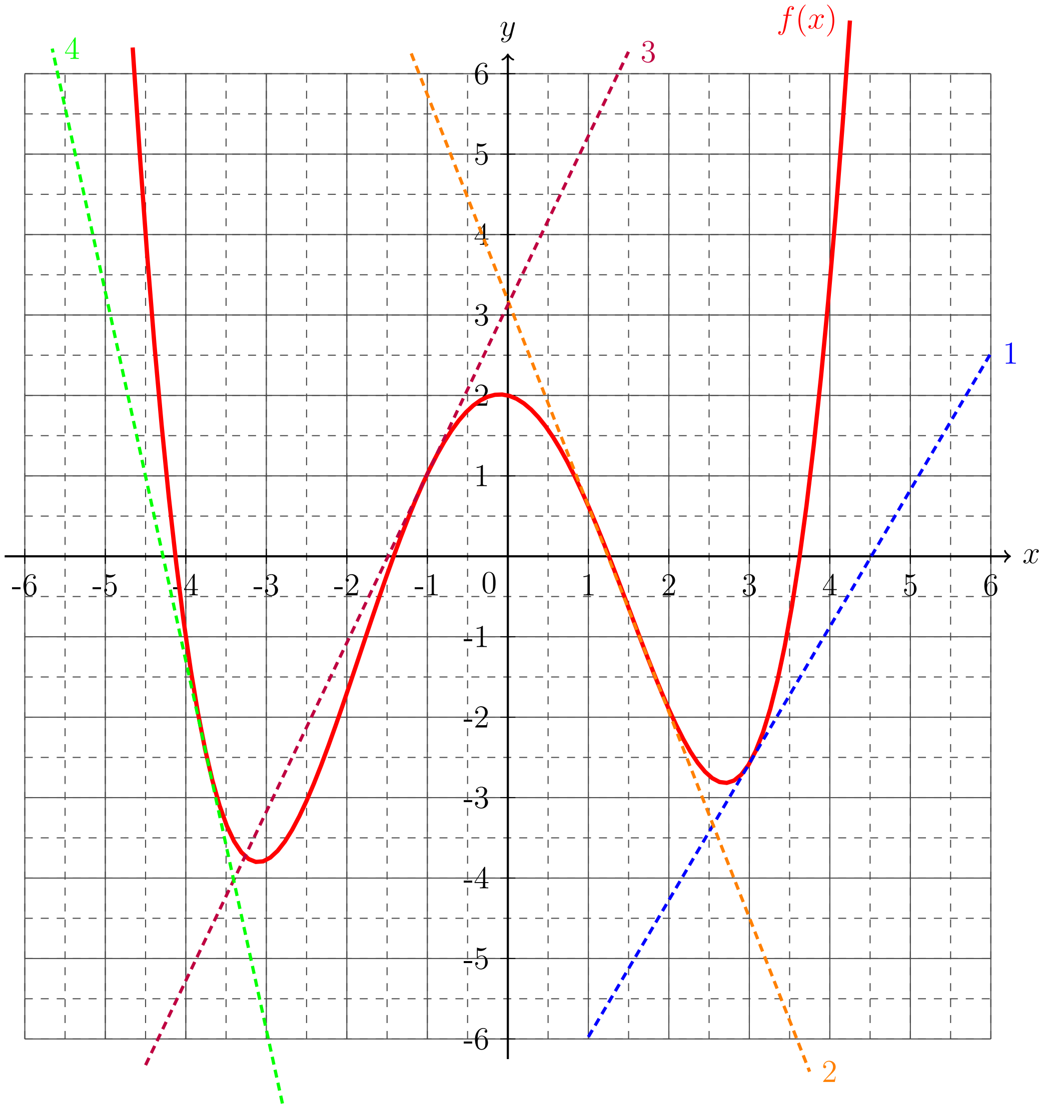
Mit der resultierenden *Gleichung* kann das Verfahren immer weiter durchgeführt werden,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \tag{15.2}$$

bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Graphisch lässt sich dies wie folgt veranschaulichen:



Die Wahl des Anfangspunktes x_0 bestimmt auch stets den jeweiligen *Punkt* der gesuchten Art. Somit sollte ein Anfangspunkt gut gewählt sein, was mit einer *Skizze* des *Graphens* oder doch kritischem reflektieren des Ergebnisses erreicht werden kann.



Durch das vorgestellte *Näherungsverfahren* können viele Probleme mit einer jeweiligen gewünschten Genauigkeit gelöst werden.

15.1.1 Übungsaufgaben zum Newton Verfahren

Aufgabe 1: *Bestimme die Nullstellen.*

$a)\ f(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$

$b)\ f(x) = x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$

$c)\ f(x) = x^4 + 7x^3 - 29x^2 - 123x + 360$

$d)\ f(x) = x^6 - 17x^4 + 88x^2 - 144$

$e)\ f(x) = x^5 + x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 16x + 16$

$f)\ f(x) = x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$

$g)\ f(x) = 2x^3 + x^4 - 6x^2$

$h)\ f(x) = 2x^2 - x^8 - 3x^5 + 2$

$i)\ f(x) = 4x^4 - 6x^2 - 9$

$j)\ f(x) = -3x^5 + 7x^4 + 2x^2$

$k)\ f(x) = \dfrac{2x^3 - 2x}{x - 1}$

$l)\ f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x - 5}{5x^2 + 3}$

$m)\ f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2xe^x$

$n)\ f(x) = 2x^2 - e^{-0,2x-1} - 2$

Aufgabe 2: *Bestimme die Extremstellen.*

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 9x^3 + \dfrac{239}{2}x^2 - 693x - 1295$

$b)\ f(x) = 3x^5 - 530x^3 + 30375x - 82360$

$c)\ f(x) = \dfrac{1}{7}x^7 - 2,4x^5 + 16x^3 - 64x + 256$

$d)\ f(x) = \dfrac{1}{6}x^6 - 20x^4 + 512x^2 - 2048$

$e)\ f(x) = \dfrac{1}{8}x^8 - \dfrac{2}{7}x^7 - \dfrac{8}{3}x^6 + \dfrac{2}{5}x^5 + \dfrac{15}{4}x^4 + 1$

$f)\ f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 264x - 32$

$g)\ f(x) = x^2 + 4x^3 - 7x^5$

$h)\ f(x) = 2 - x^4 + 4x^3 - x^6$

$i)\ f(x) = -2x^3 + 6x^4 + 11x^2$

$j)\ f(x) = 4x^6 + 3x^3 + 8x^2 - 1$

$k)\ f(x) = \dfrac{x^4 - 2x + 3}{1 - x}$

$l)\ f(x) = \dfrac{3x^4 - 4x^2 + 2}{5x + 3}$

$m)\ f(x) = 3xe^{-x} - \dfrac{5}{4}x^2$

$n)\ f(x) = 6x^4 - e^{\frac{x}{4}} - 3$

Aufgabe 3: *Bestimme die Wendestellen.*

a) $f(x) = 3x^5 - 70x^3 + 180x^2 - 780x - 1670$

b) $f(x) = \frac{1}{30}x^6 - \frac{10}{3}x^4 + 72x^2 + 240$

c) $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{7}{12}x^4 - 6x^3 + 126x^2 + 1340x$

d) $f(x) = 8x^6 - 145x^4 + 750x^2 - 2400$

e) $f(x) = 3x^5 - 50x^4 + 310x^3 - 900x^2 - 1880x$

f) $f(x) = \frac{1}{42}x^7 + \frac{17}{30}x^6 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{17}{3}x^4$

g) $f(x) = x^5 - 9x^7 - 5x^3$

h) $f(x) = 2x^6 - 2x^3 - x^2 - 43$

i) $f(x) = -2x^3 + 6x^8 + 11x^4$

j) $f(x) = 4x^6 + 5x^3 - 3x^2 - 1$

k) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2}{4 - x}$

l) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2 - x^3}{x + 3}$

m) $f(x) = e^{-2x} - \frac{5}{4}x^5$

n) $f(x) = 2x^5 - xe^{x-2} + 4$

Aufgabe 4: *Bestimme die Nullstelle mit dem größten Variablenwert.*

a) $f(x) = x^4 - 21x^3 - 104x^2 + 84x + 400$

b) $f(x) = x^4 - 80x^3 - 250x^2 + 80x + 249$

c) $f(x) = 4x^5 - 7x^4 - 487x^3 + 175x^2 + 9675x$

d) $f(x) = x^4 - 158x^3 - 1171x^2 + 2528x + 18480$

e) $f(x) = -3x^4 + e^{\frac{1}{6}x^2}$

f) $f(x) = \dfrac{3x^4 - 8x^3 + x^2 - 7}{x - 3}$

Aufgabe 5: *Bestimme die Extremstelle mit dem kleinsten Variablenwert.*

a) $f(x) = 6x^5 + 135x^4 + 130x^3 - 1080x^2 - 2040x + 4160$

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{19}{3}x^3 - \frac{113}{2}x^2 - 483x + 1337$

c) $f(x) = -42x^4 + 448x^3 - 924x^2 - 3360x + 14200$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{17}{3}x^3 + 13x^2 - 440x + 3580$

e) $f(x) = \frac{1}{9}x^6 - xe^{-\frac{5}{8}x^2+1}$

f) $f(x) = \frac{x - 4x^2 - 2}{6 - x}$

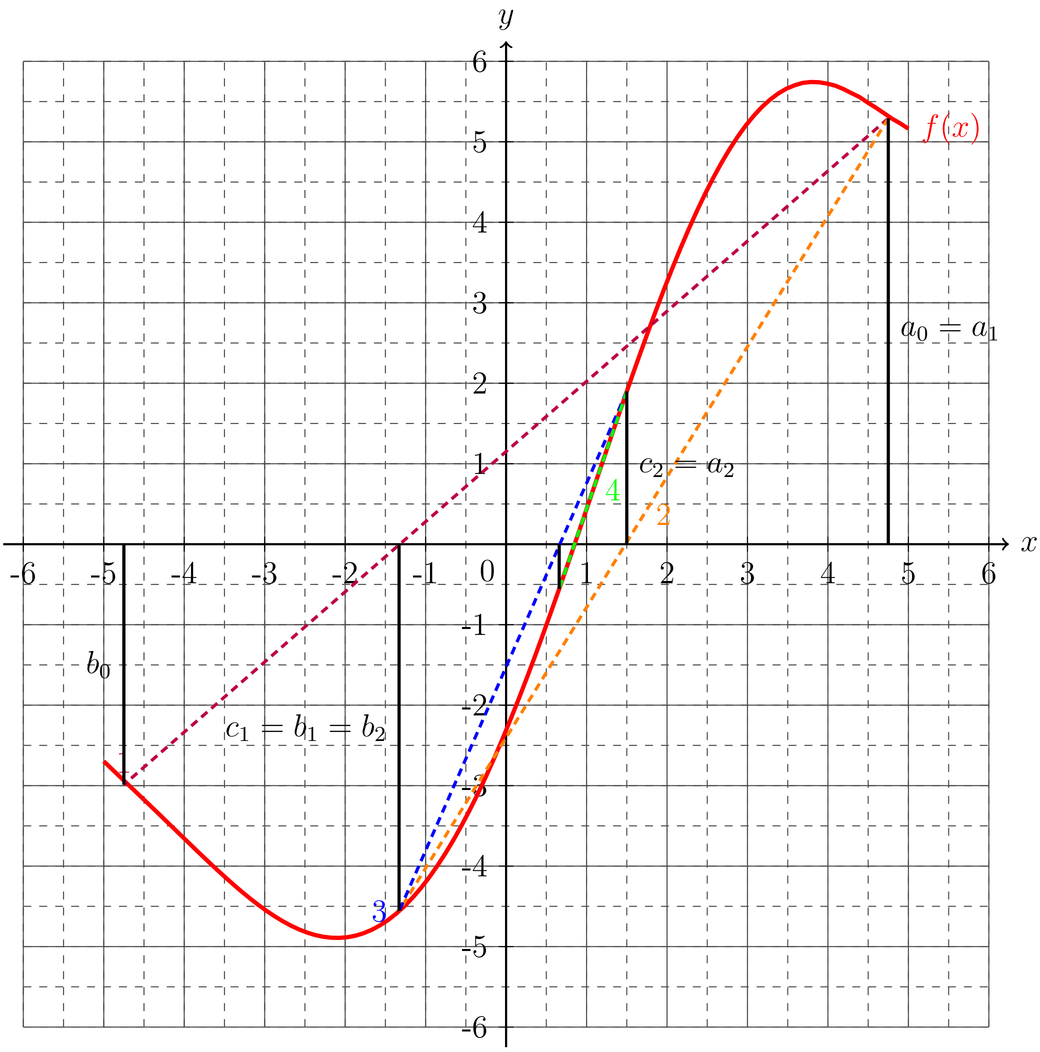
Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.109) Lösungen zum Newton Verfahren.

15.2 Regula-falsi-Verfahren

Das *Regula-falsi-Verfahren* ist ähnlich wie das *Newton-Verfahren*, da es auch die *Nullstellen* von *Geraden* ausnutzt. Allerdings kann das *Regular-falsi-Verfahren* nur angewandt werden, wenn *Grenzen* gegeben sind, in denen sich der zu ermittelnde *Punkt* befindet. Dabei wird eine *Gerade* direkt durch die *Punkte* auf der zu untersuchenden *Funktion* für die *Intervallgrenzen* a_k und b_k gebildet und deren *Nullstelle* bestimmt. Der *Variablenwert* der *Nullstelle* bildet anschließend eine neue *Intervallgrenze* für den nächsten *Iterationsschritt*:

$$c_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{f\left(b_k\right) - f\left(a_k\right)} f\left(a_k\right) \tag{15.3}$$

Dabei wird je nach Vorzeichen des *Funktionswertes* $f(c_k)$ *differenziert*. Bei einem positiven *Wert* wird die obere *Intervallgrenze* ausgetauscht, während für negative *Werte* die untere *Intervallgrenze* ersetzt wird. Somit wird der Bereich der *Nullstelle* nach und nach eingegrenzt. Dies ist in der folgenden Abbildung veranschaulicht:



Anzumerken ist, dass das *Regula-falsi-Verfahren* meist mit weniger *Iterationsschritten* auskommt als der *Newton-Verfahren*, sodass dieses Verfahren oft verwendet wird.

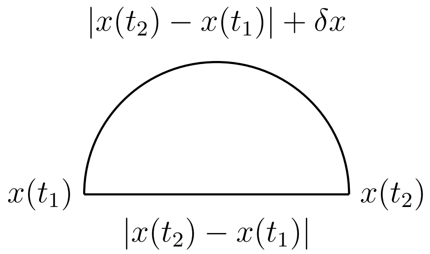
15.2.1 Übungsaufgaben zum Regula-Falsi Verfahren

Die Lösungen zu diesem Abschnitt finden sich im Anhang im Abschnitt (18.10.110) Lösungen zum Regula-Falsi Verfahren.

16 Physikalische Anwendungen

16.1 Lagrange Formalismus

16.1.1 Euler-Lagrange Gleichungen



In der Physik sind die meisten Systeme auf zeitabhängige Variablen zurückzuführen, wobei die Wirkung $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(x(t), \dot{x}(t), t\right) dt$ von Interesse ist. Die Wirkung ist definiert durch den so genannten Lagrangian $\mathcal{L} = T - U = E_{kin} - E_{pot}$. Die Wirkung beschreibt, dass sich nach einer gewissen Zeit t ein Teilchen vom Ort $x(t_1)$ nach $x(t_2)$ bewegt hat. Dabei kann der Weg variieren, dennoch ist die Wirkung S die selbe.

Dies ist das so genannte „Hamilton'sche Prinzip der kleinsten Wirkung“, somit muss gelten, dass die Variation der Wirkung gleich Null sein muss: $\delta S = 0$. Hierzu wird die Variablen variiert: $y(t) = x(t) + \epsilon\eta(t)$ sowie $\dot{y}(t) = \dot{x}(t) + \epsilon\dot{\eta}(t)$, wobei $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ist (die Ortsfunktion $x(t)$ wurde nach der Zeit t abgeleitet), während ϵ der Variationsparameter und $\eta(t)$ die Ortsabweichung beschreibt. Es gilt $\eta(t_2) = \eta(t_1) = 0$

$$\begin{aligned} S + \delta S &= S \\ \Rightarrow \quad \delta S &= \delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(x(t), \dot{x}(t), t\right) dt \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(x(t) + \delta x, \dot{x}(t) + \delta\dot{x}, t\right) dt \\ &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(y(t), \dot{y}(t), t\right) dt \end{aligned}$$

Da die Variation der Wirkung δS minimal werden muss wenn $\epsilon = 0$ wird, kann die Wirkung S nach dem Parameter ϵ abgeleitet werden.

$$
\begin{aligned}
\delta S = \left.\frac{dS}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0 &= \frac{d}{d\epsilon}\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\left(y(t), \dot{y}(t), t\right) dt \\
0 &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{L}\left(y(t), \dot{y}(t), t\right) dt \\
0 &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dy}{d\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \frac{d\dot{y}}{d\epsilon}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \underbrace{\frac{dt}{d\epsilon}}_{=0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\
0 &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \eta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \underbrace{\dot{\eta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}}_{:=A} dt
\end{aligned}
$$

Durch eine partielle Integration des Terms A

$$
\begin{aligned}
A &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \dot{\eta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} dt \\
&= \underbrace{\left[\eta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right)\eta dt
\end{aligned}
$$

ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \eta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \dot{\eta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} dt \\
0 &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \eta\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right)\eta dt \\
0 &= \int\limits_{t_1}^{t_2} \eta\left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}}_{=0}\right) dt
\end{aligned}
$$

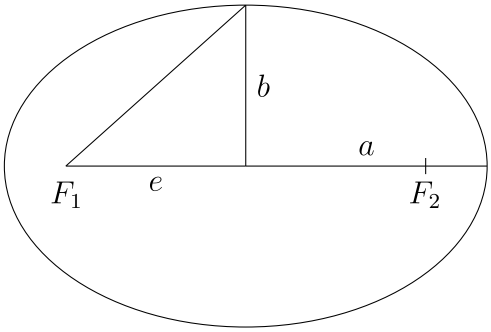
Der Integrand wird auch Euler-Lagrange-Gleichung genannt, mit der alle Bewegungen beschreibbar sind, nachdem die daraus resultierende Differentialgleichung gelöst wurde.

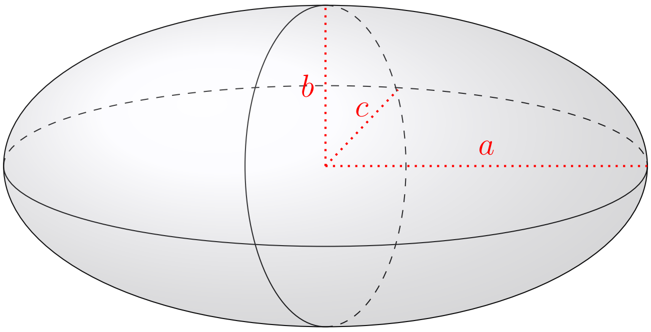
$$\mathcal{L} = T - U = E_{kin} - E_{pot} \quad \text{mit: } E_{kin} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \text{ und } E_{pot} = -\int F(x)dx$$
$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$$

16.1.2 Noether Theorem

16.2 Fourier-Reihe

16.3 Ellipse und Ellipsoid





16.4 Maxwell-Gleichungen

17 Ökonomische Anwendungen

18 Anhang

18.1 Alphabete

Griechisches Alphabet:

$A\ \alpha$	Alpha	$I\ \iota$	Jota	$P\ \rho$	Rho
$B\ \beta$	Beta	$K\ \kappa$	Kappa	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	Sigma
$\Gamma\ \gamma$	Gamma	$\Lambda\ \lambda$	Lambda	$T\ \tau$	Tau
$\Delta\ \delta$	Delta	$M\ \mu$	My	$\Upsilon\ \upsilon$	Ypsilon
$E\ \epsilon$	Epsilon	$N\ \nu$	Ny	$\Phi\ \phi\ \varphi$	Phi
$Z\ \zeta$	Zeta	$\Xi\ \xi$	Xi	$X\ \chi$	Chi
$H\ \eta$	Eta	$O\ o$	Omikron	$\Psi\ \psi$	Psi
$\Theta\ \theta$	Theta	$\Pi\ \pi$	Pi	$\Omega\ \omega$	Omega

Altdeutsches Alphabet:

$\mathfrak{A}\ \mathfrak{a}$	A a	$\mathfrak{J}\ \mathfrak{j}$	J j	$\mathfrak{S}$ ſ	S s
$\mathfrak{B}\ \mathfrak{b}$	B b	$\mathfrak{K}\ \mathfrak{k}$	K k	$\mathfrak{T}\ \mathfrak{t}$	T t
$\mathfrak{C}\ \mathfrak{c}$	C c	$\mathfrak{L}\ \mathfrak{l}$	L l	$\mathfrak{U}\ \mathfrak{u}$	U u
$\mathfrak{D}\ \mathfrak{d}$	D d	$\mathfrak{M}\ \mathfrak{m}$	M m	$\mathfrak{V}\ \mathfrak{v}$	V v
$\mathfrak{E}\ \mathfrak{e}$	E e	$\mathfrak{N}\ \mathfrak{n}$	N n	$\mathfrak{W}\ \mathfrak{w}$	W w
$\mathfrak{F}\ \mathfrak{f}$	F f	$\mathfrak{O}\ \mathfrak{o}$	O o	$\mathfrak{X}\ \mathfrak{x}$	X x
$\mathfrak{G}\ \mathfrak{g}$	G g	$\mathfrak{P}\ \mathfrak{p}$	P p	$\mathfrak{Y}\ \mathfrak{y}$	Y y
$\mathfrak{H}\ \mathfrak{h}$	H h	$\mathfrak{Q}\ \mathfrak{q}$	Q q	$\mathfrak{Z}\ \mathfrak{z}$	Z z
$\mathfrak{I}\ \mathfrak{i}$	I i	$\mathfrak{R}\ \mathfrak{r}$	R r		

Zurück zum Text durch folgenden Link: (4.5).

18.2 Primzahlen

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541
547	557	563	569	571	577	587	593	599	601
607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997	1009	1013

18.3 Pascal'sches Dreieck

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

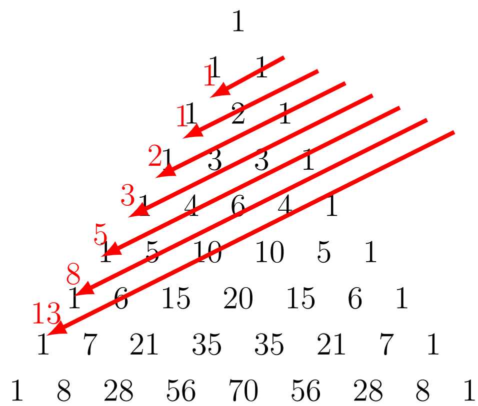
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Im Pascal'schen Dreieck ist auch die Fibonacci-Folge zu erkennen, wenn Linien wie in der folgenden Abbildung gezogen werden, wobei die getroffnen Zahlen aufaddiert die Fibonacci-Folge abbilden. Die Zahlen der Fibonacci-Folge dividiert durch die vorherigen Zahlen nähern sich langsam dem Goldenen Schnitt $\Phi \approx 1,6180339887$ an, je höher die Zahlen in der Folge werden. (Beispiel: $\frac{13}{8} = 1,625$ und $\frac{21}{13} \approx 1,61538$)



Zurück zum Text durch folgenden Link: (3.12.3).

18.4 10er Potenzen

Symbol	Name	10er Potenz	Ausgeschrieben	Sprachlich
Y	Yotta	10^{24}	1.000.000.000.000.000.000.000.000	Quadrillion
Z	Zetta	10^{21}	1.000.000.000.000.000.000.000	Trilliade
E	Exa	10^{18}	1.000.000.000.000.000.000	Trillion
P	Peta	10^{15}	1.000.000.000.000.000	Billarde
T	Tera	10^{12}	1.000.000.000.000	Billion
G	Giga	10^{9}	1.000.000.000	Milliarde
M	Mega	10^{6}	1.000.000	Million
k	Kilo	10^{3}	1.000	Tausend
h	Hekto	10^{2}	100	Hundert
da	Deka	10^{1}	10	Zehn
		10^{0}	1	Eins
d	dezi	10^{-1}	0,1	Zehntel
c	centi	10^{-2}	0,01	Hundertstel
m	milli	10^{-3}	0,001	Tausendstel
μ	mikro	10^{-6}	0,000.001	Millionstel
n	nano	10^{-9}	0,000.000.001	Milliardstel
p	piko	10^{-12}	0,000.000.000.001	Billionstel
f	femto	10^{-15}	0,000.000.000.000.001	Billiardstel
a	atto	10^{-18}	0,000.000.000.000.000.001	Trillionstel
z	zepto	10^{-21}	0,000.000.000.000.000.000.001	Trilliardstel
y	yokto	10^{-24}	0,000.000.000.000.000.000.000.001	Quadrillionstel

18.5 Wertetabelle der Standardnormalverteilung

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

18.6 Schriftliches Wurzelziehen

Um eine Wurzel schriftlich ohne Taschenrechner zu bestimmen existieren mehrere Methoden, dabei soll hier neben dem Heron-Verfahren zunächst ein weiteres Verfahren für jeden Typ von Wurzeln erläutert werden, welches an schriftliche Division erinnert. Das Verfahren soll an einem Beispiel $\sqrt{2540836} = 1594$ erläutert werden: Zu Beginn wird die Zahl, je nach Nenner der Potenz, in Blöcke unterteilt (in diesem Fall 2). Dabei wird stets von hinten begonnen. Anschließend wird vom ersten Block die Zahl (je nach Nenner Potenz - hier Quadratzahl) ermittelt, die von der Zahl des betrachteten Blockes subtrahiert werden kann.

$$\begin{array}{ll}
2|54|08|36 & \longrightarrow 1594 \\
-1 & = 20 \cdot 0 \cdot 1 + 1^2 \\
\overline{} & \\
1\ 54 & \\
-1\ 25 & = 20 \cdot 1 \cdot 5 + 5^2 \\
\overline{} & \\
2908 & \\
-\ \ 2781 & = 20 \cdot 15 \cdot 9 + 9^2 \\
\overline{} & \\
127\ \ 36 & \\
-\ \ 127\ \ 36 & = 20 \cdot 159 \cdot 4 + 4^2 \\
\overline{} & \\
0 &
\end{array} \tag{18.1}$$

Die gefundene Quadratzahl stellt die erste Ziffer des Ergebnisses dar, wobei die Quadratzahl durch einen Teil einer Binomischen Gleichung $20 \cdot w \cdot b + b^2 = 20 \cdot 0 \cdot 1 + 1^2$ dargestellt werden kann. Dabei ist w der Parameter, der das bis dato bekannte Ergebnis darstellt, was zu Beginn lediglich die Null ist. Im weiteren Verlauf wird deutlich, dass w erst zu 1, dann zu 15 und abschließend zu 159 wird, was den Erkenntnissen des Ergebnis zum jeweiligen Rechenschritt entspricht. Der Parameter b ist unbekannt und gibt die nächste Ziffer des Ergebnisses an, was auch im Beispiel zu erkennen ist, da b zu 1, dann zu 5, dann zu 9 und abschließend zu 4 wird. Um b zu bestimmen kann jeweils eine Gleichung aufgestellt und gelöst werden. In dem gezeigten Beispiel wären dies die folgenden Gleichungen mit Lösungen für b:

$$\begin{aligned} 154 &= 20\cdot 1\cdot b + b^2 \quad \Rightarrow \quad b \approx 5,937 \;\Rightarrow\; \text{abgerundet: } b = 5 \\ 2908 &= 20\cdot 15\cdot b + b^2 \quad \Rightarrow \quad b \approx 9,399 \;\Rightarrow\; \text{abgerundet: } b = 9 \\ 12736 &= 20\cdot 159\cdot b + b^2 \quad \Rightarrow \quad b = 4 \;\Rightarrow\; \text{abgerundet: } b = 4 \end{aligned} \tag{18.2}$$

Da allerdings bei diesen Gleichungen wiederum Wurzeln vorkommen können, könnte es zu einem enormen Zeitaufwand kommen. Da wiederum der Parameter b nur die Zahlen von 0 bis 9 annehmen kann, ist es oftmals effektiver eine Zahl zu wählen und zu überprüfen, ob die ein höherer Wert von b ausgeschlossen werden kann.

Für Wurzeln mit einem größeren Nenner in der Potenz können folgende Gleichungen zur Bestimmung von b ermittelt werden:

$$\begin{aligned} &\sqrt[2]{x} \Longrightarrow 20wb + b^2 \\ &\sqrt[3]{x} \Longrightarrow 300w^2b + 30wb^2 + b^3 \\ &\sqrt[4]{x} \Longrightarrow 4000w^3b + 600w^2b^2 + 40wb^3 + b^4 \\ &\sqrt[5]{x} \Longrightarrow 50000w^4b + 10000w^3b^2 + 1000w^2b^3 + 50wb^4 + b^5 \\ &\sqrt[6]{x} \Longrightarrow 600000w^5b + 150000w^4b^2 + 20000w^3b^3 + 1500w^2b^4 + 60wb^5 + b^6 \quad , \\ &\quad \vdots \end{aligned} \tag{18.3}$$

wobei auffällt, dass die Vorfaktoren dem Pascal'schen Dreieck (18.3) (Vorfaktoren wie bei höheren binomischen Formeln) entsprechen. Außerdem wird ersichtlich, dass mit steigender Potenz von w auch die Anzahl der Nullen steigt. Somit lässt sich folgende Verallgemeinerung finden:

$$\sqrt[n]{x} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 10^k w^k b^{n-k} \quad . \tag{18.4}$$

Mittels dem gezeigten Verfahren lassen sich alle Typen von Wurzeln schriftlich berechnen.

Das Heron-Verfahren ist ein iteratives Verfahren, welches auf dem Newton-Verfahren basiert, wobei aus einer Potenzfunktion $f(x) = x^k - a$ die Nullstelle berechnet wird, welche dann $\sqrt[n]{a}$ entspricht.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{(k-1)x_n^k + a}{kx_n^{k-1}} = \frac{(k-1)}{k}\left(x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \quad , \tag{18.5}$$

wobei die Konvergenz der Reihe gewährleistet ist, da $\frac{a}{x_n^{k-1}} < 1$ ist.

18.7 Geometrische Eigenschaften von Körpern

Name	Ecken	Kanten	Flächen
Würfel	8	12	6
Dreiecksprisma	6	9	5
Quader	8	12	6
Fünfecksprisma	10	15	7
Sechsecksprisma	12	18	8
Siebenecksprisma	14	21	9
Achtecksprisma	16	24	10
n-ecksprisma	2n	3n	n+2
Dreieckspyramide	4	6	4
Viereckspyramide	5	8	5
Fünfeckspyramide	6	10	6
Sechseckspyramide	7	12	7
Siebeneckspyramide	8	14	8
n-eckspyramide	n+1	2n	n+1
n-eckspyramidenstumpf	2n	3n	n+2
Tetraeder	4	6	4
Oktaeder	8	12	8
Zylinder	0	2	3
Kegel	1	1	2
Kegelstumpf	0	2	3
Kugel	0	0	1

18.8 Wichtige Brüche als Dezimalzahlen

$\frac{1}{2} = 0,5$ $\frac{1}{4} = 0,25$

$\frac{1}{8} = 0,125$ $\frac{1}{16} = 0,0625$

$\frac{3}{2} = 1,5$ $\frac{3}{4} = 0,75$

$\frac{3}{8} = 0,375$ $\frac{5}{8} = 0,625$

$\frac{5}{2} = 2,5$ $\frac{5}{4} = 1,25$

$\frac{7}{8} = 0,875$ $\frac{9}{8} = 1,125$

$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

$\frac{4}{3} = 1,\overline{3}$ $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$

$\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$ $\frac{1}{12} = 0,08\overline{3}$

$\frac{1}{9} = 0,\overline{1}$ $\frac{5}{9} = 0,\overline{5}$

$\frac{1}{5} = 0,2$ $\frac{3}{5} = 0,6$

$\frac{1}{10} = 0,1$ $\frac{7}{10} = 0,7$

$\frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$ $\frac{1}{1000} = 0,001 = 1‰$

18.9 Wichtige Stammfunktionen und Ableitungen

$$f(x) = x^n \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = a^x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\sin x$$

$$f(x) = \tan x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f(x) = \mathrm{cot} x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$f(x) = \arcsin x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arccos x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \arctan x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \mathrm{arccot} x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$f(x) = \sinh x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \cosh x$$

$$f(x) = \cosh x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \sinh x$$

$$f(x) = \tanh x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$f(x) = \mathrm{coth} x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sinh^2 x}$$

$f(x) = \text{arsinh}x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x) = \text{arcosh}x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$f(x) = \text{artanh}x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1-x^2}\ ,\ \forall |x| < 1$

$f(x) = \text{arcoth}x \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1-x^2}\ ,\ \forall |x| > 1$

$f(x) = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \ln|x|$

$f(x) = \frac{1}{x+a} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \ln|x+a|$

$f(x) = \frac{1}{(x+a)^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx = -\frac{1}{x+a}$

$f(x) = \tan x \qquad F(x) = \int f(x)dx = -\ln|\cos x|$

$f(x) = \sin^2 ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax$

$f(x) = \cos^2 ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax$

$f(x) = \ln^2 ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$

$f(x) = \sin ax \cos ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{2a}\sin^2 ax$

$f(x) = \frac{1}{\sin ax \cos ax} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{a}\ln|\tan ax|$

$f(x) = e^{ax}\sin bx \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

$f(x) = e^{ax}\cos bx \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx + b\cos bx)$

$f(x) = x\sin ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{a^2}\sin ax - \frac{x}{a}\cos ax$

$f(x) = x\cos ax \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{a^2}\sin ax + \frac{x}{a}\cos ax$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad F(x) = \int f(x)dx = 2\sqrt{x}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = e^{ax} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

$f(x) = xe^{ax} \qquad F(x) = \int f(x)dx = \frac{ax-1}{a^2}e^{ax}$

$$f(x) = \ln x \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = x\ln x - x$$

$$f(x) = x\ln x \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = x^2\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+a^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2 \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-a^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} + a^2 \operatorname{arccosh}\frac{x}{a}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} - a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)$$

$$f(x) = \sqrt{a^2-x^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}\right)$$

mit: $X = ax^2 + b^x + c$ und $\Delta = 4ac - b^2$, $a \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{X} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & ,\forall \Delta > 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & ,\forall \Delta < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\ln\frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} & ,\forall \Delta < 0 \\ -\frac{2}{2ax+b} & ,\forall \Delta = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{X^2} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta}\int\frac{1}{X}dx$$

$$f(x) = \frac{x}{X} \qquad F(x) = \int f(x)dx \quad = \frac{1}{2a}\ln|X| - \frac{b}{2a}\int\frac{1}{X}dx$$

18.10 Lösungen

18.10.1 Lösungen zu Mengen

Aufgabe 1:

$a)\ 4 \in \mathbb{N}$	$b)\ -1 \in \mathbb{Z}$	$c)\ 9 \in \mathbb{N}$	$d)\ 0,45 \in \mathbb{Q}$
$e)\ \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$	$f)\ -6 \in \mathbb{Z}$	$g)\ 4,75 \in \mathbb{Q}$	$h)\ 0,\bar{3} \in \mathbb{Q}$
$i)\ \frac{1}{81} \in \mathbb{Q}$	$j)\ -\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$	$k)\ 3 \in \mathbb{N}$	$l)\ 0,125 \in \mathbb{Q}$
$m)\ 0,01 \in \mathbb{Q}$	$n)\ \frac{1}{11} \in \mathbb{Q}$	$o)\ 3,141 \in \mathbb{Q}$	$p)\ -0,75 \in \mathbb{Q}$

Aufgabe 2:

$a)\ 0,\bar{6} \in \mathbb{Q}$	$b)\ -\sqrt{4} \in \mathbb{Z}$	$c)\ 0 \in \mathbb{N}$	$d)\ \sqrt{3} \in \mathbb{R}$
$e)\ \frac{7}{8} \in \mathbb{Q}$	$f)\ \sqrt{13} \in \mathbb{R}$	$g)\ \frac{2}{\sqrt{16}} \in \mathbb{Q}$	$h)\ 1\% \in \mathbb{Q}$
$i)\ \frac{1}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R}$	$j)\ -42 \in \mathbb{Z}$	$k)\ \sqrt{144} \in \mathbb{N}$	$l)\ \frac{16}{2} \in \mathbb{N}$
$m)\ 5,01 \in \mathbb{Q}$	$n)\ 17 \in \mathbb{N}$	$o)\ 1,1\bar{6} \in \mathbb{Q}$	$p)\ -\sqrt{64} \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 3:

$a)\ \lg 10 \in \mathbb{N}$	$b)\ \sqrt{9} \in \mathbb{N}$	$c)\ -7 \in \mathbb{Z}$	$d)\ \pi \in \mathbb{R}$
$e)\ \frac{e^2}{2} \in \mathbb{R}$	$f)\ -\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$	$g)\ 1 \in \mathbb{N}$	$h)\ 0,597813553 \in \mathbb{Q}$
$i)\ \ln 2 \in \mathbb{R}$	$j)\ -e^{\ln \frac{1}{3}} \in \mathbb{Q}$	$k)\ \log_3 9 \in \mathbb{N}$	$l)\ 0,1 \in \mathbb{Q}$
$m)\ 28\% \in \mathbb{Q}$	$n)\ \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$	$o)\ \sqrt{17} \in \mathbb{R}$	$p)\ -\frac{1}{\ln e} \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 4:

a) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{6\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1, 5, 9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{3, 4, 8\}$;

b) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \mathbb{M}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 5, 7\} = \mathbb{K}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{4, 6\}$;
$\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{\} = \varnothing$;

c) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{\} = \varnothing$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \mathbb{M}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \mathbb{K}$;

d) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{2, 5, 8\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{3, 6\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{1, 4, 7\}$;

e) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3, 6\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{2, 5, 8\}$;

f) $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$; $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \{3, 5, 7\}$; $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \{1, 9\}$; $\mathbb{K} \setminus \mathbb{M} = \{4, 6\}$

Aufgabe 5:

a) $(\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) \cap \mathbb{L} = \varnothing$;

b) $(\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \mathbb{M}$;

c) $(\mathbb{K} \setminus \mathbb{L}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \varnothing$;

d) $(\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K}) = \{3, 4, 6, 9\}$;

e) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{M} \cup \mathbb{K}) = \{5, 7\}$;

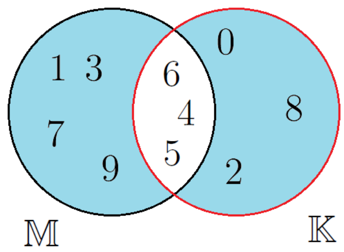
f) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K}) = \varnothing$;

g) $(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \setminus (\mathbb{L} \cap \mathbb{K}) := \mathbb{L} \varDelta \mathbb{K} = \{3, 5, 6, 7, 8\}$;

h) $\mathbb{M} \varDelta \mathbb{K} = \{1, 2, 4, 8, 9\}$;

Aufgabe 6:

$\mathbb{M} \varDelta \mathbb{K} = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9\}$



Aufgabe 7:

a) $\mathbb{M} \cap \mathbb{K} = \varnothing$; *b)* $\mathbb{M} \cup \mathbb{K} = \mathbb{M}$; *c)* $\mathbb{M} \setminus \mathbb{K} = \mathbb{M}$

Aufgabe 8: *Bestimme mit den Mengen* $\mathbb{M} = \{4, 6, 8, 9\}$, $\mathbb{L} = \{2, 3, 7, 9\}$ *und* $\mathbb{K} = \{3, 4, 5, 8, 9\}$ *das jeweils resultierende Infimum beziehungsweise Supremum.*

a) $\inf\left[(\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K})\right] = 3$

b) $\sup\left[(\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) \cup (\mathbb{M} \cap \mathbb{K})\right] = 10$

c) $\sup\left[(\mathbb{L} \cup \mathbb{K}) \cap (\mathbb{M} \setminus \mathbb{K})\right] = 10$

d) $\inf\left[\mathbb{M} \varDelta \mathbb{K}\right] = 2$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (2.2.1).

18.10.2 Lösungen zu Terme

Aufgabe 1: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Grundrechenarten"!)

a) $56 + 7 \cdot 5$
$= \boxed{56} + \boxed{35}$
$= \boxed{91}$

b) $11 \cdot 8 - 8 \cdot 4$
$= \boxed{88} - \boxed{32}$
$= \boxed{56}$

c) $76 \cdot 46 - 35 \cdot 39$
$= \boxed{3496} - \boxed{1365}$
$= \boxed{2131}$

d) $8 \cdot (24 + 4 \cdot 5)$
$= 8 \cdot \left(24 + \boxed{20}\right)$
$= 8 \cdot \boxed{44}$
$= \boxed{352}$

e) $45 + 7 \cdot (98 - 144 : 9)$
$= 45 + 7 \cdot \left(98 - \boxed{16}\right)$
$= 45 + 7 \cdot \boxed{82}$
$= 45 + \boxed{574}$
$= \boxed{619}$

f) $(13 \cdot 21 - 112) \cdot (4 + 264 : 24)$
$= \left(\boxed{273} - 112\right) \cdot \left(4 + \boxed{11}\right)$
$= \boxed{161} \cdot \boxed{15}$
$= \boxed{2415}$

Aufgabe 2: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Grundrechenarten"!)

a) $((36 + 45) : (77 - 68) + 13) \cdot 3$
$= \left(\boxed{81} : \boxed{9} + 13\right) \cdot 3$
$= \left(\boxed{9} + 13\right) \cdot 3$
$= \boxed{22} \cdot 3$
$= \boxed{66}$

b) $5 \cdot (2364 - 7 \cdot [15 \cdot 17 - 97]) + 178$
$= 5 \cdot \left(2364 - 7 \cdot \left[\boxed{255} - 97\right]\right) + 178$
$= 5 \cdot \left(2364 - 7 \cdot \boxed{158}\right) + 178$
$= 5 \cdot \left(2364 - \boxed{1106}\right) + 178$
$= 5 \cdot \boxed{1258} + 178$
$= \boxed{6290} + 178$
$= \boxed{6468}$

c) $(84 \cdot 34 - 68 \cdot 29) \cdot (45 \cdot 97 - 643)$
$= \left(\boxed{2856} - \boxed{1972}\right) \cdot \left(\boxed{4365} - 643\right)$
$= \boxed{884} \cdot \boxed{3722}$
$= \boxed{3290248}$

d) $(11 \cdot 3 + 12 \cdot 7) \cdot (235 - 8 \cdot 28) \cdot (27 \cdot 45 - 36 \cdot 25)$
$= \left(\boxed{33} + \boxed{84}\right) \cdot \left(235 - \boxed{224}\right) \cdot \left(\boxed{1215} - \boxed{900}\right)$
$= \boxed{117} \cdot \boxed{11} \cdot \boxed{315}$
$= \boxed{405405}$

Aufgabe 3: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Bruchrechnung"!) (Es ist nur ein Weg von mehreren angegeben!)

$$a)\ \frac{3}{4}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{4}+\frac{3}{5} = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{4} = \frac{15}{20}+\frac{12}{20} = \frac{27}{20}$$

$$b)\ \frac{6}{7}:\frac{4}{3}+\frac{3}{4}:\frac{6}{5} = \frac{6}{7}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6} = \frac{9}{14}+\frac{5}{8} = \frac{9}{14}\cdot\frac{8}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{14}{14} = \frac{72}{112}+\frac{70}{112} = \frac{142}{112} = \frac{71}{56}$$

$$c)\ \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}-\frac{5}{18}\right) = \frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}\cdot\frac{2}{2}-\frac{5}{18}\cdot\frac{1}{1}\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{17}{18} = \frac{51}{144} = \frac{17}{48}$$

$$d)\ \left(\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{2} = \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{4}\right)\cdot\frac{3}{2} = \left(\frac{15}{20}+\frac{8}{20}\right)\cdot\frac{3}{2} = \frac{22}{20}\cdot\frac{3}{2} = \frac{66}{40} = \frac{33}{20}$$

$$e)\ \frac{6}{7}:\left[\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{4}\right):\frac{6}{5}\right] = \frac{6}{7}:\left[\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{3}\right):\frac{6}{5}\right] = \frac{6}{7}:\left[\left(\frac{16}{12}+\frac{9}{12}\right):\frac{6}{5}\right] = \frac{6}{7}:\left[\frac{25}{16}:\frac{6}{5}\right] = \frac{6}{7}:\left[\frac{25}{16}\cdot\frac{5}{6}\right] = \frac{6}{7}:\frac{125}{96} = \frac{6}{7}\cdot\frac{96}{125} = \frac{576}{875}$$

$$f)\ \left[\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}-\frac{5}{6}\right)+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3} = \left[\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{11}{9}\cdot\frac{6}{6}-\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{9}\right)+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3} = \left[\frac{3}{8}\cdot\left(\frac{66}{54}-\frac{45}{54}\right)+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3} = \left[\frac{3}{8}\cdot\frac{21}{54}+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3} = \left[\frac{63}{432}+\frac{5}{8}\right]\cdot\frac{1}{3} = \left[\frac{63}{432}\cdot\frac{8}{8}+\frac{5}{8}\cdot\frac{432}{432}\right]\cdot\frac{1}{3} = \left[\frac{504}{3456}+\frac{2160}{3456}\right]\cdot\frac{1}{3} = \frac{2664}{3456}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2664}{10368} = \frac{37}{144}$$

Aufgabe 4: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Distributivgesetz"!)

$a)\ (56 + 7 \cdot 5)$
$= \left(\boxed{8} + 5\right) \cdot 7$

$b)\ 54 : 8 + 26 : 8$
$= (54 + 26) : \boxed{8}$
$= \boxed{80} : \boxed{8}$
$= \boxed{10}$

$c)\ 164 + 96$
$= \left(\boxed{41} + \boxed{24}\right) \cdot 4$

$d)\ 198 - 77$
$= \left(\boxed{990} - \boxed{385}\right) : 5$

$e)\ 123 - 54 + 464$
$= \left(\boxed{4059} - \boxed{1782} + \boxed{15312}\right) : 33$

$f)\ 896 - 488 + 4 \cdot 224$
$= \left(\boxed{112} - \boxed{61} + \boxed{112}\right) \cdot 8$

Aufgabe 5: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Grundrechenarten"!)

$a)\ 8 \cdot 7 - 4 \cdot 6$
$= \boxed{56} - \boxed{24}$
$= \boxed{32}$

$b)\ 5 \cdot 6 + 2 \cdot 4$
$= \boxed{30} + \boxed{8}$
$= \boxed{38}$

$c)\ 12 \cdot 31 - 14 \cdot 22$
$= \boxed{372} - \boxed{308}$
$= \boxed{64}$

$d)\ 1{,}3 \cdot 7 - 4{,}5 \cdot 0{,}8$
$= \boxed{9{,}1} - \boxed{3{,}6}$
$= \boxed{5{,}5}$

$e)\ 5{,}2 \cdot 7 - 3 \cdot 4{,}7$
$= \boxed{36{,}4} - \boxed{14{,}1}$
$= \boxed{22{,}3}$

$f)\ 1{,}2 \cdot 5{,}7 + 9 \cdot 0{,}2$
$= \boxed{6{,}84} + \boxed{1{,}8}$
$= \boxed{8{,}64}$

$g)\ \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{8} \cdot 2$
$= \boxed{\frac{15}{12}} + \boxed{\frac{5}{4}}$
$= \boxed{\frac{5}{2}}$

$h)\ \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} + \frac{7}{8} : \frac{7}{3}$
$= \boxed{\frac{7}{10}} + \boxed{\frac{3}{8}}$
$= \boxed{\frac{43}{40}}$

$i)\ \frac{5}{9} : \frac{2}{3} - \frac{2}{5} : \frac{8}{3}$
$= \boxed{\frac{5}{6}} - \boxed{\frac{3}{20}}$
$= \boxed{\frac{41}{60}}$

Aufgabe 6: *Bestimme alle Werte der Felder.* (Benötigt Abschnitt „Grundrechenarten"!)

$a)\ (12 \cdot 7 - 43) \cdot 5$
$= \left(\boxed{84} - 43\right) \cdot 5$
$= \boxed{41} \cdot 5$
$= \boxed{205}$

$b)\ (13 \cdot 8 + 7 \cdot 16) : 4 + 65$
$= \left(\boxed{104} + \boxed{112}\right) : 4 + 65$
$= \boxed{216} : 4 + 65$
$= \boxed{54} + 65$
$= \boxed{119}$

$c)\ [3 \cdot (1464 - 16 \cdot 82) + 872] : 4$
$= \left[3 \cdot \left(1464 - \boxed{1312}\right) + 872\right] : 4$
$= \left[3 \cdot \boxed{152} + 872\right] : 4$
$= \left[\boxed{456} + 872\right] : 4$
$= \boxed{1328} : 4$
$= \boxed{332}$

Aufgabe 7: *Um mehrere kleine Gehege mit rechtwinkligen Ecken zu bauen, muss die Länge des gesamten zu bestellenden Zauns bestimmt werden. Dies wurde mit dem Term* $2 \cdot (3\,m + 6\,m) + 2 \cdot (4\,m + 4\,m) + 2 \cdot (2\,m + 5\,m)$ *berechnet. Beantworte die Fragen.* (Benötigt Abschnitt „Spezielle Vierecke“!)

a) Was wurde bei den jeweiligen der drei Summanden berechnet?

Es wurde immer der Umfang berechnet.

b) Ein Meter Zaun kostet 65 €. Wie viel kostet der gesamte Zaun?

$(2 \cdot (3\,\mathrm{m} + 6\,\mathrm{m}) + 2 \cdot (4\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m}) + 2 \cdot (2\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m}))\, 65\,\frac{€}{m} = 3120$ €

c) Wie groß ist der Flächeninhalt der einzelnen Gehege?

$A_1 = 3\,\mathrm{m} \cdot 6\,\mathrm{m} = 18\,\mathrm{m}^2$
$A_2 = 4\,\mathrm{m} \cdot 4\,\mathrm{m} = 16\,\mathrm{m}^2$
$A_3 = 2\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{m}^2$

d) Um was für geometrische Flächen handelt sich bei den jeweiligen Gehegen?

A_1 und A_3 sind Rechtecke und A_2 ist ein Quadrat.

e) Wie groß ist die Spannweite der berechneten Gehegeflächeninhalte?

$A_1 - A_3 = 8\,\mathrm{m}^2$

Aufgabe 8: *Von einer Familienpizza essen bei einer Feier Erwachsene jeweils genau* $\frac{1}{4}$ *und Kinder jeweils genau* $\frac{1}{6}$ *einer solchen Familienpizza. Eine Familienpizza kostet* $13,50$ € *und bei einer Bestellung ab drei Pizzen gibt es pro Pizza* $1,75$ € *Rabatt. Beantworte die Fragen.* (Benötigt Abschnitt „Bruchrechnung“!)

a) Der Term $\frac{7}{6} + \frac{9}{4}$ beschreibt die Planung einer Feier. Wie viele Erwachsene und Kinder werden erwartet und wie viele Pizzen müssen bestellt werden?

Es werden 7 Kinder und 9 Erwachsene erwartet. Es müssen, $\frac{7}{6} + \frac{9}{4} = \frac{41}{12} = 3,41\overline{6}$, also 4 Pizzen bestellt werden.

b) Zu einer Feier kommen 5 Erwachsene und 8 Kinder. Wie viel Geld muss für Pizzen eingeplant werden?

$\frac{8}{6} + \frac{5}{4} = 2,58\overline{3} \quad \Rightarrow \quad (13,50\text{ €} - 1,75\text{ €}) \cdot 3 = 35,25\text{ €}$

c) Wie groß ist der Anteil der Pizzen die übrig bleiben, wenn 6 Erwachsene und 3 Kinder erwartet werden und der Term zur Berechnung der Kosten folgender ist: $40,50\text{ €} - 5,25\text{ €}$.

Es wurden drei Pizzen bestellt. $3 - \frac{6}{4} - \frac{3}{6} = 1$ Es bleibt eine ganze Pizza übrig.

Aufgabe 9: *Ein Kapital von* 6000 € *soll angelegt werden. Bearbeite alle Teilaufgaben.* (Benötigt Abschnitt „Prozentrechnung“!)

a) Für wie viele Jahre wurde das Kapital im folgenden Term $6000\text{ €} \cdot 1,022 \cdot 1,022 \cdot 1,022 \cdot 1,022$ zu welchen Zinssatz angelegt?

Das Geld wurde für 4 Jahre zu einem Zinssatz von $2,2\%$ angelegt.

b) Beschreibe diese Geldanlage $6000\text{ €} \cdot 1,012 \cdot 1,015 \cdot 1,017 \cdot 1,02 \cdot 1,04$.

Das Geld wurde für 5 Jahre angelegt, wobei der Zinssatz sich jedes Jahr erhöht. Der Zinsatz beträgt im ersten Jahr $1,2\%$, im zweiten Jahr $1,5\%$, im dritten Jahr $1,7\%$, im vierten Jahr 2% und im fünften Jahr 4%.

c) Beschreibe diese Geldanlage $6000\text{ €} \cdot 1,025^3 - 2,5\text{ €} \cdot 12 \cdot 3$.

Das Geld wurde für drei Jahre zu einem Zinssatz von $2,5\%$ angelegt, wobei eine monatliche Gebühr von 2,50 € erhoben wird.

Aufgabe 10: *In einer Eintrittskasse wurde in einer Schicht Geld eingenommen, stelle lediglich den Term zu Berechnung der Geldsumme auf. Es gelten folgende Preise: Kinder müssen* 4 €, *Jugendliche* 4,50 €, *Erwachsene* 7 € *und Rentner* 6 € *pro Person bezahlen. Wird eine Gruppe angemeldet, werden pro Person* 10% *Preisnachlass gewährt.*

a) 12 Kinder, 6 Jugendliche, 25 Erwachsene, 11 Rentner.

$12 \cdot 4\text{ €} + 6 \cdot 4,50\text{ €} + 25 \cdot 7\text{ €} + 11 \cdot 6\text{ €}$

b) 3 Erwachsene, eine Kindergruppe mit 27 Kindern.

$3 \cdot 7\text{ €} + 27 \cdot 4\text{ €} - 27 \cdot 4\text{ €} \cdot 0,1$

c) 8 Kinder, 12 Erwachsene und zwei Rentergruppen mit einmal 17 und einmal 25 Rentnern.

$8 \cdot 4$ € $+ 12 \cdot 7$ € $+ (17 + 25) \cdot 6$ € $\cdot (1 - 0,1)$

d) 22 Erwachsene, 3 Kindergruppen mit jeweils 23 Kindern, 15 Jugendliche und eine Rentnergruppe mit 31 Rentern.

$22 \cdot 7$ € $+ 69 \cdot 4$ € $\cdot 0,9 + 15 \cdot 4,5$ € $+ 31 \cdot 0,9 \cdot 6$ €

e) 42 Jugendliche, wovon 8 einen 2 € Preisnachlass bekommen, 16 Rentner, eine Rentnergruppe mit 28 Rentern, 65 Erwachsene und 18 Kinder.

$42 \cdot 4,5$ € $- 8 \cdot 2$ € $+ 16 \cdot 6$ € $+ 28 \cdot 0,9 \cdot 6$ € $+ 65 \cdot 7$ € $+ 18 \cdot 4$ €

Aufgabe 11: *Ein Zoo verlangt für Kinder* 3 €*, für Erwachsene* 5 € *und für Rentner* 4 € *Eintritt. Beschreibe den Term* $7 \cdot 4$ €$+18 \cdot 4$ €$+31 \cdot 5$ €.

Es haben 25 Rentner und 31 Erwachsene im Zoo Eintritt bezahlt, warum die Rentner in zwei Summanden getrennt sind ist nicht ersichtlich, kann aber eventuell so interpretiert werden, dass diese in Gruppen angereist sind.

Aufgabe 12: *Ein Kapital wurde angelegt. Die Kaptialentwicklung wird durch den Term* 4000 €$\cdot 1,007$ *beschrieben. Beantworte die Fragen.*
a) Wie viel Kapital wurde angelegt? 4000 €
b) Zu welchen Zinssatz wurde das Geld angelegt? $0,7\%$

Aufgabe 13: *Ein Gehege soll rechteckig eingezäunt werden. Beschreibe in diesem Sachzusammenhang den Term* $(2 \cdot 4,5m + 2 \cdot 5,6m) \cdot 17,95\frac{€}{m}$.

Es wurde der Umfang des rechteckigen Geheges berechnet und mit einer Geldsumme pro Meter multipliziert, um den Gesamtpreis des Zauns zu bestimmen.

Aufgabe 14: *In einer Flaschenkiste befinden sich* 18 *Flaschen. Bei der Leergutannahme brachten Kunden folgende Anzahlen von Flaschen:* $13; 7; 15; 17; 4; 5; 41; 3; 18; 11; 23$. *Beschreibe die Terme* $\frac{13+7+15+17+4+5+41+3+18+11+23}{11}$ *und* $\frac{13+7+15+17+4+5+41+3+18+11+23}{18}$.

Im ersten Term wurde berechnet, wie viele Flaschen ein Kunde im Durchschnitt mitbringt, während im zweiten Term berechnet wird, wie viele Kisten benötigt werden, um die Flaschen einzusortieren.

Aufgabe 15: *Auf einer Speisekarte sind folgende Preise niedergeschrieben: Steak* 18, 99 €*; Nudelauflauf* 12, 99 €*; Fischplatte* 21, 99 €*; Salat* 7, 99 €*; Softdrink* 2, 99 €*; Kaffee* 2, 49 €*. Beschreibe den folgenden Term.*

$2 \cdot 18{,}99\,€ + 5 \cdot 7{,}99\,€ + 7 \cdot 2{,}99\,€ + 2{,}49\,€ + 21{,}99\,€$
Es wurden zwei Steaks, fünf Salate, sieben Softdrinks, ein Kaffee und eine Fischplatte bestellt.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.1.1).

18.10.3 Lösungen zu Grundrechenarten

Aufgabe 1:

$a)$ $3821 + 1347 = 5168$	$b)$ $5962 + 8912 = 14874$
$c)$ $2512 + 3246 = 5758$	$d)$ $2353 + 4636 = 6989$
$e)$ $4462 + 9543 = 14005$	$f)$ $4156 + 3737 = 7893$
$g)$ $9948 + 5499 = 15447$	$h)$ $4784 + 8377 = 13161$
$i)$ $9745 + 3726 = 13471$	$j)$ $3269 + 9289 = 12558$
$k)$ $4577 + 6201 = 10778$	$l)$ $5031 + 5768 = 10799$
$m)$ $5465 + 1202 = 6667$	$n)$ $8415 + 2560 = 10975$
$o)$ $8762 + 7355 = 16117$	$p)$ $7437 + 1221 = 8658$
$q)$ $4578 + 7377 = 11955$	$r)$ $5786 + 4532 = 10318$
$s)$ $1057 + 7800 = 8857$	$t)$ $4204 + 4621 = 8825$
$u)$ $9424 + 8054 = 17478$	$v)$ $4438 + 4575 = 9013$
$w)$ $7873 + 9724 = 17597$	$x)$ $3432 + 7387 = 10819$

Aufgabe 2:

$a)$ $3821 - 1347 = 2474$	$b)$ $5962 - 1912 = 4050$
$c)$ $4512 - 3246 = 1266$	$d)$ $9353 - 4636 = 4717$
$e)$ $4462 - 2543 = 1919$	$f)$ $4156 - 3737 = 419$
$g)$ $9948 - 5499 = 4449$	$h)$ $4784 - 3377 = 1407$
$i)$ $9745 - 3726 = 6019$	$j)$ $7269 - 3289 = 3980$
$k)$ $6201 - 4513 = 1688$	$l)$ $5931 - 5768 = 163$
$m)$ $5465 - 1202 = 4263$	$n)$ $8415 - 2560 = 5855$
$o)$ $8762 - 7355 = 1407$	$p)$ $7437 - 1221 = 6216$
$q)$ $8578 - 7377 = 1201$	$r)$ $5786 - 4532 = 1254$
$s)$ $9057 - 7800 = 1257$	$t)$ $7204 - 4621 = 2583$
$u)$ $9424 - 8054 = 1370$	$v)$ $7838 - 4575 = 3263$
$w)$ $9873 - 9724 = 149$	$x)$ $8432 - 7387 = 1045$

Aufgabe 3:

$a)$ $8746 \cdot 5 = 43730$	$b)$ $15366 \cdot 2 = 30732$	$c)$ $24367 \cdot 7 = 170569$
$d)$ $46383 \cdot 9 = 417447$	$e)$ $76373 \cdot 3 = 229119$	$f)$ $79342 \cdot 9 = 714078$
$g)$ $78689 \cdot 4 = 314756$	$h)$ $12057 \cdot 4 = 48228$	$i)$ $13485 \cdot 6 = 80910$
$j)$ $46024 \cdot 5 = 230120$	$k)$ $97921 \cdot 7 = 685447$	$l)$ $48566 \cdot 9 = 437094$
$m)$ $27863 \cdot 6 = 167178$	$n)$ $48760 \cdot 2 = 97520$	$o)$ $97231 \cdot 9 = 875079$
$p)$ $76867 \cdot 7 = 538069$	$q)$ $38793 \cdot 8 = 310344$	$r)$ $32138 \cdot 4 = 128552$
$s)$ $79523 \cdot 3 = 238569$	$t)$ $16967 \cdot 8 = 135736$	$u)$ $23739 \cdot 7 = 166173$
$v)$ $13877 \cdot 9 = 124893$	$w)$ $24672 \cdot 3 = 74016$	$x)$ $37979 \cdot 6 = 227874$

Aufgabe 4:

$a)$ $3821 \cdot 1347 = 5146887$ $b)$ $5962 \cdot 1912 = 11399344$
$c)$ $4512 \cdot 3246 = 14645952$ $d)$ $9353 \cdot 4636 = 43360508$
$e)$ $4462 \cdot 2543 = 11346866$ $f)$ $4156 \cdot 3737 = 15530972$
$g)$ $9948 \cdot 5499 = 54704052$ $h)$ $4784 \cdot 3377 = 16155568$
$i)$ $9745 \cdot 3726 = 36309870$ $j)$ $7269 \cdot 3289 = 23907741$
$k)$ $6201 \cdot 4513 = 27985113$ $l)$ $5931 \cdot 5768 = 34210008$
$m)$ $5465 \cdot 1202 = 6568930$ $n)$ $8415 \cdot 2560 = 21542400$
$o)$ $8762 \cdot 7355 = 64444510$ $p)$ $7437 \cdot 1221 = 9080577$
$q)$ $8578 \cdot 7377 = 63279906$ $r)$ $5786 \cdot 4532 = 26222152$
$s)$ $9057 \cdot 7800 = 70644600$ $t)$ $7204 \cdot 4621 = 33289684$
$u)$ $9424 \cdot 8054 = 75900896$ $v)$ $7838 \cdot 4575 = 35858850$
$w)$ $9873 \cdot 9724 = 96005052$ $x)$ $8432 \cdot 7387 = 62287184$

Aufgabe 5:

$a)$ $7095 : 3 = 2365$ $b)$ $2568 : 6 = 428$
$c)$ $4512 : 2 = 2256$ $d)$ $5033 : 7 = 719$
$e)$ $7389 : 9 = 821$ $f)$ $9475 : 5 = 1895$
$g)$ $9872 : 8 = 1234$ $h)$ $6024 : 8 = 753$
$i)$ $9416 : 4 = 2354$ $j)$ $7273 : 7 = 1039$
$k)$ $7587 : 9 = 843$ $l)$ $3682 : 7 = 526$
$m)$ $7578 : 3 = 2526$ $n)$ $6738 : 2 = 3369$
$o)$ $8638 : 7 = 1234$ $p)$ $8464 : 8 = 1058$
$q)$ $8231 : 1 = 8231$ $r)$ $4755 : 5 = 951$
$s)$ $6024 : 8 = 753$ $t)$ $5112 : 6 = 852$
$u)$ $6840 : 15 = 456$ $v)$ $9468 : 12 = 789$
$w)$ $7704 : 24 = 321$ $x)$ $5904 : 16 = 369$

Aufgabe 6: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)$ = 108062	$b)$ = 137425	$c)$ = 124157	$d)$ = 102248
$e)$ = 160103	$f)$ = 140274	$g)$ = 241148	$h)$ = 94108
$i)$ = 155636	$j)$ = 140550	$k)$ = 174984	$l)$ = 185709
$m)$ = 167513	$n)$ = 212838		

Aufgabe 7:

$a)$ = 12763	$b)$ = 46582	$c)$ = 43755	$d)$ = 36946
$e)$ = 13558	$f)$ = 12690	$g)$ = 498746	$h)$ = 159407
$i)$ = 655020	$j)$ = 820947	$k)$ = 774441	$l)$ = 618318
$m)$ = 95362	$n)$ = 226399		

Aufgabe 8:

$a)$ = 89372	$b)$ = 93141	$c)$ = 46578	$d)$ = 186966
$e)$ = 77606	$f)$ = 210342	$g)$ = 85453	$h)$ = 127259
$i)$ = 80281	$j)$ = 63387	$k)$ = 159292	$l)$ = 221078
$m)$ = 214812	$n)$ = 130010		

Aufgabe 9:

$a)$ = 708447	$b)$ = 494826	$c)$ = 623871	$d)$ = 619233
$e)$ = 216706	$f)$ = 83300	$g)$ = 205715	$h)$ = 429140
$i)$ = 454137	$j)$ = 618837	$k)$ = 631781	$l)$ = 77636
$m)$ = 90872	$n)$ = 518757		

Aufgabe 10: *Berechne das Ergebnis schriftlich.*

$a)\ = 21512$	$b)\ = 88352$	$c)\ = 5675$	$d)\ = 213238$
$e)\ = 81021$	$f)\ = 13752$	$g)\ = 54227$	$h)\ = 121027$
$i)\ = 38437$	$j)\ = 43680$	$k)\ = 15738$	$l)\ = 74383$
$m)\ = 103863$	$n)\ = 155717$		

Aufgabe 11:

$a)\ 3821 + 1347 \cdot 43 = 61742$

$b)\ 4525 - 2070 : 6 = 4180$

$c)\ 8124 + 1347 - 4371 = 5100$

$d)\ 7124 - 2070 + 1392 = 6446$

$e)\ 4284 : 2 + 1347 \cdot 43 = 60063$

$f)\ 8285 : 5 - 5256 : 8 = 1000$

$g)\ 3482 \cdot 3 - 7432 : 4 = 8588$

$h)\ 8285 \cdot 8 : 5 - 5256 + 4361 = 12361$

$i)\ 1288 \cdot 2 \cdot 4 + 5416 : 4 : 2 = 10981$

$j)\ 4265 \cdot 3 - 3236 \cdot 2 + 1454 \cdot 4 = 12139$

$k)\ 822 \cdot 9 \cdot 6 : 3 - 632 \cdot 11 : 2 = 11320$

$l)\ 4265 : 5 + 6438 : 6 + 17848 : 8 = 4157$

Aufgabe 12:

$a)\ 1203 + 6799 + 5684 + 2156 + 9852 = 25694$

$b)\ 9982 - 595 - 651 - 3197 - 1637 = 3902$

$c)\ 11 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 3 = 5544$

$d)\ 1587 + 9613 + 9477 + 2674 + 2987 = 26338$

$e)\ 8745 - 2971 - 841 - 1052 - 681 = 3200$

$f)\ 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 7 = 2520$

$g)\ 8461 + 5625 + 1098 + 6950 + 8509 = 30643$

$h)\ 7894 - 412 - 753 - 951 - 456 = 5322$

$i)\ 12 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 9 = 16200$

Aufgabe 13:

$a)$ $2 + 6 \cdot 3 - 5 = 15$

$b)$ $12 - 20 : 5 + 8 \cdot 2 = 24$

$c)$ $2 \cdot 8 : 4 + 2 - 6 : 2 = 3$

$d)$ $63 - 4 \cdot 7 - 3 \cdot 3 + 15 = 41$

$e)$ $12 \cdot 4 - 6 \cdot 5 + 33 \cdot 7 - 43 \cdot 4 = 77$

$f)$ $10 \cdot 45 - 15 : 5 \cdot 60 + 34 = 304$

$g)$ $7 + 3 \cdot 17 + 56 \cdot 6 - 123 = 271$

$h)$ $55 \cdot 48 : 4 : 3 - 12 \cdot 3 = 184$

$i)$ $54 \cdot 11 - 9 \cdot 47 - 72 : 2 \cdot 3 = 63$

$j)$ $74 \cdot 3 - 4 \cdot 8 + 32 \cdot 5 = 350$

$k)$ $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 - 12 \cdot 5 = 180$

$l)$ $864 : 8 : 3 + 23 \cdot 7 - 12 \cdot 4 = 141$

$m)$ $142 \cdot 13 - 24 \cdot 82 : 4 + 91 \cdot 12 = 2446$

$n)$ $1249 \cdot 34 - 2135 : 5 + 235 \cdot 5 = 43214$

Aufgabe 14: *Berechne das Ergebnis.*

$a)$ $2 \cdot 4 + 6 \cdot 3 - 2 \cdot 11 = 4$

$b)$ $4 \cdot 12 : 3 - 5 \cdot 2 + 3 = 9$

$c)$ $75 : 5 - 5 + 72 : 8 \cdot 3 = 37$

$d)$ $10 \cdot 9 - 3 \cdot 2 \cdot 9 = 36$

$e)$ $6 + 6 \cdot 5 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 258$

$f)$ $81 : 3 : 3 + 6 \cdot 7 - 5 \cdot 7 = 16$

$g)$ $55 - 3 \cdot 7 + 32 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 42$

$h)$ $15 \cdot 4 - 9 \cdot 3 - 4 \cdot 5 : 2 = 23$

$i)$ $60 : 5 : 6 + 24 \cdot 5 - 7 \cdot 9 = 59$

$j)$ $11 \cdot 99 - 2 \cdot 6 : 4 \cdot 8 = 1065$

$k)$ $54 : 9 \cdot 3 + 7 \cdot 5 \cdot 3 = 123$

$l)$ $5 \cdot 5 \cdot 4 : 10 + 9 \cdot 4 : 3 = 22$

$m)$ $42 - 11 \cdot 3 + 3 \cdot 12 = 45$

$n)$ $49 \cdot 5 : 7 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 51$

Aufgabe 15: *Berechne das Ergebnis.*

$a)$ $4731 + 3772 + 9141 + 1156 + 11278 + 3731 + 7542 + 1127 + 9346 = 51824$

$b)$ $156 + 59342 + 3482 + 45642 + 284921 + 6432 + 25 + 27381 + 22833 = 450214$

$c)$ $826265 - 1661 - 5683 - 34667 - 3727 - 8790 - 5204 - 4267 = 76226$

$d)$ $438693 - 2362 - 2677 - 6431 - 6530 - 3256 - 1354 - 7532 - 2637 = 405914$

$e)$ $36377 + 2367 + 2326 - 2362 - 6432 + 3467 - 9032 + 9463 - 7524 - 7345 = 21305$

$f)$ $89349 + 3256 - 8347 + 8939 \cdot 11 - 4578 + 3250 - 6784 \cdot 5 = 147339$

$g)$ $3422 \cdot 312 - 26806 + 6 \cdot 7846 - 92357 + 8356 \cdot 8 - 4362 = 1058063$

$h)$ $29857 - 23658 + 26 \cdot 366 - 543 + 23568 - 485 \cdot 38 - 436 + 326 - 2666 - 735 = 16799$

Aufgabe 16: *Berechne das Ergebnis.*

$a)$ $82 \cdot 24 - 3528 : 9 \cdot 3 = 792$

$b)$ $52347 - 45 \cdot 23 - 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 4 = 49596$

$c)$ $541 \cdot 24 : 4 + 72 \cdot 12 - 83 \cdot 4 = 3778$

$d)$ $5670 : 6 : 7 + 23 \cdot 17 - 13 \cdot 11 = 383$

$e)$ $55 \cdot 67 - 6460 : 6 \cdot 2 = 1525$

$f)$ $14280 : 8 \cdot 2 - 14 \cdot 71 - 44 \cdot 5 = 2356$

$g)$ $40 \cdot 70 \cdot 30 : 1000 - 450 : 10 + 80000 : 10000 = 47$

$h)$ $75 \cdot 25 - 7 \cdot 34 - 89 + 43 \cdot 21 = 2451$

Aufgabe 17: *Schreibe die Rechnung auf und berechne das Ergebnis.*

$a)$ $324 + 579 = 903$

$b)$ $3960 - 1492 = 2468$

$c)$ $4930 - 23 \cdot 54 = 3688$

$d)$ $49565 : 5 + 1 = 9914$

$e)$ $\frac{150000}{250} - 111 \cdot 3 = 267$

$f)$ $10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 200$

Aufgabe 18:

$a)$ $314745 \approx 314700$

$b)$ $741854 \approx 740000$

$c)$ $451564 \approx 500000$

$d)$ $451541 \approx 452000$

$e)$ $519419 \approx 519420$

$f)$ $982195 \approx 980000$

$g)$ $786461 \approx 786500$

$h)$ $565656 \approx 600000$

$i)$ $485452 \approx 485500$

$j)$ $189891 \approx 190000$

$k)$ $767433 \approx 800000$

$l)$ $789241 \approx 790000$

$m)$ $346893 \approx 346890$

$n)$ $421811 \approx 422000$

$o)$ $240048 \approx 240000$

$p)$ $105730 \approx 105730$

$q)$ $468705 \approx 500000$

$r)$ $756130 \approx 760000$

$s)$ $466876 \approx 467000$

$t)$ $486761 \approx 487000$

$u)$ $607807 \approx 608000$

$v)$ $783789 \approx 800000$

$w)$ $941204 \approx 941200$

$x)$ $123473 \approx 123000$

$y)$ $897078 \approx 897080$

$z)$ $378433 \approx 378400$

Aufgabe 19:

a) Sechstausendfünfhundertvierundsechzig

b) Achttausendsiebenhundertsechsundvierzig

c) Viertausenddreihundertsiebenundsechzig

d) Zweihundertachtzehntausendvierundfünfzig

e) Neunundvierzigtausendneunhundertsechsundzwanzig

f) Zweihundertachtundvierzigtausendneunhundertneunundsiebzig

g) Einemillionenzweihundertachtundsiebzigtausendneunhundertsiebenundneunzig

h) Zweimillioneneinhundertachtunddreißigtausendneunhundertzweiundsiebzig

i) Einunddreißigtausendzweihundertsiebenundneunzig

j) Vierhundertfünfzigmillionenneunhundertausendfünfundsiebzig

k) Vierhundertfünfzigmillionenneunhunderfünfundsiebzigtausend

l) Siebenmilliardenneunhundertzweiunddreißigmillionenneunzigtausendeinhundertsiebenundachtzig

Aufgabe 20:

a) 4 229 *b*) 344 211

c) 46 738 *d*) 55 000 727

e) 805 972 *f*) 200 087

g) 116 521 *h*) 11 000 600 912

i) 3 709 596 140 *l*) 470 000 000 000 000 000

Aufgabe 21:

a)

+	3423	9384	5839	8074
7524	10947	16908	13363	15598
9453	12876	18837	15292	17527
6426	9849	15810	12265	14500
5896	9319	15280	11735	13970

b)

+	8746	1289	7513	8508
5318	14064	6607	12831	13826
2469	11215	3758	9982	10977
7351	16097	8640	14864	15859
9793	18539	11082	17306	18301

Aufgabe 22: *Berechne die fehlenden Felder*

a)

$\cdot$	75	82	94	37
55	4125	4150	5170	2035
97	7275	7954	9118	3589
37	2775	3034	3478	1369
43	3225	3526	4042	1591

b)

$\cdot$	46	95	49	38
87	4002	8265	4263	3306
54	2484	5130	2646	2052
63	2898	5985	3087	2394
21	966	1995	1029	798

Aufgabe 23:

a) $185 \to 555 \to 1037 \to 748 \to 4488$

b) $6726 \to 4182 \to 2091 \to 1549 \to 10843$

c) $92 \to 1564 \to 391 \to 1636 \to 893$

d) $18144 \to 2268 \to 378 \to 2646 \to 5930$

e) $4719 \to 2630 \to 526 \to 5786 \to 5069$

f) $258 \to 4902 \to 817 \to 7353 \to 1058$

Aufgabe 24:

a) $841 \to 10933 \to 3450 \to 1313 \to 95849 \to 91586 \to 457930 \to 451681 \to 456523 \to 3195661$

b) $7378 \to 195 \to 12480 \to 3120 \to 21840 \to 23224 \to 22737 \to 136422 \to 68211 \to 65368$

c) $7169 \to 9600 \to 1920 \to 175 \to 8489 \to 4226 \to 434 \to 9548 \to 2387 \to 4776$

d) $59 \to 4248 \to 531 \to 8712 \to 968 \to 7405 \to 918 \to 4590 \to 510 \to 5799$

Aufgabe 25:

Aufgabe 26:

a) $345 < 346 < 456 < 748 < 3346 < 4568 < 5753 < 5788 < 6535 < 33788$

b) $46 < 457 < 547 < 586 < 2345 < 3477 < 4568 < 4578 < 5347 < 5748 < 7075$

c) $34 < 46 < 78 < 345 < 456 < 457 < 511 < 679 < 690 < 769 < 1818 < 5687 < 9786$

d) $1110 < 1510 < 1561 < 1582 < 1598 < 1844 < 8812 < 7116 < 21084 < 87661$

e) $4894 < 5048 < 6456 < 6749 < 7311 < 13004 < 16877 < 857661 < 876041$

f) $31 < 70 < 156 < 354 < 416 < 576 < 1561 < 15131 < 18769 < 81108 < 87661$

Runde auf:	Zehner	Hunderter	Tausender	Zehntausender	Hunderttausender
52893	52890	52900	53000	50000	100000
159423	159420	159400	160000	160000	200000
852251	852250	852300	852000	850000	900000
498825	498830	498800	499000	490000	500000
515892	515890	515900	516000	520000	500000
218453	218450	218500	218000	220000	200000
349979	349980	350000	350000	350000	400000
379099	379100	379000	379000	380000	400000
48576	48580	48600	49000	50000	0

Aufgabe 27: $221km$

Aufgabe 28: $184086m$

Aufgabe 29: 270 bzw. 216

Aufgabe 30: 79488899

Aufgabe 31: A zu B: $27km$, A zu C: $166km$, A zu D: $495km$, B zu C: $139km$, B zu D: $468km$, C zu D: $329km$.

Aufgabe 32:

$a)$ 19 $b)$ 74 $c)$ 18 $d)$ 316
$e)$ 1698 $f)$ 3657 $g)$ 326567 $h)$ 178481
$i)$ 38686057 $j)$ 89403519

Aufgabe 33:

$a)$ 4 $b)$ 71 $c)$ 13 $d)$ 2930
$e)$ 10028 $f)$ 805 $g)$ 58472 $h)$ 9425644
$i)$ 29944229 $j)$ 258511514

Aufgabe 34:

a) 11 *b*) 191 *c*) 24 *d*) 564
e) 941 *f*) 33545 *g*) 26145 *h*) 505114
i) 10390 *j*) 83827388

Aufgabe 35:

15
7 | 8
2 | 5 | 3

27
16 | 11
7 | 9 | 2

58
38 | 20
21 | 17 | 3

171
96 | 85
37 | 59 | 26

190
117 | 73
113 | 4 | 69

1093
628 | 465
256 | 372 | 93

1548
899 | 649
397 | 502 | 147

3004
1502 | 1502
333 | 1169 | 333

2972
1551 | 1421
856 | 695 | 726

Aufgabe 36:

150
10 | 15
2 | 5 | 3

1344
56 | 24
7 | 8 | 3

1620
45 | 36
5 | 9 | 4

3388
44 | 77
4 | 11 | 7

243
27 | 9
3 | 9 | 1

10800
60 | 180
5 | 12 | 15

78897
221 | 357
13 | 17 | 21

762048
1008 | 756
24 | 42 | 18

0
0 | 890
0 | 178 | 5

Aufgabe 37:

25
10 | 15
2 | 5 | 3

36
21 | 15
7 | 3 | 5

50
25 | 25
5 | 5 | 5

32	120	24
28 4	66 54	18 6
7 4 1	11 6 9	6 3 2

80	200	0
56 24	75 125	0 0
7 8 3	15 5 25	x 0 x

Aufgabe 38:

56	150	112
7 8	10 15	8 14
2 5 3	4 6 9	3 5 9

270	144	462
18 15	12 12	21 22
7 11 4	9 3 9	4 17 5

27	85	4
9 3	5 17	2 2
9 0 3	4 1 16	1 1 1

Aufgabe 39:

a) $\begin{array}{r} 547272 \\ +266634 \\ 11\ \ 1\ \ \ \ \\ \hline 813906 \end{array}$
b) $\begin{array}{r} 618415 \\ +784521 \\ 111\ \ \ \ \ \\ \hline 1402936 \end{array}$
c) $\begin{array}{r} 874641 \\ +874150 \\ 11\ \ \ \ \ \ \\ \hline 1748791 \end{array}$
d) $\begin{array}{r} 710301 \\ +525167 \\ 1\ \ \ \ \ \ \\ \hline 1235468 \end{array}$
e) $\begin{array}{r} 537116 \\ +623418 \\ 1\ 1\ \ 1\ \ \ \\ \hline 1160534 \end{array}$
f) $\begin{array}{r} 784165 \\ +541105 \\ 11\ \ \ 1\ \ \\ \hline 1325270 \end{array}$

Aufgabe 40:

a) $\begin{array}{r} 547272 \\ -266634 \\ 1\ 1\ 1\ \ \\ \hline 280638 \end{array}$
b) $\begin{array}{r} 618415 \\ -384521 \\ 1\ 11\ \ \ \\ \hline 233894 \end{array}$
c) $\begin{array}{r} 874641 \\ -374150 \\ 1\ \ \\ \hline 500491 \end{array}$
d) $\begin{array}{r} 710301 \\ -525167 \\ 11\ 1\ \\ \hline 185134 \end{array}$
e) $\begin{array}{r} 537116 \\ -423418 \\ 111\ \\ \hline 113698 \end{array}$
f) $\begin{array}{r} 784165 \\ -541105 \\ \\ \hline 243060 \end{array}$

Aufgabe 41:

$$a)\ \begin{array}{r} 5_{2}4_{4}7_{1}2_{4}7_{1}2 \cdot 6 \\ \hline 3283632 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{r} 61_{2}8_{1}41_{1}5 \cdot 3 \\ \hline 1855245 \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{r} 8_{5}7_{3}4_{4}6_{2}41 \cdot 7 \\ \hline 6122487 \end{array}$$

$$d)\ \begin{array}{r} 710_{2}301 \cdot 9 \\ \hline 6392709 \end{array} \qquad e)\ \begin{array}{r} 5_{1}3_{2}711_{2}6 \cdot 4 \\ \hline 2148464 \end{array} \qquad f)\ \begin{array}{r} 7_{6}8_{3}4_{1}1_{5}6_{4}5 \cdot 8 \\ \hline 6273320 \end{array}$$

Aufgabe 42:

a) 5472 · 4564	b) 6115 · 2566	c) 8441 · 9732	d) 7101 · 4047	e) 5716 · 4464	f) 7865 · 9564
21888000	12230000	75969000	28404000	22864000	70785000
+ 2736000	+ 3057500	+ 5908700	+ 0000000	+ 3429600	+ 3932500
+ 328320	+ 366900	+ 253230	+ 284040	+ 228640	+ 471900
+ 21888	+ 36690	+ 16882	+ 49707	+ 22864	+ 31460
11211	122	121211	11	11221	2211
24974208	15691090	82147812	28737747	25516224	75220860

Aufgabe 43:

$a)$

$$\begin{array}{l}
78\ 70\ 518 : 9 = 0874502 \\
-\,0 \\
\hline
78 \\
-\,72 \\
\hline
6\ 7 \\
-6\ 3 \\
\hline
40 \\
-\,36 \\
\hline
4\ 5 \\
-4\ 5 \\
\hline
01 \\
-\ \ 0 \\
\hline
18 \\
-18 \\
\hline
0
\end{array}$$

$b)$

$$\begin{array}{l}
29\ 31\ 138 : 6 = 0488523 \\
-\,0 \\
\hline
29 \\
-\,24 \\
\hline
5\ 3 \\
-4\ 8 \\
\hline
51 \\
-\,48 \\
\hline
3\ 1 \\
-3\ 0 \\
\hline
13 \\
-\,12 \\
\hline
18 \\
-18 \\
\hline
0
\end{array}$$

$c)$

$$\begin{array}{l}
37\ 79\ 127 : 3 = 1259709 \\
-\,3 \\
\hline
07 \\
-\ \ 6 \\
\hline
1\ 7 \\
-1\ 5 \\
\hline
29 \\
-\,27 \\
\hline
2\ 1 \\
-2\ 1 \\
\hline
02 \\
-\ \ 0 \\
\hline
27 \\
-27 \\
\hline
0
\end{array}$$

d) $61\ 22\ 074 : 7 = 0874582$

$$
\begin{array}{l}
-\,0 \\
\hline
61 \\
-\,56 \\
\hline
\ \ 5\ 2 \\
\ -4\ 9 \\
\hline
\ \ \ \ 32 \\
\ \ -\,28 \\
\hline
\ \ \ \ \ 4\ 0 \\
\ \ \ \ -3\ 5 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ 57 \\
\ \ \ \ \ -\,56 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ 14 \\
\ \ \ \ \ \ -14 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

e) $25\ 60\ 356 : 4 = 0640089$

$$
\begin{array}{l}
-\,0 \\
\hline
25 \\
-\,24 \\
\hline
\ \ 1\ 6 \\
\ -1\ 6 \\
\hline
\ \ \ \ 00 \\
\ \ -\ \ 0 \\
\hline
\ \ \ \ \ 0\ 3 \\
\ \ \ \ -\ \ 0 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ 35 \\
\ \ \ \ \ -\,32 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ 36 \\
\ \ \ \ \ \ -36 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

f) $72\ 00\ 168 : 8 = 0900021$

$$
\begin{array}{l}
-\,0 \\
\hline
72 \\
-\,72 \\
\hline
\ \ 0\ 0 \\
\ -\ \ 0 \\
\hline
\ \ \ \ 00 \\
\ \ -\ \ 0 \\
\hline
\ \ \ \ \ 0\ 1 \\
\ \ \ \ -\ \ 0 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ 16 \\
\ \ \ \ \ -\,16 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ 08 \\
\ \ \ \ \ \ -\ 8 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

Aufgabe 44:

a) $86517 \approx$ 86500 auf Hunderter

b) $46355 \approx$ 46360 auf Zehner

c) $86874 \approx$ 90000 auf Zehntauserndes

d) $46412 \approx$ 46400 auf Hunderter

e) $64864 \approx$ 65000 auf Tausender

f) $41108 \approx$ 41110 auf Zehner

g) $48971 \approx$ 49000 auf Hunderter

h) $16789 \approx$ 16800 auf Hunderter

i) $12045 \approx$ 12000 auf Tausender

j) $79774 \approx$ 80000 auf Zehntauserndes

k) $55995 \approx$ 56000 auf Zehner

l) $8485 \approx$ 0 auf Zehntauserndes

Aufgabe 45:

$a)$ $17 + 89 = 106$

$b)$ $47 - 19 + 63 = 28 + 63 = 91$

$c)$ $5 \cdot 9 \cdot 13 = 45 \cdot 13 = 585$

$d)$ $(55 + 41) : 8 = 96 : 8 = 12$

$e)$ $27 \cdot 32 + 132 : 4 = 864 + 33 = 897$

$f)$ $(17 + 84) \cdot (77 + 24) = 101 \cdot 101 = 10201$

Aufgabe 46:

$a)$ $453 + 61 \cdot 73 = 453 + 4453 = 4906$

$b)$ $943 \cdot 4 - 3567 = 3772 - 3567 = 205$

$c)$ $(432 + 556 : 2) \cdot 3 = (432 + 278) \cdot 3 = 710 \cdot 3 = 2130$

$d)$ $4 \cdot 8935 : 5 - 436 = 4 \cdot 1787 - 436 = 7148 - 436 = 6712$

$e)$ $(345 \cdot 3 - 645 : 3) \cdot (42 - 38) = (1035 - 215) \cdot 4 = 820 \cdot 4 = 3280$

$f)$ $569 - (2464 - 768 : 4) : 4 = 569 - (2464 - 192) : 4 = 569 - 2272 : 4 = 569 - 568 = 1$

Aufgabe 47:

$a)$
$$\begin{aligned} 22736 - 5684 \cdot 4 &= (25 \cdot 40 + 101) \cdot 6 - 39636 : 6 \\ 22736 - 22736 &= (1000 + 101) \cdot 6 - 6606 \\ 0 &= 1101 \cdot 6 - 6606 \\ 0 &= 6606 - 6606 \\ 0 &= 0 \qquad \square \end{aligned}$$

$b)$
$$\begin{aligned} 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3 &= (((7257600 : 8) : 5) : 6) : 7 \\ 45 \cdot 8 \cdot 12 &= ((907200 : 5) : 6) : 7 \\ 45 \cdot 96 &= (181440 : 6) : 7 \\ 4320 &= 30240 : 7 \\ 4320 &= 4320 \qquad \square \end{aligned}$$

$c)$
$$\begin{aligned} (49 + 32) \cdot 2 \cdot (64 - 23) &= 41 \cdot 3 \cdot 6 \cdot (7897 - 986 \cdot 8) \\ 81 \cdot 2 \cdot 41 &= 41 \cdot 18 \cdot (7897 - 7888) \\ 81 \cdot 82 &= 738 \cdot 9 \\ 6642 &= 6642 \qquad \square \end{aligned}$$

$d)$ $83485 \cdot 345789 - 345789 \cdot 83485 + 892346 : 7 = 2 \cdot (1267 + 101 \cdot 36) \cdot 13$

$$892346 : 7 = (1267 + 3636) \cdot 26$$
$$127478 = 4903 \cdot 26$$
$$127478 = 127478 \qquad \square$$

Aufgabe 48: *Führe eine Überschlagsrechnung durch.*

$a)$ $3120 \cdot 431 \approx 3000 \cdot 400 = 1200000$

$b)$ $9175 + 5884 \approx 9000 + 6000 = 15000$

$c)$ $7541 - 5671 \approx 7500 - 5700 = 1800$

$d)$ $8415 : 521 \approx 8500 : 500 = 17$

$e)$ $78484 + 65418 \approx 78000 + 65000 = 143000$

$f)$ $23181 - 18746 \approx 23000 - 19000 = 4000$

$g)$ $68484 : 4117 \approx 68000 : 4000 = 17$

$h)$ $51855 \cdot 15151 \approx 50000 \cdot 15000 = 7500000000$

$i)$ $58355 \cdot 6841 \approx 60000 \cdot 7000 = 420000000$

$j)$ $98441 : 5415 \approx 1000000 : 5000 = 200$

$k)$ $87416 \cdot 17452 \approx 87000 - 17000 = 60000$

$l)$ $45488 - 34131 \approx 45000 - 34000 = 11000$

Aufgabe 49: *Entscheide durch eine Überschlagsrechnung welches Relationszeichen („>“ oder „<“) eingetragen werden muss.*

$a)$ $715 \cdot 518 \; \boxed{>} \; 125414 + 213184$

$b)$ $3964363 : 19359 \; \boxed{<} \; 5484 - 2818$

$c)$ $284 \cdot 189 \; \boxed{>} \; 91478 : 19$

$d)$ $77484 + 63151 \; \boxed{>} \; 321106 - 189113$

Aufgabe 50: *Bestimme den Wert des Terms.*

$a)$ $5^2 \cdot 3^3 - 4^4 = 419$

$b)$ $7^2 + 3^4 + 5^3 = 265$

$c)$ $4^3 \cdot 8^2 = 4096$

$d)$ $7^3 + 6^4 - 4^5 = 615$

$e)$ $11^3 - 12^2 - 17^2 = 898$

$f)$ $25^3 + 13^2 \cdot 6^4 = 234649$

Aufgabe 51: *Berechne den Wert des Terms und beschreibe danach wie diese Rechnungen vereinfacht ausgeführt werden können.*

$a)$ $3 \cdot 400 = 1200$ $b)$ $50 \cdot 90 = 4500$ $c)$ $200 \cdot 1100 = 220000$

$d)$ $800 \cdot 7000 = 5600000$ $e)$ $1200 \cdot 7000 = 8400000$ $f)$ $80000 \cdot 30000 = 2400000000$

Die Nullen können bei der Rechnung erstmals ignoriert werden. Diese werden anschließend gezählt und der Zahl aus der Rechnung angehangen.

Aufgabe 52: *Berechne den Wert des Terms und beschreibe danach wie diese Rechnungen vereinfacht ausgeführt werden können.*

$a)$ $400 : 200 = 2$ $b)$ $5000 : 1000 = 5$ $c)$ $270000 : 30000 = 9$

$d)$ $48000 : 800 = 60$ $e)$ $77000 : 110 = 700$ $f)$ $84000 : 40 = 2100$

$g)$ $7200 : 9 = 800$ $h)$ $48000 : 12 = 4000$ $i)$ $32000 : 400 = 80$

Die Nullen können bei der Rechnung erstmals ignoriert werden. Anschließend wird die Differenz zwischen Dividend minus Divisor bestimmt und der Zahl aus der Rechnung angehangen.

Aufgabe 54:

$a)$ $$\begin{gathered}(14505 : 5) : 3 = \\ (14505 : 3) : 5 = \\ 14505 : (5 \cdot 3) = \\ 14505 : 15 = 967\end{gathered}$$

$b)$ $$\begin{gathered}(19824 : 8) : 7 = \\ (19824 : 7) : 8 = \\ 19824 : (7 \cdot 8) = \\ 19824 : 56 = 354\end{gathered}$$

$c)$ $$\begin{gathered}(136136 : 7) : 4 = \\ (14505 : 4) : 7 = \\ 14505 : (7 \cdot 4) = \\ 14505 : 28 = 4862\end{gathered}$$

$d)$ $$\begin{gathered}((15570 : 2) : 3) : 5 = \\ ((15570 : 2) : 5) : 3 = \\ ((15570 : 3) : 2) : 5 = \\ ((15570 : 3) : 5) : 2 = \\ ((15570 : 5) : 3) : 2 = \\ ((15570 : 5) : 2) : 3 = \\ 15570 : (2 \cdot 3 \cdot 5) = \\ 15570 : 30 = 519\end{gathered}$$

$e)$ $$\begin{gathered}(52752 : (7 \cdot 4)) : 3 = \\ (52752 : (7 \cdot 3)) : 4 = \\ (52752 : (4 \cdot 7)) : 3 = \\ (52752 : (4 \cdot 3)) : 7 = \\ (52752 : (3 \cdot 4)) : 7 = \\ (52752 : (3 \cdot 7)) : 4 = \\ 52752 : (7 \cdot 3 \cdot 4) = \\ 52752 : 84 = 628\end{gathered}$$

$f)$ $$\begin{gathered}(((907410 : 7) : 5) : 3) : 2 = \\ (907410 : (7 \cdot 5)) : (3 \cdot 2) = \\ (907410 : (7 \cdot 3)) : (5 \cdot 2) = \\ (907410 : (7 \cdot 5 \cdot 2)) : 3 = \\ (907410 : (3 \cdot 5 \cdot 2)) : 7 = \\ (907410 : 15) : 14 = \\ (907410 : 6) : 35 = \\ 907410 : 210 = 4321\end{gathered}$$

Alle Terme besitzen den gleichen Wert, sodass erkannt werden kann, dass aufeinander folgende Divisoren zu einem gemeinsamen Divisor als Produkt der einzelnen Divisoren zusammengefasst werden können. Somit können höherwertige Divisoren durch Primfaktorzerlegungen in Teilrechnungen zerlegt werden. Somit kann hier von einem Art Kommutativität gesprochen werden.

Aufgabe 55: *Berechne alle Felder der Tabelle. In den ersten drei Spalten wird den Parametern ein Wert pro Zeile zugelassen. In den darauffolgenden Spalten wird im obersten Feld die geforderte Rechnung angegeben.* (Benötigt Kapitel „Einsetzungverfahren“)

a	b	c	$a+c$	$a \cdot c$	$a+b+c$	$c+a \cdot b$	$c \cdot a - b$	$b \cdot (a+b)$	$c \cdot c$
4	7	3	7	12	14	31	5	77	9
3	2	8	11	24	13	14	22	10	64
8	9	5	13	40	22	77	31	153	25
6	4	9	15	36	19	33	50	40	81
9	5	4	13	65	18	49	31	70	16
8	4	7	15	56	26	39	52	48	49
6	5	12	18	72	23	42	67	150	144

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.2.1).

18.10.4 Lösungen zur Teilbarkeit

Aufgabe 1:

$a)$ 30 $b)$ 46 $c)$ 29 $d)$ 26
$e)$ 21 $f)$ 33 $g)$ 34 $h)$ 40
$i)$ 23 $j)$ 33 $k)$ 25 $l)$ 41
$m)$ 20 $n)$ 29 $o)$ 48 $p)$ 49

Aufgabe 2:

$a)$ -6 $b)$ 4 $c)$ 9 $d)$ 8
$e)$ 1 $f)$ -1 $g)$ -14 $h)$ -2
$i)$ -3 $j)$ -3 $k)$ 3 $l)$ 21
$m)$ -3 $n)$ -3 $o)$ 4 $p)$ 9

Aufgabe 3:

$a)$ $Q_2(z) = 138$; $Q_3(z) = 1101$; $Q_4(z) = 7761$;
$AQ_2(z) = 16$; $AQ_3(z) = 361$; $AQ_4(z) = -3691$

$b)$ $Q_2(z) = 271$; $Q_3(z) = 1216$; $Q_4(z) = 9874$;
$AQ_2(z) = -77$; $AQ_3(z) = -356$; $AQ_4(z) = -2918$

$c)$ $Q_2(z) = 200$; $Q_3(z) = 983$; $Q_4(z) = 7526$;
$AQ_2(z) = -52$; $AQ_3(z) = -317$; $AQ_4(z) = 7004$

$d)$ $Q_2(z) = 179$; $Q_3(z) = 1232$; $Q_4(z) = 3545$;
$AQ_2(z) = -111$; $AQ_3(z) = -668$; $AQ_4(z) = 3045$

$e)$ $Q_2(z) = 120$; $Q_3(z) = 696$; $Q_4(z) = 10911$;
$AQ_2(z) = 98$; $AQ_3(z) = 494$; $AQ_4(z) = 7909$

$f)$ $Q_2(z) = 186$; $Q_3(z) = 339$; $Q_4(z) = 15828$;
$AQ_2(z) = 130$; $AQ_3(z) = -177$; $AQ_4(z) = -178$

$g)$ $Q_2(z) = 124$; $Q_3(z) = 754$; $Q_4(z) = 4084$;
$AQ_2(z) = -44$; $AQ_3(z) = 630$; $AQ_4(z) = -1272$

$h)$ $Q_2(z) = 211$; $Q_3(z) = 1408$; $Q_4(z) = 11002$;
$AQ_2(z) = 7$; $AQ_3(z) = -108$; $AQ_4(z) = -6252$

$i)$ $Q_2(z) = 113$; $Q_3(z) = 1166$; $Q_4(z) = 3974$;
$AQ_2(z) = -35$; $AQ_3(z) = -74$; $AQ_4(z) = 2950$

$j)$ $Q_2(z) = 168$; $Q_3(z) = 402$; $Q_4(z) = 11850$;
$AQ_2(z) = 68$; $AQ_3(z) = -316$; $AQ_4(z) = -6180$

$k)$ $Q_2(z) = 151$; $Q_3(z) = 970$; $Q_4(z) = 3715$;
$AQ_2(z) = -79$; $AQ_3(z) = -630$; $AQ_4(z) = 3445$

$l)$ $Q_2(z) = 320$; $Q_3(z) = 1292$; $Q_4(z) = 14873$;
$AQ_2(z) = -26$; $AQ_3(z) = -384$; $AQ_4(z) = -1907$

$m)$ $Q_2(z) = 101$; $Q_3(z) = 848$; $Q_4(z) = 2675$;
$AQ_2(z) = -49$; $AQ_3(z) = -152$; $AQ_4(z) = 2025$

$n)$ $Q_2(z) = 146$; $Q_3(z) = 902$; $Q_4(z) = 13907$;
$AQ_2(z) = 132$; $AQ_3(z) = 872$; $AQ_4(z) = 2295$

$o)$ $Q_2(z) = 282$; $Q_3(z) = 1002$; $Q_4(z) = 12657$;
$AQ_2(z) = -32$; $AQ_3(z) = -576$; $AQ_4(z) = -5701$

$p)$ $Q_2(z) = 310$; $Q_3(z) = 1894$; $Q_4(z) = 14467$;
$AQ_2(z) = -24$; $AQ_3(z) = 2$; $AQ_4(z) = 721$

Aufgabe 4:

$a)$ Ja	$b)$ Ja	$c)$ $Nein$	$d)$ Ja
$e)$ Ja	$f)$ $Nein$	$g)$ Ja	$h)$ Ja
$i)$ Ja	$j)$ $Nein$	$k)$ $Nein$	$l)$ Ja
$m)$ Ja	$n)$ Ja	$o)$ $Nein$	$p)$ Ja

Aufgabe 5:

$a)$ Ja	$b)$ $Nein$	$c)$ $Nein$	$d)$ Ja
$e)$ Ja	$f)$ Ja	$g)$ $Nein$	$h)$ $Nein$
$i)$ $Nein$	$j)$ Ja	$k)$ $Nein$	$l)$ Ja
$m)$ $Nein$	$n)$ $Nein$	$o)$ Ja	$p)$ Ja

Aufgabe 6:

$a)$ Ja	$b)$ $Nein$	$c)$ Ja	$d)$ Ja
$e)$ Ja	$f)$ $Nein$	$g)$ Ja	$h)$ Ja
$i)$ Ja	$j)$ $Nein$	$k)$ $Nein$	$l)$ $Nein$
$m)$ $Nein$	$n)$ Ja	$o)$ Ja	$p)$ $Nein$

Aufgabe 7:

$a)$ Ja	$b)$ Ja	$c)$ Ja	$d)$ Ja
$e)$ $Nein$	$f)$ Ja	$g)$ Ja	$h)$ $Nein$
$i)$ Ja	$j)$ Ja	$k)$ $Nein$	$l)$ Ja
$m)$ $Nein$	$n)$ $Nein$	$o)$ Ja	$p)$ $Nein$

Aufgabe 8:

a) *Ja*	b) *Ja*	c) *Nein*	d) *Nein*
e) *Ja*	f) *Ja*	g) *Ja*	h) *Ja*
i) *Nein*	j) *Nein*	k) *Nein*	l) *Ja*
m) *Ja*	n) *Ja*	o) *Nein*	p) *Ja*

Aufgabe 9:

a) *Ja*	b) *Ja*	c) *Nein*	d) *Ja*
e) *Nein*	f) *Ja*	g) *Nein*	h) *Nein*
i) *Ja*	j) *Nein*	k) *Ja*	l) *Ja*
m) *Nein*	n) *Ja*	o) *Nein*	p) *Nein*

Aufgabe 10:

a) *Nein*	b) *Ja*	c) *Nein*	d) *Ja*
e) *Ja*	f) *Ja*	g) *Ja*	h) *Nein*
i) *Ja*	j) *Nein*	k) *Nein*	l) *Ja*
m) *Nein*	n) *Ja*	o) *Nein*	p) *Ja*

Aufgabe 11:

a) *Nein*	b) *Ja*	c) *Ja*	d) *Nein*
e) *Ja*	f) *Ja*	g) *Ja*	h) *Nein*
i) *Nein*	j) *Ja*	k) *Nein*	l) *Ja*
m) *Nein*	n) *Nein*	o) *Ja*	p) *Nein*

Aufgabe 12:

$a)$ Ja	$b)$ $Nein$	$c)$ $Nein$	$d)$ $Nein$
$e)$ Ja	$f)$ Ja	$g)$ $Nein$	$h)$ Ja
$i)$ $Nein$	$j)$ Ja	$k)$ Ja	$l)$ Ja
$m)$ Ja	$n)$ Ja	$o)$ $Nein$	$p)$ Ja

Aufgabe 13:

$a)$ $T = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	$b)$ $T = \{2, 3, 7\}$	$c)$ $T = \{2, 3, 4, 6, 8\}$	$d)$ $T = \{3, 7, 9\}$
$e)$ $T = \{2, 3, 7\}$	$f)$ $T = \{2, 3, 6, 9\}$	$g)$ $T = \{2, 3, 5, 10\}$	$h)$ $T = \{7, 11\}$
$i)$ $T = \{2, 3, 4, 5, 8\}$	$j)$ $T = \{2, 5, 10, 11\}$	$k)$ $T = \{2, 4, 7\}$	$l)$ $T = \{3, 5, 9\}$
$m)$ $T = \{3, 7, 9, 11\}$	$n)$ $T = \{2, 4, 8\}$	$o)$ $T = \{3, 9\}$	$p)$ $T = \{11\}$

Aufgabe 14:

$a)$ $15978655 = 5 \cdot 7^4 \cdot 11^3$	$b)$ $51200000 = 2^{14} \cdot 5^5$
$c)$ $22370117 = 7^5 \cdot 11^3$	$d)$ $10077696 = 2^9 \cdot 3^9$
$e)$ $25194240 = 2^8 \cdot 5 \cdot 3^9$	$f)$ $29160000 = 2^6 \cdot 3^6 \cdot 5^4$
$g)$ $32672808 = 2^3 \cdot 21^5$	$h)$ $76236552 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^6$
$i)$ $33840625 = 5^5 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 17$	$j)$ $41544503 = 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13$
$k)$ $33554432 = 2^{25}$	$l)$ $72930375 = 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^4$
$m)$ $40353607 = 7^9$	$n)$ $89253125 = 5^5 \cdot 13^4$
$o)$ $18225207 = 11 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 21^2$	$p)$ $75946878 = 21 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$

Aufgabe 15:

$a)$ $4 \mid 36$	$b)$ $5 \mid 55$	$b)$ $7 \mid 56$	$d)$ $72 \nmid 8$
$e)$ $9 \mid 63$	$f)$ $3 \nmid 74$	$g)$ $14 \mid 84$	$h)$ $6 \nmid 86$
$i)$ $45 \nmid 9$	$j)$ $11 \mid 132$	$k)$ $56 \mid 112$	$l)$ $24 \nmid 156$
$m)$ $4 \mid 92$	$n)$ $7 \mid 91$	$o)$ $23 \nmid 178$	$p)$ $37 \mid 333$

Aufgabe 16:

a) $T_{11} = \{1; 11\}$

b) $T_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$

c) $T_{35} = \{1; 5; 7; 35\}$

d) $T_{72} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72\}$

e) $T_{56} = \{1; 2; 4; 7; 8; 14; 28; 56\}$

f) $T_{37} = \{1; 37\}$

g) $T_{132} = \{1; 2; 3; 4; 6; 11; 12; 22; 33; 44; 66; 132\}$

h) $T_{930} = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30; 31; 32; 93; 155; 186; 310; 465; 930\}$

i) $T_{126} = \{1; 2; 3; 6; 7; 9; 14; 18; 21; 42; 63; 126\}$

j) $T_{1485} = \{1; 3; 5; 9; 11; 15; 27; 33; 45; 55; 99; 135; 165; 297; 495; 1485\}$

k) $T_{563} = \{1; 563\}$

l) $T_{674} = \{1; 2; 337; 674\}$

Aufgabe 17:

a) $kgV(4; 7) = 28$ *b)* $kgV(6; 15) = 30$ *c)* $kgV(5; 8) = 40$

d) $kgV(12; 20) = 60$ *e)* $kgV(9; 12) = 36$ *f)* $kgV(7; 13) = 91$

g) $kgV(14; 22) = 154$ *h)* $kgV(27; 42) = 378$ *i)* $kgV(56; 1) = 1$

j) $kgV(4; 83) = 332$ *k)* $kgV(42; 144) = 1008$ *l)* $kgV(639; 321) = 68373$

Aufgabe 18:

a) $ggT(45; 9) = 9$ *b)* $ggT(36; 96) = 12$ *c)* $ggT(56; 72) = 8$

d) $ggT(42; 18) = 6$ *e)* $ggT(56; 126) = 14$ *f)* $ggT(75; 100) = 25$

g) $ggT(165; 75) = 15$ *h)* $ggT(121; 209) = 11$ *i)* $ggT(289; 17) = 17$

j) $ggT(456; 735) = 3$ *k)* $ggT(24; 168) = 24$ *l)* $ggT(115; 207) = 23$

Aufgabe 19: $T_{120} = \{120; 60; 40; 30; 24; 20; 15; 12; 10; 8; 6; 5; 4; 3; 2; 1\}$

Aufgabe 20: $(24; 1)\,, (12; 2)\,, (8; 3)\,, (6; 4)$

Aufgabe 21: $(45; 1; 1)\,, (15; 3; 1)\,, (9; 5; 1)\,, (3; 5; 3)$

Aufgabe 22: Es werden 6 Keksdosen benötigt.

Aufgabe 23: Er wird nach genau 24 min Runden überrundet.

Aufgabe 24: Die Variante mit den längeren Schienen ist günstiger. Es werden für 72 m vier kurze und drei lange Schienen benötigt.

Aufgabe 25: *Setze das richtige Zeichen ($|$ oder $\nmid$) bezüglich der Teilbarkeit ein.*

$a)$ $4 \mid 46464$	$b)$ $5 \mid 84345$	$b)$ $3 \mid 528436$
$d)$ $10 \mid 354600$	$e)$ $6 \mid 776736$	$f)$ $9 \nmid 764544$
$g)$ $4 \nmid 854174$	$h)$ $3 \mid 654183$	$i)$ $8 \mid 256416$
$j)$ $9 \nmid 446168$	$k)$ $8 \nmid 218548$	$l)$ $7 \nmid 751544$
$m)$ $12 \mid 887460$	$n)$ $15 \mid 6355845$	$o)$ $18 \nmid 6544844$

Aufgabe 26:

$a)$ $kgV\,(2; 3; 4) = 12$	$b)$ $kgV\,(4; 8; 2) = 8$	$c)$ $kgV\,(9; 5; 2) = 90$
$d)$ $kgV\,(7; 3; 4) = 84$	$e)$ $kgV\,(5; 8; 2) = 40$	$f)$ $kgV\,(3; 2; 5) = 30$
$g)$ $kgV\,(7; 5; 3) = 105$	$h)$ $kgV\,(11; 3; 2) = 66$	$i)$ $kgV\,(9; 10; 15) = 90$
$j)$ $kgV\,(7; 9; 3) = 63$	$k)$ $kgV\,(2; 5; 6) = 30$	$l)$ $kgV\,(6; 8; 5) = 120$
$m)$ $kgV\,(7; 9; 5) = 315$	$n)$ $kgV\,(1; 16; 4) = 16$	$o)$ $kgV\,(3; 6; 9) = 18$

Aufgabe 27:

$a)$ $ggT\,(15; 35; 75) = 5$	$b)$ $ggT\,(24; 32; 42) = 6$	$c)$ $ggT\,(56; 21; 77) = 7$
$d)$ $ggT\,(52; 36; 16) = 4$	$e)$ $ggT\,(144; 48; 36) = 12$	$f)$ $ggT\,(63; 108; 45) = 9$
$g)$ $ggT\,(39; 99; 48) = 3$	$h)$ $ggT\,(72; 24; 104) = 8$	$i)$ $ggT\,(45; 72; 99) = 9$
$j)$ $ggT\,(18; 54; 120) = 6$	$k)$ $ggT\,(30; 55; 85) = 5$	$l)$ $ggT\,(48; 84; 12) = 4$
$m)$ $ggT\,(33; 51; 81) = 3$	$n)$ $ggT\,(64; 128; 256) = 64$	$o)$ $ggT\,(60; 90; 105) = 15$

Aufgabe 28:

	426	315	9782	3560	43785	157932
2	$\mid$	$\nmid$	$\mid$	$\mid$	$\nmid$	$\mid$
3	$\mid$	$\mid$	$\nmid$	$\nmid$	$\mid$	$\mid$
4	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\mid$	$\nmid$	$\mid$
5	$\nmid$	$\mid$	$\nmid$	$\mid$	$\mid$	$\nmid$
6	$\mid$	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\mid$
7	$\nmid$	$\mid$	$\nmid$	$\nmid$	$\mid$	$\nmid$
8	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\mid$	$\nmid$	$\nmid$
9	$\nmid$	$\mid$	$\nmid$	$\nmid$	$\mid$	$\mid$
10	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\mid$	$\nmid$	$\nmid$

Aufgabe 29:

$a)$ $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$

$b)$ $55 = 5 \cdot 11$

$c)$ $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$d)$ $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

$e)$ $135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$f)$ $245 = 5 \cdot 7 \cdot 7$

$g)$ $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$h)$ $256 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$i)$ $1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$j)$ $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Aufgabe 30: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $kgV(3;4) + kgV(6;5) = 42$

$b)$ $kgV(16;5) : kgV(5;2) = 8$

$c)$ $kgV(6;2) \cdot kgV(3;4) = 72$

$d)$ $kgV(7;5) - kgV(3;8) = 11$

$e)$ $kgV(8;9) - kgV(16;3) = 24$

$f)$ $kgV(12;4) \cdot kgV(5;1) = 60$

$g)$ $kgV(7;11) + kgV(8;6) = 101$

$h)$ $kgV(72;5) : kgV(6;9) = 20$

$i)$ $kgV(7;9) - kgV(11;4) = 19$

$j)$ $kgV(12;16) : kgV(8;6) = 2$

$k)$ $kgV(15;4) \cdot kgV(10;4) = 1200$

$l)$ $kgV(48;3) + kgV(7;12) = 132$

Aufgabe 31: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $ggT(24;16) + ggT(42;77) = 15$

$b)$ $ggT(96;16) - ggT(45;35) = 11$

$c)$ $ggT(98;38) : ggT(13;19) = 14$

$d)$ $ggT(44;32) \cdot ggT(42;72) = 24$

$e)$ $ggT(125;175) - ggT(54;72) = 16$

$f)$ $ggT(144;96) : ggT(64;24) = 6$

$g)$ $ggT(21;56) \cdot ggT(90;75) = 105$

$h)$ $ggT(84;36) - ggT(132;110) = 1$

$i)$ $ggT(65;39) + ggT(63;84) = 20$

$j)$ $ggT(36;48) : ggT(96;84) = 1$

$k)$ $ggT(44;56) \cdot ggT(84;28) = 28$

$l)$ $ggT(290;170) - ggT(35;85) = 5$

Aufgabe 32: *Berechne den Wert des Terms.*

$a)$ $[ggT(68;84) + ggT(75;95)] \cdot kgV(7;2) = 126$

$b)$ $ggT(121;1331) - ggT(96;20) \cdot kgV(8;3) = 25$

$c)$ $kgV(8;5) : ggT(49;84) + kgV(9;3) : ggT(56;35) = 7$

$d)$ $[kgV(9;4) - kgV(6;4)] \cdot ggT(84;144) = 144$

$e)$ $[kgV(6;8) - ggT(56;88)] \cdot [kgV(3;5) + ggT(23;83)] = 256$

$f)$ $kgV(6;16) : [ggT(62;38) + kgV(7;8) : ggT(112;196)] = 12$

Aufgabe 33:

$a)$ $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(144;48);\mathrm{ggT}(56;102)) = 7$

$b)$ $\mathrm{kgV}(\mathrm{ggT}(64;16);\mathrm{ggT}(63;45)) = 144$

$c)$ $\mathrm{ggT}(\mathrm{kgV}(8;3);\mathrm{kgV}(4;9)) = 4$

$d)$ $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(135;305);\mathrm{kgV}(3;5)) = 15$

$e)$ $\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(2;5);\mathrm{ggT}(24;84)) = 30$

$f)$ $\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(2;3);\mathrm{kgV}(5;8)) = 120$

$g)$ $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(100;40);\mathrm{ggT}(\mathrm{kgV}(11;5);110)) = 1$

$h)$ $\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(7;2);4);\mathrm{kgV}(5;\mathrm{kgV}(4;3))) = 420$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.3.1).

18.10.5 Lösungen zur Bruchrechnung

Aufgabe 1:

a) $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$	*b)* $\frac{1}{3} < \frac{3}{4}$	*c)* $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$
d) $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$	*e)* $\frac{5}{6} > \frac{3}{4}$	*f)* $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$
g) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$	*h)* $\frac{2}{5} < \frac{7}{15}$	*i)* $\frac{2}{3} > \frac{3}{6}$
j) $\frac{2}{3} < \frac{7}{8}$	*k)* $\frac{6}{7} > \frac{3}{4}$	*l)* $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$
m) $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$	*n)* $\frac{5}{9} > \frac{3}{7}$	*o)* $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
p) $\frac{2}{5} > \frac{3}{8}$	*q)* $\frac{3}{2} < \frac{5}{3}$	*r)* $\frac{14}{8} < \frac{16}{9}$
s) $\frac{3}{8} = \frac{24}{64}$	*t)* $\frac{81}{9} = \frac{36}{4}$	*u)* $\frac{55}{5} = \frac{131}{11}$

Aufgabe 2:

a) $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$	*b)* $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$	*c)* $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
d) $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	*e)* $\frac{48}{64} = \frac{3}{4}$	*f)* $\frac{12}{144} = \frac{1}{12}$
g) $\frac{75}{125} = \frac{3}{5}$	*h)* $\frac{30}{75} = \frac{2}{5}$	*i)* $\frac{72}{108} = \frac{2}{3}$
j) $\frac{16}{48} = \frac{1}{3}$	*k)* $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	*l)* $\frac{24}{8} = 3$
m) $\frac{12}{96} = \frac{1}{8}$	*n)* $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$	*o)* $\frac{48}{144} = \frac{1}{3}$
p) $\frac{33}{3} = 11$	*q)* $\frac{54}{72} = \frac{3}{4}$	*r)* $\frac{5000}{10000} = \frac{1}{2}$
s) $\frac{24}{72} = \frac{1}{3}$	*t)* $\frac{36}{66} = \frac{6}{11}$	*u)* $\frac{63}{108} = \frac{7}{12}$

Aufgabe 3:

a) $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{9} = \frac{27}{36}$	*b)* $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{7} = \frac{35}{49}$	*c)* $\frac{1}{12} \cdot \frac{8}{8} = \frac{8}{96}$
d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{24}{24} = \frac{24}{48}$	*e)* $\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{6} = \frac{42}{48}$	*f)* $\frac{4}{6} \cdot \frac{11}{11} = \frac{44}{66}$
g) $\frac{5}{7} \cdot \frac{8}{8} = \frac{40}{56}$	*h)* $\frac{5}{13} \cdot \frac{9}{9} = \frac{45}{117}$	*i)* $\frac{4}{11} \cdot \frac{7}{7} = \frac{28}{77}$
j) $\frac{7}{4} \cdot \frac{9}{9} = \frac{63}{36}$	*k)* $\frac{6}{11} \cdot \frac{5}{5} = \frac{30}{55}$	*l)* $\frac{3}{12} \cdot \frac{4}{4} = \frac{12}{48}$
m) $\frac{2}{3} \cdot \frac{21}{21} = \frac{42}{63}$	*n)* $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{3} = \frac{21}{24}$	*o)* $\frac{4}{6} \cdot \frac{13}{13} = \frac{52}{78}$
p) $\frac{3}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{24}{72}$	*q)* $\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{6} = \frac{30}{72}$	*r)* $\frac{7}{12} \cdot \frac{7}{7} = \frac{49}{84}$
s) $\frac{3}{4} \cdot \frac{17}{17} = \frac{51}{68}$	*t)* $\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{4} = \frac{20}{24}$	*u)* $\frac{13}{6} \cdot \frac{1000}{1000} = \frac{13000}{6000}$

Aufgabe 4:

Quadrate: $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$.

Kreise: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{5}{16}, 1, \frac{2}{3}, \frac{13}{16}, 0, \frac{5}{8}, \frac{5}{12}$ und $\frac{1}{16}$.

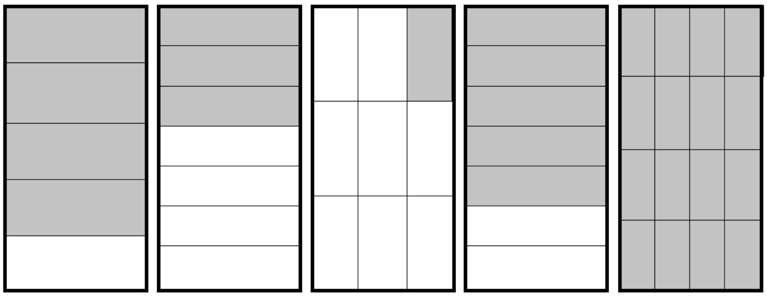
Quadrate: $\frac{18}{64}, \frac{4}{9}, \frac{10}{36}, \frac{4}{12}, \frac{16}{64}, \frac{6}{24}, \frac{1}{6}, \frac{6}{18}, \frac{10}{32}$ und $\frac{9}{12}$.

Kreise: $\frac{3}{4}, \frac{5}{12}, \frac{7}{16}, \frac{12}{16}, \frac{5}{6}, \frac{8}{16}, \frac{6}{6}, \frac{2}{8}, \frac{8}{12}$ und $\frac{0}{16}$.

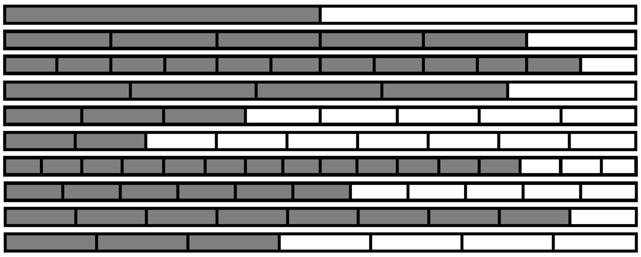
Rechtecke links: $\frac{3}{8}, \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{4}$

Rechtecke rechts: $\frac{5}{8}, \frac{7}{16}$ und $\frac{1}{8}$

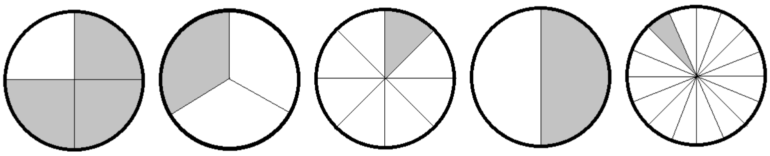
Aufgabe 5: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{5}{7}$ *und* $\frac{16}{16}$



Aufgabe 6: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Rechteck:* $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{8}{9}$ *und* $\frac{3}{7}$



Aufgabe 7: *Veranschauliche folgende Brüche jeweils an einem Kreis:* $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{12}$ *und* $\frac{1}{16}$



Aufgabe 8:

a) $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$ *c)* $\frac{7}{12}+\frac{4}{12}=\frac{11}{12}$

d) $\frac{25}{9}+\frac{43}{9}=\frac{68}{9}$ *e)* $\frac{7}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$ *f)* $\frac{7}{11}+\frac{14}{11}=\frac{21}{11}$

g) $\frac{6}{32}+\frac{5}{32}=\frac{11}{32}$ *h)* $\frac{33}{9}+\frac{29}{9}=\frac{62}{9}$ *i)* $\frac{83}{39}+\frac{23}{39}=\frac{106}{39}$

Aufgabe 9:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{3}{7}+\frac{1}{14}=\frac{1}{2}$ *c)* $\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

d) $\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$ *e)* $\frac{5}{16}+\frac{3}{8}=\frac{11}{16}$ *f)* $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$

g) $\frac{1}{4}+\frac{3}{32}=\frac{11}{32}$ *h)* $\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$ *i)* $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Aufgabe 10:

a) $\frac{7}{2}-\frac{4}{2}=\frac{3}{2}$ *b)* $\frac{9}{8}-\frac{4}{8}=\frac{5}{8}$ *c)* $\frac{12}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7}{9}$

d) $\frac{31}{5}-\frac{23}{5}=\frac{8}{5}$ *e)* $\frac{6}{17}-\frac{5}{17}=\frac{1}{17}$ *f)* $\frac{8}{13}-\frac{2}{13}=\frac{6}{13}$

g) $\frac{86}{23}-\frac{45}{23}=\frac{41}{23}$ *h)* $\frac{55}{19}-\frac{21}{19}=\frac{24}{19}$ *i)* $\frac{65}{83}-\frac{15}{83}=\frac{50}{83}$

Aufgabe 11:

a) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ *b)* $\frac{3}{7}-\frac{1}{14}=\frac{5}{14}$ *c)* $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}=\frac{1}{10}$

d) $\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8}$ *e)* $\frac{3}{8}-\frac{5}{16}=\frac{1}{16}$ *f)* $\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$

g) $\frac{1}{4}-\frac{3}{32}=\frac{5}{32}$ *h)* $\frac{2}{5}-\frac{2}{15}=\frac{4}{15}$ *i)* $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

Aufgabe 12:

a) $\frac{5}{2}+\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$ *b)* $\frac{13}{7}-\frac{15}{14}=\frac{11}{14}$ *c)* $\frac{9}{5}+\frac{13}{10}=\frac{31}{10}$

d) $\frac{21}{2}-\frac{31}{8}=\frac{53}{8}$ *e)* $\frac{9}{8}+\frac{19}{16}=\frac{37}{16}$ *f)* $\frac{5}{3}-\frac{11}{9}=\frac{4}{9}$

g) $\frac{7}{4}+\frac{67}{32}=\frac{123}{32}$ *h)* $\frac{13}{5}-\frac{25}{15}=\frac{14}{15}$ *i)* $\frac{13}{3}+\frac{11}{6}=\frac{37}{6}$

j) $\frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{16}$ *k)* $\frac{13}{4}-\frac{9}{6}=\frac{7}{4}$ *l)* $\frac{9}{5}+\frac{3}{4}=\frac{51}{20}$

m) $\frac{21}{4}-\frac{11}{8}=\frac{31}{8}$ *n)* $\frac{3}{8}+\frac{9}{32}=\frac{21}{32}$ *o)* $\frac{4}{3}-\frac{10}{9}=\frac{2}{9}$

p) $\frac{7}{8}-\frac{11}{32}=\frac{17}{32}$ *q)* $\frac{13}{5}-2=\frac{3}{5}$ *r)* $14+\frac{11}{6}=\frac{95}{6}$

s) $\frac{1}{8}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$ *t)* $\frac{15}{6}-\frac{7}{3}=\frac{1}{6}$ *u)* $\frac{9}{5}-\frac{3}{4}=\frac{21}{20}$

v) $\frac{23}{4}+\frac{17}{8}=\frac{63}{8}$ *w)* $\frac{7}{9}-\frac{11}{18}=\frac{1}{6}$ *x)* $\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}=\frac{99}{1000}$

y) $\frac{5}{20}-\frac{1}{1000}=\frac{249}{1000}$ *z)* $\frac{13}{15}+6=\frac{103}{15}$

Aufgabe 13:

$a)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ $b)\ \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{14}=\frac{3}{98}$ $c)\ \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{10}=\frac{3}{25}$

$d)\ \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$ $e)\ \frac{5}{16}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{128}$ $f)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}=\frac{2}{27}$

$g)\ \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{32}=\frac{3}{128}$ $h)\ \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{15}=\frac{4}{75}$ $i)\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

$j)\ \frac{2}{9}\cdot\frac{4}{6}=\frac{4}{27}$ $k)\ \frac{6}{5}\cdot\frac{5}{2}=3$ $l)\ \frac{9}{7}\cdot\frac{10}{11}=\frac{90}{77}$

$m)\ \frac{2}{7}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{14}$ $n)\ \frac{2}{12}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{15}$ $o)\ \frac{2}{9}\cdot\frac{8}{3}=\frac{16}{27}$

$p)\ \frac{5}{6}\cdot\frac{6}{13}=\frac{5}{13}$ $q)\ \frac{2}{8}\cdot\frac{8}{20}=\frac{1}{10}$ $r)\ \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{8}$

$s)\ \frac{9}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{9}{10}$ $t)\ \frac{9}{15}\cdot\frac{7}{5}=\frac{21}{25}$ $u)\ \frac{7}{9}\cdot\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$

$v)\ \frac{2}{8}\cdot\frac{6}{11}=\frac{3}{22}$ $w)\ \frac{6}{1}\cdot\frac{0}{83}=0$ $x)\ \frac{5}{4}\cdot\frac{32}{50}=\frac{8}{10}$

Aufgabe 14:

$a)\ \frac{1}{2}:\frac{1}{4}=2$ $b)\ \frac{3}{7}:\frac{1}{14}=6$ $c)\ \frac{2}{5}:\frac{3}{10}=\frac{4}{3}$

$d)\ \frac{1}{2}:\frac{3}{8}=\frac{4}{3}$ $e)\ \frac{3}{8}:\frac{5}{16}=\frac{6}{5}$ $f)\ \frac{1}{3}:\frac{2}{9}=\frac{3}{2}$

$g)\ \frac{1}{4}:\frac{3}{32}=\frac{8}{3}$ $h)\ \frac{2}{5}:\frac{2}{15}=3$ $i)\ \frac{2}{3}:\frac{1}{6}=4$

$j)\ \frac{2}{9}:\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$ $k)\ \frac{6}{5}:\frac{5}{2}=3$ $l)\ \frac{9}{7}:\frac{10}{11}=\frac{99}{70}$

$m)\ \frac{2}{7}:\frac{9}{4}=\frac{8}{63}$ $n)\ \frac{2}{12}:\frac{4}{5}=\frac{5}{24}$ $o)\ \frac{2}{9}:\frac{8}{3}=\frac{1}{12}$

$p)\ \frac{5}{6}:\frac{6}{13}=\frac{65}{36}$ $q)\ \frac{2}{8}:\frac{8}{20}=\frac{5}{8}$ $r)\ \frac{1}{4}:\frac{5}{2}=\frac{1}{10}$

$s)\ \frac{9}{4}:\frac{2}{5}=\frac{45}{8}$ $t)\ \frac{9}{15}:\frac{7}{5}=\frac{3}{7}$ $u)\ \frac{7}{9}:\frac{9}{4}=\frac{28}{81}$

$v)\ \frac{2}{8}:\frac{6}{11}=\frac{11}{24}$ $w)\ \frac{0}{1}:\frac{6}{83}=0$ $x)\ \frac{5}{4}:\frac{32}{50}=\frac{125}{64}$

Aufgabe 15:

a) $\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$

b) $\frac{13}{7} \cdot \frac{15}{14} = \frac{195}{98}$

c) $\frac{9}{5} : \frac{13}{10} = \frac{18}{13}$

d) $\frac{21}{2} \cdot \frac{31}{8} = \frac{651}{16}$

e) $\frac{9}{8} : \frac{19}{16} = \frac{18}{19}$

f) $\frac{5}{3} \cdot \frac{11}{9} = \frac{55}{27}$

g) $\frac{7}{4} : \frac{67}{32} = \frac{56}{67}$

h) $\frac{13}{5} : \frac{25}{15} = \frac{39}{25}$

i) $\frac{13}{3} \cdot \frac{11}{6} = \frac{26}{11}$

j) $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{64}$

k) $\frac{13}{4} : \frac{9}{6} = \frac{13}{6}$

l) $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} = \frac{12}{5}$

m) $\frac{21}{4} \cdot \frac{11}{8} = \frac{231}{32}$

n) $\frac{3}{8} : \frac{9}{32} = \frac{4}{3}$

o) $\frac{4}{3} \cdot \frac{10}{9} = \frac{40}{27}$

p) $\frac{7}{8} : \frac{11}{32} = \frac{28}{11}$

q) $\frac{13}{5} : 2 = \frac{13}{10}$

r) $14 \cdot \frac{11}{6} = \frac{77}{3}$

s) $\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{128}$

t) $\frac{15}{6} \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{6}$

u) $\frac{9}{5} : \frac{3}{4} = \frac{12}{5}$

v) $\frac{23}{4} \cdot \frac{17}{8} = \frac{391}{32}$

w) $\frac{7}{9} \cdot \frac{11}{18} = \frac{77}{162}$

x) $\frac{1}{10} : \frac{1}{1000} = 100$

y) $\frac{5}{20} : \frac{1}{1000} = 250$

z) $\frac{13}{15} \cdot 6 = \frac{26}{5}$

Aufgabe 16:

a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{3}{7}$

c) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{13}{36}$

e) $\frac{73}{120}$

f) $\frac{67}{132}$

g) $\frac{5}{12}$

h) $\frac{123}{85}$

i) $\frac{167}{234}$

j) $\frac{51}{80}$

k) $\frac{133}{32}$

l) $\frac{77}{180}$

m) $\frac{83}{154}$

n) $\frac{71}{20}$

o) $\frac{142}{609}$

Aufgabe 17:

a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}$

b) $\frac{8}{3}-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{139}{60}$

c) $\frac{11}{2}-\frac{7}{6}+\frac{3}{8}=\frac{113}{24}$

d) $\frac{4}{5}+\frac{7}{3}+\frac{2}{9}=\frac{151}{45}$

e) $\frac{1}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{4}=\frac{17}{6}$

f) $\frac{21}{5}-\frac{8}{7}+\frac{2}{3}=\frac{391}{105}$

g) $\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{49}{60}$

h) $\frac{8}{5}-\frac{3}{7}+\frac{3}{8}=\frac{433}{280}$

i) $\frac{8}{7}-\frac{1}{9}+\frac{7}{5}=\frac{766}{315}$

j) $\frac{7}{8}+\frac{4}{3}+\frac{3}{10}=\frac{301}{120}$

k) $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}+\frac{3}{4}=\frac{149}{140}$

l) $\frac{10}{7}-\frac{1}{5}+\frac{5}{9}=\frac{562}{315}$

m) $\frac{14}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{151}{45}$

n) $\frac{11}{3}-\frac{8}{9}+\frac{7}{10}=\frac{313}{90}$

o) $\frac{9}{2}+\frac{9}{5}+\frac{7}{4}=\frac{161}{20}$

p) $\frac{2}{7}-\frac{1}{9}+\frac{3}{8}=\frac{277}{504}$

q) $\frac{4}{3}-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}=\frac{19}{6}$

r) $\frac{4}{5}+\frac{9}{4}+\frac{3}{7}=\frac{487}{140}$

s) $\frac{8}{3}-\frac{7}{8}+\frac{6}{5}=\frac{359}{120}$

t) $\frac{6}{5}+\frac{11}{3}-2=\frac{43}{15}$

u) $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}+\frac{11}{9}=\frac{1006}{315}$

v) $\frac{8}{9}+\frac{3}{2}+5=\frac{133}{18}$

w) $\frac{6}{5}-\frac{3}{4}+\frac{7}{6}=\frac{97}{60}$

x) $\frac{5}{9}+\frac{13}{4}-3=\frac{29}{36}$

y) $\frac{11}{2}-\frac{7}{4}+\frac{8}{5}=\frac{107}{20}$

z) $\frac{5}{12}+\frac{7}{11}+9=\frac{1327}{132}$

Aufgabe 18:

$a)\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$

$b)\ \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}:\frac{2}{5}=5$

$c)\ \frac{11}{2}\cdot\frac{7}{6}:\frac{3}{8}=\frac{154}{9}$

$d)\ \frac{4}{5}:\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{9}=\frac{8}{105}$

$e)\ \frac{1}{4}:\frac{5}{6}:\frac{7}{4}=\frac{6}{35}$

$f)\ \frac{21}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{5}$

$g)\ \frac{2}{5}:\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}$

$h)\ \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{35}$

$i)\ \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{9}:\frac{7}{5}=\frac{40}{441}$

$j)\ \frac{7}{8}:\frac{4}{3}:\frac{3}{10}=\frac{35}{16}$

$k)\ \frac{3}{5}:\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4}=\frac{63}{40}$

$l)\ \frac{10}{7}:\frac{1}{5}:\frac{5}{9}=\frac{90}{7}$

$m)\ \frac{14}{5}:\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{21}{5}$

$n)\ \frac{11}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{10}=\frac{308}{135}$

$o)\ \frac{9}{2}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{7}{4}=\frac{567}{40}$

$p)\ \frac{2}{7}:\frac{1}{9}:\frac{3}{8}=\frac{48}{7}$

$q)\ \frac{4}{3}:\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}=5$

$r)\ \frac{4}{5}:\frac{9}{4}:\frac{3}{7}=\frac{112}{135}$

$s)\ \frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8}:\frac{6}{5}=\frac{35}{18}$

$t)\ \frac{6}{5}:\frac{11}{3}\cdot 2=\frac{36}{55}$

$u)\ \frac{12}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{11}{9}=\frac{44}{35}$

$v)\ \frac{8}{9}:\frac{3}{2}:5=\frac{16}{135}$

$w)\ \frac{6}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{6}=\frac{21}{20}$

$x)\ \frac{5}{9}:\frac{13}{4}\cdot 3=\frac{20}{39}$

$y)\ \frac{11}{2}\cdot\frac{7}{4}:\frac{8}{5}=\frac{385}{64}$

$z)\ \frac{5}{12}\cdot\frac{7}{11}:9=\frac{35}{1188}$

Aufgabe 19:

$a)\ \frac{3}{2}+\frac{7}{3}-\frac{1}{6}=\frac{11}{3}$

$b)\ \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{6}:\frac{2}{3}=\frac{7}{20}$

$c)\ \frac{7}{6}:2\cdot\frac{11}{3}-\frac{47}{36}=\frac{5}{6}$

$d)\ 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{8}{3}+2\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{3}=\frac{116}{15}$

$e)\ 6\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{7}:\frac{1}{10}=\frac{200}{7}$

$f)\ \frac{12}{5}+\frac{7}{3}-\frac{3}{4}-\frac{8}{9}+\frac{3}{10}=\frac{611}{180}$

$g)\ \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{11}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$

$h)\ \frac{63}{71}\cdot\frac{289}{14}\cdot\frac{71}{33}\cdot\frac{14}{17}\cdot\frac{5}{63}\cdot\frac{33}{289}=\frac{5}{17}$

Aufgabe 20:

a) $\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{27}$ *b)* $\frac{5}{7} : \left(\frac{5}{4} + \frac{2}{5}\right) = \frac{100}{231}$

c) $\frac{7}{9} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{35}{36}$ *d)* $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{7}{3} - \frac{3}{7}\right) = \frac{10}{7}$

e) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{9} + \frac{4}{5}\right) = \frac{142}{225}$ *f)* $\frac{7}{8} : \left(\frac{5}{6} + \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{4}$

g) $\frac{4}{5} : \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{9}\right) = \frac{36}{35}$ *h)* $\frac{9}{2} \cdot \left(\frac{6}{7} + \frac{9}{5}\right) = \frac{837}{70}$

Aufgabe 21:

a) $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$ mit: $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{3}{4}$

b) $2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{35}{9}$ mit: $a = \frac{5}{6}$ und $b = \frac{3}{7}$

c) $\frac{4 \cdot a}{2 \cdot b} = \frac{56}{27}$ mit: $a = \frac{7}{3}$ und $b = \frac{9}{4}$

d) $\frac{a \cdot c}{b + c} = \frac{49}{50}$ mit: $a = \frac{7}{2}$ und $b = \frac{9}{4}$ und $c = \frac{7}{8}$

e) $\frac{a + a \cdot c}{a \cdot b} = \frac{32}{25}$ mit: $a = \frac{2}{3}$ und $b = \frac{5}{4}$ und $c = \frac{3}{5}$

f) $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{99}{40}$ mit: $b = \frac{11}{8}$ und $c = \frac{5}{9}$

g) $\left(\frac{2 \cdot a}{b} + \frac{a}{c}\right) : \frac{a}{3 \cdot b} = \frac{51}{8}$ mit: $b = \frac{1}{6}$ und $c = \frac{4}{3}$

h) $\frac{6 \cdot a}{b} \cdot \frac{b}{a \cdot c} = 72$ mit: $c = \frac{1}{12}$

Aufgabe 22:

$a)\ \frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

$b)\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

$c)\ \frac{a}{b} : \frac{2 \cdot c}{d} = \frac{a \cdot d}{2 \cdot b \cdot c}$

$d)\ \frac{a}{b} + 4 = \frac{a + 4 \cdot b}{b}$

$e)\ \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{d \cdot a - c \cdot b}{d \cdot b}$

$f)\ \frac{a}{b} + \frac{2 \cdot c}{d} = \frac{a \cdot d + 2 \cdot c \cdot b}{b \cdot d}$

$g)\ \frac{a}{b} + 4 : \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d + 4 \cdot c \cdot b}{b\dot{d}}$

$h)\ \frac{a}{b} : \frac{4}{5} - \frac{c}{d} \cdot \frac{2}{3} = \frac{15 \cdot a \cdot d - 8 \cdot b \cdot c}{12 \cdot b \cdot d}$

$i)\ \frac{4 \cdot a}{b} + \frac{2 \cdot c}{a \cdot d} = \frac{4 \cdot a \cdot a \cdot d + 2 \cdot c \cdot b}{a \cdot b \cdot d}$

$j)\ \frac{a}{b} + \frac{d}{c} + \frac{dc}{b} = \frac{a \cdot c + d \cdot b + c \cdot dc}{b \cdot c}$

$k)\ \frac{a}{b} : \frac{c}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot c}$

$l)\ \frac{a \cdot b \cdot d \cdot d + 18 \cdot b - 15 \cdot c \cdot d - a \cdot a \cdot b \cdot d}{3 \cdot a \cdot b \cdot d}$

Aufgabe 23:

$a)\ \frac{\cancel{5} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{5} \cdot 7} = \frac{3}{7}$

$b)\ \frac{\overbrace{\cancel{12}}^{3} \cdot \cancel{6} \cdot \overbrace{\cancel{15}}^{3}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{6}} = 9$

$c)\ \frac{\overbrace{\cancel{6}}^{2} \cdot \overbrace{\cancel{14}}^{2} \cdot 4}{\underbrace{\cancel{9}}_{3} \cdot 7 \cdot \cancel{7}} = \frac{16}{21}$

$d)\ \frac{3}{5} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{9}} = \frac{3}{5}$

$e)\ \frac{7}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} = \frac{7}{15}$

$f)\ \frac{\overbrace{\cancel{8}}^{2}}{\cancel{96}} \cdot \frac{\cancel{112}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{96}}{\cancel{112}} = 2$

$g)\ \frac{\cancel{4} \cdot 3 + 5 \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot 11} = \frac{8}{11}$

$h)\ \frac{6 \cdot \overbrace{\cancel{8}}^{2} + 7 \cdot \overbrace{\cancel{12}}^{3}}{7 \cdot \cancel{4}} = \frac{33}{7}$

$i)\ \frac{\overbrace{\cancel{14}}^{7} \cdot \overbrace{\cancel{6}}^{3} + \overbrace{\cancel{16}}^{4} \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{4}} = \frac{41}{4}$

$j)\ \frac{8}{\cancel{5}} \cdot \frac{9}{2} : \frac{2}{\cancel{5}} = 18$

$k)\ \frac{\cancel{7}}{4} \cdot \frac{\cancel{9}}{\cancel{7}} : \frac{\cancel{9}}{3} = \frac{3}{4}$

$l)\ \frac{\cancel{298}}{\cancel{517}} \cdot \frac{\cancel{489}}{\cancel{298}} : \frac{\cancel{489}}{\cancel{517}} = 1$

$m)\ \frac{\cancel{a} \cdot b \cdot \cancel{d}}{\cancel{d} \cdot e \cdot \cancel{a}} = \frac{b}{e}$

$n)\ \frac{d}{\cancel{a}} \cdot \frac{c}{e} : \frac{e}{\cancel{a}} = \frac{d \cdot c}{e \cdot e}$

$o)\ \frac{\overbrace{\cancel{8}}^{2} \cdot \cancel{a} \cdot b + \cancel{4} \cdot \cancel{a} \cdot b}{\cancel{a} \cdot \cancel{4} \cdot c} = \frac{3 \cdot b}{c}$

Aufgabe 24:

$a)\ \frac{13 - 5 \cdot 2 + 36 : 3 + 9 \cdot 5}{5} = \frac{24}{5}$

$b)\ \frac{4 \cdot 4 - 2 \cdot 5 + 33 : 11}{4 \cdot 3 - 72 : 9 + 3 \cdot 6} = \frac{27}{34}$

$c)\ \frac{6 \cdot 8 : 4 + 2 - 16 : 2}{89 - 4 \cdot 7 - 4 \cdot 3 + 35} = \frac{1}{14}$

$d)\ \frac{52 - 95 : 5 + 11 \cdot 5}{156 - 8 \cdot 2 \cdot 4 - 108 : 9 : 2} = \frac{44}{43}$

$e)\ \frac{66 \cdot 5 - 19 \cdot 4 + 111 \cdot 6 \cdot 7}{5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 - 77} = \frac{5749}{110}$

$f)\ \frac{21 + 80 \cdot 2 + 16 \cdot 3 - 56}{2835 : 5 - 14 \cdot 11 : 2} = \frac{173}{490}$

Aufgabe 25:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ *b)* $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{7} + \frac{7}{2} = \frac{157}{42}$

c) $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{11}{6}$ *d)* $\frac{35}{6} : \frac{7}{3} - \frac{7}{6} \cdot \frac{8}{5} = \frac{19}{30}$

e) $\frac{7}{3} : \frac{7}{9} + \frac{12}{13} : \frac{5}{8} = \frac{291}{65}$ *f)* $\frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} + \frac{2}{3} : \frac{4}{5} + \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{11} = \frac{881}{504}$

Aufgabe 26:

a) $\frac{1}{3} \to 3$ *b)* $\frac{5}{4} \to \frac{4}{5}$ *c)* $\frac{3}{8} \to \frac{8}{3}$ *d)* $\frac{2}{9} \to \frac{9}{2}$

e) $\frac{6}{7} \to \frac{7}{6}$ *f)* $\frac{5}{3} \to \frac{3}{5}$ *g)* $\frac{13}{5} \to \frac{5}{13}$ *h)* $\frac{9}{4} \to \frac{4}{9}$

i) $\frac{7}{10} \to \frac{10}{7}$ *j)* $\frac{16}{9} \to \frac{9}{16}$ *k)* $\frac{17}{8} \to \frac{8}{17}$ *l)* $\frac{1}{20} \to 20$

l) $\frac{5}{1000} \to \frac{1000}{5}$ *m)* $\frac{23}{83} \to \frac{83}{23}$ *n)* $\frac{66}{73} \to \frac{73}{66}$ *o)* $\frac{96}{1} \to \frac{1}{96}$

Aufgabe 27: (Eine von mehreren möglichen Lösungen.)

a) $\frac{3}{5} + \frac{2}{4}$ und maximal: $\frac{5}{2} + \frac{4}{3}$ *b)* $\frac{2}{6} + \frac{1}{4}$ und maximal: $\frac{6}{1} + \frac{4}{2}$

c) $\frac{2}{4} - \frac{7}{1}$ und maximal: $\frac{7}{1} - \frac{2}{4}$ *d)* $\frac{3}{3} - \frac{6}{2}$ und maximal: $\frac{6}{2} - \frac{3}{3}$

e) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{9}$ und maximal: $\frac{8}{3} \cdot \frac{9}{5}$ *f)* $\frac{2}{8} \cdot \frac{1}{5}$ und maximal: $\frac{5}{1} \cdot \frac{8}{2}$

g) $\frac{5}{7} : \frac{6}{3}$ und maximal: $\frac{7}{5} : \frac{3}{6}$ *h)* $\frac{2}{10} : \frac{7}{5}$ und maximal: $\frac{10}{2} : \frac{5}{7}$

Aufgabe 28: (von links nach rechts)

$\frac{10}{32}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{14}{32}$; $\frac{8}{19}$; $\frac{4}{12}$; $\frac{5}{12}$

$\frac{9}{21}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{11}{24}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{5}{16}$; $\frac{5}{6}$

Aufgabe 29: (von links nach rechts)

$$\frac{5}{18}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{11}{25}\ ;\ \frac{14}{27}\ ;\ \frac{9}{14}$$
$$\frac{4}{12}\ ;\ \frac{33}{72}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{13}{27}\ ;\ \frac{9}{14}\ ;\ \frac{6}{9}$$

Aufgabe 30:

erste Spalte: $\frac{2}{6}\ ;\ \frac{5}{12}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{5}{8}$

zweite Spalte: $\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{3}{4}\ ;\ \frac{10}{24}$

Aufgabe 31: (von links nach rechts)

$$\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{6}\ ;\ \frac{5}{12}\ ;\ \frac{11}{30}\ ;\ \frac{2}{5}\ ;\ \frac{4}{15}\ ;\ \frac{11}{15}\ ;\ \frac{19}{40}$$

Aufgabe 32:

$a)\ 3$	$b)\ \frac{1}{10}$	$c)\ \frac{3}{7}$
$d)\ \frac{24}{5}$	$e)\ \frac{27}{40}$	$f)\ \frac{35}{66}$
$g)\ \frac{77}{45}$	$h)\ \frac{71}{35}$	$i)\ \frac{91}{16}$
$j)\ \frac{77}{1700}$	$k)\ \frac{495}{161}$	$l)\ \frac{5635}{7306}$

Aufgabe 33:

$a)\ \frac{a \cdot c}{b}$	$b)\ \frac{g \cdot v}{h \cdot u}$	$c)\ \frac{z \cdot n \cdot e}{x \cdot c \cdot k}$
$a)\ \frac{(a \cdot d + b \cdot c)\, l}{b \cdot d \cdot k}$	$b)\ \frac{g \cdot v \cdot c}{h \cdot u \cdot d}$	$c)\ \frac{z \cdot k \cdot d}{x \cdot c\,(n \cdot d - c \cdot k)}$

Aufgabe 34:

a) $\frac{5}{48}$ b) 15 c) $\frac{28}{9}$ d)

e) $\frac{49}{54}$ f) $\frac{640}{189}$ h) $\frac{4}{15}$

Aufgabe 35:

a) $\frac{adfg}{bceh}$ b) $\frac{gflad}{hekcb}$ c) $\frac{zwusr}{yxvtq}$

d) $\frac{zwugmn}{xyphbc}$ e) $\frac{zwuhbc}{xypgmn}$ f) $\frac{(ad+bc)fhlm}{(gl-kh)bden}$

Aufgabe 36:

a) $\frac{30}{40}$; $\frac{16}{40}$; $\frac{5}{40}$; $\frac{28}{40}$; $\frac{56}{40}$; $\frac{85}{40}$

b) $\frac{100}{60}$; $\frac{25}{60}$; $\frac{70}{60}$; $\frac{48}{60}$; $\frac{30}{60}$; $\frac{16}{60}$

c) $\frac{48}{42}$; $\frac{112}{42}$; $\frac{26}{42}$; $\frac{35}{42}$; $\frac{66}{42}$; $\frac{9}{42}$

d) $\frac{252}{144}$; $\frac{84}{144}$; $\frac{40}{144}$; $\frac{168}{144}$; $\frac{234}{144}$; $\frac{88}{144}$

e) $\frac{594}{132}$; $\frac{36}{132}$; $\frac{33}{132}$; $\frac{77}{132}$; $\frac{204}{132}$; $\frac{759}{132}$

f) $\frac{48}{1000}$; $\frac{140}{1000}$; $\frac{875}{1000}$; $\frac{2960}{1000}$; $\frac{1075}{1000}$; $\frac{1300}{1000}$

Aufgabe 37:

a) $\frac{15}{20}$; $\frac{8}{20}$ b) $\frac{35}{42}$; $\frac{12}{42}$ c) $\frac{35}{40}$; $\frac{12}{40}$

d) $\frac{25}{30}$; $\frac{14}{30}$ e) $\frac{32}{48}$; $\frac{27}{48}$ f) $\frac{45}{63}$; $\frac{49}{63}$

g) $\frac{9}{30}$; $\frac{8}{30}$ h) $\frac{22}{28}$; $\frac{35}{28}$ i) $\frac{287}{56}$; $\frac{10}{56}$

j) $\frac{24}{100}$; $\frac{75}{100}$ k) $\frac{217}{63}$; $\frac{12}{63}$ l) $\frac{5}{33}$; $\frac{231}{33}$

Aufgabe 38:

$\frac{1}{20}$; Bus: 392 Zug: 126 Eltern: 42 Fuß: 70 Fahrrad: 210

Aufgabe 39:

$$3$$

Aufgabe 40:

$$\frac{7}{10}$$

Aufgabe 41:

das kleine Fass wird nicht benötigt, das große ist zu $\frac{121}{128}$ gefüllt.

Aufgabe 42:

$$\frac{14}{15}$$

Aufgabe 43:

Pizza: $2214g$ Pfannkuchen: $1434g$ Marmorkuchen: $960g$

Aufgabe 44:

$a)\ \frac{4}{3}$	$b)\ 7$	$c)\ 9$	$d)\ 3$
$e)\ \frac{5}{6}$	$f)\ \frac{3}{2}$	$g)\ \frac{49}{40}$	$h)\ \frac{4}{3}$
$i)\ 70$	$j)\ \frac{1}{3}$	$k)\ \frac{5}{12}$	$l)\ \frac{5}{16}$

Aufgabe 45:

$a)\ \frac{5}{7}$	$b)\ \frac{12}{7}$	$c)\ \frac{15}{14}$	$d)\ \frac{1}{2}$
$e)\ \frac{2}{27}$	$f)\ \frac{90}{7}$	$g)\ \frac{28}{5}$	$h)\ \frac{10}{21}$
$i)\ \frac{4}{5}$	$j)\ \frac{576}{605}$	$k)\ \frac{189}{20}$	$l)\ \frac{4}{27}$

Aufgabe 46:

$a)\ r:\ 6cm^2\ ;\ b:\ 4cm^2\ ;\ w:\ 6cm^2\ ;\ l:\ 4cm^2$ $b)\ r:\ 12cm^2\ ;\ b:\ 1cm^2\ ;\ w:\ 4cm^2\ ;\ l:\ 3cm^2$ $c)$

Aufgabe 47:

$$20km^2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = 5km^2$$

Aufgabe 48:

$63ha \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{9} = 16ha$

$63ha \cdot \frac{4}{9} - 16ha = 12ha$

$63ha \cdot \frac{4}{7} - 16ha = 20ha$

$63ha - 16ha - 20ha - 12ha = 15ha$

Aufgabe 49:

$$120m^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = 16m^2 \;\Rightarrow\; \text{Nein!}$$
$$120m^2 \cdot \frac{1}{3} - 16m^2 = 24m^2$$
$$120m^2 \cdot \frac{2}{5} - 16m^2 = 32m^2$$
$$120m^2 - 16m^2 - 24m^2 - 32m^2 = 48m^2$$

Aufgabe 50: *Berechne den Wert des Terms und kürze wenn möglich.*

a) $\frac{4}{3}$ *b)* 4 *c)* $\frac{5}{6}$ *d)* $\frac{3}{20}$
e) $\frac{18}{5}$ *f)* $\frac{1}{7}$ *g)* $\frac{28}{45}$ *h)* $\frac{4}{45}$

Aufgabe 51: *Sortiere die Brüche nach Größe. Beginne mit dem kleinsten Bruch und verwende die Vergleichsoperatoren $<$ und $=$.*

a) $\frac{1}{4} < \frac{3}{16} < \frac{7}{16} < \frac{1}{2} < \frac{5}{8} < \frac{3}{4}$
b) $\frac{1}{2} < \frac{17}{30} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6}$
c) $\frac{9}{16} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{21}{25} = \frac{42}{50} < \frac{7}{8}$
d) $\frac{3}{5} = \frac{12}{20} < \frac{2}{3} = \frac{30}{45} < \frac{11}{15} < \frac{7}{9}$
e) $\frac{12}{11} < \frac{17}{15} < \frac{7}{6} < \frac{6}{5} < \frac{13}{10} < \frac{5}{3}$
f) $\frac{1}{12} < \frac{1}{8} = \frac{4}{32} < \frac{3}{16} < \frac{1}{5} < \frac{1}{4}$

Aufgabe 52:

a) $\frac{2}{3} = \frac{\boxed{6}}{9}$ *b)* $\frac{4}{5} = \frac{\boxed{28}}{35}$ *c)* $\frac{\boxed{7}}{9} = \frac{42}{54}$ *d)* $\frac{\boxed{9}}{5} = \frac{72}{40}$
e) $\frac{6}{7} = \frac{\boxed{54}}{63}$ *f)* $\frac{\boxed{1}}{7} = \frac{8}{56}$ *g)* $\frac{81}{\boxed{45}} = \frac{9}{5}$ *h)* $\frac{3}{4} = \frac{24}{\boxed{36}}$
i) $\frac{55}{\boxed{30}} = \frac{11}{6}$ *j)* $\frac{3}{\boxed{1}} = \frac{39}{13}$ *k)* $\frac{5}{8} = \frac{\boxed{15}}{24}$ *l)* $\frac{\boxed{60}}{84} = \frac{5}{7}$
m) $\frac{36}{\boxed{66}} = \frac{6}{11}$ *n)* $\frac{45}{99} = \frac{5}{\boxed{11}}$ *o)* $\frac{4}{\boxed{6}} = \frac{96}{144}$ *p)* $\frac{0}{3} = \frac{\boxed{0}}{1337}$

Aufgabe 53:

$a)\ 1\tfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ $b)\ 3\tfrac{1}{4} = \dfrac{13}{4}$ $c)\ 2\tfrac{2}{5} = \dfrac{12}{5}$ $d)\ 6\tfrac{7}{8} = \dfrac{55}{8}$

$e)\ 3\tfrac{4}{7} = \dfrac{25}{7}$ $f)\ 8\tfrac{2}{9} = \dfrac{74}{9}$ $g)\ 4\tfrac{6}{7} = \dfrac{34}{7}$ $h)\ 2\tfrac{3}{4} = \dfrac{11}{4}$

$i)\ 7\tfrac{7}{8} = \dfrac{63}{8}$ $j)\ 3\tfrac{11}{12} = \dfrac{47}{12}$ $k)\ 4\tfrac{9}{14} = \dfrac{65}{14}$ $l)\ 6\tfrac{7}{11} = \dfrac{73}{11}$

$m)\ 12\tfrac{3}{8} = \dfrac{99}{8}$ $n)\ 45\tfrac{2}{15} = \dfrac{677}{15}$ $o)\ 73\tfrac{41}{83} = \dfrac{6110}{83}$ $p)\ 0\tfrac{573}{991} = \dfrac{573}{991}$

Aufgabe 54:

$a)\ \dfrac{5}{4} = 1\tfrac{1}{4}$ $b)\ \dfrac{7}{6} = 1\tfrac{1}{6}$ $c)\ \dfrac{9}{5} = 1\tfrac{4}{5}$ $d)\ \dfrac{12}{10} = 1\tfrac{2}{10}$

$e)\ \dfrac{35}{6} = 5\tfrac{5}{6}$ $f)\ \dfrac{44}{9} = 4\tfrac{8}{9}$ $g)\ \dfrac{52}{5} = 10\tfrac{2}{5}$ $h)\ \dfrac{11}{3} = 3\tfrac{2}{3}$

$i)\ \dfrac{73}{8} = 9\tfrac{1}{8}$ $j)\ \dfrac{65}{4} = 16\tfrac{1}{4}$ $k)\ \dfrac{82}{11} = 7\tfrac{5}{11}$ $l)\ \dfrac{74}{13} = 5\tfrac{9}{13}$

$m)\ \dfrac{93}{4} = \tfrac{23}{4}$ $n)\ \dfrac{425}{15} = 28\tfrac{5}{15}$ $o)\ \dfrac{291}{16} = 18\tfrac{3}{16}$ $p)\ \dfrac{2455}{48} = 51\tfrac{7}{48}$

Aufgabe 55:

$a)\ \dfrac{1}{2}$ von: $38\,\text{kg}\ :\ \dfrac{1}{2}\cdot 38\,\text{kg} = 19\,\text{kg}$

$b)\ \dfrac{3}{4}$ von: $96\,\text{cm}\ :\ \dfrac{3}{4}\cdot 96\,\text{cm} = 72\,\text{cm}$

$c)\ \dfrac{5}{6}$ von: $54\,\text{min}\ :\ \dfrac{5}{6}\cdot 54\,\text{min} = 45\,\text{min}$

$e)\ \dfrac{4}{5}$ von: $3675\,\text{g}\ :\ \dfrac{4}{5}\cdot 3675\,\text{g} = 2940\,\text{g}$

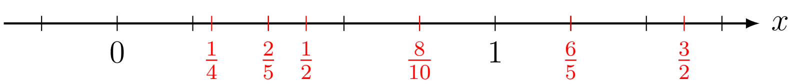
$f)\ \dfrac{8}{9}$ von: $81729\,\text{m}^2\ :\ \dfrac{8}{9}\cdot 81329\,\text{m}^2 = 72648\,\text{m}^2$

$g)\ \dfrac{7}{10}$ von: $6560\,\text{l}\ :\ \dfrac{7}{10}\cdot 6560\,\text{kg} = 4592\,\text{kg}$

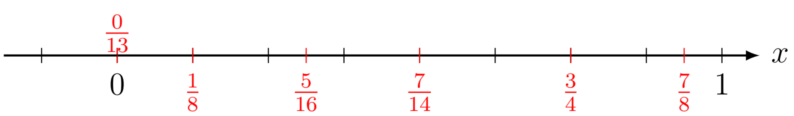
$h)\ \dfrac{17}{20}$ von: $14880\,\text{cm}^3\ :\ \dfrac{17}{20}\cdot 14880\,\text{cm}^3 = 12648\,\text{cm}^3$

Aufgabe 56:

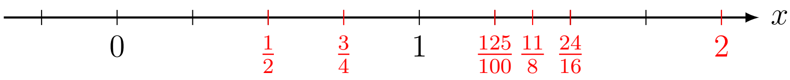
$a)\ \tfrac{2}{5}\ ;\ \tfrac{1}{2}\ ;\ \tfrac{8}{10}\ ;\ \tfrac{1}{4}\ ;\ \tfrac{3}{2}\ ;\ \tfrac{6}{5}$



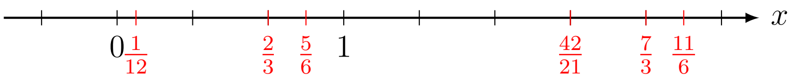
$b)\ \tfrac{7}{8}\ ;\ \tfrac{1}{8}\ ;\ \tfrac{3}{4}\ ;\ \tfrac{5}{16}\ ;\ \tfrac{7}{14}\ ;\ \tfrac{0}{13}$



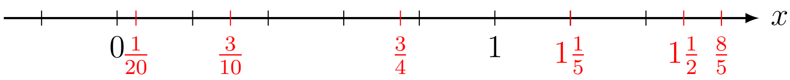
c) $\frac{3}{4}$; $\frac{11}{8}$; 2 ; $\frac{24}{16}$; $\frac{5}{10}$; $\frac{125}{100}$



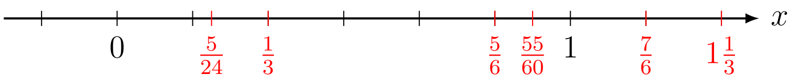
d) $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{3}$; $\frac{42}{21}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{1}{12}$



e) $\frac{3}{4}$; $\frac{8}{5}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{20}$; $1\frac{1}{5}$; $1\frac{1}{2}$



f) $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{55}{60}$; $1\frac{1}{3}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{5}{24}$



Aufgabe 57:

a)
$$4 : 4 = 1$$
$$4 : 2 = 2$$
$$4 : 1 = 4$$
$$4 : \frac{1}{2} = 8$$
$$4 : \frac{1}{4} = 16$$
$$4 : \frac{1}{8} = 32$$
$$4 : \frac{1}{16} = 64$$

b)
$$24 : 8 = 3$$
$$24 : 4 = 6$$
$$24 : 2 = 12$$
$$24 : 1 = 24$$
$$24 : \frac{1}{2} = 48$$
$$24 : \frac{1}{4} = 96$$
$$24 : \frac{1}{8} = 192$$

c)
$$9 : \frac{1}{9} = 81$$
$$9 : \frac{1}{3} = 27$$
$$9 : 1 =$$
$$9 : 3 = 3$$
$$9 : 9 = 1$$
$$9 : 27 = \frac{1}{3}$$
$$9 : 81 = \frac{1}{9}$$

Wird der Divisor kleiner, wird der Quotient größer, sodass es bei der Division nicht zwangsläufig zu einer kleineren Zahl kommen muss. (Antiproportionalität)

Aufgabe 58:

a)

$$4 \cdot 4 = 16$$
$$4 \cdot 2 = 8$$
$$4 \cdot 1 = 4$$
$$4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$
$$4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$
$$4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$
$$4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

b)

$$24 \cdot 8 = 192$$
$$24 \cdot 4 = 96$$
$$24 \cdot 2 = 48$$
$$24 \cdot 1 = 24$$
$$24 \cdot \frac{1}{2} = 12$$
$$24 \cdot \frac{1}{4} = 6$$
$$24 \cdot \frac{1}{8} = 3$$

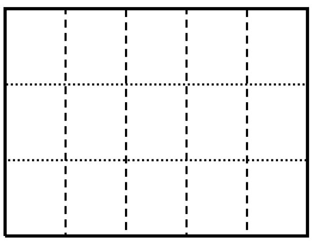
c)

$$9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$
$$9 \cdot \frac{1}{3} = 3$$
$$9 \cdot 1 = 9$$
$$9 \cdot 3 = 27$$
$$9 \cdot 9 = 81$$
$$9 \cdot 27 =$$
$$9 \cdot 81 = 243$$

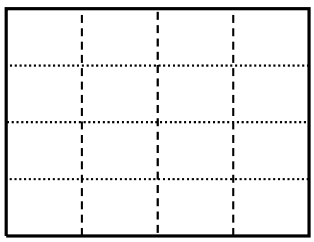
Wird ein Faktor kleiner, wird auch das Produkt kleiner, sodass es bei der Multiplikation nicht zwangsläufig zu einer größeren Zahl kommen muss. (Proportionalität)

Aufgabe 59: *Beantworte die Fragen zu jeder Darstellung.*

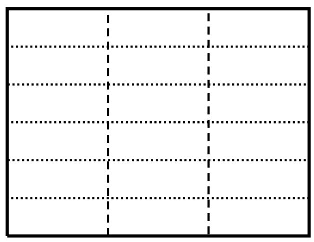
I)



II)



III)



a) Das jeweilige Rechteck wird durch die gestrichelten Linien in wie viele Teile geteilt?
Ia) Die gestrichelten Linien teilen das Rechteck in fünf Teile.
IIa) Die gepunkteten Linien teilen das Rechteck in drei Teile.
IIIa) Die gestrichelten und gepunkteten Linien teilen das Rechteck in 15 Teile.

b) Das jeweilige Rechteck wird durch die gepunkteten Linien in wie viele Teile geteilt?
Ib) Die gestrichelten Linien teilen das Rechteck in vier Teile.
IIb) Die gepunkteten Linien teilen das Rechteck in vier Teile.
IIIb) Die gestrichelten und gepunkteten Linien teilen das Rechteck in 16 Teile.

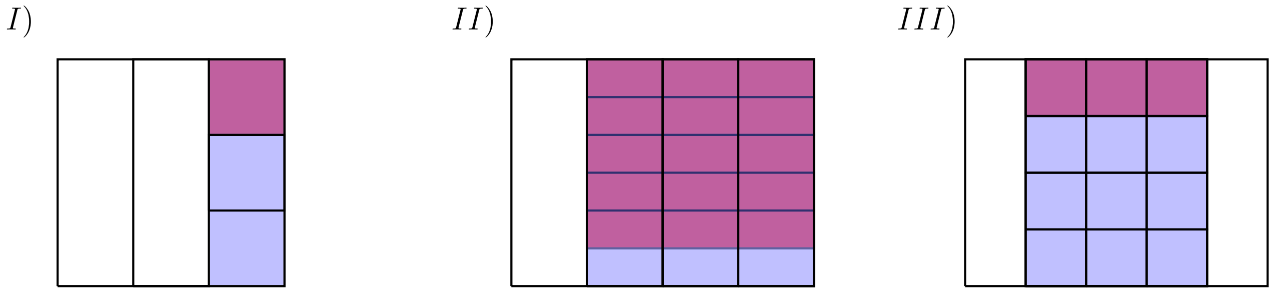
c) Das jeweilige Rechteck wird durch die gestrichelten und die gepunkteten Linien in wie viele Teile geteilt?

Ic) Die gestrichelten Linien teilen das Rechteck in drei Teile.

IIc) Die gepunkteten Linien teilen das Rechteck in sechs Teile.

$IIIc$) Die gestrichelten und gepunkteten Linien teilen das Rechteck in 18 Teile.

Aufgabe 60: *Beantworte die Fragen zu jeder Darstellung.*



a) Wie viele Anteile des jeweiligen Rechteck sind farbig markiert?

Ia) Es ist $\frac{1}{3}$ vom Rechteck farbig markiert.

IIa) Es sind $\frac{3}{4}$ vom Rechteck farbig markiert.

$IIIa$) Es sind $\frac{3}{5}$ vom Rechteck farbig markiert.

b) Wie viele Anteile der farbigen Markierung sind bläulich markiert?

Ia) Es sind $\frac{2}{3}$ von der farbigen Markierung bläulich markiert.

IIa) Es ist $\frac{1}{6}$ von der farbigen Markierung bläulich markiert.

$IIIa$) Es sind $\frac{3}{4}$ von der farbigen Markierung bläulich markiert.

c) Wie viele Anteile jeweiligen Rechteck sind bläulich markiert?

Ia) Es sind $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ vom Rechteck bläulich markiert.

IIa) Es sind $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{24}$ vom Rechteck bläulich markiert.

$IIIa$) Es sind $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$ vom Rechteck bläulich markiert.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.4.1).

18.10.6 Lösungen zu Dezimalzahlen

Aufgabe 1:

$a)\ \frac{1}{2} = 0,5$	$b)\ \frac{1}{3} = 0,\bar{3}$	$c)\ \frac{1}{5} = 0,2$
$d)\ \frac{1}{8} = 0,125$	$e)\ \frac{1}{4} = 0,25$	$f)\ \frac{1}{16} = 0,0625$
$g)\ \frac{3}{4} = 0,75$	$h)\ \frac{4}{5} = 0,8$	$i)\ \frac{2}{3} = 0,\bar{6}$
$j)\ \frac{6}{7} = 0,\overline{857142}$	$k)\ \frac{1}{12} = 0,08\bar{3}$	$l)\ \frac{19}{5} = 3,8$
$m)\ \frac{5}{9} = 0,\bar{5}$	$n)\ \frac{11}{6} = 1,8\bar{3}$	$o)\ \frac{5}{3} = 1,\bar{6}$
$p)\ \frac{43}{5} = 8,6$	$q)\ \frac{55}{2} = 27,5$	$r)\ \frac{17}{8} = 2,125$
$s)\ \frac{67}{7} = 9,\overline{571428}$	$t)\ \frac{81}{3} = 27$	$u)\ \frac{55}{7} = 7,\overline{857142}$
$v)\ \frac{1}{10} = 0,1$	$w)\ \frac{1}{100} = 0,01$	$x)\ \frac{1}{1000} = 0,001$

Aufgabe 2:

$a)\ 4 \cdot 0,1 = 0,4$	$b)\ 1 + 0,75 = 1,75$	$c)\ 9 \cdot 1,001 = 9,009$
$d)\ 2,125 - 1 = 1,125$	$e)\ 6,\bar{6} + 3,\bar{3} = 10$	$f)\ 1 + 0,0004 = 1,0004$
$g)\ 3,003 : 3 = 1,001$	$h)\ 100 \cdot 1,001 = 100,1$	$i)\ 1000 \cdot 0,001 = 1$
$j)\ 5,\bar{5} : 5 = 1,\bar{1}$	$k)\ 5 \cdot 0,1 + 0,\bar{3} = 0,8\bar{3}$	$l)\ 14 + 0,\bar{7} = 14,\bar{7}$
$m)\ 4 \cdot 0,9 = 3,6$	$n)\ 8 - 0,15 = 7,85$	$o)\ 4 \cdot 2,212 = 8,848$
$p)\ 9,853 - 6 = 3,853$	$q)\ 1,5 + 8,7 = 10,2$	$r)\ 2 + 1,6974 = 3,6974$
$s)\ 2,195 : 5 = 0,439$	$t)\ 125 \cdot 0,005 = 0,625$	$u)\ 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$
$v)\ 16,24\bar{8} : 0,8 = 20,3\bar{1}$	$w)\ 11 \cdot 0,01 + 1,\bar{1} = 1,22\bar{1}$	$x)\ 46 + 8,\bar{5} = 54,\bar{5}$

Aufgabe 3:

$a)$ $0,562 \approx 0,56$	$b)$ $0,337 \approx 0,34$	$c)$ $0,753 \approx 0,75$	$d)$ $12,2567 \approx 12,26$
$e)$ $7,419 \approx 7,42$	$f)$ $2,456 \approx 2,46$	$g)$ $9,783 \approx 9,78$	$h)$ $37,3783 \approx 37,38$
$i)$ $5,505 \approx 5,51$	$j)$ $4,782 \approx 4,78$	$k)$ $0,228 \approx 0,23$	$l)$ $25,7342 \approx 25,73$
$m)$ $0,111 \approx 0,11$	$n)$ $4,776 \approx 4,78$	$o)$ $5,387 \approx 5,39$	$p)$ $78,0152 \approx 78,02$
$q)$ $1,002 \approx 1,00$	$r)$ $1,273 \approx 1,27$	$s)$ $4,324 \approx 4,32$	$t)$ $11,0144 \approx 11,01$
$u)$ $2,572 \approx 2,57$	$v)$ $0,004 \approx 0,00$	$w)$ $0,786 \approx 0,79$	$x)$ $35,7855 \approx 35,79$

Aufgabe 4:

$a)$ $18,49$ €	$b)$ $18,98$ €	$c)$ $23,20$ €	$d)$ $18,23$ €	$e)$ $18,19$ €
$f)$ $20,20$ €	$g)$ $18,80$ €	$h)$ $17,23$ €	$i)$ $18,89$ €	$j)$ $16,18$ €

Aufgabe 5:

$a)$ 2	$b)$ $0,5$	$c)$ $6,5$	$d)$ $0,15$
$e)$ $0,15$	$f)$ $0,03$	$g)$ $2,75$	$h)$ $0,0019$
$i)$ $18,3$	$j)$ $44,78$	$k)$ $7,8$	$l)$ $287,70005$

Aufgabe 6:

$a)$ $0,5+1,2=1,7$	$b)$ $1,4+6,7=8,1$
$c)$ $4,9+3,5=8,4$	$d)$ $11,4+6,8=18,2$
$e)$ $6,6+8,7=15,3$	$f)$ $3,2+9,9=13,1$
$g)$ $5,4+8,2=13,6$	$h)$ $14,6+18,7=33,3$
$i)$ $0,53+4,24=4,77$	$j)$ $7,34+5,72=13,06$
$k)$ $41,93+73,52=115,45$	$l)$ $1,44+5,87=7,31$
$m)$ $6,524+5,842=12,366$	$n)$ $5,426+3,332=8,758$
$o)$ $7,452+8,134=15,586$	

Aufgabe 7:

$a)\ \ 2,5 - 1,2 = 1,3$

$b)\ \ 9,4 - 6,7 = 2,7$

$c)\ \ 4,9 - 3,5 = 1,4$

$d)\ \ 11,4 - 6,8 = 4,6$

$e)\ \ 9,6 - 8,7 = 0,9$

$f)\ \ 13,2 - 9,9 = 3,3$

$g)\ \ 15,4 - 8,2 = 7,2$

$h)\ \ 14,6 - 11,7 = 2,9$

$i)\ \ 6,53 - 4,24 = 2,29$

$j)\ \ 7,34 - 5,72 = 1,62$

$k)\ \ 141,93 - 73,52 = 68,41$

$l)\ \ 8,44 - 5,87 = 2,57$

$m)\ \ 6,524 - 5,842 = 0,682$

$n)\ \ 5,426 - 3,332 = 2,094$

$o)\ \ 9,452 - 8,134 = 1,318$

Aufgabe 8:

$a)\ \ 2,5 \cdot 1,2 = 3$

$b)\ \ 9,4 \cdot 6,7 = 62,98$

$c)\ \ 4,9 \cdot 3,5 = 17,15$

$d)\ \ 11,4 \cdot 6,8 = 77,52$

$e)\ \ 9,6 \cdot 8,7 = 83,52$

$f)\ \ 13,2 \cdot 9,9 = 130,68$

$g)\ \ 15,4 \cdot 8,2 = 126,28$

$h)\ \ 14,6 \cdot 11,7 = 170,82$

$i)\ \ 6,53 \cdot 4,24 = 27,6872$

$j)\ \ 7,34 \cdot 5,72 = 41,9848$

$k)\ \ 141,93 \cdot 73,52 = 10434,6936$

$l)\ \ 8,44 \cdot 5,87 = 49,5428$

$m)\ \ 6,524 \cdot 5,842 = 38,113208$

$n)\ \ 5,426 \cdot 3,332 = 18,078432$

$o)\ \ 9,452 \cdot 8,134 = 76,882568$

Aufgabe 9:

$a)\ \ -2,5 - 1,2 = -3,7$

$b)\ \ -9,4 + 6,7 = -2,7$

$c)\ \ 1,9 - 3,5 = -1,6$

$d)\ \ 11,4 - 16,8 = -5,4$

$e)\ \ -9,6 + 8,7 = -0,9$

$f)\ \ -13,2 - 9,9 = -23,1$

$g)\ \ -15,4 + 8,2 = -7,2$

$h)\ \ -14,6 + 11,7 = -2,9$

$i)\ \ -6,53 + 4,24 = -2,29$

$j)\ \ 2,34 - 5,72 = -3,38$

$k)\ \ -141,93 - 73,52 = -215,45$

$l)\ \ -8,44 + 5,87 = -2,57$

$m)\ \ -6,524 - 5,842 = -12,366$

$n)\ \ 0,426 - 3,332 = -2,906$

$o)\ \ 4,452 - 8,134 = -3,682$

Aufgabe 10:

$a)$ $0,3+0,5\cdot 3-0,6=1,2$

$b)$ $3,5-1,2\cdot 2,4:2+6,7=7,32$

$c)$ $3,4\cdot 5,4+0,2\cdot 20-5,4=16,96$

$d)$ $8,8:2,2-1,1+5,4\cdot 3,1=19,64$

$e)$ $0,5\cdot 7,8-3\cdot 1,5+9,2\cdot 3,4=30,68$

$f)$ $4,1\cdot 2,4\cdot 5-2,5\cdot 8\cdot 2,3=3,2$

$g)$ $7,3\cdot 1,2-5,5+4,2:0,5+8,3\cdot 1,3=22,45$

$h)$ $12,5\cdot 3,4:0,1+66,4-32,7\cdot 0,8=465,24$

Aufgabe 11:

$a)$ $1,34+9,42+4,82+8,23=23,81$

$b)$ $42,24+1,74+25,72+37,31=107,01$

$c)$ $5,25+7,35+14,56+88,53=115,69$

$d)$ $63,34+2,52+26,26+8,87=100,99$

$e)$ $7,32+1,45+0,51+0,093=9,373$

$f)$ $0,525+0,178+0,952+0,227=1,882$

$g)$ $25,561+95,156+32,681+44,679=198,077$

$h)$ $12,45+0,2456+3,184+9,48134=25,36094$

Aufgabe 12:

$a)$ $53,34-13,52-3,72-18,2=17,9$

$b)$ $14,4-0,52-4,32-1,23=8,33$

$c)$ $7,6-0,65-0,93-1,32=4,7$

$d)$ $75,34-5,6-7,21-19,12=43,41$

$e)$ $45,8-4,54-12,3-23,95=5,01$

$f)$ $129,33-53,32-12,45-18,48=45,08$

$g)$ $4,345-0,892-0,345-2,567=0,541$

$h)$ $19,3-0,414-11,4263-0,3245=7,1352$

Aufgabe 13:

$a)$ $4,34 - 9,82 + 1,82 - 6,73 = -10,39$

$b)$ $5,43 + 8,54 - 11,44 + 5,42 = 7,95$

$c)$ $9,41 + 1,45 + 0,06 - 13,89 = -2,97$

$d)$ $-7,156 + 3,256 + 0,561 + 5,814 = 2,475$

$e)$ $-0,892 + 2,567 - 12,45 + 53,32 = 42,545$

$f)$ $-4,346 - 0,255 - 0,814 - 9,419 = -14,834$

$g)$ $-41,94 + 5,392 - 0,2576 - 18,15 = -54,9556$

$h)$ $-84,601 - 0,0536 + 0,104 + 714,4 = 6209,8494$

Aufgabe 14:

$a)$ $4 \to \frac{1}{4}$ $b)$ $9 \to \frac{1}{9}$ $c)$ $0,2 \to 5$ $d)$ $0,75 \to \frac{4}{3}$

$e)$ $0,01 \to 100$ $f)$ $20 \to \frac{1}{20}$ $g)$ $0,\bar{6} \to \frac{3}{2}$ $h)$ $0,9 \to \frac{10}{9}$

$i)$ $0,45 \to \frac{20}{9}$ $j)$ $0,3 \to \frac{10}{3}$ $k)$ $12 \to \frac{1}{12}$ $l)$ $1,5 \to \frac{2}{3}$

$l)$ $0,53 \to \frac{100}{53}$ $m)$ $2,83 \to \frac{100}{283}$ $n)$ $0,235 \to \frac{1000}{235}$ $o)$ $0,924 \to \frac{1000}{924}$

Aufgabe 15:

$a)$ $\frac{2}{3} > 0,65$ $b)$ $0,\bar{5} = \frac{5}{9}$ $c)$ $\frac{3}{4} < 0,755$

$d)$ $\frac{5}{8} > 0,67$ $e)$ $2,35 > \frac{46}{20}$ $f)$ $1,2 < \frac{17}{15}$

$g)$ $0,225 < \frac{1}{4}$ $h)$ $\frac{72}{1000} > 0,07$ $i)$ $\frac{9}{5} > 1,77$

Aufgabe 16:

$a)$ $2,15$	$b)$ $0,34$	$c)$ $0,332$	$d)$ $0,825$
$e)$ $0,76$	$f)$ $3,85$	$g)$ $1,7875$	$h)$ $3,064$
$i)$ $1,2285$	$j)$ $1,574$	$k)$ $43,7448$	$l)$ $104,2025$
$m)$ $45,312$	$n)$ $4,3235$	$o)$ $0,33852$	$p)$ $0,54728$
$q)$ $0,0368$	$r)$ $0,32416$	$s)$ $0,045376$	$t)$ $0,0125056$

Aufgabe 17:

$a)$ $2,5$	$b)$ 40	$c)$ 9
$c)$ 240	$d)$ $0,2$	$e)$ $6,8$
$f)$ $6,25$	$g)$ $812,5$	$h)$ $0,7$
$i)$ $2,6$	$j)$ $1,875$	$k)$ $4,25$
$l)$ $7,5$	$m)$ $0,3125$	$n)$ $0,7$

Aufgabe 18: $14,8\,^\circ\mathrm{C}$

Aufgabe 19: $7\,^\circ\mathrm{C}$

Aufgabe 20: $32,7015\,\$$

Aufgabe 21: 199 €$= 169,15\,£$

Aufgabe 22: $0,56125$ €

Aufgabe 23: $56,83125$ €

Aufgabe 24: $-4,70$ €

Aufgabe 25: $8,53\mathrm{g}$

Aufgabe 26: $52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Aufgabe 27: Mögliche Lösungen: $0,12345678910111213...$ und $1,0100100010000100001...$ sowie viele weitere.

Aufgabe 28:

a) $250 : 50 = 5$
$25 : 5 = 5$
$2,5 : 0,5 = 5$
$0,25 : 0,05 = 5$
$0,025 : 0,005 = 5$

b) $480 : 8 = 60$
$48 : 0,8 = 60$
$4,8 : 0,08 = 60$
$0,48 : 0,008 = 60$
$0,048 : 0,0008 = 60$

c) $5,4 : 9 = 0,6$
$0,54 : 0,9 = 0,6$
$0,054 : 0,09 = 0,6$
$0,0054 : 0,009 = 0,6$
$0,00054 : 0,0009 = 0,6$

d) $35 : 7 = 5$
$35 : 0,7 = 50$
$35 : 0,07 = 500$
$35 : 70 = 0,5$
$35 : 700 = 0,05$
$35 : 7000 = 0,005$

e) $480 : 6 = 80$
$48 : 6 = 8$
$4,8 : 6 = 0,8$
$0,48 : 6 = 0,08$
$0,048 : 6 = 0,008$
$0,0048 : 6 = 0,0008$

f) $36 : 4 = 9$
$36 : 0,4 = 90$
$3,6 : 0,4 = 9$
$0,36 : 0,4 = 0,9$
$0,36 : 0,04 = 9$
$0,036 : 0,04 = 0,9$

Die Differenz der Zehnerpotenzen des Divisors und des Dividenden zeigt sich im Quotienten.

Aufgabe 29:

a) $3 \cdot 5 = 15$
$3 \cdot 0,5 = 1,5$
$3 \cdot 0,05 = 0,15$
$3 \cdot 0,005 = 0,015$
$3 \cdot 0,0005 = 0,0015$
$3 \cdot 0,00005 = 0,00015$

b) $8 \cdot 7 = 56$
$0,8 \cdot 7 = 5,6$
$0,08 \cdot 7 = 0,56$
$0,008 \cdot 7 = 0,056$
$0,0008 \cdot 7 = 0,0056$
$0,00008 \cdot 7 = 0,00056$

c) $12 \cdot 4 = 48$
$1,2 \cdot 4 = 4,8$
$1,2 \cdot 0,4 = 0,48$
$0,12 \cdot 0,4 = 0,048$
$0,12 \cdot 0,04 = 0,0048$
$0,012 \cdot 0,004 = 0,00048$

d) $0,1 \cdot 2 = 0,2$
$0,1 \cdot 0,2 \cdot 3 = 0,06$
$0,1 \cdot 0,2 \cdot 3 \cdot 4 = 0,24$
$0,1 \cdot 0,2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 1,2$

e) $0,1 \cdot 0,02 = 0,002$
$0,1 \cdot 0,02 \cdot 3 = 0,006$
$0,01 \cdot 0,02 \cdot 3 \cdot 4 = 0,0024$
$0,01 \cdot 0,02 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 0,5 = 0,0012$

f) $0,1 \cdot 0,2 = 0,02$
$0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,006$
$0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 = 0,0024$
$0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,0012$

Die Gesamtanzahl der invertierten Zehnerpotenzen der Faktoren finden sich aufaddiert im Produkt wieder.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.5.1).

18.10.7 Lösungen zu Parametern

Aufgabe 1:

$a) \quad = 5x + 2a$ $\qquad b) \quad = 7u + 15k$

$c) \quad = 4x + 19y$ $\qquad d) \quad = 73g + 11p$

$e) \quad = 22a + 8b$ $\qquad f) \quad = 21a + 10b$

$g) \quad = b + 11h + 9d$ $\qquad h) \quad = 3x + 3y + 36z$

Aufgabe 2:

$a) \quad = 3a + 5d$ $\qquad b) \quad = 4y + 5x$ $\qquad c) \quad = 3g - 19h$

$d) \quad = 33a + 28b$ $\qquad e) \quad = 9z + 12g$ $\qquad f) \quad = 9a - 9f$

$g) \quad = 74k - 6h$ $\qquad h) \quad = 5u - 31l$ $\qquad i) \quad = -7z - 5r$

$j) \quad = 25y + 15x$ $\qquad k) \quad = 29c + 59d$ $\qquad l) \quad = 4o + 3p$

$m) \quad = 8v - 9q$ $\qquad n) \quad = 10e + 14w$ $\qquad o) \quad = 38s - 100d - 53a$

$p) \quad = 10h + 16g + 19f$ $\qquad q) \quad = 17a + 12b$ $\qquad r) \quad = 27a + 15c$

$s) \quad = 12c + 30z + 40t$ $\qquad t) \quad = 40x + 16z + 45y$ $\qquad u) \quad = 4b + c$

$v) \quad = 12z + 33d - 32s + 45a$

Aufgabe 3:

$a) \quad = \frac{2}{5}p + \frac{8}{7}e =$ $\qquad b) \quad = \frac{2}{3}x + \frac{7}{9}y$

$c) \quad = \frac{9}{10}a + \frac{1}{4}b =$ $\qquad d) \quad = \frac{3}{10}r + \frac{1}{9}w$

$e) \quad = \frac{9}{4}f + \frac{11}{6}u =$ $\qquad f) \quad = \frac{23}{9}n + \frac{3}{10}m + \frac{p}{11}$

$g) \quad = \frac{3}{2}v + \frac{21}{10}m =$ $\qquad h) \quad = \frac{47}{15}c + \frac{13}{5}d + \frac{15}{28}s$

Aufgabe 4:

$a)\quad = 4,8g + 2,7x$ $\qquad b)\quad = 6,7v + 4,6t$

$c)\quad = 3,4y + 15,7z$ $\qquad d)\quad = 30,7h + 3,5g$

$e)\quad = 0,026f + 1,002t$ $\qquad f)\quad = 0,55y + 10,11x$

$g)\quad = 10,12d - 0,75z + 4,106p$ $\qquad h)\quad = 12,75k + 8,07l$

Aufgabe 5:

$a)\quad = -7y - 15x$ $\qquad b)\quad = -4,1f + 9,1a - 4,2g$

$c)\quad = -0,95g - 1,5d$ $\qquad d)\quad = 8,34t + 0,75z$

$e)\quad = -22,15u - 8,87a$ $\qquad f)\quad = -6,15z - 5,3y + 6x$

$g)\quad = -0,325d + 0,6g$ $\qquad h)\quad = -2,25t + 0,5z + 2,95x$

Aufgabe 6:

$a)\quad = -5a$ $\qquad b)\quad = 4k + 0,3h + 2g$

$c)\quad = -3t - 1,8u$ $\qquad d)\quad = 2,2z - 2,5t - 0,75$

$e)\quad = -1,75e - s$ $\qquad f)\quad = 3fd - 3,2d + 3,1f$

$g)\quad = 8,6b + 0,85a$ $\qquad h)\quad = -11,5b + 3,35a$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.6.1).

18.10.8 Lösungen zu Einsetzungsverfahren

Aufgabe 1:

$a)$ $a + b - c = 1$

$b)$ $3 \cdot a - 4 \cdot b + c = 5$

$c)$ $c \cdot b - b \cdot a = 2$

$d)$ $a \cdot b - b \cdot a = 0$

$e)$ $4 \cdot a \cdot b + 2 \cdot c \cdot c - 3 \cdot b \cdot c = 32$

$f)$ $2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c = 52$

$g)$ $a \cdot b \cdot c = 24$

$h)$ $4 \cdot \frac{a}{b} + \frac{c}{a} = \frac{22}{3} = 7,\bar{3}$

Aufgabe 2:

$a)$ $a \cdot a = 81$ mit: $a = 9$

$b)$ $4 + c \cdot d = 12$ mit: $c = 2$ und $d = 4$

$c)$ $2 \cdot a \cdot b + 8 = 50$ mit: $a = 3$ und $b = 7$

$d)$ $7 \cdot a + 4 \cdot b - 3 \cdot c = 25$ mit: $a = 2$ und $b = 5$ und $c = 3$

$e)$ $a \cdot b \cdot c \cdot d = 27$ mit: $a = \frac{1}{4}$ und $b = 4$ und $c = 3$ und $d = 9$

$f)$ $\frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 81$ mit: $G = 27$ und $h = 9$

$g)$ $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t = \frac{9}{2}$ mit: $a = \frac{1}{4}$ und $t = 6$

$h)$ $\frac{1}{2} \cdot a \cdot t \cdot t + v \cdot t = 98,48$ mit: $a = 9,81$ und $v = 5$ und $t = 4$

Aufgabe 3:

$a)$ $a \cdot 3 = 6 \cdot d$ mit: $a = 2 \cdot d$

$b)$ $c \cdot d = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ mit: $c = a + b$ und $d = 2$

$c)$ $a + 4 = d \cdot c + 4 \cdot t + 4$ mit: $a = d \cdot c + 4 \cdot t$

$d)$ $A = 24$ mit: $A = a \cdot b$ und $b = 3$ und $a = 8$

$e)$ $H - F = 4$ mit: $F = a - b$ und $H = a + b$ und $b = 2$

$f)$ $\dfrac{f}{g} = \dfrac{2 \cdot b \cdot c}{a \cdot d}$ mit: $f = 4 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d$ und $g = 2 \cdot a \cdot a \cdot d \cdot d$

$g)$ $\xi \cdot \upsilon + \vartheta = a \cdot b + \wp$ mit: $\xi = a$ und $\upsilon = b$ und $\vartheta = \wp$

$h)$ $\mathit{\Delta} + \square + \diamond = \zeta$ mit: $\mathit{\Delta} = \nabla - \mathit{\Xi}$ und $\square = \mathit{\Xi} + \mathit{\Phi}$ und $\diamond = \zeta - \nabla - \mathit{\Phi}$

Aufgabe 4:

	1	2	3	4	5	6	7
a	3	6	$0,25$	$3,1$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{3}$
b	4	2	$1,75$	$4,5$	$\frac{5}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{9}{4}$
$c = a \cdot b$	12	12	$0,4375$	$13,95$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{15}{4}$
$d = \frac{a}{b}$	$\frac{3}{4}$	3	$\frac{1}{7}$	$0,6\overline{8}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{20}{27}$
$e = c \cdot d$	9	36	$0,125$	$9,61$	$\frac{9}{4}$	$\frac{49}{36}$	$\frac{25}{9}$
$f = e + 2 \cdot a$	15	48	$0,625$	$15,81$	$\frac{21}{4}$	$\frac{133}{4}$	$\frac{55}{9}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.7.1).

Lösung zur Prozentrechnung

Aufgabe 1:

$a)\ \ 0,01 = 1\%$	$b)\ \ 100 = 10000\%$	$c)\ \ 0,5 = 50\%$
$d)\ \ 0,125 = 12,5\%$	$e)\ \ 0,0024 = 0,24\%$	$f)\ \ 289 = 2,89\%$
$g)\ \ 0,9315 = 93,15\%$	$h)\ \ 0,0341 = 3,41\%$	$i)\ \ 0,891 = 89,1\%$
$j)\ \ 0,54 = 54\%$	$k)\ \ 354 = 35400\%$	$l)\ \ 0,976342 = 97,6342\%$
$m)\ \ 0,354 = 35,4\%$	$n)\ \ 1,1229 = 112,29\%$	$o)\ \ 245,287 = 24528,7\%$
$p)\ \ 5,1006 = 510,06\%$	$q)\ \ 0,0005 = 0,05\%$	$r)\ \ 1,154578 = 115,4578\%$
$s)\ \ 0,999 = 99,9\%$	$t)\ \ 3,1204 = 312,04\%$	$u)\ \ 0,0487 = 4,87\%$
$v)\ \ 3,9552 = 395,52\%$	$w)\ \ 0,5755 = 57,55\%$	$x)\ \ 0,000004 = 0,0004\%$

Aufgabe 2:

$a)\ \ 1\% = 0,01$	$b)\ \ 100\% = 1$	$c)\ \ 54\% = 0,54$
$d)\ \ 1626\% = 16,26$	$e)\ \ 2,374\% = 0,02374$	$f)\ \ 2,01\% = 0,0201$
$g)\ \ 99\% = 0,99$	$h)\ \ 5\% = 0,05$	$i)\ \ 81,063\% = 0,81063$
$j)\ \ 8\% = 0,08$	$k)\ \ 0,4\% = 0,004$	$l)\ \ 30\% = 0,30$
$m)\ \ 0,06\% = 0,0006$	$n)\ \ 11,89\% = 0,1189$	$o)\ \ 0,9\% = 0,009$
$p)\ \ 12\% = 0,12$	$q)\ \ 0\% = 0$	$r)\ \ 587,3\% = 5,873$
$s)\ \ 4\% = 0,04$	$t)\ \ 909\% = 9,09$	$u)\ \ 11\% = 0,11$
$v)\ \ 9786\% = 97,86$	$w)\ \ 8,457\% = 0,08457$	$x)\ \ 5,64\% = 0,0564$

Aufgabe 3:

$a)\ \frac{1}{4} = 25\%$	$b)\ \frac{1}{3} \approx 33,3\%$	$c)\ \frac{5}{6} \approx 83,3\%$
$d)\ \frac{9}{14} \approx 64,3\%$	$e)\ \frac{8}{25} = 32\%$	$f)\ \frac{1}{8} = 12,5\%$
$g)\ \frac{7}{9} \approx 77,7\%$	$h)\ \frac{9}{4} = 225\%$	$i)\ \frac{43}{83} \approx 51,8\%$
$j)\ \frac{8}{3} \approx 266,67\%$	$k)\ \frac{7}{2} = 350\%$	$l)\ \frac{1}{97} \approx 1,03\%$
$m)\ \frac{5}{66} \approx 7,58\%$	$n)\ \frac{1}{351} \approx 0,28\%$	$o)\ \frac{4}{25} = 16\%$
$p)\ \frac{1}{7} \approx 14,29\%$	$q)\ \frac{9}{8} = 112,5\%$	$r)\ \frac{21}{250} = 8,4\%$
$s)\ \frac{3}{71} \approx 4,23\%$	$t)\ \frac{5}{83} \approx 6,02\%$	$u)\ \frac{16}{354} \approx 4,52\%$
$v)\ \frac{1}{1} = 100\%$	$w)\ \frac{0}{4} = 0\%$	$x)\ \frac{75}{976} \approx 7,68\%$

Aufgabe 4:

$a)\ 700 \cdot 1\% = 7$	$b)\ 45 \cdot 100\% = 45$
$c)\ 200 \cdot 4\% = 8$	$d)\ 80 \cdot 25\% = 20$
$e)\ 1500 \cdot 2\% = 30$	$f)\ 50000 \cdot 3\% = 1500$
$g)\ 9000 \cdot 99\% = 8910$	$h)\ 3141 \cdot 0,1\% = 3,141$
$k)\ 972 \cdot 245\% = 2381,4$	$l)\ 5707 \cdot 2\% = 114,14$
$m)\ 2040 \cdot 54\% = 1101,6$	$n)\ 2786 \cdot 9\% = 250,74$
$o)\ 6872 \cdot 78\% = 5360,16$	$p)\ 7827 \cdot 44,68\% = 3497,1036$
$q)\ 1837 \cdot 0,827\% = 15,19199$	$r)\ 3287 \cdot 0,37\% = 12,1619$
$s)\ 79,94 \cdot 45\% = 35,973$	$t)\ 3248,69 \cdot 7,34\% = 238,453846$
$u)\ 2304,56 \cdot 0,003\% = 0,0691368$	$v)\ 287,784 \cdot 92,75\% = 266,91966$
$w)\ 954,557 \cdot 3,786\% = 36,13952802$	$x)\ 245,57 \cdot 78,57\% = 192,944349$

Aufgabe 5:

$a)$ 4% von 1000 € sind: $4\% \cdot 1000$ € $= 40$ €

$b)$ 2% von 5550 € sind: $2\% \cdot 5550$ € $= 111$ €

$c)$ 10% von 862434 € sind: $10\% \cdot 862434$ € $= 86243,4$ €

$d)$ 19% von 299 € sind: $19\% \cdot 299$ € $= 56,81$ €

$e)$ 12% von 1200 € sind: $12\% \cdot 1200$ € $= 144$ €

$f)$ 11% von 65300 € sind: $11\% \cdot 65300$ € $= 7183$ €

Aufgabe 6:

$a)$ 4%Jahreszins auf 2000 € ergeben nach einem Jahr: 2080 €

$b)$ 11%Jahreszins auf 7500 € ergeben nach einem Jahr: 8325 €

$c)$ 3%Jahreszins auf 4500 € ergeben nach einem Jahr: 4635 €

$d)$ $2,5$%Jahreszins auf 13480 € ergeben nach einem Jahr: 13817 €

$e)$ $1,9$%Jahreszins auf 14567 € ergeben nach einem Jahr: $14843,77$ €

$f)$ $2,15$%Jahreszins auf 18346 € ergeben nach einem Jahr: $18740,44$ €

$g)$ $3,75$%Jahreszins auf 20500 € ergeben nach einem Jahr: $21268,75$ €

$h)$ $2,275$%Jahreszins auf 84344 € ergeben nach einem Jahr: $86262,83$ €

$i)$ $4,015$%Jahreszins auf 48346 € ergeben nach einem Jahr: $50287,09$ €

$j)$ $2,34$%Jahreszins auf 32567 € ergeben nach einem Jahr: $33329,07$ €

$k)$ $2,7325$%Jahreszins auf 93872 € ergeben nach einem Jahr: $96437,05$ €

$l)$ $0,05$%Jahreszins auf 25268 € ergeben nach einem Jahr: $25280,63$ €

Aufgabe 7:

$a)$ $2862,25$ €	$b)$ $6753,05$ €	$c)$ $4998,88$ €
$d)$ $15814,08$ €	$e)$ $31774,83$ €	$f)$ $105321,09$ €
$g)$ $155539,37$ €	$h)$ $147487,65$ €	$i)$ $43130,79$ €
$j)$ $20716673,68$ €		

Aufgabe 8:

$a)$ $5515,10$ €	$b)$ $8702,43$ €	$c)$ $14206,07$ €
$d)$ $33764,35$ €	$e)$ $27257,17$ €	$f)$ $9632,57$ €
$g)$ $51205,80$ €	$h)$ $54933,23$ €	$i)$ $37058,62$ €
$j)$ $105000,10$ €	$k)$ $159610,93$ €	$l)$ $507418,17$ €

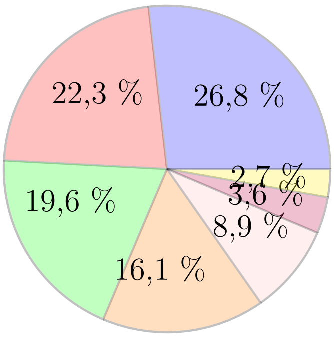
Aufgabe 9:

$a)$ $+20\%$	$b)$ $+10\%$	$c)$ $-11,\bar{1}\%$
$d)$ $+11,\bar{3}\%$	$e)$ $\approx -7,37\%$	$f)$ $\approx +78,57\%$
$g)$ $\approx +16,92\%$	$h)$ $\approx -17,14\%$	$i)$ $-95,\bar{5}\%$
$j)$ $\approx +68,22\%$	$k)$ $+160\%$	$l)$ $\approx +69,04\%$
$m)$ $\approx -14,31\%$	$n)$ $\approx +66,78\%$	$o)$ $\approx -13,79\%$

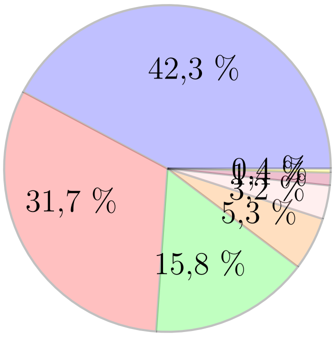
Aufgabe 10:

$a)$	150	125	110	90	50	20	15
Anteil in %	26,8	22,3	19,6	16,1	8,9	3,6	2,7
$b)$	600	450	225	75	45	20	5
Anteil in %	42,3	31,7	15,8	5,3	3,2	1,4	0,4
$c)$	2560	1870	1500	1235	950	375	110
Anteil in %	29,8	21,7	17,4	14,4	11,0	4,4	1,3
$d)$	11050	8600	4620	2200	950	290	180
Anteil in %	39,6	30,8	16,6	7,9	3,4	1,0	0,6
$e)$	23300	17200	12400	9700	4500	2600	1200
Anteil in %	32,9	24,3	17,5	13,7	6,3	3,7	1,7
$f)$	67376	34525	15170	9542	7346	3456	2637
Anteil in %	48,1	24,7	10,8	6,8	5,2	2,5	1,9

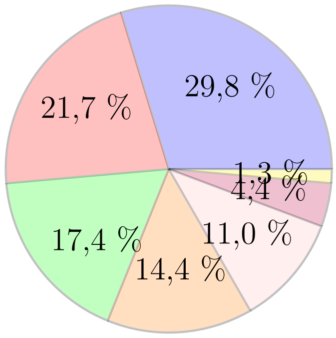
$a)$



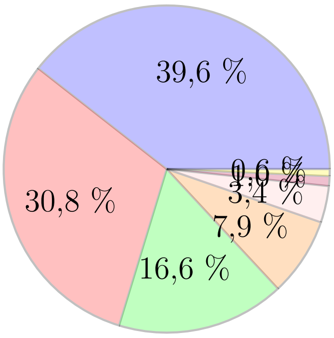
$b)$



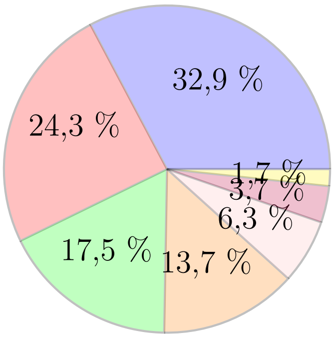
$c)$



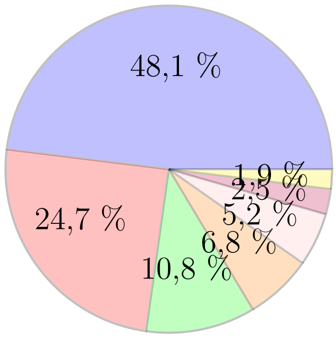
$d)$



$e)$



$f)$



Aufgabe 11:

$a)$ $a:$ 6250 ; $b:$ 8325 ; $c:$ 6950 ; $d:$ 1400 ; $e:$ 2075

$b)$ $a:$ 13761 ; $b:$ 7986 ; $c:$ 3927 ; $d:$ 3201 ; $e:$ 4125

$c)$ $a:$ 2775 ; $b:$ 2075 ; $c:$ $1912,5$; $d:$ $1487,5$; $e:$ 1975 ; $f:$ $2262,5$

$d)$ $a:$ 3519 ; $b:$ 3197 ; $c:$ $1598,5$; $d:$ $1920,5$; $e:$ $1276,5$

$e)$ $a:$ 43510 ; $b:$ 28215 ; $c:$ 8740 ; $d:$ 9215 ; $e:$ 5320

$f)$ $a:$ 6875 ; $b:$ 7810 ; $c:$ 7315 ; $d:$ 8855 ; $e:$ 12375 ; $f:$ 11770

Aufgabe 12:

	a) *P*	*R*	
	100 %	300 €	
: 100			: 100
	1%	3 €	
·13			·13
	13%	39 €	

	b) *P*	*R*	
	100 %	600 €	
: 100			: 100
	1 %	6 €	
·20			·20
	20 %	120 €	

	c) *P*	*R*	
	100 %	850 €	
: 100			: 100
	1 %	8,5 €	
·26			·26
	26 %	221 €	

	d) *P*	*R*	
	150 %	1200 €	
: 150			: 150
	1 %	8 €	
·60			·60
	60 %	480 €	

	e) *P*	*R*	
	125 %	5000 €	
: 125			: 125
	1 %	40 €	
·75			·75
	75 %	3000 €	

	f) *P*	*R*	
	80 %	1600 €	
: 80			: 80
	1 %	20 €	
·15			·15
	15 %	300 €	

	g) *P*	*R*	
	75 %	3000 €	
: 75			: 75
	1 %	40 €	
·40			·40
	40 %	1600 €	

	h) *P*	*R*	
	3000 ‰	7200 €	
: 3000			: 3000
	1 ‰	2,4 €	
·5			·5
	5 ‰	12 €	

	i) *P*	*R*	
	14 %	7700 €	
: 14			: 14
	1 %	550 €	
·100			·100
	100 %	55000 €	

Aufgabe 13:

$a)$ 50 €
$b)$ 432 € = 432
$c)$ 1625 €
$d)$ 6179,58 € =
$e)$ 10000 €
$f)$ 6 € =
$g)$ 1081 €
$h)$ 3% von 256,95 € =
$i)$ 1493,52 €
$j)$ 22170,8 € =
$k)$ 520 €
$l)$ 46144 € =
$m)$ 2427,39 €
$n)$ 11000 € =
$o)$ 3122 €
$p)$ 3666,8 € =
$q)$ 52560 €
$r)$ 88879,1112 € =
$s)$ 6,072 €
$t)$ 65560 € =
$u)$ 11994862,36 €
$v)$ 411,03 € =

Aufgabe 14:

$a)$ 35 €
$b)$ 237,5 € =
$c)$ 46,55 €
$d)$ 1000,4 € =
$e)$ 1300 €
$f)$ 272,475 € =
$g)$ 82,72 €
$h)$ 2028,192 € =

Aufgabe 15:

$a)$ 1250 €
$b)$ $392,\overline{857142}$ €
$c)$ 250 €
$d)$ 18608 €
$e)$ $7684,4\overline{8}$ €
$f)$ $742,\overline{7}$ €
$g)$ 2221233 €
$h)$ $1700363,\overline{63}$ €
$i)$ $\approx 11712,688$ €
$j)$ $\approx 95612,759$ €

Aufgabe 16:

$a)\ 6\% \to \frac{100}{6}$ $b)\ 583\% \to \frac{100}{583}$ $c)\ 52\% \to \frac{100}{52}$ $d)\ 84\% \to \frac{100}{84}$

$e)\ 44\% \to \frac{100}{44}$ $f)\ 954\% \to \frac{100}{954}$ $g)\ 0,5\% \to \frac{1000}{5}$ $h)\ 149\% \to \frac{100}{149}$

$i)\ 106\% \to \frac{100}{106}$ $j)\ 0,7\% \to \frac{1000}{7}$ $k)\ 9\% \to \frac{100}{9}$ $l)\ 2004,5\% \to \frac{1000}{20045}$

$l)\ 33,3\% \to \frac{1000}{333}$ $m)\ 6,2\% \to \frac{1000}{62}$ $n)\ 10,6\% \to \frac{1000}{106}$ $o)\ 708,32\% \to \frac{10000}{70832}$

Aufgabe 17: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

$a)\ 33\% > 0,3$ $b)\ 0,25 > 21\%$ $c)\ 78\% > 0,77$

$d)\ 6,74 < 690\%$ $e)\ 0,45 = 45\%$ $f)\ 0,285 < 29,2\%$

$g)\ 934,67\% = 9,3467$ $h)\ 11,2\% > 0,012$ $i)\ 0,83 < 85\%$

Aufgabe 18: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

$a)\ \frac{1}{3} > 30\%$ $b)\ 120\% = \frac{5}{4}$ $c)\ \frac{3}{8} = 37,5\%$

$d)\ \frac{5}{6} > 83,2\%$ $e)\ 1,5\% = \frac{3}{200}$ $f)\ 0,4\% < \frac{1}{25}$

$g)\ 90\% > \frac{8}{9}$ $h)\ \frac{7}{16} < 48,75\%$ $i)\ \frac{35}{9} < 392\%$

Aufgabe 19: *Welche Zahl ist größer? Trage die richtigen Zeichen (gleich =, größer als > und kleiner als <) zwischen den Zahlen ein.*

$a)\ \frac{1}{2} > 0,4$ $b)\ \frac{1}{4} > 22\%$ $c)\ 85\% < 0,88$

$d)\ \frac{7}{8} < 90\%$ $e)\ 0,62 = 62\%$ $f)\ \frac{1}{6} > 15\%$

$g)\ 123\% < 1,25$ $h)\ 13,5\% < \frac{3}{20}$ $i)\ 1,74 < \frac{7}{4}$

$j)\ 0,6 = \frac{3}{5}$ $k)\ 2,5 > \frac{22}{9}$ $l)\ 240\% = \frac{12}{5}$

$m)\ 14,2\% < \frac{1}{7}$ $n)\ 6,4358 < 648,32\%$ $o)\ \frac{3}{100} > 0,3\%$

Aufgabe 20:

Jahr n	0	1	2	3	4	5
Zinsen z_n	0	60	60,72	61,45	62,19	62,93
Gesamtkapital G_n	5000	5060	5120,72	5182,17	5244,35	5307,29

Jahr n	6	7	8	9	10
Zinsen z_n	63,69	64,45	65,23	66,00	66,80
Gesamtkapital G_n	5370,97	5435,43	5500,65	5566,66	5633,46

$\Rightarrow$ Summe der Zinsen: $\sum_{i=0}^{10} z_i = 633,46$

$\Rightarrow$ Gesamtkapital nach 10 Jahren: $G_{10} = 5633,46$

Kurze Rechnung: $G_n = G_0 \cdot (1+p)^n = G_0 \cdot q^n$

$\Rightarrow \quad G_{10} = 5000 \cdot (1 + 1,2\%)^{10} = 5000 \cdot 1,012^{10} = 5633,46$

Aufgabe 21:

Aufgabe 22:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
W	100	50	150	$19,8$	9000	300	4800
G	2000	625	75000	450	1125000	24000	4000
$p\,[\%]$	5	8	$0,2$	$4,4$	$0,8$	$1,25$	120

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
K_0	500	3000	9000	2500	8000	$2666,\bar{6}$
K_1	510	3033	9030	2550	8196	$2746,\bar{6}$
Z_1	10	33	30	50	196	80
$p\,[\%]$	2	$1,1$	$0,\bar{3}$	2	$2,45$	3
q	$1,02$	$1,011$	$1,00\bar{3}$	$1,02$	$1,0245$	$1,03$

Aufgabe 23: *Beantworte alle Fragen.*

a)
Wie viel sind 40% von 100? $\Rightarrow$ 40%
Wie viel sind 40% von 40? $\Rightarrow$ 16%
Wie viel sind 40% von 40% von 100? $\Rightarrow$ 16%

b)
Wie viel sind 20% von 100? $\Rightarrow$ 20%
Wie viel sind 50% von 20? $\Rightarrow$ 10%
Wie viel sind 20% von 50% von 100? $\Rightarrow$ 10%

c)
Wie viel sind 80% von 100%? $\Rightarrow$ 80%
Wie viel sind 50% von 80%? $\Rightarrow$ 40%
Wie viel sind 25% von 40%? $\Rightarrow$ 10%
Wie viel sind 80% von 50% von 25% von 100%? $\Rightarrow$ 10%

Aufgabe 24: *Beantworte die Fragen und beschreib die Auffälligkeit.*

a) Wie viel sind 10% von 50? $\Rightarrow$ $10\% \cdot 50 = 0,1 \cdot 50 = 5$
Wie viel sind 50% von 10? $\Rightarrow$ $50\% \cdot 10 = 0,5 \cdot 10 = 5$

b) Wie viel sind 17% von 100? $\Rightarrow$ $17\% \cdot 100 = 0,17 \cdot 100 = 17$
Wie viel sind 100% von 17? $\Rightarrow$ $100\% \cdot 17 = 1 \cdot 17 = 17$

c) Wie viel sind 8% von 25? $\Rightarrow$ $8\% \cdot 25 = 0,08 \cdot 25 = 2$
Wie viel sind 25% von 8? $\Rightarrow$ $25\% \cdot 8 = 0,25 \cdot 8 = 2$

d) Wie viel sind 7% von 800? $\Rightarrow$ $7\% \cdot 800 = 0,07 \cdot 800 = 56$
Wie viel sind 800% von 7? $\Rightarrow$ $800\% \cdot 7 = 8 \cdot 7 = 56$

e) Wie viel sind 150% von 400? $\Rightarrow$ $150\% \cdot 400 = 1,5 \cdot 400 = 600$
Wie viel sind 400% von 150? $\Rightarrow$ $400\% \cdot 150 = 4 \cdot 150 = 600$

f) Wie viel sind 36% von $33,\bar{3}$? $\Rightarrow$ $36\% \cdot 33,\bar{3} = 0,36 \cdot 33,\bar{3} = 12$
Wie viel sind $33,\bar{3}\%$ von 36? $\Rightarrow$ $33,\bar{3}\% \cdot 36 = 0,\bar{3} \cdot 36 = 12$

Die Einheit % ist an einer Zahl multipliziert und diese Multiplikation ist kommutativ, sodass die Zahlen der Frage ausgetauscht werden können, was manchmal leichter im Kopf zu berechnen ist.

Aufgabe 25: *Berechne die gesamte Downloaddauer.*

Downloading... vergangene Zeit: 3 min

a)

Grundwert: 10 cm Prozentwert: 2 cm relativer Anteil: $20\% = \frac{1}{5}$

Gesamtdownloaddauer: $3\,\text{min} \cdot 5 = 15\,\text{min}$

Downloading... vergangene Zeit: 4 min

b)

Grundwert: 8 cm Prozentwert: 1 cm relativer Anteil: $12,5\% = \frac{1}{8}$

Gesamtdownloaddauer: $4\,\text{min} \cdot 8 = 32\,\text{min}$

Downloading... verbleibende Zeit: 5 min

c)

Grundwert: 9 cm Prozentwert: 6 cm relativer Anteil: $66,\bar{6}\% = \frac{2}{3}$

fehlend: $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ Gesamtdownloaddauer: $5\,\text{min} \cdot 3 = 15\,\text{min}$

Aufgabe 26: *Berechne die gesamte Downloaddatenmenge.*

Downloading... bereits runtergeladen: $6,5\,\text{GB}$

a) 

Grundwert: $12\,\text{cm}$ Prozentwert: $4\,\text{cm}$ relativer Anteil: $33,\bar{3}\% = \frac{1}{3}$

Gesamtdownloaddauer: $6,5\,\text{GB}\cdot 3 = 19,5\,\text{GB}$

Downloading... noch $800\,\text{MB}$ runter zu laden

b) 

Grundwert: $9\,\text{cm}$ Prozentwert: $7,5\,\text{cm}$ relativer Anteil: $83,\bar{3}\% = \frac{5}{6}$

fehlend: $\frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ Gesamtdownloaddauer: $800\,\text{MB}\cdot 6 = 2400\,\text{MB}$

Aufgabe 27: *Bei einem Patch müssen vor einem Spielstart Daten heruntergeladen werden. Dabei brauchen nicht immer alle Spiele die komplette Datenmenge bis das Spiel spielbar wird. Das Spiel ist spielbar, wenn der orangene Balken ausgefüllt ist.*

a) *Berechne die Downloaddauer.*

b) *Berechne wann das Spiel spielbar ist.*

c) *Berechne wie viel Prozent bis zur Spielbarkeit des Spiels schon herunter geladen wurden.*

Downloading... vergangene Zeit: $6\,\text{min}$

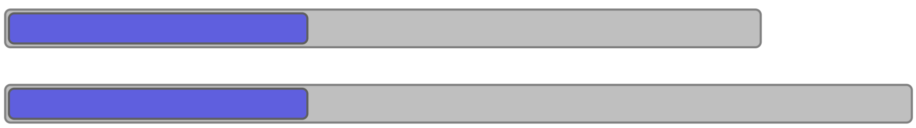
a) $\frac{3\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 30\% \quad\Rightarrow\quad 6\,\text{min}\cdot\frac{10}{3} = 20\,\text{min}$

b) $\frac{7\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 70\% \quad\Rightarrow\quad 20\,\text{min}\cdot 70\% = 14\,\text{min}$

c) $\frac{3\,\text{cm}}{7\,\text{cm}} = 42,\overline{857142}\%$

Aufgabe 28: *Vergleiche die beiden Downloadbalken und berechne, wie viel Zeit der untere Downloadbalken mehr benötigt. Gib außerdem an, um wie viel Prozent der obere Balken länger sein müsste, damit dieser genau so lang wäre.*

Downloading... vergangene Zeit: $6\,\text{min}$



Oben: $\frac{4\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 40\% \quad\Rightarrow\quad 6\,\text{min}\cdot\frac{10}{4} = 15\,\text{min}$

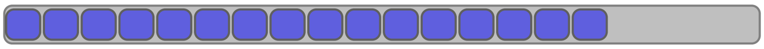
Unten: $\frac{4\,\text{cm}}{12\,\text{cm}} = 33,\bar{3}\% \quad\Rightarrow\quad 6\,\text{min}\cdot 3 = 18\,\text{min}$

Somit braucht der untere Download drei Minuten länger.

$\frac{3\,\text{min}}{15\,\text{min}} = 20\% \quad\Rightarrow$ Der obere Download müsste 20% länger dauern, damit diese gleichlange andauern würden.

Aufgabe 29: *Berechne wie viel Zeit einer der Kästen symbolisiert. Beschreibe deinen Rechenweg.*

Downloading... verbleibende Zeit: 7 min



$$\frac{8\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 80\% \quad \Rightarrow \quad 7\,\text{min}\cdot 5 = 35\,\text{min} \quad \Rightarrow \quad 35\,\text{min}: 16 = 2,1875\,\text{min}$$

Aufgabe 30: *Berechne wie viel Zeit ein Prozent des Downloadbalken entsprechen. Beschreibe deinen Rechenweg.*

Downloading... vergangene Zeit: 20 min

$$\frac{4\,\text{cm}}{10\,\text{cm}} = 40\% \quad \Rightarrow \quad 20\,\text{min}\cdot\frac{10}{4} = 50\,\text{min} \quad \Rightarrow \quad 50\,\text{min}: 100 = 0,5\,\text{min}$$

Aufgabe 31: *Gib die Zahlen in der Prozentdarstellung an.*

a) $0,06 = 6\%$ *b)* $0,96 = 96\%$ *c)* $0,7 = 70\%$

d) $\frac{1}{4} = 25\%$ *e)* $\frac{17}{20} = 85\%$ *f)* $\frac{3}{5} = 60\%$

g) $0,6541 = 65,41\%$ *h)* $7 = 700\%$ *i)* $\frac{11}{9} = 1,\bar{2}\%$

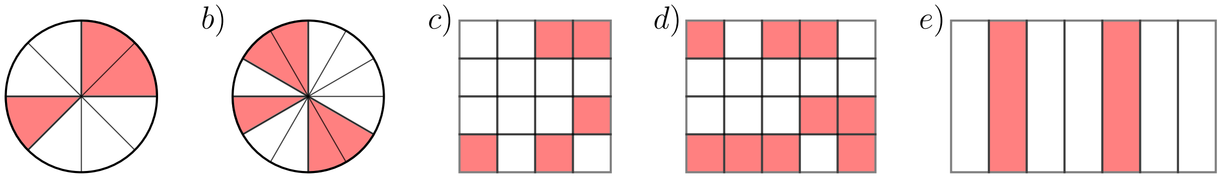
Aufgabe 32: *Gib die Zahlen in der gekürzten Bruch- und Dezimalzahldarstellung an.*

a) $30\% = 0,3 = \frac{3}{10}$ *b)* $6,25\% = 0,0625 = \frac{1}{16}$

c) $44,\bar{4}\% = 0,\bar{4} = \frac{4}{9}$ *d)* $125\% = 1,25 = \frac{5}{4}$

Aufgabe 33: *Gib den dargestellten roten Anteil vom Ganzen in der Prozentdarstellung an.*

a) *b)* *c)* *d)* *e)*



$37,5\%$ $41,\bar{6}\%$ $31,25\%$ 45% $28,\overline{571428}\%$

Aufgabe 34: *Beantworte die Fragen und beschreibe die Auffälligkeit.*

a) Wie viel sind 10% von 50? $\Rightarrow$ 5
Wie viel sind 50% von 10? $\Rightarrow$ 5

b) Wie viel sind 17% von 100? $\Rightarrow$ 17
Wie viel sind 100% von 17? $\Rightarrow$ 17

c) Wie viel sind 8% von 25? $\Rightarrow$ 2
Wie viel sind 25% von 8? $\Rightarrow$ 2

d) Wie viel sind 7% von 800? $\Rightarrow$ 42
Wie viel sind 800% von 7? $\Rightarrow$ 42

Da es sich bei dem „von“-Prinzip um eine Multiplikation mit Brüchen handelt, ist es gleich an welcher Zahl das Prozentzeichen angeheftet wird.

Aufgabe 35: *Beantworte die Fragen und beschreibe die Auffälligkeit.*

a) Wie viel sind $\frac{1}{2}$ von 100? $\Rightarrow$ 50
Wie viel sind $\frac{1}{2}$ von 50? $\Rightarrow$ 25
Wie viel sind $\frac{1}{2}$ von $\frac{1}{2}$ von 100? $\Rightarrow$ 25

b) Wie viel sind 30% von 100? $\Rightarrow$ 30
Wie viel sind 50% von 30? $\Rightarrow$ 15
Wie viel sind 30% von 50% von 100? $\Rightarrow$ 15

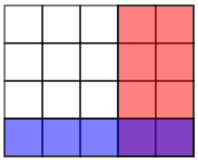
c) Wie viel sind 75% von 100%? $\Rightarrow$ 75
Wie viel sind $66,\bar{6}$% von 75%? $\Rightarrow$ 50
Wie viel sind 20% von 50%? $\Rightarrow$ 10
Wie viel sind 75% von $66,\bar{6}$% von 20% von 100%? $\Rightarrow$ 10

Ob die Anteile nach und nach ausgerechnet werden oder alle auf einmal verrechnet werden, macht keinen Unterschied, da die Multiplikation kommutativ ist. Bei Anteilen von Anteilen handelt es sich somit lediglich um eine Multiplikation von Brüchen.

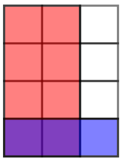
Aufgabe 36: *Fülle die Lücken im Lückentext so aus, dass die beiden Aussagen zusammen stimmen.*

a) Ein ganzer Kreis hat 360°, somit hat ein Sechstel Kreis 60°.
b) 180° bei einem Kreis entsprechen 50% vom Kreis. $3,6°$ entsprechen 1% von einem Kreis.
c) 2000 € entsprechen 100%, dann entsprechen 20 € 1%.
d) Wenn 400 m als 20% verstanden werden, dann sind 2000 *m* als 100% zu verstehen.

Aufgabe 37: *Fülle die Lücken im Lückentext so aus, dass die Aussage auf die Skizze zu trifft.*

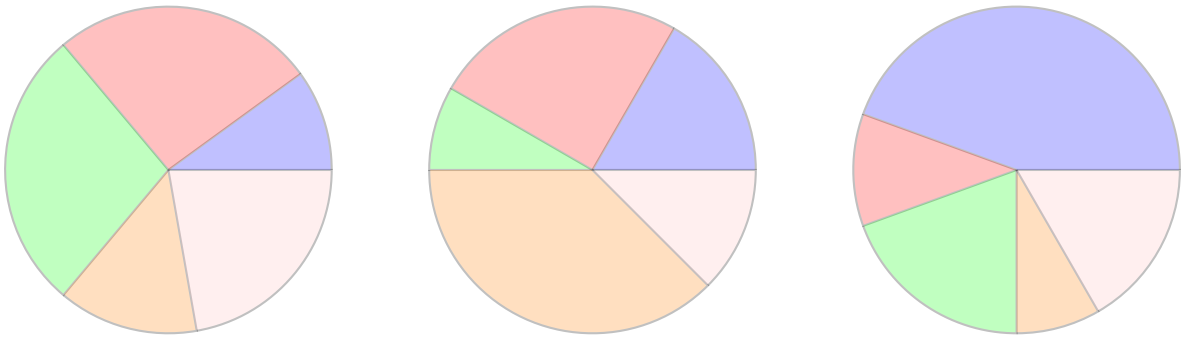
a) 

40% vom Rechteck sind *rot* markiert. 25% vom Rechteck sind *blau* markiert. 10% vom Rechteck sind rot und blau markiert.

b) 

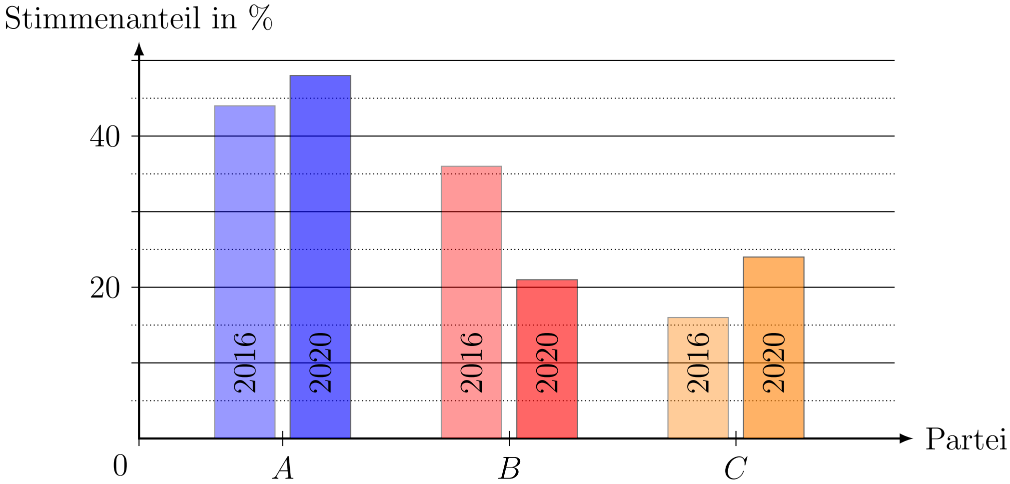
25% vom Rechteck sind *blau* markiert. $66,\bar{6}\%$ vom Rechteck sind *rot* markiert. $66,\bar{6}\%$ von den blau markierten sind auch rot markiert, also sind $16,\bar{6}\%$ vom Rechteck rot und blau markiert.

Aufgabe 38: *Bei einer Umfrage gaben* $16,7\%$ *der Personen die Antwort* G*,* $8,3\%$ *die Antwort* K*,* $37,5\%$ *die Antwort* F*,* 25% *die Antwort* B *und* $9,7\%$ *die Antwort* N *an. Gib an, welches Kreisdiagramm den Sachzusammenhang richtig darstellt und begründe, warum die anderen beiden Optionen nicht richtig sein können.*



Es muss das Diagramm in der Mitte sein, da das linke Diagramm keinen Anteil deutlich über $90°$ besitzt, was den $37,5\%$ entsprechen könnte. Beim rechten Diagramm fehlt ein Winkel von $90°$, der der 25% verkörpert.

Aufgabe 39: *Lies die Behauptungen zum Diagramm zur Darstellung einer Wahl im Vergleich zur letzten Wahl und kreuze wahr, falsch oder nicht bestimmbar an. Begründe deine Wahl.*



Behauptung	Wahr	Falsch	Nicht bestimmbar
2016 hat die Partei B mehr als doppelt so viele Stimmen wie die Partei C bekommen.	✓		
Die Partei A bekam 2020 mehr Stimmen als 2016.			✓
2020 hat die Partei A weniger Stimmen als die Parteien B und C zusammen bekommen.		✓	
Die Wahlen scheinen den Zahlen nach gültig zu sein.	✓		

1. Behauptung: Die Aussage ist wahr, da B 36% der Stimmen geholt hat, während C 2016 nur 16% der Stimmen bekam.

2. Behauptung: Die Aussage kann nicht überprüft werden, da es sich um relative Zahlen handelt, die sich immer auf die jeweilige Wahlbeteiligung bezieht, die 2020 deutlich niedriger aber auch höher gewesen sein kann.

3. Behauptung: Die Aussage ist falsch, da A 48%, B 21% und C 24% bekam.

4. Behauptung: Die Aussage ist wahr, da die Summe der betrachteten Stimmanteile 2016 96% und 2020 93% beträgt und so kleiner als 100% ist. Es muss kleiner sein, da es immer ungültige Stimmen geben kann oder aber auch kleinere Parteien stimmen bekommen, die nicht im Diagramm dargestellt wurden.

Aufgabe 40: *Man kann jeden Prozentwert oder Grundwert leicht berechnen, wenn man weiß, wie viel ein Prozent entsprechen. Zeige dies anhand der dargestellten Tabelle und schreibe an die Pfeile, welche Rechnung du durchgeführt hast.*

a)

	Prozent %	Euro €	
	100%	400 €	
: 100	1%	4 €	: 100
·22	22%	88 €	·22

b)

	Prozent %	Euro €	
	100%	700 €	
: 80	1 %	7 €	: 80
·15	15%	105 €	·15

Aufgabe 41: *Man kann jeden relativen Anteil leicht berechnen, wenn man weiß, wie viel Prozent dem Prozentwert von* 1 *entsprechen. Zeige dies anhand der dargestellten Tabelle und schreibe an die Pfeile, welche Rechnung du durchgeführt hast.*

a)

	Prozent %	Euro €	
	100%	25 €	
: 100	4 %	1 €	: 100
·6,25	25 %	6,25 €	·6,25

b)

	Prozent %	Euro €	
	100%	80 €	
: 100	1,25 %	1 €	: 100
·200	250 %	200 €	·200

Aufgabe 42: *Berechne mit dem Dreisatz den gesuchten Prozentwert.*

a) Wie viel sind 45% von 250 kg?

b) Wie viel sind 13% von 600 m^2?

c) Wie viel sind 123% von 110 min?

d) Wie viel sind 8% von 5 ℓ?

a)

	Prozent %	Masse kg	
	100%	250 kg	
: 100	1%	2,5 kg	: 100
·45	45%	112,5 kg	·45

b)

	%	m^2	
	100%	600 m^2	
: 100	1%	6 m^2	: 100
·15	15%	90 m^2	·15

c)

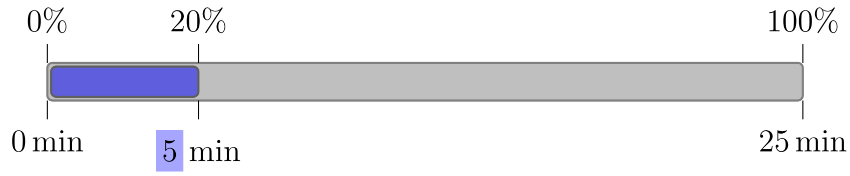
	%	min	
	100%	110 min	
: 100	1%	1,1 min	: 100
·123	123%	135,3 min	·123

d)

	%	ℓ	
	100%	5 ℓ	
: 100	1%	0,05 ℓ	: 100
·8	8%	0,4 ℓ	·8

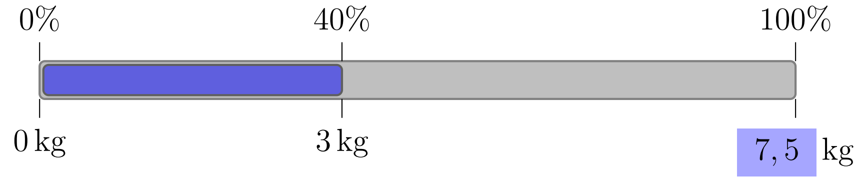
Aufgabe 43: *Der Downloadbalken ist auch ein Fortschrittsbalken. Jedem relativen Prozentwert kann ein Anteil einer Größe zugeordnet werden. Hierbei ergeben sich im Wesentlichen drei verschiedene Aufgabentypen. Berechne die Werte der freien Felder.*

a)



Da 20% ein Fünftel der Gesamtzeit entspricht, ist es möglich den Grundwert direkt durch Fünf zu dividieren ohne dabei den Weg über die 1% zu gehen.

b)



Da 40% zwei Fünftel der Gesamtmasse entsprechen, ist es möglich den Prozentwert direkt mit Fünf zu multiplizieren und durch Zwei zu dividieren ohne dabei den Weg über die 1% zu gehen.

c)

Da der relative Anteil immer durch einen Bruch dargestellt $\frac{16}{20} = 80\%$ werden kann, ist es nicht nötig zu berechnen wie viel Prozent ein Euro entsprechen.

Aufgabe 44: *Berechne mit dem Dreisatz den relativen Anteil.*

a) Wie viel sind 500 € von 8000 €?

b) Wie viel sind 40 kg von 150 kg?

c) Wie viel sind 70 min von 45 min?

d) Wie viel sind $50\,\mathrm{m}^2$ von $450\,\mathrm{m}^2$?

a)

	%	€	
	100%	8000 €	
: 8000	$0,0125\%$	1 €	: 8000
·500	$6,25\%$	500 €	·500

b)

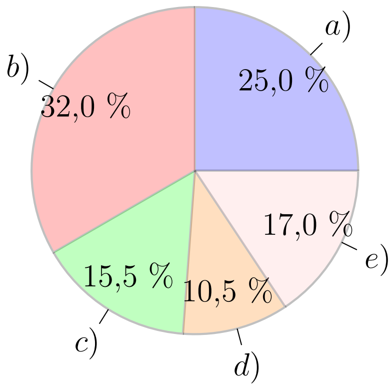
	%	kg	
	100%	150 kg	
: 150	$0,\bar{6}\%$	1 kg	: 150
·40	$26,\bar{6}\%$	40 kg	·40

c)

	%	min	
	100%	45 min	
: 45	$2,\bar{2}\%$	1 min	: 45
·70	$155,\bar{5}\%$	70 min	·70

d)

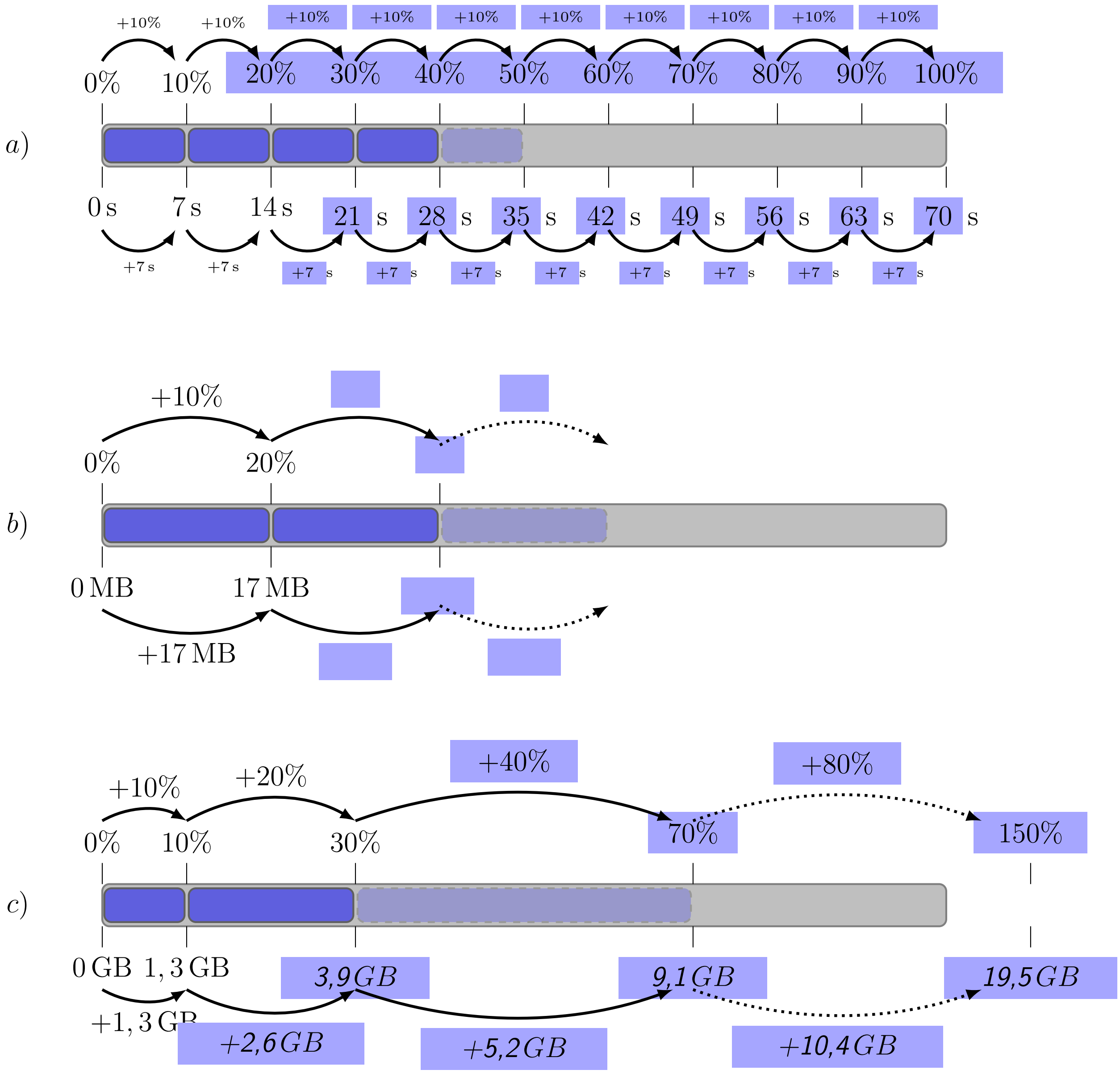
	%	m^2	
	100%	$450\,\mathrm{m}^2$	
: 450	$2,\bar{2}\%$	$1\,\mathrm{m}^2$	: 450
·50	$11,\bar{1}\%$	$50\,\mathrm{m}^2$	·50



Aufgabe 45: *Bei einer Umfrage standen fünf Antworten zur Auswahl und es wurden* 12000 *Menschen befragt. Die Antwortenverteilung wurden in einem Kreisdiagramm dargestellt. Berechne, wie viele Menschen die jeweilige Antwort wählten.*

$a)12000 \cdot 25\% = 3000,$
$b)12000 \cdot 32\% = 3840,$
$c)12000 \cdot 15,5\% = 1860,$
$d)12000 \cdot 10,5\% = 1260,$
$e)12000 \cdot 17\% = 2040.$

Aufgabe 46: *Setze das Muster fort bis du die* 100% *erreicht oder beim nächsten Schritt überschreiten würdest. Fülle dabei die Kästchen aus.*



Aufgabe 47: *Führe die Aufzählungen so lange fort, bis du die* 100% *erreicht oder überschritten hast.*

a) 10% sind 2 h; 20% sind zwei mal 2 h, also 4 h; 30% sind drei mal 2 h, also 6 h;
40% sind vier mal 2 h, also 8 h; 50% sind fünf mal 2 h, also 10 h; ...

b) 20% sind 3 MB; 40% sind zwei mal 3 MB, also 6 MB; 60% sind drei mal 3 MB, also 9 MB; ...

c) 25% sind 80 m; 50% sind zwei mal 80 m, also 160 m; 75% sind drei mal 80 m, also 240 m;...

d) $2,5\%$ sind $6\,\ell$; 5% sind zwei mal $2,5\,\ell$, also $5\,\ell$; 10% sind zwei mal $5\,\ell$, also $10\,\ell$;
20% sind zwei mal $10\,\ell$, also $20\,\ell$; 40% sind zwei mal $20\,\ell$, also $40\,\ell$;
80% sind zwei mal $40\,\ell$, also $80\,\ell$; 160% sind zwei mal $80\,\ell$, also $160\,\ell$; ...

Aufgabe 48: Fülle die Lücken und beschreibe die Auffälligkeit.

a)
10% von 500 sind 50.
20% von 500 sind 100.
30% von 500 sind 150.

b)
20% von 200 sind 40.
40% von 200 sind 80.
60% von 200 sind 120.

c)
5% von 80 sind 4.
10% von 80 sind 8.
20% von 80 sind 16.
40% von 80 sind 32.
80% von 80 sind 64.

d)
2% von 1200 sind 24.
10% von 1200 sind 120.
30% von 1200 sind 360.
60% von 1200 sind 720.
120% von 1200 sind 1440.

Wenn die Prozentzahl verdoppelt wird, wird auch der Prozentwert verdoppelt. Somit gilt, dass bei einem anteiligen Anstieg der entsprechende Anstieg des betrachteten zu erkennen ist.

Aufgabe 49: *Ein Produkt soll* 20% *weniger kosten und kostete zuvor* 75 €*. Jimmi sagt, dass man zuerst ausrechnen sollte, wie viel* 20% *entsprechen und den Prozentwert vom Grundwert abziehen soll. Daraufhin antwortet Helena, dass man auch einfach gleich* 80% *vom Grundwert berechnen könnte. Zeige, dass beide recht haben, indem du beide Rechnungen im Dreisatz durchführst.*

	%	€	
	100%	75 €	
: 100	1%	0,75 €	: 100
·20	20%	15 €	·20

75 €−15 €= 60 €

	%	€	
	100%	75 €	
: 100	1%	0,75 €	: 100
·80	80%	60 €	·80

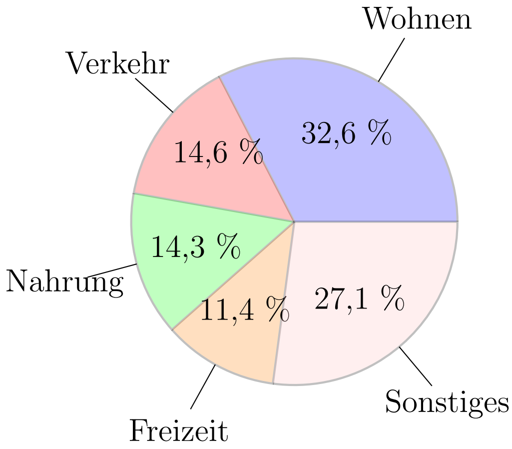
Aufgabe 50: *Ein Kleidungsstück wird dafür beworben, dass der Preis um mehr als* 15% *gesenkt wurde. Auf dem Preisschild wurde der alte Preis von* 39 € *durchgestrichen und ein neuer von* 33 € *drüber geklebt. Überprüfe die Aussage der Werbung.*

$$\frac{39 € - 33 €}{39 €} \approx 15,385\% > 15\%$$

Aufgabe 51: *Ein Auto wurde im Preis um* 22% *reduziert und kostet nun* 12900 €*. Berechne, wie viel das Auto vor der Preissenkung gekostet hat.*

$$12900 € \cdot \frac{100}{68} \approx 16538,462 €$$

Aufgabe 52: *Ein durchschnittlicher Haushalt in der Bundesrepublik Deutschland gibt* $32,6\%$ *fürs Wohnen an sich,* $14,6\%$ *für Verkehr,* $14,3\%$ *für Nahrungsmittel,* $11,4\%$ *für Freizeit und* $27,1\%$ *für Sonstiges aus. Stelle die Ausgaben des durchschnittlichen Haushaltes als Kreisdiagramm dar.*



Aufgabe 53: *Die Miete einer Wohnung soll nach einer Sanierung um* 11% *erhöht werden. Die Miete betrug zuvor* 550 €*. Berechne den neuen Mietpreis.*
$550 \text{ €} \cdot 1,11 = 610,50 \text{ €}$

Aufgabe 54: *Ein Sammelgegenstand ist im Preis über ein Jahr von* 24 € *auf* 62 € *angestiegen. Berechne um wie viel Prozent der Preis gestiegen ist.*
$\dfrac{62 \text{ €} - 24 \text{ €}}{24 \text{ €}} = 158,\bar{3}\%$

Aufgabe 55: *Eine Uhr ist mit einem Nettopreis von* $74,79$ € *ausgeschildert. In einem Verkaufsgespräch ließ sich der Händler um* 10% *herunter handeln. Anschließend muss der neue Bruttopreis berechnet werden, welcher sich ergibt, indem beim neuen Nettopreis nochmals* 19% *aufgeschlagen wird. Berechne wie viel Geld der Kunde für die Uhr ausgeben muss. Hierbei handelt es sich um einen Rabatt-Preisnachlass.*
$74,79 \text{ €} \cdot 0,1 = 7,479 \text{ €}$
$74,79 \text{ €} - 7,479 \text{ €} = 64,881 \text{ €}$
$64,881 \text{ €} \cdot 0,19 = 12,3274 \text{ €}$
$64,881 \text{ €} + 12,3274 \text{ €} = 77,2084 \text{ €}$

Aufgabe 56: *Eine Uhr ist mit einem Nettopreis von* $74,79$ € *ausgeschildert, auf den noch* 19% *Steuern erhoben werden. In dem Verkaufsgespräch wurde vereinbart, dass der Käufer* 10% *der bezahlten Geldmenge zurück bekäme, wenn er es schafft die Uhr nach dem Kauf innerhalb einer Frist bezahlen zu können. Berechne, wie viel Geld der Kunde für die Uhr ausgeben muss,*

wenn dieser den verhandelten Preisnachlass bekommt. Hierbei handelt es sich um einen Skonto-Preisnachlass.
$74,79\,€ \cdot 1,19 = 89\,€$
$89\,€ \cdot 0,1 = 8,9\,€$
$89\,€ - 8,9\,€ = 80,1\,€$

Aufgabe 57: *Berechne wie groß der Skonto-Prozentsatz bei Aufgabe 57 sein müsste, damit der Kunde den gleichen Endpreis wie in Aufgabe 56 hätte.*
$\dfrac{89\,€ - 77,2084\,€}{89\,€} \approx 13,249\%$

Aufgabe 58: *Ein Kapital von* 5600 € *wurde zu einem Zinssatz von* 2% *pro Jahr für ein Jahr angelegt. Berechne die gutgeschriebenen Zinsen.*
$5600\,€ \cdot 0,02 = 11,2\,€$

Aufgabe 59: *Ein Sparer hat* 8,50 € *Zinsen nach einem Jahr für sein Kapital von* 8200 € *ausgezahlt bekommen. Berechne den Zinssatz.*
$\dfrac{8,50\,€}{8200\,€} \approx 0,104\%$

Aufgabe 60: *Nach einem Jahr zu einem Jahreszinssatz von* 1,3% *wurden* 45 € *ausgezahlt. Berechne, wie viel Kapital angelegt wurde.*
$45\,€ \cdot \dfrac{100}{1,3} = 3461,54\,€$

Aufgabe 61: *Auf einem Kontoauszug steht nach einem Jahr* 7550 €*. Der Sparer erinnert sich, dass er das Geld zu einem Zinssatz von* 0,9% *angelegt hat. Berechne wie viel Kapital der Sparer angelegt hat.*
$7550\,€ \cdot \dfrac{100}{100 + 1,3} = 7453,11\,€$

Aufgabe 62: *Ein Kapital von* 7500 € *wurde zu einem Zinssatz von* 1,5% *pro Jahr für ein Jahr angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge. Anschließend soll das gesamte Geld um ein weiteres Jahr zu den gleichen Bedingungen angelegt werden. Berechne den Kontostand nach dem weiteren Jahr.*
$7500\,€ \cdot 1,015 = 7612,5\,€$
$7612,5\,€ \cdot 1,015 = 7726,69\,€$

Aufgabe 63: *Lies dir die Aufgaben 64 bis 69 durch und kreuze in der Tabelle an, was gesucht wird.*

Gesucht wird:	Grundwert G bzw. Kapital K	Prozentwert W bzw. Zinsen Z	Prozentsatz $p[\%]$ bzw. Zinssatz $p[\%]$
Aufgabe 64		✓	
Aufgabe 65			✓
Aufgabe 66			✓
Aufgabe 67	✓		
Aufgabe 68		✓	
Aufgabe 69	✓		

Aufgabe 64: *Im Jahr* 2019 *wurden in der Bundesrepublik Deutschland* 356, 8 *Milliarden Euro vom Bund ausgegeben. Dabei entfielen* 12, 0% *auf die Verteidigung. Berechne, wie viel Geld der Bund für die Verteidigung ausgegeben hat.*
$356,8\,\mathrm{G€} \cdot 12\% = 42,816\,\mathrm{G€}$

Aufgabe 65: *Im Jahr* 2019 *sind in der Bundesrepublik Deutschland* 3059 *Menschen bei einen Autounfall gestorben, während es im Jahr* 2018 *noch* 3275 *Todesopfer waren. Berechne den relativen Rückgang der Verkehrstoten.*
$\frac{3275-3059}{3275} \approx 6,595\%$

Aufgabe 66: *Ein beliebtes Computerspiel wurde im Jahr* 2010 *von* 12, 7 *Millionen Menschen gespielt. Heute spielen das Spiel noch* 5, 5 *Millionen Menschen. Berechne den heutigen Anteil in Bezug zum Jahr* 2010.
$\frac{5,5}{12,7} \approx 43,307\%$

Aufgabe 67: *Nach einer Preissenkung von* 35% *kostet ein Bildschirm nur noch* 168, 99 €. *Berechne den Preis vor der Preissenkung.*
$168,99\ € \cdot \frac{100}{100-35} = 259,985\ €$

Aufgabe 68: *Ein Sparer legt* 4500 € *zu einem Zinssatz von* 1, 7% *pro Jahr für ein Jahr an. Berechne den Geldzuwachs.*
$4500\ € \cdot 0,017 = 76,5\ €$

Aufgabe 69: *Ein Sparer hat bei einem Zinssatz von* 1, 2% *pro Jahr nach einem Jahr* 148 € *gutgeschrieben bekommen. Berechne wie viel Geld der Sparer nach dem Jahr auf dem Konto hat.*
$148\ € \cdot \frac{100}{1,2} = 12333,3\ €$

Aufgabe 70: *Ein Küchengerät hat einen Nettopreis von* $1176{,}29$ €*. Auf diesen Preis werden noch* 19% *Steuern erhoben. Ein Kunde, der dieses Gerät gekauft hat, packt es zu Hause aus und stellt einen optischen Verarbeitungsfehler am Gerät fest. Als der Kunde den Händler konfrontiert, gibt der Händler dem Kunden* 200 € *zurück. Berechne, wie viel Prozent Skonto der Kunde bekommen hat.*

$1176{,}29 \text{ €} \cdot 1{,}19 = 1399{,}7851 \text{ €}$

$\dfrac{200 \text{ €}}{1399{,}7851 \text{ €}} \approx 14{,}2879\%$

Aufgabe 71: *Ein Laptop hat einen Nettopreis von* $755{,}46$ €*. Ein Kunde handelt den Nettopreis auf* 700 € *runter. Auf den zu zahlenden Preis werden noch* 19% *Steuern erhoben. Berechne, wie viel Prozent Rabatt der Kunde bekommen hat und wie viel er am Ende zahlen muss.*

$1 - \dfrac{700 \text{ €}}{755{,}46 \text{ €}} \approx 7{,}341\%$

$700 \text{ €} \cdot 1{,}19 = 833 \text{ €}$

Aufgabe 72: *Ein Kapital von* 8000 € *wurde zu einem Zinssatz von* $1{,}3\%$ *für ein Jahr angelegt.*

a) Berechne, wie viel Geld nach diesem Jahr auf dem Konto ist.

b) Das gesamte Geld aus dem ersten Jahr wird nochmals angelegt. Berechne, wie viel Geld nach dem zweiten Jahr auf dem Konto ist.

c) Das gesamte Geld aus dem zweiten Jahr wird nochmals angelegt. Berechne, wie viel Geld nach dem dritten Jahr auf dem Konto ist.

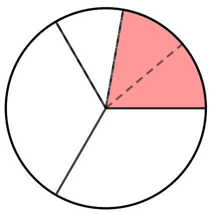
a) $8000 \text{ €} \cdot 1{,}013 = 8104 \text{ €}$

b) $8104 \text{ €} \cdot 1{,}013 = 8209{,}352 \text{ €}$

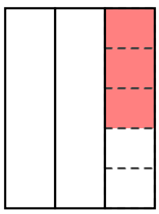
c) $8209{,}352 \text{ €} \cdot 1{,}013 \approx 8316{,}0736 \text{ €}$

Aufgabe 73: *Berechne die markierten Anteile und gib die Anteile in der Prozentdarstellung an.*

a)



b)



a) $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9} = 22{,}\bar{2}\%$

b) $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5} = 20\%$

Aufgabe 74: *Bei einer Umfrage wurde vergessen, wie viele Teilnehmer es gab und die Daten sind nicht mehr auffindbar. Allerdings sind noch Teile der Auswertung vorhanden.*

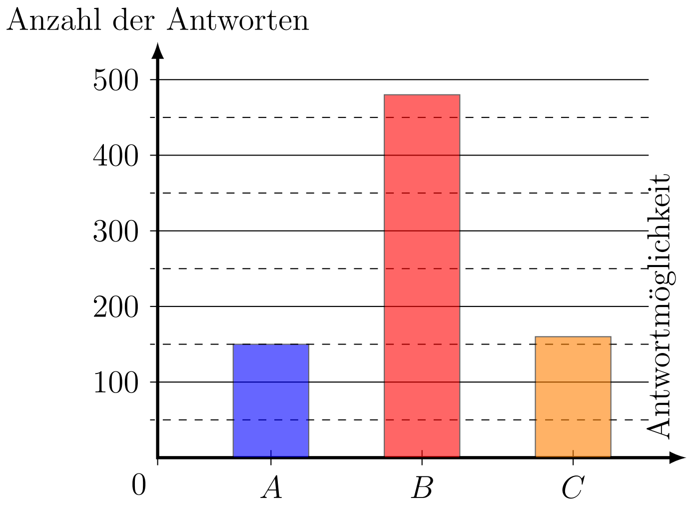
a) In der Auswertung stand, dass die Antwort B insgesamt 220% *mehr Stimmen bekommen* *hat als die Antwort A. Berechne die Stimmenanzahl von B.*

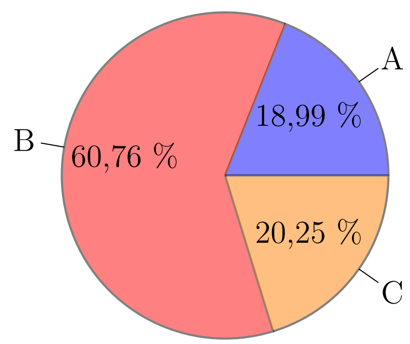
b) *Auch ist bekannt, dass die Antwort C nur $66,\bar{6}\%$ der Stimmen von Antwort B bekommen hat. Berechne die Stimmenanzahl von C.*

c) *Zeichne die Säule für die Antwortmöglichkeit B und C in das Diagramm ein.*

d) *Zeichne ein Kreisdiagramm, das die prozentuale Verteilung der Stimmen angibt.*

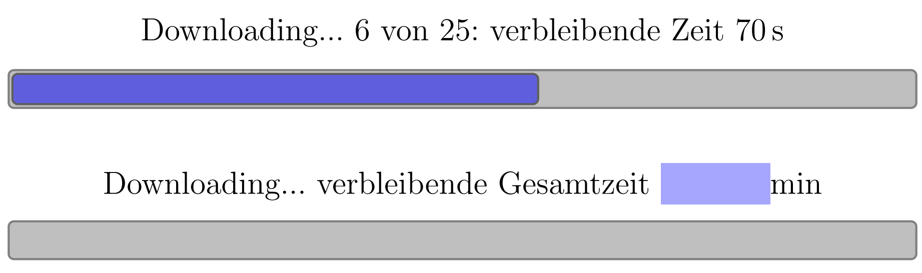
e) *Berechne, wie viele Stimmen in Prozent die Antwort C mehr als die Antwort A bekommen hat.*





a) $150 \cdot 3,2 = 480$ b) $480 \cdot 0,\bar{6} = 160$ e) $\dfrac{160-150}{160} = 6,25\%$

Aufgabe 75: *Bei einem Downloadpaket werden 25 Dateien gleicher Größe runtergeladen. Dabei zeigt der obere Balken an, wie weit der Fortschritt bei der aktuellen Datei ist, während der untere Balken den Fortschritt des gesamten Downloads angibt. Berechne wie lange der gesamte Download noch dauert und zeichne den aktuellen Fortschritt des gesamten Downloads an. Gib hierzu auch die passenden Werte an.*



$\dfrac{7}{12} = 58,\bar{3}\% \quad \Rightarrow \quad 70\,\mathrm{s} \cdot \dfrac{12}{5} = 168\,\mathrm{s}$ Gesamtdownloaddauer einer Datei

$25 \cdot 168\,\mathrm{s} = 4200\,\mathrm{s} = 70\,\mathrm{min}$ Gesamtdownloaddauer des Pakets

$6 \cdot 168\,\mathrm{s} - 70\,\mathrm{s} = 938\,\mathrm{s}$ Vergangene Gesamtzeit

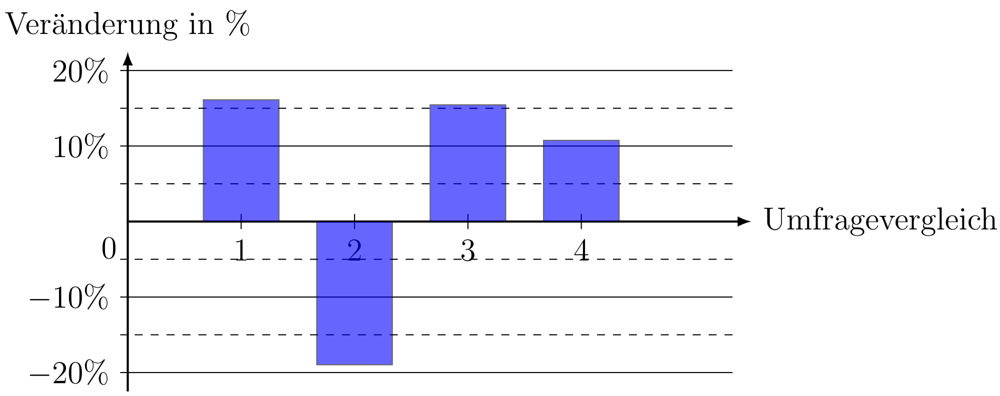
$4200\,\mathrm{s} - 938\,\mathrm{s} = 3262\,\mathrm{s} = 54,3\bar{6}\,\mathrm{min}$ Vergangene Gesamtzeit

Aufgabe 76: *Auf einem Parkplatz befinden sich* 450 *Autos, wenn dieser zu* 63% *belegt ist. Berechne, wie viele Autos auf dem Parkplatz stehen, wenn dieser zu* 24% *belegt ist.*
$450 \cdot \frac{100}{63} \cdot \frac{24}{100} = 174$

Aufgabe 77: *Bei einer immer wiederkehrenden Umfrage geben Unternehmen ihre Zufriedenheit mit der aktuellen wirtschaftlichen Situation an. Je höher die Punkte sind, desto zufriedener sind die Befragten. Bei der ersten Umfrage wurden* 3102*, bei der zweiten Umfrage* 3690*, bei der dritten Umfrage* 2990*, bei der vierten Umfrage* 3452 *und bei der fünften Umfrage* 3710 *Punkte erreicht. Bei der Auswertung werden die Werte jeder Umfrage mit der vorherigen verglichen. Zeichne die relativen Veränderungen in ein Säulendiagramm.*

$1 - \frac{3690}{3102} \approx 16,119\%$ $\qquad 1 - \frac{2990}{3690} \approx -18,970\%$

$1 - \frac{3452}{2990} \approx 15,452\%$ $\qquad 1 - \frac{3710}{3452} \approx 7,474\%$



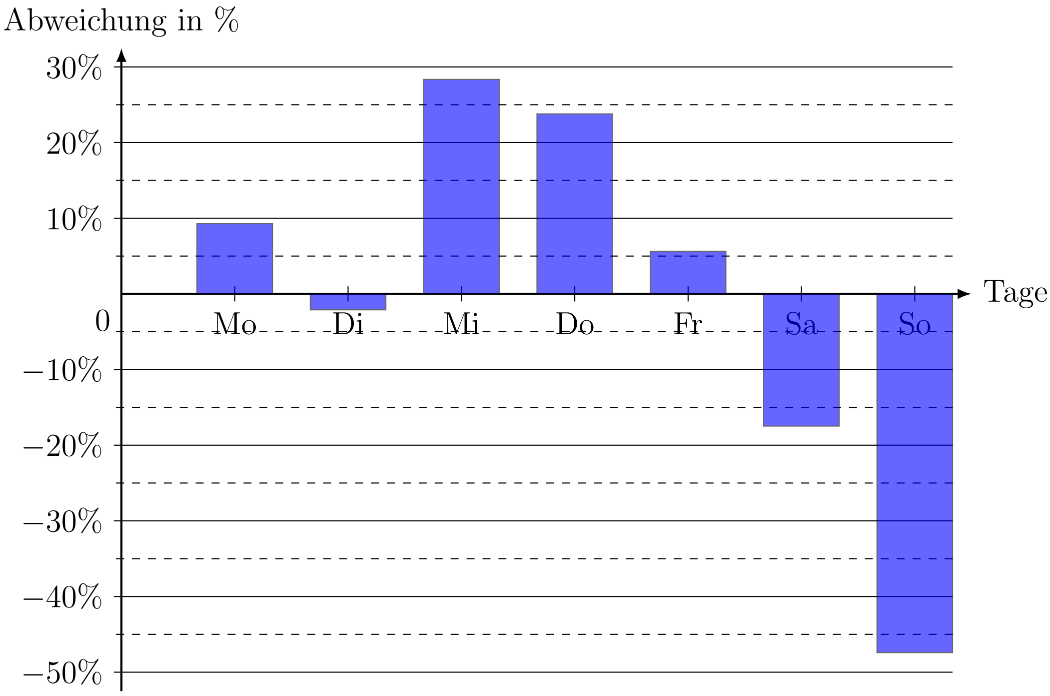
Aufgabe 78: *Um die Wichtigkeit einer Straße zu untersuchen werden täglich die Autos gezählt, die auf dieser Straße fahren. Hierbei wurden am Montag* 1920*, am Dienstag* 1720*, am Mittwoch* 2255*, am Donnerstag* 2175*, am Freitag* 1856*, am Samstag* 1450 *und am Sonntag* 923 *Autos gezählt. Zeichne ein Säulendiagramm für die Nutzungsdifferenzen bezüglich des Durchschnittswertes, indem du die Zahlen auf den Durchschnitt normierst (Bei einer Normierung bekommt ein Wert die* 100% *zugeschrieben, was in diesem Fall der Grundwert ist).*

$\bar{x} = \frac{1920 + 1720 + 2255 + 2175 + 1856 + 1450 + 924}{7} \approx 1757$ $\qquad 1 - \frac{1920}{1757} \approx 9,277\%$

$1 - \frac{1720}{1757} \approx -2,106\%$ $\qquad 1 - \frac{2255}{1757} \approx 28,344\%$

$1-\dfrac{2175}{1757}\approx 23,791\%\qquad 1-\dfrac{1856}{1757}\approx 5,635\%$

$1-\dfrac{1450}{1757}\approx -17,473\%\qquad 1-\dfrac{924}{1757}\approx -47,410\%$



Aufgabe 79: *Bei einem Rechteck wurden die Seiten um 75% vergrößert. Gib an, wie sich der Flächeninhalt und der Umfang verändern.*

$a_{neu} = 1,75\cdot a$

$A_{neu} = a_{neu}^2 = (a_{neu})^2 = (1,75\cdot a)^2 = 3,0625\cdot a^2$

$U_{neu} = 4a_{neu} = 4\cdot 1,75\cdot a = 7\cdot a$

Aufgabe 80: *Wenn ein Würfel um 100% vergrößert wird, dann verdoppeln sich seine Kantenlängen. Gib an, wie sich der Oberflächeninhalt und das Volumen unter dieser Vergrößerung verhalten. Gib anschließend an, wie sich der Oberflächeninhalt und der Volumen unter einer Vergrößerung von 40% verhalten.*

$a_{neu} = 2\cdot a$

$O_{neu} = 6a_{neu}^2 = 6\,(a_{neu})^2 = 6\,(2\cdot a)^2 = 6\cdot 4\cdot a^2 \quad\Rightarrow\quad$ Vervierfachung!

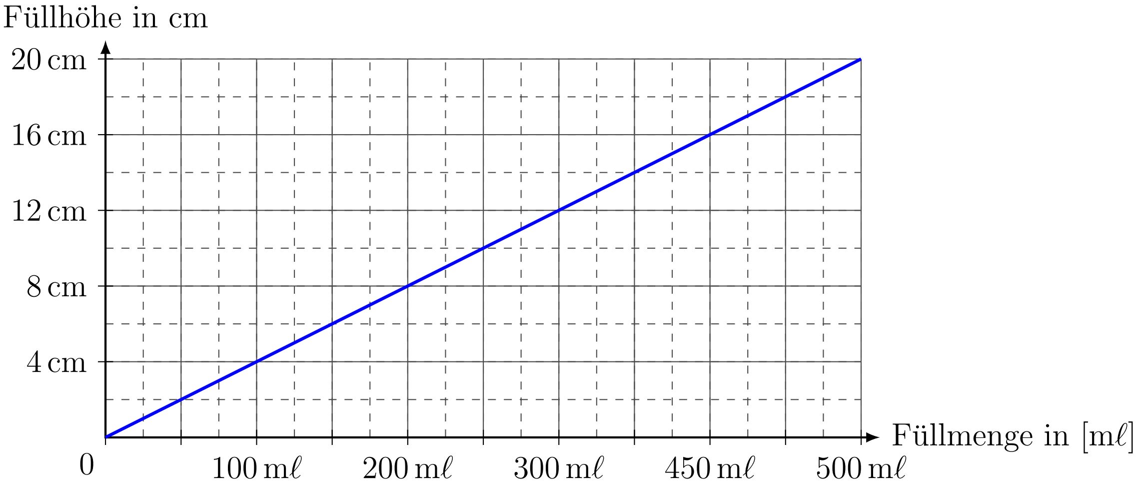
$V_{neu} = a_{neu}^3 = (a_{neu})^3 = (2\cdot a)^3 = 8\cdot a^3 \quad\Rightarrow\quad$ Verachtfachung!

$a_{neu} = 1,4\cdot a$

$O_{neu} = 6a_{neu}^2 = 6\left(a_{neu}\right)^2 = 6\left(1,4 \cdot a\right)^2 = 6 \cdot 1,96 \cdot a^2$
$V_{neu} = a_{neu}^3 = \left(a_{neu}\right)^3 = \left(1,4 \cdot a\right)^3 = 2,744 \cdot a^3$

Aufgabe 81: *Ein Rechteck besitzt einen Flächeninhalt von 240 cm² und wird zerschnitten, sodass noch 44% der einen Seitenlänge und 79% der anderen Seitenlänge vorhanden sind. Berechne den Flächeninhalt des übrigbleibenden Rechtecks.*
$240\,\mathrm{cm}^2 \cdot 0,44 \cdot 0,79 = 83,424\,\mathrm{cm}^2$

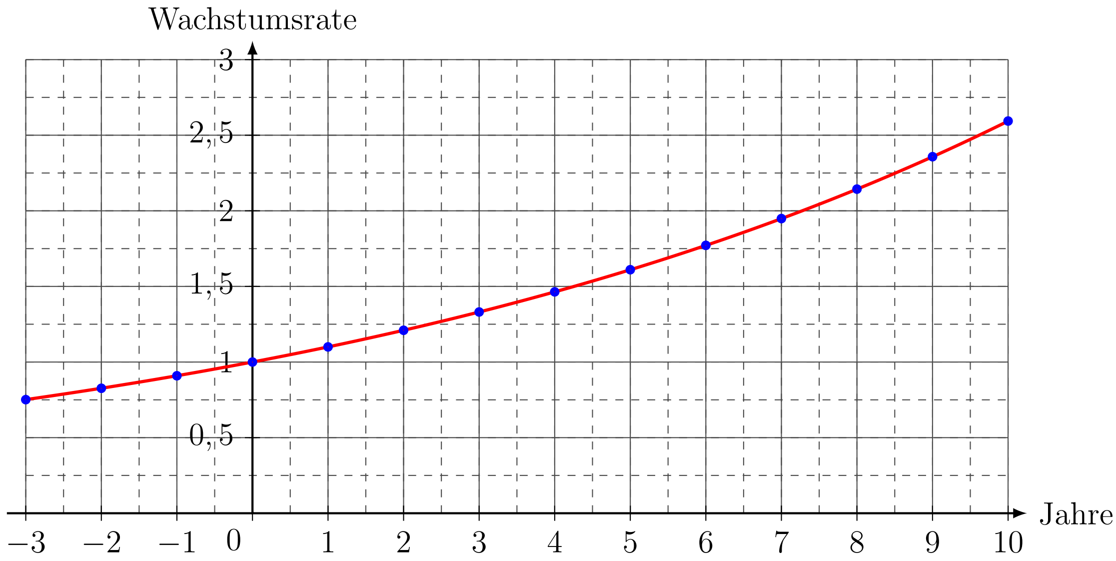
Aufgabe 82: *Der gegebene Graph zeigt auf der Abszisse die Füllmenge eines zylinderförmigen Glases an, während die Ordinate die Füllhöhe darstellt. Das Glas ist 20 cm hoch. Berechne, wie viel Prozent das Glas pro 50 mℓ gefüllt wird.*



$$\frac{20\,\mathrm{cm}^2}{500\,\mathrm{m}\ell} = \frac{2\,\mathrm{cm}^2}{50\,\mathrm{m}\ell} \quad \Rightarrow \quad 10\% \frac{1}{50\,\mathrm{m}\ell}$$

Aufgabe 83: *Jedes Jahr wächst ein Wert um 10%. Berechne wie sich das Wachstum jedes Jahr immer weiter fortsetzt. Berechne dies für die nächsten 10 Jahre und die vergangenen 3 Jahre, wenn der Startwert bei 100% liegt. Trage die Werte in das Koordinatensystem an und verbinde die Punkte sinnvoll.*
1. Jahr: $100\% \cdot 1,1 = 1,1$
2. Jahr: $1,1 \cdot 1,1 = 1,21$
3. Jahr: $1,21 \cdot 1,1 = 1,331$
4. Jahr: $1,331 \cdot 1,1 = 1,4641$
5. Jahr: $1,4641 \cdot 1,1 = 1,61051$
6. Jahr: $1,61051 \cdot 1,1 \approx 1,77156$

7. Jahr: $1,77156 \cdot 1,1 \approx 1,94872$
8. Jahr: $1,94872 \cdot 1,1 \approx 2,14359$
9. Jahr: $2,35795 \cdot 1,1 \approx 2,35795$
10. Jahr: $2,59374 \cdot 1,1 \approx 2,59374$
1. vergangenes Jahr: $100\% : 1,1 \approx 0,909091$
2. vergangenes Jahr: $0,909091 : 1,1 \approx 0,826446$
3. vergangenes Jahr: $0,826446 : 1,1 \approx 0,751315$



Aufgabe 84: *Ein Kapital von* 6000 € *wurde für einen Jahreszinssatz von* $1,5\%$ *über* 6 *Jahre angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge.*
$6000\text{ €} \cdot 1,015^6 \approx 6560,6596\text{ €}$

Aufgabe 85: *Ein Kapital von* 7500 € *wurde für einen Jahreszinssatz von* $1,2\%$ *über* 9 *Jahre angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge.*
$7500\text{ €} \cdot 1,012^9 \approx 8349,9885\text{ €}$

Aufgabe 86: *Ein Kapital von* 5000 € *wurde für* 5 *Jahre angelegt. Nach einem Jahr betrug der Kontostand* 5062 €*. Berechne die resultierende Geldmenge.*
$$\frac{5062\text{ €}}{5000\text{ €}} - 1 \approx 1,24\%$$

$5000\text{ €} \cdot 1,0124^5 \approx 5317,7839\text{ €}$

Aufgabe 87: *Ein Kapital von* 12000 € *wurde für* 30 *Monate zu einen Jahreszinssatz von* $0,75\%$ *angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge.*

30 Monate entsprechen $2,5$ Jahre: $12000 \text{ €} \cdot 1,0075^{2,5} \approx 12226,2672 \text{ €}$

Aufgabe 88: *Ein Kapital von* 3500 € *wurde für* 2 *Jahre zu einen Monatszinssatz von* $0,15\%$ *angelegt. Berechne die resultierende Geldmenge.*

2 Jahre entsprechen 24 Monate: $3500 \text{ €} \cdot 1,0015^{24} \approx 3628,1976 \text{ €}$

Aufgabe 89: *Bei der Inflation wird das Geld immer weniger wert. Dabei verliert das Geld im Schnitt* 2% *Wert pro Jahr. Berechne, wie viel Prozent Wertverlust beim Geld nach* 25 *Jahren entstanden ist.*

$1 - 0,98^{25} \approx 39,6535\%$

Aufgabe 90: *Die Wirtschaft wächst in der Bundesrepublik Deutschland jedes Jahr im Schnitt um* $1,6\%$. *Berechne, wie viel prozentuales Wachstum mit diesen Zahlen nach* 30 *Jahren im Vergleich zu heute erreicht wurde.*

$1,016^{30} - 1 \approx 60,9946\%$

Aufgabe 91: *Beim Wirtschaftswachstum wird immer wieder vom vergangenen Jahr ausgegangen. Sei der Startwert* 100 *und das jährliche Wachstum sei mit* $1,9\%$ *gegeben. Bestimme durch systematisches Probieren, wann das jährliche absolute Wachstum den Wert von* 100 *überschreitet.*

1. Iteration: $100 \cdot 1,019^{50} \approx 256,277$
2. Iteration: $100 \cdot 1,019^{35} \approx 160,086$
3. Iteration: $100 \cdot 1,019^{35} \approx 193,240$
4. Iteration: $100 \cdot 1,019^{37} \approx 200,653$

Nach 37 Jahren würde die Wirtschaft um so viel wachsen, wie sie zum heutigen Stand wert wäre.

Aufgabe 92: *Bei der Inflation wird das Geld immer weniger wert. Dabei verliert das Geld im Schnitt* 2% *Wert pro Jahr. Ein Staat hat sich* 750 *Milliarden Euro Schulden aufgeladen. Bestimme durch systematisches Probieren, wann die* 750 *Milliarden Euro zwei Drittel ihres Wertes verloren haben.*

1. Iteration: $750\,\text{G€} \cdot 0,98^5 0 \approx 273,127\,\text{G€}$
2. Iteration: $750\,\text{G€} \cdot 0,98^5 5 \approx 246,885\,\text{G€}$
3. Iteration: $750\,\text{G€} \cdot 0,98^5 4 \approx 251,924\,\text{G€}$

Nach 55 Jahren würden die Staatsschulden zwei Drittel ihres absoluten Gegenwertes verloren haben.

Aufgabe 93: *Angenommen die Staatsschulden eines Staates sollen in relativen Zahlen gleichbleiben und der betrachtete Staat hat* 2500 *Milliarden Euro Schulden. Berechne wie viele neue Schulden müsste der Staat im ersten, im zweiten, im dritten und im vierten Jahr aufnehmen, um die Inflation auszugleichen, welche* 2% *beträgt.*

1. Jahr: $2500\,\mathrm{G€} \cdot 0,02 = 50\,\mathrm{G€}$
2. Jahr: $2550\,\mathrm{G€} \cdot 0,02 = 51\,\mathrm{G€}$
3. Jahr: $2601\,\mathrm{G€} \cdot 0,02 = 52,02\,\mathrm{G€}$
4. Jahr: $2653,02\,\mathrm{G€} \cdot 0,02 = 53,0604\,\mathrm{G€}$

Aufgabe 94: *Ein Staat hat über* 25 *Jahre ein Wirtschaftswachstum von* 2% *und nach dieser Zeit einen Wirtschaftseinbruch von* 10%. *Bestimme durch systematisches Probieren, wie viele Jahre dieser Wirtschaftseinbruch den Staat zurückwirft, wenn die Wirtschaft nach dem Einbruch wieder mit* 2% *wächst.*

Berechnung der Wirtschaft in 25 Jahren: $1,02^{25} \approx 1,64061$
Wirtschaftseinbruch: $1,64061 \cdot 0,9 \approx 1,476655$
1. Iteration: $1,476655 \cdot 1,02^{10} \approx 1,79991$
2. Iteration: $1,476655 \cdot 1,02^{5} \approx 1,63023$
3. Iteration: $1,476655 \cdot 1,02^{6} \approx 1,66284$
Der Wirtschaftseinbruch wirft den Staat in seiner wirtschaftlichen Entwicklung etwas mehr als 5 Jahre zurück.

Aufgabe 95: *Durch das Wahlstatistikgesetz von* 1999 *darf in einem Wahlkreis mit* 1500 *Einwohnern jeder Stimmzettel der Wähler markiert werden, sodass die Bundes- oder Landesregierung erfährt, wie die verscheidenen Menschen abgestimmt haben. In einem solchen Wahlkreis können zwei Wahllokale sein, sodass nur ein Wahllokal betrachtet wird. Bei der letzten Bundestagswahl gab es eine Wahlbeteiligung von* 75%. *Die Stimmzettel werden nach männlich und weiblich sortiert, wobei in dieser Aufgabe zur Vereinfachung angenommen wird, dass gleich viele Männer wie Frauen zur Wahl gehen. Die Stimmzettel sind nach Alter markiert, sodass die gesamte Bevölkerung des Wahlkreises in sechs gleichgroße Gruppen aufgeteilt wurde. Nun werden je Stunde die markierten Stimmzettel ausgewertet. Berechne wie viele Menschen pro Gruppe, pro Stunde, pro biologischem Geschlecht in einem Wahllokal abstimmen, wenn davon ausgegangen wird, dass der Wahltag zehn Stunden hat und in jeder Stunde gleich viele Menschen pro Gruppe und biologischem Geschlecht wählen.*

750 Personen pro Wahllokal,

davon sind $750 \cdot \frac{1}{2} = 375$ weiblich,

hiervon sind $375 \cdot 0,75 = 281,25$ zur Wahl gegangen.

Pro Altersgruppe sind das $281,25 \cdot \frac{1}{6} = 48,875$ weibliche Wähler,

was $48,875 \cdot \frac{1}{10} = 4,8875$ Wählerinnen pro Stunde entspricht.

Aufgabe 96: *Bei Tarifverhandlungen im Jahr* 2018 *haben sich Arbeitgeber und die Gewerkschaftsvorsitzenden darauf geeinigt, dass die Beschäftigten im ersten Jahr eine Lohnerhöhung von* $3,5\%$*, im zweiten Jahr* $3,1\%$ *und im letzten Jahr* $1,1\%$ *bekommen. Die Beschäftigten bekommen in der einen Lohnstufe* 1800 € *pro Monat. Bei einem Interview sagte eine Journalistin, dass sich die Beschäftigten über eine Lohnerhöhung von mehr als* 7% *freuen können. Zeige, dass die Journalistin unrecht hat, indem du die Teilaufgaben löst.*
a) Berechne, wie viel Geld die Beschäftigten ohne Lohnerhöhung in den drei Jahren bekommen würden.
b) Berechne, wie viel Geld die Beschäftigten mit der Lohnerhöhung im ersten Jahr bekommen würden.
c) Berechne, wie viel Geld die Beschäftigten mit der Lohnerhöhung im zweiten Jahr bekommen würden.
d) Berechne, wie viel Geld die Beschäftigten mit der Lohnerhöhung im dritten Jahr bekommen würden.
e) Berechne, wie viel Geld in Prozent die Beschäftigten nun wirklich mit der Lohnerhöhung über die aufaddierten drei Jahre mehr bekommen würden.

a) $1800\text{ €} \cdot 36 = 64800\text{ €}$
b) $1800\text{ €} \cdot 1,035 \cdot 12 = 22356\text{ €}$
c) $1800\text{ €} \cdot 1,035 \cdot 1,031 \cdot 12 = 23049,039\text{ €}$
d) $1800\text{ €} \cdot 1,035 \cdot 1,031 \cdot 1,011 \cdot 12 \approx 23302,575\text{ €}$
e) $\frac{22356\text{ €} + 23049,039\text{ €} + 23302,575\text{ €}}{64800\text{ €}} - 1 \approx 6,0303\%$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.8.1).

18.10.9 Lösungen zu den negativen Zahlen

Aufgabe 1:

	+6	−6	+5	−5	+9	−9	+14	−14
+6	12	0	11	1	15	−3	20	−8
−6	0	−12	−1	−11	3	−15	8	−20
+5	11	−1	10	0	14	−4	19	−9
−5	1	−11	0	−10	4	−14	9	−19
+9	15	3	14	4	18	0	23	−5
−9	−3	−15	−4	−14	0	−18	5	−23
+14	20	8	19	9	23	5	28	0
−14	−8	−20	−9	−19	−5	−23	0	−28

Aufgabe 2:

	−30	+21	−59	−16	−84	+67	−13	+13
+18	−12	39	−41	2	−66	85	5	31
−24	−54	−3	−83	−40	−108	43	−37	−11
+43	13	64	−16	27	−41	110	30	56
−62	−92	−41	−121	−78	−146	5	−75	−49
+23	−7	44	−36	7	−61	90	10	36
−52	−82	−31	−111	−68	−136	15	−65	−39
+4	−26	25	−55	−12	−80	71	−9	17

Aufgabe 3:

$a)$ $6 - 11 = -5$

$b)$ $-4 - 15 = -19$

$c)$ $15 - 53 = -38$

$d)$ $-16 - 13 = -29$

$e)$ $-40 + 14 = -26$

$f)$ $-64 + 22 = -42$

$g)$ $33 - 44 = -11$

$h)$ $-18 - 25 = -43$

$i)$ $-43 + 82 = 39$

$j)$ $-23 - 41 = -64$

$k)$ $-61 + 73 = 12$

$l)$ $88 - 92 = -4$

$m)$ $10 - 19 = -9$

$n)$ $-24 - 54 = -78$

$o)$ $45 - 76 = -31$

$p)$ $-57 - 29 = -86$

$q)$ $-12 + 31 = 19$

$r)$ $-43 + 56 = 13$

$s)$ $-55 - 23 = -78$

$t)$ $56 - 91 = -35$

$u)$ $23 - 56 = -33$

$v)$ $-47 - 12 = -59$

$w)$ $-47 - (-46) = -1$

$x)$ $-(-23) - 64 = -41$

$y)$ $= 36$

$z)$ $= -12$

Aufgabe 4:

$a)$ $-2 + 4 = 2$

$b)$ $-12 + 25 = 13$

$c)$ $-34 + 62 = 28$

$d)$ $-52 + 49 = -3$

$e)$ $-77 + 53 = -24$

$f)$ $-145 + 86 = -59$

$g)$ $-75 - 24 = -99$

$h)$ $-38 - 52 = -90$

$i)$ $-367 - 572 = -939$

$j)$ $-\frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$

$k)$ $-\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$

$l)$ $-\frac{1}{4} + \frac{7}{8} = \frac{5}{8}$

$m)$ $-\frac{4}{7} + \frac{6}{5} = \frac{22}{35}$

$n)$ $-\frac{3}{8} + \frac{5}{7} = \frac{19}{56}$

$o)$ $-\frac{4}{9} + \frac{8}{5} = \frac{52}{45}$

$p)$ $-\frac{8}{3} - \frac{9}{4} = -\frac{59}{12}$

$q)$ $-\frac{5}{6} - \frac{8}{9} = -\frac{31}{18}$

$r)$ $-\frac{4}{7} - \frac{11}{3} = -\frac{89}{21}$

Aufgabe 5:

$a)\ -7\cdot 8=-56$ $b)\ -11\cdot 12=-132$ $c)\ -24\cdot 5=-120$

$d)\ 4\cdot(-9)=-36$ $e)\ 17\cdot(-4)=-68$ $f)\ 72\cdot(-3)=-216$

$g)\ -5\cdot(-7)=35$ $h)\ -9\cdot(-8)=72$ $i)\ -13\cdot(-13)=169$

$j)\ -\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{2}=-\frac{21}{8}$ $k)\ -\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}=-\frac{24}{35}$ $l)\ -\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9}=-\frac{10}{27}$

$m)\ \frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)=-\frac{21}{40}$ $n)\ \frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=-\frac{56}{27}$ $o)\ \frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{9}{7}\right)=-3$

$p)\ -\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{16}{21}$ $q)\ -\frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)=\frac{8}{9}$ $r)\ -\frac{4}{11}\cdot\left(-\frac{12}{5}\right)=\frac{48}{55}$

$s)\ -\frac{6}{7}:\frac{5}{6}=-\frac{36}{35}$ $t)\ -\frac{3}{5}:\frac{2}{9}=-\frac{27}{10}$ $u)\ \frac{7}{8}:\left(-\frac{11}{3}\right)=-\frac{21}{88}$

$v)\ \frac{15}{4}:\left(-\frac{7}{15}\right)=-\frac{225}{28}$ $w)\ -\frac{11}{7}:\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{33}{28}$ $x)\ -\frac{5}{13}:\left(-\frac{10}{9}\right)=\frac{9}{26}$

Aufgabe 6:

$a)\ \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{8}$ $b)\ \frac{-3}{4}\cdot\frac{5}{6}=-\frac{5}{8}$ $c)\ \frac{-2}{3}\cdot\frac{-4}{5}=\frac{8}{15}$

$d)\ \frac{-1}{2}\cdot\frac{4}{-3}=\frac{2}{3}$ $e)\ -\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{15}$ $f)\ -\frac{6}{7}\cdot\frac{2}{-9}=\frac{4}{21}$

$g)\ \frac{-8}{9}\cdot\frac{-5}{6}=\frac{20}{27}$ $h)\ -\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{-4}{-3}\right)=\frac{4}{7}$ $i)\ -\frac{7}{7}\cdot\frac{8}{-5}=\frac{8}{5}$

Aufgabe 7:

$a)\ \frac{3}{4}:\frac{5}{6}=\frac{9}{10}$ $b)\ \frac{-3}{4}:\frac{5}{6}=-\frac{9}{10}$ $c)\ \frac{-2}{3}:\frac{-4}{5}=\frac{5}{6}$

$d)\ \frac{-1}{2}:\frac{4}{-3}=\frac{3}{8}$ $e)\ -\frac{1}{6}:\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{5}{12}$ $f)\ -\frac{6}{7}:\frac{2}{-9}=\frac{27}{7}$

$g)\ \frac{-8}{9}:\frac{-5}{6}=\frac{16}{15}$ $h)\ -\frac{3}{7}:\left(-\frac{-4}{-3}\right)=\frac{9}{28}$ $i)\ -\frac{7}{7}:\frac{8}{-5}=\frac{5}{8}$

Aufgabe 8:

a) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{19}{12}$ *b)* $\frac{-3}{4}-\frac{5}{6}=\frac{19}{12}$ *c)* $\frac{-2}{3}+\frac{-4}{5}=-\frac{22}{15}$

d) $\frac{-1}{2}-\frac{4}{-3}=\frac{5}{6}$ *e)* $-\frac{1}{6}+\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{17}{30}$ *f)* $-\frac{6}{7}+\frac{2}{-9}=-\frac{68}{63}$

g) $\frac{-8}{9}-\frac{-5}{6}=-\frac{1}{18}$ *h)* $-\frac{3}{7}-\left(-\frac{-4}{-3}\right)=\frac{19}{21}$ *i)* $-\frac{7}{7}-\frac{8}{-5}=\frac{3}{5}$

j) $\frac{-2}{5}-\frac{6}{7}=\frac{-44}{35}$ *k)* $\frac{-1}{4}+\frac{4}{-7}=-\frac{23}{28}$ *l)* $\frac{7}{3}+\frac{-15}{2}=-\frac{31}{6}$

m) $\frac{-4}{3}-\frac{7}{-5}=\frac{1}{15}$ *n)* $-\frac{5}{7}-\left(-\frac{11}{5}\right)=\frac{52}{35}$ *o)* $-\frac{3}{10}+\frac{5}{-9}=-\frac{77}{90}$

p) $\frac{-5}{4}-\frac{-7}{-5}=-\frac{53}{20}$ *q)* $-\frac{10}{12}-\left(-\frac{-3}{-8}\right)=-\frac{11}{24}$ *r)* $-\frac{7}{10}-\frac{3}{-8}=-\frac{13}{40}$

Aufgabe 9:

a) $a+b=-14$ mit: $a=-5$ und $b=-9$

b) $3\cdot a+b=-9$ mit: $a=-2$ und $b=-3$

c) $a-b=4$ mit: $a=-7$ und $b=-11$

d) $4\cdot a-6\cdot b=44$ mit: $a=-4$ und $b=-10$

e) $8\cdot a\cdot b=48$ mit: $a=-2$ und $b=-3$

f) $a\cdot b-b\cdot c=12$ mit: $a=-5$ und $b=-4$ und $c=-2$

g) $a+b=-\frac{17}{12}$ mit: $a=-\frac{2}{3}$ und $b=-\frac{3}{4}$

h) $-2\cdot a-b=\frac{88}{35}$ mit: $a=-\frac{6}{7}$ und $b=-\frac{4}{5}$

i) $9\cdot a\cdot b=\frac{81}{11}$ mit: $a=-\frac{9}{5}$ und $b=-\frac{5}{11}$

j) $-2\cdot a:b=-\frac{32}{35}$ mit: $a=-\frac{2}{5}$ und $b=-\frac{7}{8}$

k) $\frac{1}{3}\cdot a:b+\frac{3}{2}\cdot c=-\frac{52}{105}$ mit: $a=-\frac{3}{5}$, $b=-\frac{7}{6}$ und $c=-\frac{4}{9}$

l) $a\cdot b:c-b:a=-\frac{177}{175}$ mit: $a=-\frac{7}{4}$, $b=-\frac{3}{10}$ und $c=-\frac{5}{8}$

Aufgabe 10:

a) $-4+8-13-41+53-29-43+71-12+66-44-79+38+23=-6$

b) $-4\cdot 5+4\cdot(-3)-15:(-3)+6\cdot(-4):(-2)=-15$

c) $-6\cdot(-8)-4\cdot 2\cdot(-8)+88:(-11)-43+85-62=84$

d) $-3(-2\cdot 7+3\cdot(-2))-45:(-9):(-5)\cdot(-13)+33-71=35$

e) $4\cdot(-8)\cdot 4:(-2)-55+3\cdot(-8)-4(4-9\cdot 2)=41$

f) $12:(-6)\cdot(-5)-3(-2-7\cdot 4)+(-3)\cdot(-2)\cdot(-4):(-6)\cdot(-3)-63-58+92=59$

g) $-(-(-3))\cdot(-(-2)\cdot(-(-(-4))))-(-(-(-(-12))))=12$

h) $-(-4)\cdot(-(-(-3))\cdot(-(-(-(-(-5)))))):(-(-(-6)))-(-(-(-15)))=5$

Aufgabe 11: *Schreibe zu jeder Teilaufgabe den Term der Berechnung auf und beantworte die Frage.*

i) Das Thermometer zeigt $7°C$ an und die Temperatur soll um $11°C$ fallen. Wie viel Grad Celsius zeigt das Thermometer nach der Veränderung an?

$7°C-11°C=-4°C$

j) Das Thermometer zeigt $-3°C$ an und die Temperatur soll um $-7°C$ steigen. Wie viel Grad Celsius zeigt das Thermometer nach der Veränderung an?

$-3°C+(-7°C)=-10°C$

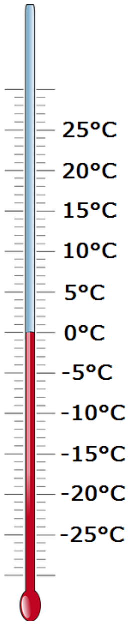
k) Das Thermometer zeigt $-9°C$ an und die Temperatur soll um $-11°C$ fallen. Wie viel Grad Celsius zeigt das Thermometer nach der Veränderung an?

$-9°C-(-11°C)=2°C$

l) Das Thermometer zeigt $-18°C$ an und die Temperatur soll um $-11°C$ steigen. Wie viel Grad Celsius zeigt das Thermometer nach der Veränderung an?

$-18°C+(-11°C)=-29°C$

Aufgabe 12: *Schreibe zu jeder Teilaufgabe den Term der Berechnung auf und beantworte die Frage.*



$a)$ Am Morgen zeigte das Thermometer $-7°C$ an, während es am Nachmittag $-1°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

$|-7°C| - |-1°C| = 6°C$

$b)$ Am Nachmittag zeigte das Thermometer $3°C$ an, während es in der Nacht $-8°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gefallen?

$3°C - (-8°C) = 11°C$

$c)$ Am Morgen zeigte das Thermometer $-5°C$ an, während es am Nachmittag $7°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

$|-5°C| + 7°C = 12°C$

$d)$ Am Nachmittag zeigte das Thermometer $-6°C$ an, während es in der Nacht $-17°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

$|-6°C| - |-17°C| = -11°C$

$e)$ Am Morgen zeigte das Thermometer $-14°C$ an, während es am Nachmittag $2°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

$|-14°C| + 2°C = 16°C$

$f)$ Am Nachmittag zeigte das Thermometer $6°C$ an, während es in der Nacht $-11°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gestiegen?

$-(6°C - (-11°C)) = -17°C$

$g)$ Am Nachmittag zeigte das Thermometer $4°C$ an, während es in der Nacht $-8°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gefallen?

$4°C - (-8°C) = 12°C$

$h)$ Am Morgen zeigte das Thermometer $-6°C$ an, während es am Nachmittag $4°C$ anzeigt. Um wie viel Grad Celsius ist die Temperatur gefallen?

$-(|-6°C|+4°C)=-10°C$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.9.1).

18.10.10 Lösungen zum Kommutativ- und Assoziativgesetz

Aufgabe 1: *Schreibe alle Variationen der Terme durch die Verwendung des Kommutativgesetzes auf.*

$a)\ a+b=b+a$

$b)\ a+b+c=a+b+c=b+c+a=b+a+c=c+b+a=c+a+b$

$c)\ z-d=-d+z$

$d)\ d-a-s=d-s-a=-s+d-a=-s-a+d=-a-s+d=-a+d-s$

$e)\ a+b\cdot c=a+c\cdot b=b\cdot c+a=c\cdot b+a$

$f)\ z\cdot d\cdot g=z\cdot g\cdot d=g\cdot z\cdot d=g\cdot d\cdot z=d\cdot g\cdot z=d\cdot z\cdot g$

$g)\ d\cdot a-s=a\cdot d-s=-s+a\cdot d=-s+d\cdot a$

$h)\ a\cdot d+b\cdot c=d\cdot a+b\cdot c=a\cdot d+c\cdot b=d\cdot a+c\cdot b=b\cdot c+a\cdot d=b\cdot c+d\cdot a$
$=c\cdot b+a\cdot d=c\cdot b+d\cdot a$

$i)\ a\cdot d-b\cdot c=d\cdot a-b\cdot c=a\cdot d-c\cdot b=d\cdot a-c\cdot b=b\cdot c-a\cdot d=b\cdot c-d\cdot a$
$=c\cdot b-a\cdot d=c\cdot b-d\cdot a$

$j)\ d:a+s=s+d:a=\frac{1}{a}\cdot d+s=s+\frac{1}{a}\cdot d$

$k)\ a:d+b:c=b:c+a:d=\frac{1}{d}\cdot a+b:c=b:c+\frac{1}{d}\cdot a=a:d+\frac{1}{c}\cdot b=\frac{1}{c}\cdot b+a:d$
$=\frac{1}{c}\cdot b+\frac{1}{d}\cdot a=\frac{1}{d}\cdot a+\frac{1}{c}\cdot b$

$l)\ z:d-u\cdot g=-u\cdot g+z:d=z:d-g\cdot u=-g\cdot u+z:d=\frac{1}{d}\cdot z-u\cdot g=-u\cdot g+\frac{1}{d}\cdot z$
$=\frac{1}{d}\cdot z-g\cdot u=-g\cdot u+\frac{1}{d}\cdot z=$

Aufgabe 2: *Schreibe alle Variationen der Terme durch die Verwendung des Assoziativgesetzes (ohne Kommutativgesetz) auf.*

$a)\ \ a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$

$b)\ \ a\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$

$c)\ \ a+b+c+d=a+(b+c+d)=(a+b+c)+d=a+(b+c)+d=(a+b)+c+d$
$=a+b+(c+d)=(a+b)+(c+d)=$

$d)\ \ a+b\cdot r+c\cdot d=(a+b\cdot r)+c\cdot d=a+(b\cdot r+c\cdot d)$

$e)\ \ a\cdot b\cdot u+d\cdot c\cdot g=(a\cdot b)\cdot u+d\cdot c\cdot g=a\cdot(b\cdot u)+d\cdot c\cdot g=a\cdot b\cdot u+(d\cdot c)\cdot g$
$=a\cdot b\cdot u+d\cdot(c\cdot g)=(a\cdot b)\cdot u+(d\cdot c)\cdot g=a\cdot(b\cdot u)+(d\cdot c)\cdot g=a\cdot(b\cdot u)+d\cdot(c\cdot g)$

$f)\ \ a\cdot b\cdot c\cdot d=(a\cdot b\cdot c)\cdot d=a\cdot(b\cdot c\cdot d)=(a\cdot b)\cdot c\cdot d=a\cdot(b\cdot c)\cdot d=a\cdot b\cdot(c\cdot d)$

$g)\ \ a-b+c-d=(a-b)+c-d=a-b+(c-d)=(a-b)+(c-d)=$

$h)\ \ a\cdot b:d\cdot c\cdot g=(a\cdot b):d\cdot c\cdot g=a\cdot b:d\cdot(c\cdot g)=(a\cdot b):d\cdot(c\cdot g)=$

$i)\ \ a\cdot b+b:c\cdot d-g=(a\cdot b+b:c\cdot d)-g=a\cdot b+(b:c\cdot d-g)$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.10.3).

18.10.11 Lösungen zum Distributivgesetz

Aufgabe 1:

$a)\ \ \frac{1}{2}(9+7)=8$

$b)\ \ \frac{25+65}{10}=9$

$c)\ \ 4(3+2)=20$

$d)\ \ \frac{16+48}{2}=32$

$e)\ \ \frac{1}{4}(144-92)=13$

$f)\ \ \frac{3}{5}\cdot\frac{13-5}{4}=\frac{12}{5}$

$g)\ \ 5,5\,(1,5+6,25)=42,625$

$h)\ \ \frac{6,3-5-0,3}{20}:\frac{2}{5}=\frac{1}{8}$

$i)\ \ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{24}$

$j)\ \ \frac{77-47}{3}\cdot\frac{3+5}{24}=\frac{10}{3}$

$k)\ \ 4(3+2)-2(1+3)=12$

$l)\ \ \frac{12-8+14}{2}\cdot\left(3+\frac{9}{2}\right)=\frac{135}{2}$

Aufgabe 2:

$a)$ $2\,(a+7)=2a+14$

$b)$ $4\,(b+c)=4b+4c$

$c)$ $7\,(4+v)=28+7v$

$d)$ $d\,(b-c)=db-dc$

$e)$ $6\,(ab-cd)=6ab-6cd$

$f)$ $mo\,(ep-ewe)=moep-moewe$

$g)$ $ha\,(llo-i)=hallo-hai$

$h)$ $te\,(st+e)=test+tee$

$i)$ $=TagStunde-TagMinute$

$j)$ $(4b+7c)\,5=20b+35c$

$k)$ $2\,(2a-3c)\,4=16a-24c$

$l)$ $\xi\,(\varPsi-\varPhi)=\xi\varPsi-\xi\varPhi$

$m)$ $4\diamond(3\hbar-6\varGamma)=12\diamond\hbar-24\diamond\varGamma$

$n)$ $2\tau\,(5\sigma+3\rho)\,3\lambda=30\tau\sigma\lambda+18\tau\rho\lambda$

Aufgabe 3:

$a)$ $4\,(a+b)=4a+4b$

$b)$ $c\,(a-5b)=ac-5bc$

$c)$ $\frac{2}{5}\,(9a-5)=\frac{18a}{5}-2$

$d)$ $(a+b)\,(a+b)=aa+2ab+bb$

$e)$ $\frac{2}{5}\left(\frac{a}{b}-\frac{5c}{d}\right)=\frac{2a}{5b}-\frac{2c}{d}$

$f)$ $(a-b)\,(a-b)=aa-2ab+bb$

$g)$ $(a+b)\,(c+d)=ac+ad+bc+bd$

$h)$ $(a-b)\,(a+b)=aa-bb$

$i)$ $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

$j)$ $\frac{(a+b)\,(a-b)}{a-b}\,(a+b)=a+2ab+bb$

Aufgabe 4:

$a)$ $3\,(a+2) = 3a+6$

$b)$ $5\,(3a-5) = 15a-25$

$c)$ $d\,(3a-4b) = 3ad-4bd$

$d)$ $4a\,(2d-8u) = 8ad-32au$

$e)$ $-2\,(4a+3de) = -8a-6de$

$f)$ $-2a\,(7d-3b) = -14ad+6ab$

$g)$ $(a+2)\,(b+1) = ab+2b+a+2$

$h)$ $(a+2b)\,(3+c) = 3a+6b+ac+2bc$

$i)$ $(2a+3c)\,(1-x) = 2a+3c-2ax-3cx$

$j)$ $(2a-2b)\,(2c-2d) = 4ac-4bc-4ad+4bd$

$k)$ $(lo-rof)\,(l-lo) = lol-rofl-lolo+roflo$

$l)$ $(ah-n)\,(a-e) = aha-na-ahe+ne$

$m)$ $(6-2x)\,(3d-2e) = 18d-6dx-12e+4xe$

$n)$ $(g-l)\,(ame+odd) = game-lame+godd-lodd$

$o)$ $(2s+4o)\,(-3a+4c) = -6as+8sc-12ao+16oc$

$p)$ $(10-f)\,(8+2e) = 80-8f+20e-2ef$

$q)$ $-(9-a)\,(4+d) = 36+9d-4a-ad$

$r)$ $-(a+e)\,(d-f) = -ad-ed+af+ef$

$s)$ $-(4d+3s)\,(2f-5) = -8df-6fs+20d+15s$

$t)$ $-(5x+3)\,(6y-3z) = -30xy-18y+15xz+9z$

$u)$ $a\,(8ge-ze)\,(h+4r) = 8geha-zeha+32gera-4zera$

$v)$ $b\,(4a-2d)\,(5-3x) = 20ab-10b-13abx+6bx$

$w)$ $-2\,(rt-wer)\,(los+4gt) = -2rtlos+2werlos-8rtgt+8wergt$

$x)$ $-3\,(2d-5)\,(-4+p) = 24d-6dp-60+15p$

$y)$ $(a+b)\,(c+d)\,(e+f) = ace+ade+bce+bde+acf+adf+bcf+bdf$

$z)$ $(a-b)\,(c-d)\,(e-f) = ace-acf-ade+adf-bce+bcf+bde-bdf$

Aufgabe 5:

a) $2a + 2b = 2(a + b)$

b) $ab - ad = a(b - d)$

c) $abe + aef = ae(b - f)$

d) $3ag - 6a = 3a(g - 2)$

e) $2ab + 2bc - 2bd = 2b(a + c - d)$

f) $2a - 4b + 8d = 2(a - 2b + 4d)$

g) $ab + ac + ad + ae - af = a(b + c + d + e - f)$

h) $5\Delta\nabla - \Delta \diamond \nabla = \Delta\nabla\,(5 - \diamond)$

i) $\mathit{\Delta\Phi\Gamma} + \mathit{\Phi}\nabla\mathit{\Delta} = \mathit{\Delta\Phi}\,(\mathit{\Gamma} + \nabla)$

j) $\alpha\beta(1 + \chi) =$

k) $\mathit{\Theta\Sigma\Xi} - \mathit{\Xi\Pi\Sigma} + \mathit{\Theta\Xi\Phi} = \mathit{\Xi}(\mathit{\Theta\Sigma} - \mathit{\Pi\Sigma} + \mathit{\Theta\Phi})$

l) $2\mathit{\Omega\Sigma} - 4\mathit{\Sigma\Pi} + 6\mathit{\Lambda\Sigma} = 2\mathit{\Sigma}(\mathit{\Omega} - 2\mathit{\Pi} + 3\mathit{\Lambda})$

Aufgabe 6:

a) $9a + 9b = 9(a + b)$

b) $2a + 6 - 8b = 2\,(a + 3 - 4b)$

c) $ab - acd + aa = a\,(b - cd + a)$

d) $2ab + 4ab + 8ab = 2ab\,(1 + 2 + 4)$

e) $\frac{5a}{bc} + \frac{25}{bc} = \frac{5}{bc}\,(a + 5)$

f) $abcdefghijkl - bcdefghijk = bcdefghijk\,(al - 1)$

h) $\frac{2a + 13ab}{7} = \frac{a}{7}\,(2 + 13b)$

i) $\frac{3cd - 6bd}{a - ba} = \frac{2d}{a}\frac{c - 2b}{1 - b}$

j) $\frac{\Box\nabla - 3\nabla\Box}{4 - \diamond} = \frac{-2}{4 - \diamond}\nabla\Box$

k) $\frac{\hbar\mu\sigma - \hbar\lambda\mu}{\theta\rho + \psi\theta} = \frac{\hbar\mu}{\theta}\frac{\sigma - \lambda}{\rho + \psi}$

l) $\frac{4\mathit{\Pi\Sigma\Theta} + 8\delta\mathit{\Lambda\Sigma}}{5\mathit{\Gamma\Delta} - \mathit{\Gamma}} = \frac{4\mathit{\Sigma}}{\mathit{\Gamma}}\frac{\mathit{\Pi\Theta} + \delta\mathit{\Lambda}}{5\mathit{\Delta} - 1}$

m) $\frac{15asdfgh - 5hfsa}{3\tau\zeta\xi\psi - 9\nu\tau\zeta} = \frac{5hfsa}{3\tau\zeta}\frac{3dg - 1}{\xi\psi - 3\nu}$

Aufgabe 7:

a) $x^2 + 2x - 8$

b) $x^2 + 12x + 27$

c) $x^3 - 4x^2 - 11x + 30$

d) $x^3 - 5x^2 - 38x + 168$

e) $x^4 - 4x^3 - 140x^2 + 576x - 576$

f) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$

g) $x^4 - \frac{17x^2}{18} + \frac{25}{144}$

h) $x^4 - 69x^2 - 44x + 672$

i) $-x^4 + ax^3 - bx^3 + cx^3 - dx^3 + abx^2 - acx^2 + bcx^2 - bdx^2 + cdx^2$
$\quad - abcx + abdx - acdx + bcdx - abcd$

j) $-x^6 + bx^5 + 2cx^5 - 2dx^5 + a^2x^4 - 2bcx^4 + 2bdx^4 - c^2x^4 + 4cdx^4$
$\quad - a^2bx^3 - 2a^2cx^3 + 2a^2dx^3 + bcx^3 - 4bcdx^3 - 2c^2dx^3 + 2a^2bcx^2 - 2a^2bdx^2$
$\quad + a^2c^2x^2 - 4a^2cdx^2 + 2bc^2dx^2 - a^2bc^2x + 4a^2bcdx + 2a^2c^2dx - 2a^2bc^2d$

Aufgabe 8:

a) $= -abe - abp + ade + adp$

b) $= 20tx - 45ty - 28xz + 63yz$

c) $= -2ah - 15dg + 13dh$

d) $= 10gr + 15kr - 41ag - 63ak - 6dg - 8dk$

e) $= -18acd + 46ae + 3bcd - 53be$

f) $= -48ace + 56acf - 60ade + 70adf + 72bce - 84bcf + 90bde - 105bdf$

Aufgabe 9:

a) $-4a(8c - d) = -32ac + 4ad$

b) $-5b(-2g - 4) = 10bg + 20b$

c) $-3(-5g + 8k) = 15g - 24k$

d) $2p(-3e - 4r) = -6pe - 8rp$

e) $-11v(-11n + 12m) = 121vn - 132vm$

f) $-9x(-4y + 3z) \cdot (-2k) = -72xyk + 36xzk$

Aufgabe 10:

$a)\quad = 2ac + ad + 6bc + 3bd$

$b)\quad = 6bc - 21b - 8c + 28$

$c)\quad = 8kt - 5gt + 30gz - 48kz$

$d)\quad = 21el + 15eh - 20hr - 28lr$

$e)\quad = 2bggst + 4ags - 2bceghtt - 4aceht$

$f)\quad = 24abb + 30abk + 8ab + 10ak$

Aufgabe 11:

$a)\ x^2 + 4x + \boxed{4} = (x+2)^2$

$b)\ x^2 - 6x + \boxed{9} = (x-3)^2$

$c)\ x^2 - 2x + 1 = \left(x - \boxed{1}\right)^2$

$d)\ x^2 + 8x + 16 = \left(x + \boxed{4}\right)^2$

$e)\ x^2 + 10x + \boxed{25} = \left(x + \boxed{5}\right)^2$

$f)\ x^2 + 6x + \boxed{9} = \left(x + \boxed{3}\right)^2$

$g)\ x^2 - 5x + \boxed{6,25} = \left(x - \boxed{2,5}\right)^2$

$h)\ x^2 + 3x + \boxed{2,25} = \left(x + \boxed{1,5}\right)^2$

$i)\ x^2 - \boxed{6}x + 9 = (x-3)^2$

$j)\ x^2 - \boxed{4}x + 4 = (x-2)^2$

$k)\ x^2 - \boxed{2}x + \boxed{1} = (x-1)^2$

$l)\ x^2 + \boxed{14}x + \boxed{49} = (x+7)^2$

$m)\ x^2 + \boxed{10}x + 25 = \left(x + \boxed{5}\right)^2$

$n)\ x^2 - \boxed{18}x + 81 = \left(x - \boxed{9}\right)^2$

$o)\ x^2 - \boxed{14}x + 49 = \left(x - \boxed{7}\right)^2$

$p)\ x^2 + \boxed{24}x + 144 = \left(x + \boxed{12}\right)^2$

Aufgabe 12:

a) $x^2 + 2x + 3 + 1 - 1 = (x+1)^2 + 2$

b) $x^2 - 6x + 7 + 9 - 9 = (x-3)^2 - 2$

c) $x^2 - 4x - 3 + 4 - 4 = (x-2)^2 - 7$

d) $x^2 + 8x + 12 + 16 - 16 = (x+4)^2 - 4$

e) $x^2 + 5x + 2,25 + 6,25 - 6,25 = \left(x + 2,5\right)^2 - 4$

f) $x^2 - 2x - 33 + 1 - 1 = \left(x - 1\right)^2 - 34$

g) $x^2 + x - 2 + 0,25 - 0,25 = \left(x + 0,5\right)^2 - 2,25$

h) $x^2 + 3x + 5 + 2,25 - 2,25 = \left(x + 1,5\right)^2 + 2,75$

i) $x^2 - 12x + 3 + 36 - 36 = (x-6)^2 - 33$

j) $x^2 + 22x - 7 + 121 - 121 = (x+11)^2 - 114$

k) $x^2 + 10x - 13 + 25 - 25 = \left(x + 5\right)^2 - 38$

l) $x^2 + 8x + 6 + 16 - 16 = \left(x + 4\right)^2 - 10$

m) $x^2 + 6x + 4 + 9 - 9 = \left(x + 3\right)^2 - 5$

n) $x^2 - 12x + 30 + 36 - 36 = \left(x - 6\right)^2 - 6$

Aufgabe 13:

a) $x^2 - 2x + 5 + 1 - 1 = (x-1)^2 + 4$

b) $x^2 + 4x - 2 + 4 - 4 = (x+2)^2 - 6$

c) $x^2 - 12x - 3 + 36 - 36 = (x-6)^2 - 39$

d) $x^2 - 8x + 14 + 16 - 16 = (x-4)^2 - 2$

e) $x^2 - 4x - 7 + 4 - 4 = (x-2)^2 - 11$

f) $x^2 + 14x + 5 + 49 - 49 = (x+7)^2 - 44$

g) $x^2 + 3x - 1 + 2,25 - 2,25 = (x+1,5)^2 - 3,25$

h) $x^2 - 5x - 8 + 6,25 - 6,25 = (x-2,5)^2 - 14,25$

i) $x^2 - x + 4 + 0,25 - 0,25 = (x-0,5)^2\, 3,75$

j) $x^2 - 1,5x - 1 + 0,5625 - 0,5625 = (x-0,75)^2 - 1,5625$

Aufgabe 14:

$a)$ $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$

$b)$ $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$

$c)$ $(x+7)(x-7) = x^2 - 49$

$d)$ $(x+5)^2 + 4 = x^2 + 10x + 29$

$e)$ $(x-2)(x+2) - 5 = x^2 - 9$

$f)$ $(x-1)^2 - 3 = x^2 - 2x - 2$

$g)$ $(x+2,5)^2 + 2 = x^2 + 5x + 8,25$

$h)$ $(x-6)^2 - 2,75 = x^2 - 12x + 33,25$

$i)$ $(x+2)(x-2) + 5,5 = x^2 + 1,5$

$j)$ $(x-1,5)(x+1,5) - 2,1 = x^2 - 4,35$

$k)$ $2(x+3)^2 - 8,3 = 2x^2 + 12x + 9,7$

$l)$ $3(x-0,5)^2 + 5,1 = 3x^2 - 1,5x + 5,85$

$m)$ $1,25(x-1,5)^2 - 9,75 = 1,25x^2 - 3,75x - 6,9375$

$n)$ $-0,5(x+3,4)^2 + 11,1 = -0,5x^2 - 3,4x + 5,32$

$o)$ $0,3(x-2,25)(x+2,25) + 0,4 = 0,3x^2 - 1,11875$

$p)$ $-0,15(x+1,7)(x-1,7) - 2,31 = -0,15x^2 - 1,8765$

Aufgabe 15:

$a)$ $3 \cdot (5+2) = 21$

$b)$ $(4 + 5 \cdot 6) + 3 = 57$

$c)$ $4 + 5 \cdot (6+3) = 49$

$d)$ $(4+5) \cdot (6+3) = 81$

$e)$ $2 \cdot 3 + (2 \cdot 4 + 2) \cdot 5 = 56$

$f)$ $2 \cdot (4+8) \cdot 5 - 7 \cdot 9 = 57$

$g)$ $(4 \cdot 3 + 7 + 4 + 9) \cdot 5 = 160$

$h)$ $(7+3) \cdot (29 + 11 - 3 \cdot 7) = 190$

$i)$ $(8-7) \cdot (13 - 4 \cdot 3) \cdot (55 - 9 \cdot 6) = 1$

$j)$ $(5+2) \cdot (3+3) \cdot (6-3) \cdot 2 + 5 = 545$

Aufgabe 16:

$a)$ 126 $b)$ 72 $c)$ 445 $d)$ 495

$e)$ 60536 $f)$ 105534 $g)$ 675591 $h)$ 12869454

Aufgabe 17:

$a)$ 4	$b)$ 7	$c)$ 9	$d)$ 7
$e)$ 6951	$f)$ 5687	$g)$ 658702	$h)$ 32008

Aufgabe 18:

$a)$ 1748	$b)$ 2130	$c)$ 123	$d)$ 5829525
$e)$ 20159	$f)$ 40296515	$g)$ 30058	$h)$ 25078

Aufgabe 22:

$a)$ $4 \cdot (6+7)$	$b)$ $7 \cdot (5-4)$
$c)$ $3 \cdot (3+9+5)$	$d)$ $4 \cdot (12+3-9)$
$e)$ $3 \cdot 7 \cdot (4+5)$	$f)$ $5 \cdot 6 \cdot (9 \cdot 13 - 11 \cdot 8)$
$g)$ $22 \cdot 7 - 11 \cdot 4 = 22 \cdot (7-2)$	$h)$ $73 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 9 \cdot (7+22+4 \cdot 5)$

Aufgabe 23:

$a)$ $6 \cdot (4+3)$	$b)$ $9 \cdot (9-7)$
$c)$ $36 \cdot (3+1+2)$	$d)$ $11 \cdot (5-2+7)$
$e)$ $3 \cdot (9+11-7)$	$f)$ $100 \cdot (116-23+17)$
$g)$ $9 \cdot (3 \cdot (3-2+4) - 1)$	$h)$ $9 \cdot (5 \cdot (2-1) + 4 \cdot (2-1))$

Aufgabe 25:

$a)$ Ja	$b)$ Ja	$c)$ Nein	$d)$ Ja	$e)$ Nein	$f)$ Ja

Aufgabe 26:

$a)$ 9922 $b)$ 36000 $c)$ 42 $d)$ 330 $e)$ 846 $f)$ 23588

Aufgabe 27:
$5 \cdot 7237 + 2 \cdot 3269 = 42723$

Aufgabe 28:
$430523 + 396 \cdot 48 = 449531$

Aufgabe 29:
$340850 + 9 \cdot 174 = 342416$

Aufgabe 30:
$(264000 - 24500) : 20 = 11975$

Aufgabe 31:
$(11000 - 3700) : 50 = 146$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.11.1).

18.10.12 Lösungen zur Potenzen

Aufgabe 1:

$a)$ $2^3 = 8$ $b)$ $3^4 = 81$ $c)$ $2^6 = 64$

$d)$ $2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ $e)$ $10^3 = 1000$ $f)$ $8^3 = 512$

$g)$ $4^{-3} = \dfrac{1}{64}$ $h)$ $10^{-6} = \dfrac{1}{1000000}$ $i)$ $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$

$j)$ $\left(5^3\right)^2 = 15625$ $k)$ $4^{\left(3^2\right)} = 4096$ $l)$ $2^6 \cdot 2^2 = 256$

$m)$ $\left(2^3 + 2^3\right)^3 = 4096$ $n)$ $\left(10^2\right)^{-1} = \dfrac{1}{100}$ $o)$ $\left(\left(2^6\right)^{-1}\right)^{-1} = 64$

$p)$ $\left(100^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 100$ $q)$ $\left(3,141^{\frac{1}{2,718}}\right)^{2,718} = 3,141$ $r)$ $\left(\dfrac{1}{5^{-1}}\right)^3 = 125$

Aufgabe 2:

$a)\ \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ $b)\ \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$ $c)\ \left(\frac{11}{17}\right)^2 = \frac{121}{289}$

$d)\ \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ $e)\ \left(\frac{124}{217}\right)^{-1} = \frac{217}{124}$ $f)\ \left(\frac{9}{7}\right)^{-2} = \frac{49}{81}$

$g)\ \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{25}{9}$ $h)\ \left(\frac{144}{169}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{12}{13}$ $i)\ \left(\frac{83}{87}\right)^{-1} = \frac{87}{83}$

$j)\ \left(\frac{8}{3}\right)^{-2} = \frac{64}{9}$ $k)\ \left(\frac{36}{64}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$ $l)\ \left(\frac{225}{121}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{11}{15}$

$m)\ \left(\frac{5}{2}\right)^{-3} = \frac{8}{125}$ $n)\ \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$ $o)\ \left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$

Aufgabe 3:

$a)\ \sqrt{16} = 4$ $b)\ \sqrt{81} = 9$ $c)\ \sqrt[3]{8} = 2$

$d)\ \sqrt[3]{27} = 3$ $e)\ \sqrt{144} = 12$ $f)\ \sqrt[5]{100000} = 10$

$g)\ \sqrt{289} = 17$ $h)\ \sqrt[4]{81} = 3$ $i)\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2^{16}}}}} = 2$

$j)\ \sqrt{a^{8^{\frac{1}{4}}}} = a^2$ $k)\ \sqrt[10]{1024} = 2$ $l)\ \sqrt[7]{\sqrt[4]{\sqrt[9]{\sqrt[13]{\lambda^{33}}}}^{\,2}} = |\lambda|^{\frac{11}{546}}$

Aufgabe 4:

$a)$ $3\,\mathrm{dm} = 30\,\mathrm{cm}$

$b)$ $4\,\mathrm{m} = 400\,\mathrm{cm}$

$c)$ $7\,\mathrm{cm} = 70\,\mathrm{mm}$

$d)$ $500\,\mathrm{cm} = 50\,\mathrm{dm}$

$e)$ $25\,\mathrm{km} = 25000m$

$f)$ $8000000\,\mathrm{cm} = 80\,\mathrm{km}$

$g)$ $2\,\mathrm{dm}^2 = 200\,\mathrm{cm}^2$

$h)$ $14\,\mathrm{m}^2 = 140\,000\,\mathrm{cm}^2$

$i)$ $9\,\mathrm{cm}^2 = 900\,\mathrm{mm}^2$

$j)$ $2500\,\mathrm{cm}^2 = 25\,\mathrm{dm}^2$

$k)$ $65\,\mathrm{km}^2 = 65\,000\,000\,\mathrm{m}^2$

$l)$ $7500000\,\mathrm{cm}^2 = 750m^2$

$m)$ $6\,\mathrm{dm}^3 = 6000\,\mathrm{cm}^3$

$n)$ $7m^3 = 7000000\,\mathrm{cm}^3$

$o)$ $12\,\mathrm{cm}^3 = 12000\,\mathrm{mm}^3$

$p)$ $3000\,\mathrm{cm}^3 = 3\,\mathrm{dm}^3$

$q)$ $253\,\mathrm{km}^3 = 253\,000\,000\,000\,\mathrm{m}^3$

$r)$ $5000000\,\mathrm{cm}^3 = 5000\,\mathrm{dm}^3$

$s)$ $46\,\mathrm{dm}^2 = 4600\,\mathrm{cm}^2$

$t)$ $75m = 7500\,\mathrm{cm}$

$u)$ $34\,\mathrm{cm}^3 = 34000\,\mathrm{mm}^3$

$v)$ $8900\,\mathrm{cm} = 890\,\mathrm{dm}$

$w)$ $63\,\mathrm{km}^2 = 63\,000\,000m^2$

$x)$ $74000000\,\mathrm{cm}^3 = 74000\,\mathrm{dm}^3$

Aufgabe 5:

$a)$ $1\,\mathrm{m}^2 = 10^4\,\mathrm{cm}^2$

$b)$ $2,718\,\mathrm{km} = 2,718 \cdot 10^6\,\mathrm{mm}$

$c)$ $1\,\mathrm{mm}^3 = 10^{-6}\,\mathrm{dm}^3$

$d)$ $3\,\mathrm{m}^3 = 3 \cdot 10^3\,\mathrm{dm}^3$

$e)$ $0,5\,\mathrm{cm}^2 = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^2$

$f)$ $13,3\,\mathrm{cm}^3 = 1,33 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$

$g)$ $10^3\,\mathrm{km}^2 = 10^{11}\,\mathrm{dm}^2$

$h)$ $1,234\,\mathrm{dm} = 1,234 \cdot 10^2\,\mathrm{mm}$

$i)$ $\frac{15}{4}\mu\,\mathrm{m}^2 = \frac{15}{4} \cdot 10^6\,\mathrm{mm}^2$

$j)$ $\frac{1}{3}\,\mathrm{Mm}^3 = \frac{1}{3} \cdot 10^9\,\mathrm{km}^3$

$k)$ $0,01\,\mathrm{km}^2 = 10^8\,\mathrm{cm}^2$

$l)$ $125\,\mathrm{mm}^5 = 1,25 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^5$

$m)$ $6,\bar{6}\,\mathrm{m}^4 = 6,\bar{6} \cdot 10^8\,\mathrm{cm}^4$

$n)$ $0,025\,\mathrm{km}^7 = 2,5 \cdot 10^{40}\,\mathrm{mm}^7$

$o)$ $3,141\,\mathrm{Tm}^2 = 3,141 \cdot 10^{36}\,\mathrm{nm}^2$

Aufgabe 6:

a) $(a+4)^2 = a^2 + 8a + 16$

c) $\left(\sqrt{2}a+2\right)^4 = 4a^4 + 16\sqrt{2}a^3 + 48a^2 + 32\sqrt{2}a + 16$

d) $\left(3a+\frac{2}{3}\right)^3 = 27a^3 + 18a^2 + 4a + \frac{8}{27}$

e) $(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

f) $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2bc + c^2 + 2ac$

g) $(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

h) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de$

i) $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

j) $(a-c)^8 = a^8 - 8a^7c + 28a^6c^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

k) $(\hbar+\ell)^{-3} = \frac{1}{\hbar^3 + 3\hbar^2\ell + 3\hbar\ell^2 + \ell^3}$

l) $(\square-\nabla)^{-5} = \frac{1}{\square^5 - 5\square^4\nabla + 10\square^3\nabla^2 - 10\square^2\nabla^3 + 5\square\nabla^4 - \nabla^5}$

m) $(ab+cd)^{-3} = \frac{1}{a^3b^3 + 3a^2b^2cd + 3abc^2d^2 + c^3d^3}$

n) $(\kappa-\gamma+\eta\epsilon)^{-2} = \frac{1}{\kappa^2 + \gamma^2 + \eta^2\epsilon^2 - 2\kappa\gamma + 2\kappa\eta\epsilon - 2\gamma\eta\epsilon}$

Aufgabe 7:

a) $5^2 = 25$ *b*) $-5^2 = -25$ *c*) $(-5)^2 = 25$
d) $6^2 = 36$ *e*) $-6^2 = -36$ *f*) $(-6)^2 = 36$
g) $4^3 = 64$ *h*) $-4^3 = -64$ *i*) $(-4)^3 = -64$
j) $3^4 = 81$ *k*) $-3^4 = -81$ *l*) $(-3)^4 = 81$
m) $2^5 = 32$ *n*) $-2^5 = -32$ *o*) $(-2)^5 = -32$
p) $13^0 = 1$ *q*) $-17^0 = -1$ *r*) $(-11)^0 = 1$

Aufgabe 8:

a) $3,00 \cdot 10^4$ *b*) $8,54 \cdot 10^6$ *c*) $7,27 \cdot 10^7$
d) $4,75 \cdot 10^7$ *e*) $5,84 \cdot 10^8$ *f*) $1,25 \cdot 10^7$
g) $1,00 \cdot 10^{-6}$ *h*) $3,52 \cdot 10^{-5}$ *i*) $6,47 \cdot 10^{-11}$
j) $9,56 \cdot 10^{-4}$ *k*) $9,12 \cdot 10^7$ *l*) $7,31 \cdot 10^{-9}$
m) $7,85 \cdot 10^{-3}$ *n*) $4,56 \cdot 10^{11}$ *o*) $9,14 \cdot 10^4$

Aufgabe 9:

a) 10^{11} *b*) 10^{-1} *c*) 10^{62} *d*) 10^{-10}
e) 10^{-13} *f*) 10^{-30} *g*) 10^{57} *h*) 10^{-14}
i) 10^1 *j*) 10^{-1} *k*) 10^{-15} *l*) 10^{372}

Aufgabe 10: *Bestimme die Anzahl der Teiler zum Wert des Terms.*

a) $5 = 4 + 1$ *b*) 6 *c*) 4
c) 4 *d*) $9 = (2 + 1)(2 + 1)$ *e*) $18 = (5 + 1)(2 + 1)$
f) 32 *g*) 50 *h*) 504

Aufgabe 11: *Bestimme die kleinste natürliche Zahl, die k Teiler besitzt, wovon n der Teiler Primzahlen sind.*

$a)$ $4 = 2^3$ $b)$ $64 = 2^6$ $c)$ $12 = 2^2 \cdot 4$

$d)$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ $e)$ 2310 $f)$ 6720

$g)$ 384 $h)$ 60060 $i)$ 295680

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.12.4).

18.10.13 Lösungen zu Logarithmen

Aufgabe 1:

$a)$ $\log_2 16 = 4$ $b)$ $\lg 1000 = 3$ $c)$ $\log_8 64 = 2$

$d)$ $\text{lb } 512 = 9$ $e)$ $\ln e^9 = 9$ $f)$ $\log_5 125 = 3$

$g)$ $\log_{25} 125 = \dfrac{3}{2}$ $h)$ $\lg\left(11 \cdot 10^6\right) = 6 + \lg 11 \approx 7,04$ $i)$ $\log_{17} 1 = 0$

$j)$ $\log_3 81 = 4$ $k)$ $\log_4 64 = 3$ $l)$ $\log_{15} 225 = 2$

Aufgabe 2:

$a)$ $\log_5 7 = \dfrac{\log_3 7}{\log_3 5}$ $b)$ $\log_8 251 = \dfrac{\lg 251}{\lg 8}$

$c)$ $\log_8 512 = \dfrac{\text{lb}512}{\text{lb}8} = \dfrac{9}{3} = 3$ $d)$ $\log_3 39 = \dfrac{\log_5 39}{\log_5 3}$

$e)$ $\lg 24 = \dfrac{\log_{22} 24}{\log_{22} 10}$ $f)$ $\lg\left(3 \cdot 10^8\right) = 8 \cdot \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} 3}{\log_{\frac{1}{2}} 10}$

$g)$ $\text{lb}1 = \dfrac{\log_{\frac{5}{7}} 1}{\log_{\frac{5}{7}} 2} = 0$ $h)$ $\ln \pi = \dfrac{\log_{\sqrt{2}} \pi}{\log_{\sqrt{2}} e}$

$i)$ $\lg 9000 = 2\dfrac{\ln 9}{\ln 10}$ $j)$ $\text{lb}64 = \dfrac{\ln 64}{\ln 2}$

Aufgabe 3:

$a)$ $\ln x^3 = 3\ln x$

$b)$ $\ln 7x = \ln 7 + \ln x$

$c)$ $\ln \frac{4x}{5} = \ln x + \ln \frac{4}{5}$

$d)$ $\ln \frac{2}{x} = \ln 2 - \ln x$

$e)$ $\ln 4x^4 = \ln 4 + 4\ln x$

$f)$ $\ln \frac{2x^{-1}}{3} = \ln \frac{2}{3} - \ln x$

$g)$ $\lg ax = \frac{lna + \ln x}{\ln 10}$

$h)$ $\log_3 5x^4 = \frac{\ln 5 + 4\ln x}{\ln 3}$

$i)$ $\log_5 \frac{4x^6}{5} = \frac{\ln 4 - \ln 5 + 6\ln x}{\ln 5}$

$j)$ $\log_a \frac{bx^c}{d} = \frac{\ln b - \ln d + c\ln x}{\ln a}$

$k)$ $\log_7 \left(\frac{5}{3x}\right)^3 = 3 \cdot \frac{\ln 5 - \ln 3 - \ln x}{\ln 7}$

$l)$ $\log_a \left(\frac{b}{dx^c}\right)^r = r \cdot \frac{\ln b - \ln d - \ln x}{\ln a}$

Aufgabe 4:

$a)$ 7 $b)$ $\frac{1}{4}$ $c)$ $\sqrt[5]{8}$

$d)$ 128 $e)$ 289 $f)$ $\sqrt[6]{7}$

$g)$ $\frac{1}{11^4}$ $h)$ e $i)$ c

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.13.1).

18.10.14 Lösungen zur Äquivalenzumformung

Aufgabe 1:

$a)$ $\Rightarrow x = 2$ $b)$ $\Rightarrow x = 1$ $c)$ $\Rightarrow x = -3$

$d)$ $\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ $e)$ $\Rightarrow x = -2$ $f)$ $\Rightarrow x = \frac{1}{5}$

$g)$ $\Rightarrow x = 2$ $h)$ $\Rightarrow x = -5$ $i)$ $\Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

$j)$ $\Rightarrow x = 2$ $k)$ $\Rightarrow x = -8$ $l)$ $\Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$m)$ $\Rightarrow x = 6$ $n)$ $\Rightarrow x = 14$ $o)$ $\Rightarrow x = -18$

$p)$ $\Rightarrow x = -20$ $q)$ $\Rightarrow x = 3$ $r)$ $\Rightarrow x = \frac{7}{5}$

$s)$ $\Rightarrow x = 8,4$ $t)$ $\Rightarrow x = -1,2$ $u)$ $\Rightarrow x = 42,5$

$v)$ $\Rightarrow x = 8,6$ $w)$ $\Rightarrow x = -22,2$ $x)$ $\Rightarrow x = 41,4$

Aufgabe 2:

$a) \quad \Rightarrow x = \frac{2}{3}$	$b) \quad \Rightarrow x = \frac{21}{4}$	$c) \quad \Rightarrow x = \frac{54}{7}$
$d) \quad \Rightarrow x = -\frac{30}{7}$	$e) \quad \Rightarrow x = \frac{8}{9}$	$f) \quad \Rightarrow x = -44$
$g) \quad \Rightarrow x = \frac{13}{30}$	$h) \quad \Rightarrow x = -\frac{2}{35}$	$i) \quad \Rightarrow x = -\frac{32}{135}$
$j) \quad \Rightarrow x = 2,4$	$k) \quad \Rightarrow x = \frac{1}{35}$	$l) \quad \Rightarrow x = -20,892$
$m) \quad \Rightarrow x = -\frac{21}{8}$	$n) \quad \Rightarrow x = \frac{21}{20}$	$o) \quad \Rightarrow x = -\frac{16}{63}$
$p) \quad \Rightarrow x = -\frac{5}{12}$	$q) \quad \Rightarrow x = \frac{96}{21}$	$r) \quad \Rightarrow x = -\frac{5}{18}$
$s) \quad \Rightarrow x = \frac{55}{12}$	$t) \quad \Rightarrow x = -\frac{3}{80}$	$u) \quad \Rightarrow x = -\frac{8}{7}$
$v) \quad \Rightarrow x = \frac{1}{70}$	$w) \quad \Rightarrow x = \frac{21}{50}$	$x) \quad \Rightarrow x = \frac{371}{15}$

Aufgabe 3:

$a) \quad \Rightarrow x = 2$	$b) \quad \Rightarrow x = 9$	$c) \quad \Rightarrow x = 1$
$d) \quad \Rightarrow x = 2$	$e) \quad \Rightarrow x = 22$	$f) \quad \Rightarrow x = 9$
$g) \quad \Rightarrow x = 4$	$h) \quad \Rightarrow x = -4$	$i) \quad \Rightarrow x = -5$
$j) \quad \Rightarrow x = -15$	$k) \quad \Rightarrow x = -7$	$l) \quad \Rightarrow x = -42$
$m) \quad \Rightarrow x = \frac{2}{3}$	$n) \quad \Rightarrow x = \frac{3}{4}$	$o) \quad \Rightarrow x = \frac{3}{4}$
$p) \quad \Rightarrow x = -\frac{3}{10}$	$q) \quad \Rightarrow x = \frac{1}{4}$	$r) \quad \Rightarrow x = \frac{7}{8}$
$s) \quad \Rightarrow x = 3,8$	$t) \quad \Rightarrow x = -1,7$	$u) \quad \Rightarrow x = -5,73$
$v) \quad \Rightarrow x = -8,4$	$w) \quad \Rightarrow x = 4,28$	$x) \quad \Rightarrow x = -6,128$

Aufgabe 4:

$a)\quad \Rightarrow x=2$	$b)\quad \Rightarrow x=5$	$c)\quad \Rightarrow x=6$
$d)\quad \Rightarrow x=7$	$e)\quad \Rightarrow x=11$	$f)\quad \Rightarrow x=-1$
$g)\quad \Rightarrow x=1$	$h)\quad \Rightarrow x=6$	$i)\quad \Rightarrow x=28$
$j)\quad \Rightarrow x=6$	$k)\quad \Rightarrow x=26$	$l)\quad \Rightarrow x=-122$

Aufgabe 5:

$a)\quad \Rightarrow x=-\frac{4}{3}$	$b)\quad \Rightarrow x=\frac{9}{2}$
$c)\quad \Rightarrow x=-\frac{55}{9}$	$d)\quad \Rightarrow x=5$
$e)\quad \Rightarrow x=-1$	$f)\quad \Rightarrow x=75$
$g)\quad \Rightarrow x=\frac{7}{4}$	$h)\quad \Rightarrow x=1$
$i)\quad \Rightarrow x=\frac{1}{16}$	$j)\quad \Rightarrow x=\frac{47}{22}$
$k)\quad \Rightarrow x=-\frac{7}{5}$	$l)\quad \Rightarrow x=-\frac{1}{12}$
$m)\quad \Rightarrow x=-\frac{5}{22}$	$n)\quad \Rightarrow x=-\frac{57}{192}$
$o)\quad \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{\frac{8}{9}-\sqrt{3}}$	$p)\quad \Rightarrow x=-\frac{\pi+\sqrt{e}}{e+\sqrt{2}}$

Aufgabe 6:

$a)\quad \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$	$b)\quad \Rightarrow x=-\frac{53}{12}$
$c)\quad \Rightarrow x=\frac{17a-3}{6}$	$d)\quad \Rightarrow x=-\frac{39}{38}$
$e)\quad \Rightarrow x=-\frac{87}{26}$	$f)\quad \Rightarrow x=a$
$g)\quad \Rightarrow x=\frac{a+8}{a+11}$	$h)\quad \Rightarrow x=\frac{67-15a}{6a+4}$
$i)\quad \Rightarrow x=\frac{2a+2}{29-a}$	$j)\quad \Rightarrow x=3-\frac{13}{(2-4a)(b-4)}$
$k)\quad \Rightarrow x=\frac{17a-53}{16}$	$l)\quad \Rightarrow x=-\frac{12a-50}{29-4a}$

Aufgabe 7:

$a)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$ $\qquad b)\quad \Rightarrow x = 9$

$c)\quad \Rightarrow x = \frac{1}{289}$ $\qquad d)\quad \Rightarrow x = \frac{e^2}{5}$

$e)\quad \Rightarrow x = e^{-\sqrt{2}+\ln 13}$ $\qquad f)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{3}{2}\sqrt[4]{5}$

$g)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 7$ $\qquad h)\quad \Rightarrow x = \frac{1}{2}(6 + \ln 2) = 3 + \ln\sqrt{2}$

Aufgabe 8:

$a)\quad = -2x^2 + 9x + 4$ $\qquad b)\quad = 6x^2 + 10x + 37$

$c)\quad = -x^2 + 14x + 27$ $\qquad d)\quad = 6x^2 - 33x + 58$

$e)\quad = -3x^2 - 21x + 21$ $\qquad f)\quad = \frac{7}{2}x^2 - 35x - \frac{67}{4}$

$g)\quad = 2x^2 - 7x - 6$ $\qquad h)\quad = 18x^2 + 6x - 14$

$i)\quad = 4x^2 + 39x - 49$ $\qquad j)\quad = -1,75x^2 + \frac{61}{20}x + 2,5$

$k)\quad = \frac{-11x^2 + 43x}{12}$ $\qquad l)\quad = -\frac{19}{15}x^2 + \frac{251}{60}x + \frac{509}{32}$

Aufgabe 9:

$a)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$ $\qquad b)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

$c)\quad \Rightarrow x = 2$ $\qquad d)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

$e)\quad \Rightarrow x = \frac{75}{32}$ $\qquad f)\quad \Rightarrow x = \sqrt[5]{11}$

$g)\quad \Rightarrow x = 2\sqrt[4]{2}$ $\qquad h)\quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm 80\sqrt{10}$

Aufgabe 10:

$a) \quad \Rightarrow x \approx 1,3863$	$b) \quad \Rightarrow x \approx -0,4014$
$c) \quad \Rightarrow x \approx 0,4700$	$d) \quad \Rightarrow x \approx 0,5945$
$e) \quad \Rightarrow x \approx 1,1133$	$f) \quad \Rightarrow x \approx 0,3962$
$g) \quad \Rightarrow x \approx 2,7740$	$h) \quad \Rightarrow x \approx 2,6021$
$i) \quad \Rightarrow x \approx 5,3171$	$j) \quad \Rightarrow x \approx 21,8717$
$k) \quad \Rightarrow x \approx 0,6486$	$l) \quad \Rightarrow x \approx 0,4892$
$m) \quad \Rightarrow x \approx 35,1716$	$n) \quad \Rightarrow x \approx -1,3785$
$o) \quad \Rightarrow x \approx -0,2589$	$p) \quad \Rightarrow x \approx 4,2500$
$q) \quad \Rightarrow x = 0$	$r) \quad \Rightarrow x \approx -0,4901$

Aufgabe 11:

$a) \quad \Rightarrow x \approx 0,0498$	$b) \quad \Rightarrow x \approx 53,5982$
$c) \quad \Rightarrow x \approx 548,317$	$d) \quad \Rightarrow x \approx 296,826$
$e) \quad \Rightarrow x \approx -3,2680$	$f) \quad \Rightarrow x \approx 104164,0000$
$g) \quad \Rightarrow x \approx 0,5773$	$h) \quad \Rightarrow x \approx 0,1581$
$i) \quad \Rightarrow x \approx -3,0000$	$j) \quad \Rightarrow x \approx 9,2512 \cdot 10^{-11}$
$k) \quad \Rightarrow x \approx 6,5208$	$l) \quad \Rightarrow x \approx 0,7012$
$m) \quad \Rightarrow x \approx 1,0668$	$n) \quad \Rightarrow x \approx 0,2125$
$o) \quad \Rightarrow x = -3,2$	$p) \quad \Rightarrow x \approx -0,8074$

Aufgabe 12:

$a) \quad \Rightarrow x = \ln 2$	$b) \quad \Rightarrow x = 0,158975$
$c) \quad \Rightarrow x = 2,4365$	$d) \quad \Rightarrow x = 0,33985$
$e) \quad \Rightarrow x = -1,18015$	$f) \quad \Rightarrow x = -0,145703$
$g) \quad \Rightarrow x = 1,14473$	$h) \quad \Rightarrow x = -0,552241$

Aufgabe 13:

$a)\ x = \frac{11}{2}$ $b)\ x = \frac{1}{5}$ $c)\ x = \frac{16}{13}$ $d)\ x = 2$
$e)\ x = \frac{7}{3}$ $f)\ x = \frac{1}{2}$ $g)\ x = 8$ $h)\ x = \frac{8}{9}$
$i)\ x = \frac{17}{4}$ $j)\ x = -8$ $k)\ x = -\frac{13}{2}$ $l)\ x = 1$
$m)\ x = \frac{47}{32}$ $n)\ x = \frac{57}{23}$ $o)\ x = -\frac{19}{15}$ $p)\ x = \frac{14}{13}$
$q)\ x = \frac{54}{65}$ $r)\ x = \frac{86}{49}$ $s)\ x = -1$ $t)\ x = -\frac{33}{23}$
$u)\ x = \frac{30}{167}$ $v)\ x = \frac{275}{327}$ $w)\ x = \frac{303}{85}$ $x)\ x = -\frac{263}{1175}$
$y)\ x = \frac{2901}{857}$ $z)\ x = \frac{32}{399}$

Aufgabe 14:

$a)\ x = \frac{32}{3}$ $b)\ x = \frac{56}{5}$ $c)\ x = -\frac{14}{3}$ $d)\ x = -31$
$e)\ x = -\frac{25}{6}$ $f)\ x = -\frac{64}{27}$ $g)\ x = -\frac{5}{18}$ $h)\ x = -\frac{13}{14}$
$i)\ x = \frac{94}{9}$ $j)\ x = \frac{14}{5}$ $k)\ x = \frac{4}{57}$ $l)\ x = -\frac{875}{429}$
$m)\ x = -\frac{29}{22}$ $n)\ x = \frac{159}{134}$ $o)\ x = -\frac{16}{15}$ $p)\ x = \frac{3}{68}$
$q)\ x = \frac{455}{72}$ $r)\ x = \frac{159}{59}$ $s)\ x = \frac{55}{74}$ $t)\ x = 2$

Aufgabe 15:

$a)\ x = 4$ $b)\ x = 4$ $c)\ x = 1$ $d)\ x = 3$
$e)\ x = \frac{13}{5}$ $f)\ x = \frac{1}{5}$ $g)\ x = 13$ $h)\ x = \frac{9}{4}$
$i)\ x = 2$ $j)\ x = \frac{19}{5}$ $k)\ x = -\frac{19}{3}$ $l)\ x = -\frac{200}{7}$
$m)\ x = \frac{31}{4}$ $n)\ x = 2$

Aufgabe 16:

$a)$ $m = 15$	$b)$ $h = 6$	$c)$ $T = 4,5$
$d)$ $M = 1500$	$e)$ $y = 5,35$	$f)$ $a = -\frac{108}{7}$
$g)$ $T = \frac{4}{5}$	$h)$ $r = 20$	$i)$ $a = \frac{3}{16}$
$j)$ $r = \frac{171}{400}$	$k)$ $o = \frac{7}{3}$	$l)$ $D = 15$
$m)$ $o = -0,38475$	$n)$ $d = \frac{32}{33}$	$o)$ $d \in \mathbb{C}$ beliebig

Aufgabe 17:

$a)$ $x = c - a - b$	$b)$ $x = \frac{d + c}{a}$
$c)$ $x = \frac{zt - hf}{gl}$	$d)$ $x = \frac{d}{a} + b$
$e)$ $x = \frac{ad}{b}$	$f)$ $x = \frac{ka}{d}$
$g)$ $x = \frac{p - q}{b - d}$	$h)$ $x = a + d - t(z + s)$
$i)$ $x = \frac{z(f + u)}{ar} - \frac{d}{a}$	$j)$ $x = \frac{r - g(a + d)}{t}$
$k)$ $x = d + \frac{l(e - d)}{a}$	$l)$ $x = \frac{p}{s} - \frac{t + q}{ws}$

Aufgabe 18:

$a)\ \ a = \dfrac{bc}{d}\ ;\ b = \dfrac{ad}{c}\ ;\ c = \dfrac{ad}{b}\ ;\ d = \dfrac{bc}{a}$

$b)\ \ a = \dfrac{bc}{d}\ ;\ b = \dfrac{ad}{c}\ ;\ c = \dfrac{ad}{b}\ ;\ d = \dfrac{bc}{a}$

$c)\ \ a = b + c - d\ ;\ b = a + d - c\ ;\ c = a + d - b\ ;\ d = b + c - a$

$d)\ \ a = b(d - c)\ ;\ b = \dfrac{a}{d - c}\ ;\ c = d - \dfrac{a}{b}\ ;\ d = c + \dfrac{a}{b}$

$e)\ \ a = \dfrac{d}{eb} - \dfrac{c}{b}\ ;\ b = \dfrac{d}{ea} - \dfrac{c}{a}\ ;\ c = \dfrac{d}{e} - ab\ ;\ d = e(ab + c)\ ;\ e = \dfrac{1}{e(ab + c)}$

$f)\ \ a = c(d - e) - b\ ;\ b = c(d - e) - a\ ;\ c = \dfrac{a + b}{d - e}\ ;\ d = \dfrac{a + b}{c} + e\ ;\ e = d - \dfrac{a + b}{c}$

$g)\ \ a = \dfrac{d}{e(b - c)}\ ;\ b = \dfrac{d}{ea} + c\ ;\ c = b - \dfrac{d}{ea}\ ;\ d = ae(b - c)\ ;\ e = \dfrac{d}{a(b - c)}$

$h)\ \ a = (b - d)(e - gh - c)\ ;\ b = d + \dfrac{a}{e - gh - c}\ ;\ c = e - gh - \dfrac{a}{b - d}\ ;\ d = b - \dfrac{a}{e - gh - c}\ ;$

$e = c + gh + \dfrac{a}{b - d}\ ;\ g = \dfrac{e - c - \frac{a}{b-d}}{h}\ ;\ h = \dfrac{e - c - \frac{a}{b-d}}{g}$

$i)\ \ a = \dfrac{d - e}{f(b + c)}\ ;\ b = \dfrac{d - e}{fa} - c\ ;\ c = \dfrac{d - e}{fa} - b\ ;\ d = af(b + c) + e\ ;$

$e = d - af(b + c)\ ;\ f = \dfrac{d - e}{a(b + c)}$

$j)\ \ a = \dfrac{c(e + 1)}{d(b - e)}\ ;\ b = e + \dfrac{c(e + 1)}{da}\ ;\ c = \dfrac{(b - e)da}{e + 1}\ ;\ d = \dfrac{c(e + 1)}{d(b - e)}\ ;\ e = \dfrac{ab - \frac{c}{d}}{a - \frac{c}{d}}$

Aufgabe 19:

$x = 67,2$

Aufgabe 20:

$a)\ \ x=-4$ $b)\ \ x=-8$ $c)\ \ x=5$
$d)\ \ x=-16$ $e)\ \ x=8$ $f)\ \ x=-2$
$g)\ \ x=11$ $h)\ \ x=-\frac{1}{13}$ $i)\ \ x=\frac{1}{2}$
$j)\ \ x=-\frac{7}{5}$ $k)\ \ x=-\frac{33}{7}$ $l)\ \ x=-\frac{1}{3}$
$m)\ \ x=-12$ $n)\ \ x=-18$ $o)\ \ x=12$
$p)\ \ x=-30$ $q)\ \ x=-\frac{8}{5}$ $r)\ \ x=-\frac{48}{5}$
$s)\ \ x=-3,2$ $t)\ \ x=1,5$ $u)\ \ x=-3$
$v)\ \ x=-7,4$ $w)\ \ x=-34,8$ $x)\ \ x=-17$

Aufgabe 21:

$a)\ \ x=\frac{32}{7}$ $b)\ \ x=\frac{5}{2}$ $c)\ \ x=\frac{77}{9}$
$d)\ \ x=15$ $e)\ \ x=6$ $f)\ \ x=\frac{15}{4}$
$g)\ \ x=\frac{22}{9}$ $h)\ \ x=\frac{29}{3}$ $i)\ \ x=15$
$j)\ \ x=\frac{65}{14}$ $k)\ \ x=\frac{34}{21}$ $l)\ \ x=-\frac{9}{40}$
$m)\ \ x=-\frac{43}{16}$ $n)\ \ x=-\frac{13}{44}$ $o)\ \ x=\frac{1}{5}$
$p)\ \ x=\frac{3}{16}$ $q)\ \ x=-\frac{20}{49}$ $r)\ \ x=-\frac{11}{2}$
$s)\ \ x=-\frac{46}{27}$ $t)\ \ x=-\frac{7}{5}$ $u)\ \ x=\frac{34}{21}$

Aufgabe 22:

$a)\ \ me^{rry}=x-mas$

Aufgabe 23:

$a)\ \ x=3$ $b)\ \ x=1$ $c)\ \ x=8$

$d)\ x = 3$ $e)\ x = 2$ $f)\ x = 2$
$g)\ x = 1$ $h)\ x = 5$ $i)\ x = 4$
$j)\ x = 1$ $k)\ x = 4$ $l)\ x = 2$
$m)\ x = 5$ $n)\ x = 2$ $o)\ x = 1$
$p)\ x = 3$ $q)\ x = 6$ $r)\ x = 2$

Aufgabe 24:

$a)\ x = 5\,\mathrm{kg}$ $b)\ x = 3\,\mathrm{kg}$ $c)\ x = 4\,\mathrm{kg}$ $d)\ x = 2\,\mathrm{kg}$ $e)\ x = 2\,\mathrm{kg}$
$f)\ x = 5\,\mathrm{kg}$ $g)\ x = 0{,}75\,\mathrm{kg}$ $h)\ x = 1{,}8\bar{3}\,\mathrm{kg}$ $i)\ x = 1{,}56\,\mathrm{kg}$ $j)\ x = \frac{2a-c+2b}{2}$

Aufgabe 25: *Vervollständige die Tabelle.*

a	b	c	$a+2\cdot b$	$a\cdot b\cdot c$	$a+b\cdot \square$	$\left(3\cdot \square - b\right)\cdot 2$	$2\cdot c \square 5\cdot b \square 3\cdot a$
2	6	3	14	36	20	6	33
3	4	6	11	72	27	28	29
7	3	5	13	105	22	24	9
5	8	11	21	440	93	50	58
9	2	13	13	234	35	74	22
12	6	8	24	576	60	36	18
11	14	13	39	2002	193	50	76

Aufgabe 26: *Vervollständige die Tabelle.*

a	b	c	$\frac{a}{b}+\frac{2}{3}$	$a:\frac{b}{c}$	$\frac{c}{a}-\frac{\square}{9}$	$\frac{a}{c}\square\frac{c}{b}$	$\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$
4	6	3	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{19}{36}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{41}{12}$
2	4	8	$\frac{7}{6}$	4	$\frac{34}{9}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{13}{3}$
6	3	5	$\frac{8}{3}$	10	$\frac{11}{18}$	$\frac{43}{15}$	$\frac{61}{30}$
10	8	9	$\frac{23}{12}$	$\frac{45}{4}$	$\frac{61}{90}$	$\frac{161}{72}$	$\frac{1043}{270}$
9	2	11	$\frac{31}{6}$	$\frac{99}{2}$	1	$\frac{139}{22}$	$\frac{175}{99}$
8	6	4	2	$\frac{16}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{2}$
7	14	9	$\frac{7}{6}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{67}{63}$	$\frac{179}{126}$	$\frac{929}{189}$

Aufgabe 27: *Vervollständige die Tabelle.*

a	b	c	$a-2\cdot b$	$b^3-c\cdot a$	$a\cdot b \square c$	$\frac{\left(\square\cdot c+2\cdot b\right)}{4}$	$a\cdot\square-c\cdot\frac{5}{4}$
4	9	3	-14	717	12	$\frac{21}{2}$	$\frac{129}{4}$
2	4	8	-6	48	1	18	-2
6	3	5	0	-3	$\frac{18}{5}$	$\frac{23}{2}$	$\frac{47}{4}$
10	8	9	-6	422	$\frac{80}{9}$	22	$\frac{275}{4}$
9	4	15	1	-71	$\frac{12}{5}$	32	$\frac{69}{4}$
-8	6	4	-20	248	-12	11	-53
7	-2	9	11	-71	$-\frac{14}{9}$	17	$-\frac{101}{4}$

Aufgabe 28: *Vervollständige die Tabelle.*

a	b	c	$(a-b)\cdot c$	$\left(c-b+\square\right)^2$	$(2\cdot c+3)\cdot a$	$\frac{a^2\cdot b\square c}{12}$	$\left(\square-b+2\cdot a\right)\cdot c$
-4	7	3	-33	64	-36	28	-36
3	-2	8	40	169	57	-12	88
2	9	5	-35	4	26	15	-10
-6	-4	9	-18	49	-126	-108	-45
9	-5	11	154	625	225	$\frac{1485}{4}$	286
8	4	4	16	64	88	$\frac{256}{3}$	60
-8	-7	-9	9	100	120	336	54

Aufgabe 29: *Löse die Gleichung in korrekter Schreibweise nach x auf.* (Mit Beispiellösung!)

a) $4x + 4 + 7x = 26$

$11x + 4 = 26 \qquad |-4$

$11x = 22 \qquad |: 11$

$x = 2$

b) $14 + 7x + 6 = 5 + 8x + 4x \qquad \Rightarrow \quad x = 3$

c) $4 + 6x + 11 + 6x = 7x + 6 + x \qquad \Rightarrow \quad x = -\dfrac{9}{4}$

d) $13 + 5x + 9x + 3 = 23 + 9x - 4x + 11 \qquad \Rightarrow \quad x = 2$

e) $9x + 4r + 6 - 4x + 11 = 7x + 2 + 6r + 4 - 2r \qquad \Rightarrow \quad x = \dfrac{11}{2}$

f) $5z + 26x + z + 7 - 3z + 5x = 16 + 3z + 7x + 15 + 6x \qquad \Rightarrow \quad x = \dfrac{4}{3}$

Aufgabe 30: *Löse die Gleichung in korrekter Schreibweise nach dem unbekannten Parameter auf und setze die anderen Parameterwerte in die Gleichung ein.* (Mit Beispiellösung!)

a) $2a + b = c \qquad$ mit: $\qquad b = 4a \ \wedge \ c = 24$

$2a + 4a = 24$

$6a = 24 \qquad |: 6$

$a = 4$

b) $x + 6y = y + 9z \qquad$ mit: $\qquad y = 4 \ \wedge \ x = 4z \qquad \Rightarrow \quad z = 4$

c) $11k + 2r = 5t + c \qquad$ mit: $\qquad r = 6 \ \wedge \ t = 6 \ \wedge \ c = 4k \qquad \Rightarrow \quad k = \dfrac{18}{7}$

d) $5n + 3m + 9s = n \cdot m + a \qquad$ mit: $\qquad n = 3 \ \wedge \ m = 6 \ \wedge \ a = 17s \qquad \Rightarrow \quad s = \dfrac{15}{8}$

Aufgabe 31: *Löse die Gleichung in korrekter Schreibweise nach x auf.* (Mit Beispiellösung!)

a) $ax - b = 0 \qquad |+b$

$ax = b \qquad |: a$

$x = \dfrac{b}{a}$

b) $\dfrac{rx}{s} - \dfrac{z}{u} = 0 \qquad \Rightarrow \quad x = \dfrac{zs}{ur}$

Aufgabe 32: *Löse die Gleichung in korrekter Schreibweise nach dem unbekannten Parameter auf und setze die anderen Parameterwerte in die Gleichung ein.* (Mit Beispiellösung!)

a) $r + t = u + v$ mit: $r = 2 + u \ \wedge \ t = 7 + 6u \ \wedge \ v = 19 + 2u$

$2 + u + 7 + 6u = u + 19 + 2u$

$9 + 7u = 19 + 3u \qquad |-3u$

$9 + 4u = 19 \qquad |-9$

$4u = 10 \qquad |: 4$

$u = \dfrac{5}{2}$

b) $5(c + 6) + 5t = 4(r + n)$ mit: $n = 4t + 3 \ \wedge \ r = 2t + 2 \ \wedge \ c = 5t + 3 \qquad \Rightarrow \ t = \dfrac{5}{6}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.14.1).

18.10.15 Lösungen zur quadratischen Ergänzung

Aufgabe 1:

a) $\Rightarrow x_1 = -1$

b) $\Rightarrow x_1 = 2$

c) $\Rightarrow x_{1,2} = -4 \pm \sqrt{17}$

d) $\Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{14}$

e) $\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$

f) $\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{145}}{6}$

g) $\Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 2$

h) $\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$

i) $\Rightarrow x_1 = 7 \wedge x_2 = -2$

j) $\Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{9}{32} \pm \dfrac{\sqrt{521}}{32}$

k) $\Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{5}{4} \pm \dfrac{\sqrt{33}}{4}$

l) $\Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{11}{6} \pm \dfrac{\sqrt{249}}{6}$

m) $\Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{11}{72} \pm \dfrac{\sqrt{3865}}{72}$

n) $\Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{3}{19} \pm \dfrac{7\sqrt{6}}{19}$

o) $\Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{\sqrt{6}}{4} \pm \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{4\sqrt{34} + 3}}{4}$

p) $\Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{\pi}{2e + 1} \pm \dfrac{\sqrt{4e\ln 2 + 2\ln 2 + \pi^2}}{2e + 1}$

Aufgabe 2:

$a) \quad \Rightarrow x_1 = -2$ $\qquad$ $b) \quad \Rightarrow x_1 = 8$

$c) \quad \Rightarrow x_1 = -5$ $\qquad$ $d) \quad \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

$e) \quad \Rightarrow x_1 = -1$ $\qquad$ $f) \quad \Rightarrow x_1 = 3$

$g) \quad \Rightarrow x_{1,2} = 2$ $\qquad$ $h) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -3$

$i) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{14}$ $\qquad$ $j) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{7}{2} \pm \frac{\sqrt{97}}{2}$

$k) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{41}}{2}$ $\qquad$ $l) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{3\sqrt{70}}{10}$

$m) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -2 \pm \frac{\sqrt{22}}{4}$ $\qquad$ $n) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{73}}{4}$

$o) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{3}{5} \pm \frac{\sqrt{161}}{10}$ $\qquad$ $p) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{25}{112} \pm \frac{\sqrt{2585}}{112}$

$q) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ $\qquad$ $r) \quad \Rightarrow x_{1,2} = x_1 = 1 \wedge x_2 = -5$

$s) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -4 \pm \frac{\sqrt{210}}{3}$ $\qquad$ $t) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{9}{16} \pm \frac{\sqrt{1041}}{16}$

$u) \quad \Rightarrow x_{1,2} = x_1 = 1 \wedge x_2 = -\frac{3}{2}$ $\qquad$ $v) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{34}}{2}$

$w) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{5}{8} \pm \frac{\sqrt{37}}{8}$ $\qquad$ $x) \quad \Rightarrow \mathbb{L} = \varnothing$

Aufgabe 3:

a) $a=\sqrt{d-b^2-c}$; $b=\sqrt{d-a^2-c}$; $c=d-a^2-b^2$; $d=a^2+b^2+c$

b) $a=\sqrt{\frac{c}{d^3}}$; $c=a^2d^3$; $d=\sqrt{\frac{c}{da}}$

c) $a=\frac{c-br}{r^2}$; $b=\frac{c+ar^2}{r}$; $c=br-ar^2$; $r_{1,2}=\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$

d) $a_{1,2}=\frac{b}{2r}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$; $b_{1,2}=\frac{a}{2r}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$; $r_{1,2}=\frac{b}{2a}\left(1\pm\sqrt{5}\right)$

e) $a=ce^{-b}$; $b=\ln\left(\frac{c}{a}\right)$; $c=ae^b$

f) $a=\sqrt{\frac{e^b}{s}}$; $b=\ln\left(sa^2\right)$; $s=\frac{e^b}{a^2}$

g) $d=\ln\left(\cos(w)-r^3\right)$; $r=\sqrt[3]{\cos(w)-e^d}$; $w=\arccos\left(e^d+r^3\right)$

h) $t=\frac{1}{w}\left(\phi+\arccos\left(e^{-yz}\right)\right)$; $w=\frac{1}{t}\left(\phi+\arccos\left(e^{-yz}\right)\right)$; $y=-\frac{1}{z}\ln\left(\sin\left(wt-\phi\right)\right)$;

$z=-\frac{1}{y}\ln\left(\sin\left(wt-\phi\right)\right)$; $\phi=wt-\arccos\left(e^{-yz}\right)$

i) $a=\frac{1}{b}\left(c+\ln\left(\arccos\left(\sin\left(r-t\right)\right)\right)\right)$; $b=\frac{1}{a}\left(c+\ln\left(\arccos\left(\sin\left(r-t\right)\right)\right)\right)$;

$c=ab-\ln\left(\arccos\left(\sin\left(r-t\right)\right)\right)$; $r=t+\arcsin\left(\cos\left(e^{ab-c}\right)\right)$;

$t=r-\arcsin\left(\cos\left(e^{ab-c}\right)\right)$

j) $a_{1,2}=\pm\sqrt{d-(b^2-b)^4e^{4c}}$; $b=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt[4]{a^2+d}}{e^c}}$; $c=\ln\left(\frac{\sqrt[4]{a^2+d}}{b^2-b}\right)$;

$d=(b^2-b)^4e^{4c}-a^2$

k) $a=e^{\frac{\ln(b\arccos(c))}{e^{\sqrt[n]{d}}}}$; $b=\frac{a^{e^{\sqrt[n]{d}}}}{\arccos(c)}$; $c=\cos\left(\frac{a^{e^{\sqrt[n]{d}}}}{b}\right)$; $d=\left(\ln\left(\log_a\left(b\arccos(c)\right)\right)\right)^n$;

$n=\log_{\ln(\log_a(b\arccos(c)))}d$

l) $a_{1,2}=\frac{\sin(r)^2}{2e^b}\pm\sqrt{\left(\frac{\sin(r)^2}{2e^b}\right)^2-e^b\sin(r)}$;

$b_{1,2}=\ln\left(\left|-\frac{a^2}{2\sin(r)}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2}{2\sin(r)}\right)^2+a\sin(r)}\right|\right)$;

$r_{1,2}=\arcsin\left(\frac{e^{2b}}{2a}\pm\sqrt{e^ba+\left(\frac{e^{2b}}{2a}\right)^2}\right)$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.15.1).

18.10.16 Lösungen zur Substitution

Aufgabe 1:

a) $\left(x^2+x+1\right)^3=8 \qquad \text{mit: } y=x^2+x+1 \Rightarrow y^3=8$

b) $(a+4x)^{\frac{1}{2}}=6b-c \qquad \text{mit: } y^2=4x+a \Rightarrow \sqrt{y^2}=6b-c$

c) $(18x-4ab)^2=c \qquad \text{mit: } \sqrt{y}=18x-4ab \Rightarrow \sqrt{y}^2=c$

d) $2^{2a-c}=32 \qquad \text{mit: } b=2a-c \Rightarrow 2^b=32$

e) $x=4a \qquad \text{mit: } y=x+4a \Rightarrow y+4a=4a$

f) $x^2+8x+16=0 \qquad \text{mit: } (y+4)^2=x^2+8x+16 \Rightarrow (y+4)^2=0$

g) $(3a+2x)(2x-3a)=0 \qquad \text{mit: } y=2x+3a \Rightarrow y^2-6ya=0$

h) $\ln\left(x^2+4x\right)=2 \qquad \text{mit: } y=x^2+4x \Rightarrow \ln y=2$

Aufgabe 2:

a) $x^3+4x^2-x-8=0 \Rightarrow y-8=0 \qquad \text{mit: } y=x^3+4x^2-x$

b) $\frac{x}{2}-\frac{2}{x}=0 \Rightarrow y-\frac{1}{y}=0 \qquad \text{mit: } y=\frac{x}{2}$

c) $\frac{x^2}{ab}+\frac{5}{ab}-3=0 \Rightarrow dx^2+5d-3=0 \qquad \text{mit : } d=\frac{1}{ab}$

d) $\frac{ax^2+bx-c}{5}=0 \Rightarrow \frac{y}{5a}=0 \qquad \text{mit: } y=a\left(ax^2+bx-c\right)$

e) $ax+bx+cx+xd+xe-f=0 \Rightarrow gx-f=0 \qquad \text{mit: } g=a+b+c+d+e$

f) $x^2+4x-8=0 \Rightarrow \left(\frac{y}{4}+2\right)^2=0 \qquad \text{mit: } y=4x-8$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.16.1).

18.10.17 Lösungen zu Gleichungssysteme

Aufgabe 1:

$a)$	$a = 31,5$ und	$b = 7,5$
$b)$	$a = \frac{19}{36}$ und	$b = \frac{77}{36}$
$c)$	$a = -4 \ \vee -6$ und	$b = -6 \ \vee -4$
$d)$	$a = -\frac{25}{7}$ und	$b = -\frac{1}{7}$
$e)$	$a = \frac{71}{18}$ und	$b = \frac{17}{18}$
$f)$	$a = -\frac{68}{7}$ und	$b = -\frac{17}{7}$
$g)$	$a \approx -1,856$ und	$b \approx -1,392$
$h)$	$a \approx 1,525$ und	$b \approx -0,320$
$i)$	$a = 2 \ \vee 5$ und	$b = 5 \ \vee 2$
$j)$	$a = \frac{89}{25}$ und	$b = \frac{948}{25}$
$k)$	$a = 3\sqrt{2} \ \vee -3\sqrt{2}$ und	$b = \frac{4}{3}\sqrt{2} \ \vee \frac{4}{3}\sqrt{2}$
$l)$	$a \approx 4,541$ und	$b \approx -0,075$
$m)$	$a = \frac{581}{44}$ und	$b = -\frac{3453}{88}$
$n)$	$a \approx 0,420$ und	$b \approx -0,047$
$o)$	$a = 36$ und	$b = 113,7\overline{8}$
$p)$	$a \approx -0,473 \ \vee 1,880$ und	$b \approx 1,880 \ \vee -0,473$

Aufgabe 2:

$a)$ $a = -\frac{23}{7}$; $b = -\frac{132}{91}$; $c = -\frac{131}{13}$

$b)$ $a = -\frac{18}{125}$; $b = \frac{324}{125}$; $c = -\frac{159}{125}$

$c)$ $a = \frac{262}{431}$; $b = \frac{458}{431}$; $c = -\frac{59}{431}$

$d)$ $a = 54,5$; $b = 16,3095$; $c = 20,1786$

$e)$ $a = -4,9014$; $b = 125,513$; $c = -3,17555$

$\vee$ $a = -2,91244$; $b = 0,73895$; $c = 0,004336$

Aufgabe 3:

$a)\ \ a = \frac{119}{667}\ ;\ b = \frac{709}{667}\ ;\ c = -\frac{127}{667}\ ;\ d = \frac{729}{667}$

$b)\ \ a = \frac{265}{141}\ ;\ b = \frac{4184}{141}\ ;\ c = \frac{449}{94}\ ;\ d = -\frac{1159}{94}$

$c)\ \ a = -2,41989\ ;\ b = -2,87754\ ;\ c = 0,437646\ ;\ d = -3,68417$

$\quad \vee \ \ a = 0,46511\ ;\ b = 3,57802\ ;\ c = -3,09291\ ;\ d = 3,73972$

$e)\ \ a = -0,729483\ ;\ b = 0,036474\ ;\ c = 0,269301\ ;\ d = 0,340426$

Aufgabe 4:

$a)\ \ x = 1 \quad \wedge \quad y = 4$
$b)\ \ x = 2 \quad \wedge \quad y = 12$
$c)\ \ x = 2 \quad \wedge \quad y = 6$
$d)\ \ x = 2 \quad \wedge \quad y = 3$
$e)\ \ x = 3 \quad \wedge \quad y = 5$
$f)\ \ x = 1 \quad \wedge \quad y = 2$
$g)\ \ x = 1 \quad \wedge \quad y = 7 \quad \wedge \quad z = 2$
$h)\ \ x = 2 \quad \wedge \quad y = 6 \quad \wedge \quad z = 4$

Aufgabe 5: *Löse das lineare Gleichungssystem. (Bestimme die Werte von x und y, sodass beide Gleichungen gleichzeitig eine wahre Aussage widerspiegeln.)*

$a)\ \ I.\ \ 2x + 2 = y$

$\quad II.\ \ 6 = 4y - x$

$I.$ in $II.\ \ 6 = 4(2x + 2) - x$

$$6 = 7x + 8 \quad |-8$$

$$-2 = 7x \quad |:7$$

$$-\frac{2}{7} = x$$

x in $I.\ \ y = 2\left(-\frac{2}{7}\right) + 2 = \frac{10}{7}$

$$a)\quad I.\ 4x = \frac{y}{2} + 3 \quad |:4$$
$$II.\ 6y = 3x - 4$$

$$I.\ x = \frac{y}{8} + \frac{3}{4}$$
$$II.\ 6y = 3x - 4$$

$$I.\text{ in } II.\ 6y = 3\left(\frac{y}{8} + \frac{3}{4}\right) - 4$$
$$6y = \frac{3y}{8} - \frac{7}{4} \quad \Big| - \frac{3y}{8}$$
$$\frac{45}{8}y = -\frac{7}{4} \quad \Big| \cdot \frac{8}{45}$$
$$y = -\frac{14}{45}$$
$$y \text{ in } I.\ x = \frac{1}{8} \cdot \left(-\frac{14}{45}\right) + \frac{3}{4} = \frac{32}{45}$$

$$c)\quad I.\ 4x + 6y = 9$$
$$II.\ 7 = y - 3x \quad |+3x$$

$$I.\ 4x + 6y = 9$$
$$II.\ 7 + 3x = y$$

$$II.\text{ in: } I.\ 4x + 6(7 + 3x) = 9$$
$$4x + 42 + 18x = 9$$
$$42 + 22x = 9 \quad |-42$$
$$22x = -33 \quad |:22$$
$$x = -\frac{3}{2}$$
$$x \text{ in: } II.\ y = 7 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned} d)\ I.\ 7a &= 2-4b \quad |:7 \\ II.\ 6b-2a &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I.\ a &= \frac{2}{7}-\frac{4}{7}b \\ II.\ 6b-2a &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I.\text{ in: }II.\ 6b-2\left(\frac{2}{7}-\frac{4}{7}b\right) &= 5 \\ 6b-\frac{4}{7}-\frac{8}{7}b &= 5 \quad \Big|+\frac{4}{7} \\ \frac{34}{7}b &= \frac{39}{7} \quad \Big|\cdot\frac{7}{34} \\ b &= \frac{39}{34} \\ b\text{ in: }I.\ a &= \frac{2}{7}-\frac{4}{7}\cdot\frac{39}{34} = -\frac{44}{119} \end{aligned}$$

Aufgabe 6: *Löse das lineare Gleichungssystem.*

$$\begin{aligned} I.\quad & 5x+3y+8z=9 \\ II.\quad & 7=z-4x-2y \quad |+4x+2y \quad \Rightarrow \quad z=7+4x+2y \\ III.\quad & 0=5z+3y-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II.\text{ in }I.\quad & 5x+3y+8(7+4x+2y)=9 \\ II.\text{ in }III.\quad & 0=5(7+4x+2y)+3y-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II.\text{ in }I.\quad & 5x+3y+56+32x+16y=9 \\ II.\text{ in }III.\quad & 0=35+28x+16y+3y-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II.\text{ in }I.\quad & 56+37x+19y=9 \\ II.\text{ in }III.\quad & 0=29+28x+19y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (II.\text{ in }III.\ )-(\ II.\text{ in }I.)\quad & 56+37x+19y-(29+28x+19y)=9-0 \\ & 27+9x=9 \quad |-27 \\ & 9x=-18 \quad |:9 \\ & x=-2 \\ x\text{ in }(II.\text{ in }III.\ )\quad & 56+37(-2)+19y=9 \\ & -18+19y=9 \quad |+18 \\ & 19y=27 \quad |:19 \\ & y=\frac{27}{19} \\ y\text{ und }x\text{ in }II.\quad & z=7+4(-2)+2\left(\frac{27}{19}\right)=\frac{35}{19} \end{aligned}$$

Aufgabe 7: *Löse die Gleichungssysteme.*

$a)\ x+4=y+12 \ \wedge\ x=4y+5 \ \Rightarrow\ x=9 \ \wedge\ y=1$

$b)\ y=9x-7 \ \wedge\ y-x=6x-3 \ \Rightarrow\ x=2 \ \wedge\ y=11$

$c)\ s+2=r-5 \ \wedge\ r=7s-8 \ \Rightarrow\ r=\dfrac{19}{2} \ \wedge\ s=\dfrac{5}{2}$

$d)\ a=7c+9 \ \wedge\ 6c-a=5-2c \ \Rightarrow\ a=107 \ \wedge\ c=14$

$e)\ 3k+8=7z-4 \ \wedge\ z+6k=4k-5 \ \Rightarrow\ z=\dfrac{9}{17} \ \wedge\ k=-\dfrac{47}{17}$

$f)\ 2x+4=3y-5 \ \wedge\ x+y=4y+5x-5 \ \Rightarrow\ x=-\dfrac{2}{3} \ \wedge\ y=\dfrac{23}{9}$

Aufgabe 8: *Löse die Gleichungssysteme.*

$a)\ r+z=z+12 \ \wedge\ r=z+5 \ \Rightarrow\ r=12 \ \wedge\ z=7$

$b)\ p=q+7 \ \wedge\ p-5=q+3p \ \Rightarrow\ p=\dfrac{2}{3} \ \wedge\ q=-\dfrac{19}{3}$

$c)\ 3r-6=5n+2 \ \wedge\ r+n+6=0 \ \Rightarrow\ r=-\dfrac{11}{4} \ \wedge\ n=-\dfrac{13}{4}$

$d)\ 5k-3y=0 \ \wedge\ 3k-5=7y+3 \ \Rightarrow\ k=-\dfrac{12}{13} \ \wedge\ y=-\dfrac{20}{13}$

$e)\ 2h+4g=8g-6 \ \wedge\ 5h+4g=9 \ \Rightarrow\ h=\dfrac{12}{7} \ \wedge\ g=\dfrac{3}{7}$

$f)\ \dfrac{4}{3}x-\dfrac{3}{5}y=0 \ \wedge\ 4x-5y-4=0 \ \Rightarrow\ x=-\dfrac{9}{16} \ \wedge\ y=-\dfrac{5}{4}$

$g)\ y=5x-4 \ \wedge\ 5-3x=z \ \wedge\ 6=x+y+z \ \Rightarrow\ x=\dfrac{5}{3} \ \wedge\ y=\dfrac{13}{3} \ \wedge\ z=0$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.17.1).

18.10.18 Lösungen zu Ungleichungen

Aufgabe 1:

$a)\ \mathbb{L}=\left\{x\in\mathbb{R}^+\right\}$	$b)\ \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}\mid x>4\}$	$c)\ \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 5\}$
$d)\ \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leq 7\}$	$e)\ \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-4\}$	$f)\ \mathbb{L}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq -\dfrac{3}{4}\right\}$
$g)\ \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{Q}\mid x>5{,}7\}$	$h)\ \mathbb{L}=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid x\leq \dfrac{5}{6}\right\}$	$i)\ \mathbb{L}=\left\{x\in\mathbb{Q}\mid x<-\dfrac{8}{7}\right\}$
$j)\ \mathbb{L}=\{0,1\}$	$k)\ \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{N}\}$	$l)\ \mathbb{L}=\varnothing$

Aufgabe 2:

$a)\ \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}\,|x < 3\}$ $b)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\middle|x < \frac{6}{7}\right\}$

$c)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\middle|x \leq -\frac{8}{3}\right\}$ $d)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\middle|x \geq \frac{1}{9}\right\}$

$e)\ \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}\,|x > 6\}$ $f)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\middle|x \geq \frac{56}{19}\right\}$

$g)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{Q}\middle|x > \frac{17}{80}\right\}$ $h)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{Q}\middle|x \geq \frac{118}{9}\right\}$

$i)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{Q}\middle|x > \frac{17}{24}\right\}$ $j)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\middle|x \geq \frac{55}{46}\right\}$

$k)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\middle|x \geq \frac{85}{168}\right\}$ $l)\ \mathbb{L} = \left\{x \in \mathbb{R}\middle|x \geq -\frac{160}{9}\right\}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.18.1).

18.10.19 Lösungen zu Fakultäten und Binomialkoeffizienten

Aufgabe 1:

$a)\ 5! = 120$ $b)\ 3! = 6$ $c)\ \frac{7!}{5!} = 120$

$d)\ \frac{3!}{4!} \cdot 0! = \frac{1}{4}$ $e)\ \frac{4!b!}{b!} = 24$ $f)\ 4! \cdot 3! \cdot 2! = 288$

Aufgabe 2:

$a)\ \binom{2}{1} = 2$ $b)\ \binom{8}{4} = 70$ $c)\ \binom{5}{3} \cdot \binom{289}{0} = 10$

$d)\ \binom{7}{2} = 21$ $e)\ \binom{3}{1} = 3$ $f)\ \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{2} = 6 \cdot 3 = 18$

Aufgabe 3: *Drücke die Terme durch Fakultäten aus.*

a) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$

b) $11 \cdot 10 \cdot 9 = \frac{11!}{8!}$

c) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{22 \cdot 21 \cdot 20} = \frac{6! \cdot 19!}{22! \cdot 3!}$

d) $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{9! \cdot 3!}{6!}$

e) $11 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 23 = \frac{23! \cdot 11!}{20! \cdot 8!}$

f) $\frac{6 \cdot 66 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 67 \cdot 5 \cdot 65}{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 10} = \frac{67! \cdot 7! \cdot 9!}{64! \cdot 3! \cdot 13!}$

Aufgabe 4: *Beweise folgende Identitäten.*

a)
$$\begin{aligned}
\binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!k}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
c)\quad \binom{n}{k} &= \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \\
&= \frac{n}{k}\left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}\right) \qquad \text{mit: } n(n-1)! = n! \\
&= \left(\frac{n!}{(k!(n-k)!}\right) \\
&= \binom{n}{k}
\end{aligned}
$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.19.1).

18.10.20 Lösungen zu Zahlensysteme

Aufgabe 1:

$a)$ 23	$b)$ 44	$c)$ 62	$d)$ 132
$e)$ 258	$f)$ 439	$g)$ 545	$h)$ 327
$i)$ 863	$j)$ 636	$k)$ 2677	$l)$ 1567
$m)$ 1164	$n)$ 6784	$o)$ 2628	$p)$ 1238
$q)$ 3741	$r)$ 9999		

Aufgabe 2:

$a)$ 502	$b)$ 177	$c)$ 400	$d)$ 4045
$e)$ 5019	$f)$ 469	$g)$ 2356	$h)$ 121

Aufgabe 3:

a) XLVII	*b*) LXXXII
c) XXXVI	*d*) XCIII
e) DCCXLII	*f*) DCLXXVI
g) CCCLII	*h*) DCXXIII
i) DCCCXXXI	*j*) CDII
k) MMDCCXXIX	*l*) MMMDXXVI
m) MMLIII	*n*) MMMMXIII
o) MCMLXXXVII	*p*) MCCCLXXXIII

Aufgabe 4:

a) 23	*b*) 53	*c*) 45
d) 21	*e*) 87	*f*) 109
g) 73	*h*) 69	*i*) 84
j) 94	*k*) 77	*l*) 82
m) 139	*n*) 181	*o*) 245
p) 167	*q*) 277	*r*) 469

Aufgabe 5:

a) 180	*b*) 819	*c*) 3318	*d*) 56
e) 366	*f*) 1347	*g*) 1617 =	*h*) 1778

Aufgabe 6:

a) $[101111]_2$ *b*) $[1010010]_2$
c) $[100100]_2$ *d*) $[1011101]_2$
e) $[1011100110]_2$ *f*) $[1010100100]_2$
g) $[101100000]_2$ *h*) $[1001101111]_2$
i) $[1100111111]_2$ *j*) $[110010010]_2$
k) $[101010101001]_2$ *l*) $[110111000110]_2$
m) $[100000000101]_2$ *n*) $[111110101101]_2$
o) $[11111000011]_2$ *p*) $[10101100111]_2$

Aufgabe 7:

a) 282 *b*) 343 *c*) 408 *d*) 473
e) 1067 *f*) 3753 *g*) 3002 *h*) 4258
i) 10004 *j*) 28904 *k*) 15094 *l*) 24800
m) 9027 *n*) 21546 *o*) 63299 *p*) 67541

Aufgabe 8:

a) 523 *b*) 141 *c*) 8601 *d*) 3266
e) 337 *f*) 53878 *g*) 1266 *h*) 97

Aufgabe 9:

a) $[57]_8$ *b*) $[122]_8$ *c*) $[44]_8$ *d*) $[135]_8$
e) $[1346]_8$ *f*) $[1244]_8$ *g*) $[540]_8$ *h*) $[1157]_8$
i) $[1477]_8$ *j*) $[622]_8$ *k*) $[5251]_8$ *l*) $[6706]_8$
m) $[4005]_8$ *n*) $[7655]_8$ *o*) $[3703]_8$ *p*) $[2547]_8$

Aufgabe 10:

$a)$ 188	$b)$ 243	$c)$ 92	$d)$ 169
$e)$ 1002	$f)$ 3149	$g)$ 2266	$h)$ 2929
$i)$ 43981	$j)$ 25559	$k)$ 40766	$l)$ 32050
$m)$ 16711935	$n)$ 11250603	$o)$ 7287980	$p)$ 8211994

Aufgabe 11:

$a)$ 6497	$b)$ 4050	$c)$ 1875	$d)$ 71
$e)$ 14079	$f)$ 14793	$g)$ 2290027311	$h)$ 8

Aufgabe 12:

$a)$ $[2F]_{16}$	$b)$ $[52]_{16}$	$c)$ $[24]_{16}$	$d)$ $[5D]_{16}$
$e)$ $[2E6]_{16}$	$f)$ $[2A4]_{16}$	$g)$ $[160]_{16}$	$h)$ $[26F]_{16}$
$i)$ $[33F]_{16}$	$j)$ $[192]_{16}$	$k)$ $[AA9]_{16}$	$l)$ $[DC6]_{16}$
$m)$ $[805]_{16}$	$n)$ $[FAD]_{16}$	$o)$ $[7C3]_{16}$	$p)$ $[567]_{16}$

Aufgabe 13:

$a)$ 556	$b)$ 156	$c)$ 388	$d)$ 5999
$e)$ 1642	$f)$ 198	$g)$ 1303	$h)$ 497
$i)$ 62548	$j)$ 625	$k)$ 2219	$l)$ 648
$m)$ 4930	$n)$ 2031	$o)$ 882	$p)$ 12139

Aufgabe 14:

$a)$ $[100111]_3$	$b)$ $[2042]_5$	$c)$ $[21002]_4$	$d)$ $[1063]_7$
$e)$ $[535]_9$	$f)$ $[22031]_4$	$g)$ $[6610]_8$	$h)$ $[3AA3]_{12}$
$i)$ $[5152]_{11}$	$j)$ $[2DD]_{20}$	$k)$ $[9E1J]_{25}$	$l)$ $[10B94]_{13}$
$m)$ $[8D4C]_{17}$	$n)$ $[BF84]_{23}$		

Aufgabe 15:

$a)$ 53	$b)$ 1422	$c)$ 749	$d)$ 1773
$e)$ 42	$f)$ 1170	$g)$ 593	$h)$ 1525
$i)$ 9071	$j)$ 62626	$k)$ 7145	$l)$ 1242
$m)$ 5457	$n)$ 10390	$o)$ 5759	$p)$ 15

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.20.5).

18.10.21 Lösungen zu Einheiten

Aufgabe 1:

$a)$ 180 min	$b)$ 8 h	$c)$ 660 s	$d)$ 24 min
$e)$ 10800 s	$f)$ 7 h	$g)$ 780 min	$h)$ 33 h
$i)$ 156 h	$j)$ 14880 min	$k)$ 17 h	$l)$ 83 min
$m)$ 264 h	$n)$ 4 d	$o)$ 41 h	$p)$ 172800 s
$q)$ 73440 min	$r)$ 5340 min	$s)$ 117 min	$t)$ 6 d
$u)$ 777600 s	$v)$ 689 h	$w)$ 31620 min	$x)$ 44640 min
$y)$ 1461 d	$z)$ 252460800 s		

Aufgabe 2:

$a)$ 285 min	$b)$ $9,\overline{6}$ h	$c)$ 3288 s
$d)$ $159,11\overline{6}$ min	$e)$ 9144 s	$f)$ $15,5952\overline{7}$ h
$g)$ $382,8$ min	$h)$ $14,38\overline{3}$ h	$i)$ $55,81\overline{6}$ h
$j)$ 687 min	$k)$ $127,575$ h	$l)$ $111,7\overline{3}$ min
$m)$ $14,4$ h	$n)$ $6,1\overline{6}$ d	$o)$ $126,9$ h
$p)$ 3456 s	$q)$ $2721,6$ min	$r)$ $498,6$ min
$s)$ $248,2\overline{6}$ min	$t)$ $64,41\overline{6}$ d	$u)$ 403661 s
$v)$ $178,25$ h	$w)$ $2752,5$ min	$x)$ 262980 min

Aufgabe 3:

$a)$ $45\,\mathrm{kg}$	$b)$ $34\,\mathrm{m}$	$c)$ $7000\,\mathrm{g}$
$d)$ $9\,\mathrm{t}$	$e)$ $4\,\mathrm{m}$	$f)$ $7\,\mathrm{km}$
$g)$ $5000\,\mathrm{mg}$	$h)$ $64\,\mathrm{m}^2$	$i)$ $4\,\mathrm{l}$
$j)$ $2000000\,\mathrm{g}$	$k)$ $34000\,\mathrm{l}$	$l)$ $4000\,\mathrm{mm}^3$
$m)$ $500000000\,\mathrm{dm}^2$	$n)$ $73000000\,\mathrm{cm}^2$	$o)$ $65\,\mathrm{kg}$
$p)$ $43\,\mathrm{cm}^3$	$q)$ $23000000\,\mathrm{mg}$	$r)$ $490\,\mathrm{dm}^3$
$s)$ $6700\,\mathrm{dm}^2$	$t)$ $450\,\mathrm{kg}$	$u)$ $504000000\,\mathrm{m}^2$
$v)$ $210\,\mathrm{t}$	$w)$ $300\,\mathrm{ha}$	$x)$ $2000000000000\,\mathrm{l}$

Aufgabe 4:

$a)$ $307\,\mathrm{cm}$	$b)$ $1347\,\mathrm{mm}$
$c)$ $3650\,\mathrm{g}$	$d)$ $43\,\mathrm{kg}$
$e)$ $24\,\mathrm{dm}$	$f)$ $2004\,\mathrm{m}$
$g)$ $2980\,\mathrm{dm}^2$	$h)$ $1\,\mathrm{dm}^2$
$i)$ $402\,\mathrm{cm}$	$j)$ $1978\,\mathrm{m}$
$k)$ $4\,\mathrm{l} = 4\,\mathrm{dm}^3$	$l)$ $27\,\mathrm{m}^3$
$m)$ $330\,\mathrm{m}^2$	$n)$ $3456789\,\mathrm{g}$
$o)$ $1299\,\mathrm{cm}^3$	$p)$ $69960\,\mathrm{dm}^3$
$q)$ $11\,\mathrm{m}^2$	$r)$ $1010101\,\mathrm{m}^2$
$s)$ $3\,\mathrm{kg}$	$t)$ $37546\,\mathrm{g}$
$u)$ $312\,\mathrm{a}$	$v)$ $1653\,\mathrm{cm}$
$w)$ $27\,\mathrm{l} = 27\,\mathrm{dm}^3$	$x)$ $3271\,\mathrm{m}$
$y)$ $2801604\,\mathrm{cm}^3$	$z)$ $2305\,\mathrm{ha}$

Aufgabe 5:

$a)$ $1\,\mathrm{kg} + 3\,\mathrm{m}$	$b)$ $1\,\mathrm{dm} + 4\,\mathrm{l}$
$c)$ $350\,\mathrm{cm}^2 + 5\,\mathrm{l}$	$d)$ $5030\,\mathrm{g} + 135\,\mathrm{min}$
$e)$ $827\,\mathrm{cm} + 2\,\mathrm{s} + 5\,\mathrm{g}$	$f)$ $160\,\mathrm{s} + 545\,\mathrm{mm}^2$
$g)$ $2320\,\mathrm{s} + 35\,\mathrm{g}$	$h)$ $100\,\mathrm{l}$
$i)$ $50\,\mathrm{kg} + 3800\,\mathrm{min}$	$j)$ $455\,\mathrm{dm}^2 + 2830\,\mathrm{s}$
$k)$ $93\,\mathrm{dm} + 1\,\mathrm{min}$	$l)$ $187\,\mathrm{min} + 51\,\mathrm{dm}$
$m)$ $5\,\mathrm{h} + 2\,\mathrm{ha} + 8\,\mathrm{g} + 3\,\mathrm{l} + 6\,\mathrm{km}$	$n)$ $68\,\mathrm{m}^3 + 14\,\mathrm{cm}^2 + 8\,\mathrm{h}$
$o)$ $11541\,\mathrm{s} + 406\,\mathrm{dm}$	$p)$ $22737\,\mathrm{l} + 2290\,\mathrm{s}$
$q)$ $1535\,\mathrm{min} + 5759\,\mathrm{kg}$	$r)$ $30\,\mathrm{cm}^2 + 5\,\mathrm{h}$

Aufgabe 6:

$a)$ $473,16\,\mathrm{K}$	$b)$ $68\,^\circ\mathrm{F}$	$c)$ $81,84\,^\circ\mathrm{C}$
$d)$ $143,312\,^\circ\mathrm{F}$	$e)$ $353,16\,\mathrm{K}$	$f)$ $82,22\,^\circ\mathrm{C}$
$g)$ $195,8\,^\circ\mathrm{F}$	$h)$ $140,16\,\mathrm{K}$	$i)$ $-233,16\,^\circ\mathrm{C}$
$j)$ $93,16\,\mathrm{K}$	$k)$ $530,312\,^\circ\mathrm{F}$	$l)$ $-206,66\,^\circ\mathrm{C}$
$m)$ $1220\,^\circ\mathrm{F}$	$n)$ $472,048\,\mathrm{K}$	$o)$ $777273,16\,\mathrm{K}$
$p)$ $431922,048\,\mathrm{K}$	$q)$ $-452,47\,\mathrm{F}$	$r)$ $-342,67\,\mathrm{F}$

Aufgabe 7:

$a)$ $\approx 2,998\,\mathrm{oz.}$	$b)$ $6600\,\mathrm{ct}$	$c)$ $3710\,\mathrm{g}$
$d)$ $\approx 1394,800\,\mathrm{ct}$	$e)$ $1865\,\mathrm{g}$	$f)$ $\approx 599,657\,\mathrm{oz.}$
$g)$ $93,4\,\mathrm{ct}$	$h)$ $\approx 105821,9\,\mathrm{oz.}$	$i)$ $\approx 69,768\,\mathrm{kg}$
$j)$ $1730\,\mathrm{g}$	$k)$ $3107,1\,\mathrm{ct}$	$l)$ $21,885\,\mathrm{kg}$
$m)$ $33299,3\,\mathrm{ct}$	$n)$ $1146,8\,\mathrm{ct}$	$o)$ $93400\,\mathrm{ct}$
$p)$ $\approx 61,200\,\mathrm{oz.}$	$q)$ $\approx 1,653\,\mathrm{t}$	$r)$ $19714,3\,\mathrm{ct}$

Aufgabe 8:

$a)$ $173,\bar{3}\,\text{gon}$	$b)$ $\approx 0,738\,\text{rad}$	$c)$ $165°$
$d)$ $\approx 523912,600''$	$e)$ $\approx 9,267\,\text{gon}$	$f)$ $\approx 5335,383'$
$g)$ $\approx 4,904\,\text{rad}$	$h)$ $\approx 10,513\,\text{gon}$	$i)$ $\approx 171,887°$
$j)$ $20,4\bar{6}^h$	$k)$ $13,55°$	$l)$ $\approx 648000''$
$m)$ $126000''$	$n)$ $18,\bar{2}\,\text{gon}$	$o)$ $\approx 893,241\,\text{gon}$
$p)$ $367920''$	$q)$ $\approx 0,094\,\text{rad}$	$r)$ $\approx 24,818°$

Aufgabe 9:

$a)$ $\approx 984,252\,\text{in}$	$b)$ $219\,\text{ft}$	$c)$ $4\,\text{ft}$
$d)$ $24,6\bar{8}\,\text{m}$	$e)$ $\approx 190289\,\text{ft}$	$f)$ $\approx 145,401\,\text{mile}$
$g)$ $8496\,\text{in}$	$h)$ $\approx 267,614\,\text{m}$	$i)$ $\approx 4,413 \cdot 10^{-5}\,\text{ha}$
$j)$ $\approx 3,384 \cdot 10^{-4}\,\text{mile}^2$	$k)$ $\approx 5236,044\,\text{yd}^2$	$l)$ $\approx 900797,900\,\text{ha}$
$m)$ $\approx 3,616 \cdot 10^{15}\,\text{in}^2$	$n)$ $\approx 7,9997 \cdot 10^{-4}\,\text{mile}^2$	$o)$ $\approx 0,1251644\,\text{m}^3$
$p)$ $\approx 4,36\bar{5} \cdot 10^{-8}\,\text{mile}^3$	$q)$ $\approx 4522,852\,\text{yd}^3$	$r)$ $\approx 2242,465\,\text{km}^3$
$s)$ $\approx 9,895 \cdot 10^{16}\,\text{in}^3$	$t)$ $\approx 1,273 \cdot 10^{-7}\,\text{mile}^3$	$u)$ $\approx 2,578\,\text{ft}^3$
$v)$ $\approx 1,080 \cdot 10^{-11}\,\text{mile}^3$	$w)$ $\approx 0,050\,\text{yd}^3$	$x)$ $\approx 5797,260\,\text{in}^3$

Aufgabe 10:

$a)$ $9,7\bar{2}\,\dfrac{\text{m}}{texts}$	$b)$ $\approx 23,462\,\text{kn}$	$c)$ $\approx 1024,520\,\text{mph}$
$d)$ $\approx 135,56\,\text{kn}$	$e)$ $62,968\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$	$f)$ $\approx 78,293\,\text{mph}$
$g)$ $\approx 2966,178\,\text{mph}$	$h)$ $\approx 14,579\,\text{kn}$	$i)$ $16048,8\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$
$j)$ $\approx 776,217\,\text{mph}$	$k)$ $\approx 375,162\,\text{kn}$	$l)$ $\approx 151,278\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$
$m)$ $\approx 72,125\,\text{kn}$	$n)$ $\approx 34,093\,\text{kn}$	$o)$ $\approx 7034,443\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$
$p)$ $\approx 37898,175\,\text{mph}$	$q)$ $\approx 93806,048\,\text{kn}$	$r)$ $\approx 205,078\,\text{kn}$

Aufgabe 11:

$a)$ $\approx 1,246 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$ $b)$ $\approx 0,059\,\mathrm{kcal}$ $c)$ $\approx 2,732 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$
$d)$ $\approx 1,706 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{Wh}$ $e)$ $\approx 2,084 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$ $f)$ $\approx 452,104\,\mathrm{Wh}$
$g)$ $\approx 1,088 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}$ $h)$ $\approx 8,780 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$ $i)$ $\approx 2629,446\,\mathrm{kcal}$
$j)$ $\approx 1,056 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{J}$ $k)$ $\approx 1,986 \cdot 10^{26}\,\mathrm{eV}$ $l)$ $\approx 4898,375\,\mathrm{Wh}$
$m)$ $\approx 0,775\,\mathrm{Wh}$ $n)$ $\approx 3,934 \cdot 10^{20}\,\mathrm{MeV}$ $o)$ $\approx 5,571 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$
$p)$ $\approx 1,413 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{kcal}$ $q)$ $\approx 5,651 \cdot 10^{16}\,\mathrm{MeV}$ $r)$ $\approx 6,181 \cdot 10^{25}\,\mathrm{eV}$

Aufgabe 12:

$a)$ $5000\,\mathrm{m}$ $b)$ $0,06\,\mathrm{m}$ $c)$ $0,15\,\mathrm{kg}$
$d)$ $600\,\mathrm{s}$ $e)$ $3600\,\mathrm{s}$ $f)$ $604800\,\mathrm{s}$
$g)$ $31557600\,\mathrm{s}$ $h)$ $15,06\,\mathrm{m}$ $i)$ $0,175\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}$
$j)$ $1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$ $k)$ $\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cd}}$ $l)$ $\frac{1}{4}\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{K}}$
$m)$ $10\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}}{\mathrm{s}}$ $n)$ $200000\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{K}}$ $o)$ $540\,\frac{\mathrm{s}\cdot\mathrm{K}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{mol}}$
$p)$ $0,06\,\mathrm{kg} + 15,36\,\mathrm{s}\cdot\ \mathrm{m}$ $q)$ $0,375\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}$ $r)$ $12,5\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{cd}$

Aufgabe 13:

$a)$ $57\,\mathrm{B} = 456\,\mathrm{bit}$ $b)$ $459\,\mathrm{kB} = 470016\,\mathrm{B}$
$c)$ $21\,\mathrm{GB} = 22020096\,\mathrm{kB}$ $d)$ $67\,\mathrm{kB} = 548864\,\mathrm{bit}$
$e)$ $79\,\mathrm{MB} = 662700032\,\mathrm{bit}$ $f)$ $357864\,\mathrm{bit} = 44733\,\mathrm{B}$
$g)$ $2\,\mathrm{GB} = 2147483649\,\mathrm{B}$ $h)$ $7\,\mathrm{GB} = 60129542144\,\mathrm{bit}$
$i)$ $55296\,\mathrm{kB} = 54\,\mathrm{MB}$ $j)$ $811008\,\mathrm{bit} = 99\,\mathrm{kB}$
$k)$ $8388608\,\mathrm{bit} = 1\,\mathrm{kB}$ $l)$ $6442450944\,\mathrm{B} = 6\,\mathrm{GB}$

Aufgabe 14:

$a)$ Stimmt. $b)$ Stimmt. $c)$ Stimmt nicht.

$d)$ Stimmt. $e)$ Stimmt nicht. $f)$ Stimmt.

$g)$ Stimmt. $h)$Stimmt. $i)$ Stimmt nicht.

Aufgabe 16:

$a)$ $v \approx 8,994 \cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ $b)$ $U \approx 180,178\,\frac{\mathrm{m^2kg}}{\mathrm{As^3}}$ $c)$ $r \approx 0,0378\,\mathrm{m}$

$d)$ $v \approx 252,062\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ $e)$ $V \approx 0,0263\,\mathrm{m}^3$ $f)$ $b \approx 5,07 \cdot 10^{-4}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{mol}}$

Aufgabe 17:

$a)$ $122\,\$ = 115\,€$ $b)$ $106\,\$ = 87\,£$ $c)$ $450\,£ = 549\,\$$

$d)$ $950\,€ = 1007\,\$$ $e)$ $1\,£ = 1,15\,€$ $f)$ $125\,\$ = 102,5\,£$

$g)$ $60\,€ = 52,2\,£$ $h)$ $492\,£ = 565,8\,€$ $i)$ $954\,\$ = 896,76\,€$

$h)$ $0,5\,€ = 0,53\,\$$ $k)$ $20\,£ = 23\,€$ $l)$ $33,33\,€ \approx 29,00\,£$

Aufgabe 18:

$a)$ 50 \$ $<$ 47,5 € | $b)$ 1 € $<$ 1 £ | $c)$ 1 £ $>$ 1 \$

$d)$ 24000 \$ $<$ 19780 £ | $e)$ 5600 € $>$ 5930 \$ | $f)$ 5082 € $<$ 4420 £

$g)$ 83787 £ $>$ 96300 € | $h)$ 5 £ $<$ 5,9 € | $i)$ 854 \$ $>$ 680 £

$h)$ 900 € $<$ 792 £ | $k)$ 14,5 \$ $>$ 15,3 € | $l)$ 1,74 £ $<$ 2,18 \$

Aufgabe 19:

$a)$ $45cm + 2m - 13dm = 115cm$ | $b)$ $4,4kg - 1298g = 3102g$

$c)$ $1h + 34min + 29s = 5669s$ | $d)$ $3km - 34mm = 2999966mm$

$e)$ $38mm + 2dm - 13cm = 225mm$ | $f)$ $7,8t - 9234mg = 7799990766mg$

$g)$ $243min - 2h + 724s = 8104s$ | $h)$ $0,05kg + 341,3g - 2300mg = 389g$

$i)$ $750s + 17,5min + 0,5h = 1h$ | $h)$ $345cm + 230mm + 63,2dm = 1m$

$k)$ $3,4kg + 100600g = 1004kg$ | $l)$ $4,5h - 1800s + 660min = 16h$

Aufgabe 20:

$a)$ $4m < 44dm$ | $b)$ $5600mm > 46cm$ | $c)$ $2km > 230m$

$d)$ $92dm = 9200mm$ | $e)$ $128cm < 1,3m$ | $f)$ $82mm < 1dm$

$g)$ $7,3cm < 0,9dm$ | $h)$ $0,04km < 39000cm$ | $i)$ $7,2dm < 6920mm$

$h)$ $459cm = 4,59m$ | $k)$ $1,82km < 1820000cm$ | $l)$ $2345m > 0,3km$

Aufgabe 21:

$a)$ $1340g < 2kg$ | $b)$ $3,3t = 3300kg$ | $c)$ $54g > 5400mg$

$d)$ $25,2kg < 0,252t$ | $e)$ $0,0014t = 1400g$ | $f)$ $235mg < 1,3kg$

$g)$ $4,4kg < 7249g$ | $h)$ $0,06g > 43mg$ | $i)$ $2526234g > 2,5t$

$h)$ $11,7t < 12344kg$ | $k)$ $0,349g < 452mg$ | $l)$ $0,00234t < 3250000mg$

Aufgabe 22:

$a)\ 3min\ >\ 150s$	$b)\ 5h\ <\ 315min$	$c)\ 2h\ <\ 8000s$
$d)\ 82min\ >\ 2347s$	$e)\ 283h\ >\ 7657min$	$f)\ 6d\ =\ 144h$
$g)\ 3,4min\ <\ 245s$	$h)\ 245463s\ >\ 2d$	$i)\ 351min\ <\ 5,9h$
$h)\ 45min\ =\ 0,75h$	$k)\ 12h\ =\ 0,5d$	$l)\ 0,25min\ =\ 15s\infty$

Aufgabe 23: $1,25\frac{e}{l}$

Aufgabe 24: 35 €

Aufgabe 25: $22,50$ € und $2,25$ €

Aufgabe 26: $74,7km$

Aufgabe 27: $8g$ und $6,4kg$

Aufgabe 28: $9cm^2$ und $144cm^2$

Aufgabe 29: $4₿ \cdot 1129\frac{€}{₿} \cdot 27\frac{K\check{c}}{€} = 121932K\check{c} > 120000K\check{c}$ $\Rightarrow$ Ja, das Auto kann mit 4₿ bezahlt werden.

Aufgabe 30: $0,025\frac{e}{MB} \cdot 4 \cdot 1024MB = 102,40 > e101,91 = e19,99 + e4 \cdot 1024MB \cdot 0,02\frac{e}{MB}$

Aufgabe 31:

$a)$ $4\,\mathrm{m} = 4000\,\mathrm{mm}$	$b)$ $3\,\mathrm{dm} = 30\,\mathrm{cm}$
$c)$ $7\,\mathrm{cm} = 70\,\mathrm{mm}$	$d)$ $4500\,\mathrm{cm} = 45\,\mathrm{m}$
$e)$ $230\,\mathrm{dm} = 23\,\mathrm{m}$	$f)$ $34000\,\mathrm{mm} = 340\,\mathrm{dm}$

Aufgabe 32:

$a)$ $3\,\mathrm{kg} = 3000\,\mathrm{g}$	$b)$ $6\,\mathrm{g} = 6000\,\mathrm{mg}$
$c)$ $7\,\mathrm{t} = 7000\,\mathrm{kg}$	$d)$ $9\,\mathrm{t} = 9000000\,\mathrm{g}$
$e)$ $56000\,\mathrm{mg} = 56\,\mathrm{g}$	$f)$ $4500\,\mathrm{g} = 4,5\,\mathrm{kg}$

Aufgabe 33:

a) $2\,\text{min} = 120\,\text{s}$	*b*) $18\,\text{h} = 1080\,\text{min}$
c) $6\,\text{h} = 21600\,\text{s}$	*d*) $720\,\text{s} = 12\,\text{min}$
e) $50400\,\text{s} = 14\,\text{h}$	*f*) $4\,\text{d} = 345600\,\text{s}$

Aufgabe 34: *Berechne den Wert des Terms. (Achte auf die Einheiten!)*

a) $60\,\text{g} : 3 = 20\,\text{g}$	*b*) $55\,\text{km} : 11\,\text{km} = 5$	*c*) $7 \cdot 12\,\text{m} = 84\,\text{m}$
d) $11\,\text{cm} \cdot 4\,\text{cm} = 44\,\text{cm}^2$	*e*) $75\,\text{l} : 15 = 5\,\text{l}$	*f*) $84\,\text{g} : 7\,\text{g} = 12$
d) $8\,\text{cm}^2 \cdot 9\,\text{cm} = 72\,\text{cm}^3$	*e*) $8\,\text{m}^3 : 2\,\text{m} = 4\,\text{m}^2$	*f*) $9\,\text{km}^3 : 3\,\text{km}^2 = 3\,\text{km}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.21.1).

18.10.22 Lösungen zu Verhältnissen

Aufgabe 1: *Fülle die Lücken in den Sätzen aus.*

a) Wenn auf der Karte ein Maßstab von 1 : 1000 vermerkt ist, dann ist eine Strecke in der Realität <u>1000</u>-mal größer.

b) Eine Strecke ist in der Realität 25000-mal größer als auf der Karte. Somit handelt es sich um einen <u>1 : 25000</u> Maßstab.

c) Wenn auf der Karte ein Maßstab von 1 : 300000 vermerkt ist, dann ist eine 900 km Strecke in der Realität auf der Karte <u>3 m</u> lang.

d) Wenn auf der Karte ein Maßstab von 50 : 1 vermerkt ist, dann ist eine Strecke von 5 dm auf der Karte in der Realität <u>1 cm</u> lang.

e) Auf einer Karte ist eine Strecke 4 cm lang, während sie in der Realität 6 km beträgt. Somit handelt es sich um einen <u>1 : 150000</u> Maßstab.

Aufgabe 2: *Berechne die fehlenden Längen in den Tabellen.*

a) Maßstab: 1 : 500

Planung	Realität
5 cm	25 m
9 cm	45 m
13 cm	65 m

b) Maßstab: 1 : 30000

Planung	Realität
45 cm	13, 5 km
1, 8 dm	5, 4 km
34 mm	1020 m

c) Maßstab: 1 : 2000

Planung	Realität
2, 5 cm	50 m
6 cm	120 m
2, 5 mm	5 m

d) Maßstab: 1 : 250000

Planung	Realität
8 mm	2 km
500 m	125 km
3, 7 mm	925 m

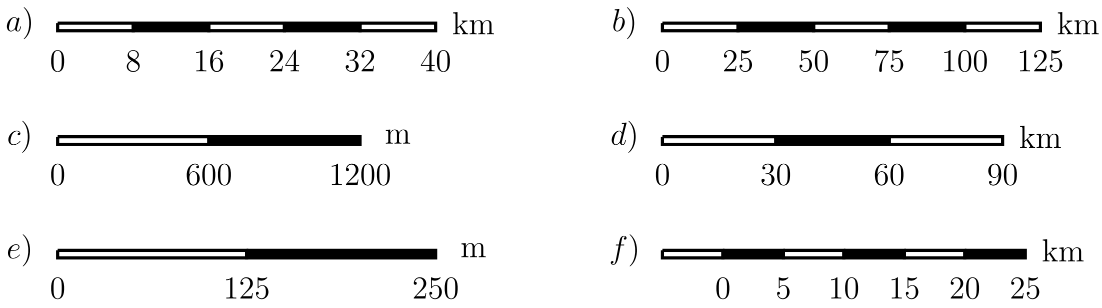
e) Maßstab: 8 : 1

Planung	Realität
56 cm	7 cm
2, 4 dm	3 cm
88 dm	11 dm

f) Maßstab: 4 : 3

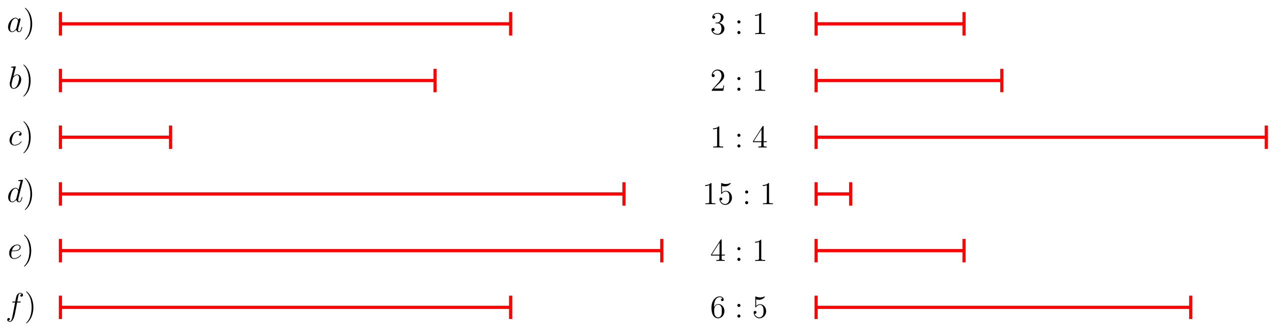
Planung	Realität
16 cm	12 cm
240 km	180 km
9, 6 dm	7, 2 dm

Aufgabe 3: *Gib den dargestellten Maßstab an.*



a) 1 : 800000 *b)* 1 : 2500000 *c)* 1 : 30000
d) 1 : 2000000 *e)* 1 : 5000 *f)* 1 : 400000

Aufgabe 4: *Gib den Maßstab der jeweiligen beiden verglichenen Strecken an.*



Aufgabe 5:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Entfernung Karte	6 cm	4 cm	15 cm	20 cm	45 m	1,7 dm
Entfernung real	180000 cm	8 km	750 km	2,5 cm	3 mm	6,8 km
Maßstab	1 : 30000	1 : 200000	1 : 5000000	8 : 1	15000 : 1	1 : 40000

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.22.1).

18.10.23 Lösungen zu den gemischten Algebraaufgaben

Aufgabe 1:

$a)\ 1,41\ ;\ \frac{5}{3}\ ;\ \frac{11}{6}\ ;\ 2\ ;\ 2,13\ ;\ \frac{15}{7}\ ;\ \frac{9}{4}\ ;\ 2,26\ .$

$b)\ \frac{3}{8}\ ;\ 0,45\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{9}\ ;\ 0,57\ ;\ \frac{4}{7}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3}\ .$

$c)\ \sqrt{5}\ ;\ \frac{37}{16}\ ;\ 2,33\ ;\ \frac{7}{3}\ ;\ \sqrt{6}\ ;\ 2,51\ ;\ \frac{14}{5}\ ;\ \frac{17}{6}\ .$

$d)\ e\ ;\ \frac{19}{6}\ ;\ \frac{13}{4}\ ;\ \pi\ ;\ 3,141\ ;\ 3,\bar{3}\ ;\ \ln 36\ ;\ \sqrt{13}\ .$

$e)\ 24,79\ ;\ \sqrt{620}\ ;\ 5^2\ ;\ \lg 10^{25,01}\ ;\ 8\pi\ ;\ \frac{51}{2}\ ;\ 3^3\ ;\ \frac{128}{25}\ .$

$f)\ \frac{2}{3}\ ;\ 0,69\ ;\ \ln 2\ ;\ \frac{7}{10}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ 0,734\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{e}{3}\ .$

$g)\ -\frac{15}{6}\ ;\ (-1,34)^3\ ;\ -\frac{3\pi}{4}\ ;\ -\frac{7}{3}\ ;\ -\ln \pi^2\ ;\ -2,27\ ;\ -\frac{5e}{6}\ ;\ -\sqrt{6,25}\ .$

Aufgabe 2:

$a)\ x_{1,2} = \pm 2$

$b)\ x_1 = -3 \wedge x_2 = -1$

$c)\ x_1 = 4 \wedge x_2 = 5$

$d)\ x_1 = -1 \wedge x_2 = 6$

$e)\ x_1 = 2,25 \wedge x_2 = -3,3$

$f)\ x_1 = 1,45 \wedge x_2 = -2,05$

$g)\ x_1 = \frac{1}{2} \wedge x_2 = -\frac{3}{4}$

$h)\ x_1 = -\frac{7}{3} \wedge x_2 = -\frac{2}{9}$

$i)\ x_1 = \sqrt{3} \wedge x_2 = -\sqrt{2}$

$j)\ x_1 = \ln 2 \wedge x_2 = \sqrt[3]{e\pi^4}$

Aufgabe 3:

$a) \quad \Rightarrow t = \dfrac{x}{v} = \dfrac{3}{22}$

$b) \quad \Rightarrow c = \dfrac{V}{ab} = \dfrac{40}{3}$

$c) \quad \Rightarrow G = \dfrac{3V}{h} = 15$

$d) \quad \Rightarrow a = \dfrac{2x}{t^2} = \dfrac{128}{27}$

$e) \quad \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2x}{a}} \approx 0,24$

$f) \quad \Rightarrow R_2 = \dfrac{U}{I} - R_1 \approx -463,33$

$g) \quad \Rightarrow R_1 = \dfrac{I}{U} - R_2 \approx -999,98$

$h) \quad \Rightarrow c = \dfrac{O - 2ab}{2a + 2b} = 6,75$

$i) \quad \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \approx 0,57$

$j) \quad \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3}$

$k) \quad \Rightarrow a = \dfrac{2A}{h} - c = -\dfrac{81}{4}$

$l) \quad \Rightarrow s = \sqrt[3]{\dfrac{12V}{\sqrt{2}}} \approx 8,83$

$m) \quad \Rightarrow s_1 = \dfrac{\frac{O}{\pi} - r_1^2 - r_2^2}{r_1 + r_2} \approx -1,23$

$n) \quad \Rightarrow r = \sqrt{\dfrac{360}{\pi\alpha}\left(A + \dfrac{sh}{2}\right)} \approx 3,54$

$o) \quad \Rightarrow r_{2_{1,2}} = -\dfrac{s_1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{s_1^2}{4} - r_1^2 - s_1 r_1 + \dfrac{O}{\pi}} \Rightarrow r_{2_1} \approx 0,49 \wedge r_{2_2} \approx -1,90$

$p) \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{c}{a} + \dfrac{f}{a}} \Rightarrow x_1 \approx 0,81 \wedge x_2 \approx -1,64$

$q) \quad \Rightarrow t_{1,2} = -\dfrac{v}{a} \pm \sqrt{\dfrac{v^2}{a^2} - \dfrac{2s}{a} + \dfrac{2x}{a}} \Rightarrow t_1 \approx 2,85 \wedge t_2 \approx -3,08$

$r) \quad \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{N}{A} = 0,0017$

Aufgabe 4:

	1	2	3	4	5	6	7
v	1	2	1,75	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$\sqrt{2}$
t	2	4	2,25	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$
$a = v \cdot t$	2	8	3,9375	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{8}{5}$	$\sqrt{6}$
$x = \frac{1}{2}at^2 + vt$	6	72	$\approx 13,90$	$\approx 0,48$	$\approx 0,10$	$\approx -3,02$	$\frac{5\sqrt{6}}{2}$
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{9}}}$	$\approx 1,06$	$\approx 1,34$	$\approx 1,23$	$\approx 1,014$	$\approx 1,009$	$\approx 1,09$	$\frac{3}{\sqrt{7}}$
$L = \frac{x}{\gamma}$	$\approx 5,66$	$\approx 53,67$	$\approx 11,29$	$\approx 0,47$	$\approx 0,10$	$\approx -2,77$	$\frac{5}{6}\sqrt{42}$
$m = \frac{4}{3}\pi x^3$	$\approx 904,78$	$\approx 1,56 \cdot 10^6$	$\approx 5,40 \cdot 10^5$	$\approx 0,46$	$\approx 0,0046$	$\approx -115,63$	$\approx 961,91$
$F = m\gamma a$	$\approx 1919,22$	$\approx 1,68 \cdot 10^7$	$\approx 2,62 \cdot 10^6$	$\approx 0,18$	$\approx 0,00046$	$\approx 201,86$	$\approx 2671,67$
$r = \frac{\gamma a}{v^2}$	2,12	$\approx 2,68$	$\approx 1,58$	$\approx 1,52$	$\approx 0,126$	$\approx -1,21$	$\frac{3}{14}\sqrt{42}$
$E = \frac{1}{2}mv^2$	$\approx 1809,56$	$\approx 3,13 \cdot 10^6$	$\approx 8,28 \cdot 10^5$	$\approx 0,058$	$\approx 0,00037$	$\approx -83,25$	$\approx 961,91$
$h = \frac{E}{F}$	$\approx 0,94$	$\approx 0,19$	$\approx 0,32$	$\approx 0,33$	$\approx 0,793$	$\approx -0,41$	$\approx 0,36$

Aufgabe 5:

$a)$ $3x = 81$

$b)$ $2x - 4 = 11$

$c)$ $x - 10 = 5x$

$d)$ $2x + 7 = \dfrac{x}{4}$

$e)$ $\dfrac{5}{2x} + 5 = 8$

$f)$ $\dfrac{x}{6} + 3 = x + 3$

$g)$ $4x + 2(x+3) = 0$

$h)$ $\dfrac{1}{2}(x-8) = 4 + x$

$i)$ $\dfrac{x}{3} + 4 = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{2}$

$j)$ $\dfrac{1}{9} + x \cdot x = \dfrac{x}{2}$

$k)$ $(5+x)(2x-10) = x - 24$

$l)$ $-x + 11 = 3x + 5x$

$m)$ $(x+7)(x+4) = \dfrac{x}{5}$

$n)$ $x^3 + 3x^2 = 11 - \sqrt[4]{x}$

$o)$ $\sqrt{8x} = (x+6)^2$

$p)$ $\lg x - 12 = 2^x + 7x^2$

Aufgabe 6:

a) $\textcolor{red}{\bullet} + 0 = \textcolor{red}{\bullet}$

b) $\textcolor{red}{\bullet} - 0 = \textcolor{red}{\bullet}$

c) $\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet} = 2 \cdot \textcolor{red}{\bullet}$

d) $\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet} = 3 \cdot \textcolor{red}{\bullet}$

e) $\textcolor{red}{\bullet} + (\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet}) = 3 \cdot \textcolor{red}{\bullet}$

f) $(\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet}) + \textcolor{red}{\bullet} = 3 \cdot \textcolor{red}{\bullet}$

g) $(\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet}) \cdot \textcolor{blue}{\bullet} = \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}$

h) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}) = \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}$

i) $\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{red}{\bullet} = 0$

j) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{blue}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} = 0$

Aufgabe 7:

a) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot 1 = \textcolor{red}{\bullet}$

b) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{1} = \textcolor{red}{\bullet}$

c) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{red}{\bullet}} = 1$

d) $\frac{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}} = \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{blue}{\bullet}}$

e) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot \frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{red}{\bullet}} = \textcolor{magenta}{\bullet}$

f) $\frac{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}} = \textcolor{magenta}{\bullet}$

g) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} \cdot \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{blue}{\bullet}} = \frac{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}}$

h) $\frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet}} \cdot \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{cyan}{\bullet}} \cdot \frac{\textcolor{blue}{\bullet}}{\textcolor{brown}{\bullet}} = \frac{\textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet} \cdot \textcolor{cyan}{\bullet} \cdot \textcolor{brown}{\bullet}}$

i) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} : \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{blue}{\bullet}} = \frac{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet}}$

j) $\frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet}} : \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{cyan}{\bullet}} : \frac{\textcolor{blue}{\bullet}}{\textcolor{brown}{\bullet}} = \frac{\textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{cyan}{\bullet} \cdot \textcolor{brown}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}}$

k) $\frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet}} \cdot \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{cyan}{\bullet}} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} = \frac{\textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet} \cdot \textcolor{cyan}{\bullet}}$

l) $\frac{\textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet}} : \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{cyan}{\bullet}} : \textcolor{blue}{\bullet} = \frac{\textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{cyan}{\bullet}}{\textcolor{yellow}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}}$

m) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} + \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{blue}{\bullet}} = \frac{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}}$

n) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} - \frac{\textcolor{green}{\bullet}}{\textcolor{blue}{\bullet}} = \frac{\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}}$

o) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} + \textcolor{green}{\bullet} = \frac{\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}}$

p) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}} - \textcolor{green}{\bullet} = \frac{\textcolor{red}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet}}{\textcolor{magenta}{\bullet}}$

Aufgabe 8:

a) $(\textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) \cdot \textcolor{red}{\bullet} = \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet}$

b) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) = \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet}$

c) $-(\textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) = -\textcolor{green}{\bullet} - \textcolor{blue}{\bullet}$

d) $-\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{green}{\bullet} - \textcolor{blue}{\bullet}) = -\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}$

e) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{magenta}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet}) \cdot \textcolor{blue}{\bullet} = \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} - \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}$

f) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot (\textcolor{magenta}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) = \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet} - \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}$

g) $(\textcolor{magenta}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}) \cdot (\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}) = \textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}$

h) $(\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}) \cdot (\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}) = \textcolor{red}{\bullet}^2 + 2 \cdot \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}^2$

i) $(\textcolor{red}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet}) \cdot (\textcolor{red}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet}) = \textcolor{red}{\bullet}^2 - 2 \cdot \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}^2$

j) $(\textcolor{red}{\bullet} + \textcolor{green}{\bullet}) \cdot (\textcolor{red}{\bullet} - \textcolor{green}{\bullet}) = \textcolor{red}{\bullet}^2 - \textcolor{green}{\bullet}^2$

k) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} = \textcolor{red}{\bullet}^2$

l) $\textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} \cdot \textcolor{magenta}{\bullet} \cdot \textcolor{red}{\bullet} = \textcolor{red}{\bullet}^3 \cdot \textcolor{magenta}{\bullet}^2$

m) $\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet}} \cdot \textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{blue}{\bullet}} = \textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet} + \textcolor{blue}{\bullet}}$

n) $(\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet}})^{\textcolor{blue}{\bullet}} = \textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet} \cdot \textcolor{blue}{\bullet}}$

o) $\frac{\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet}}}{\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{blue}{\bullet}}} = \textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet} - \textcolor{blue}{\bullet}}$

p) $(\textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{green}{\bullet}})^{\frac{\textcolor{blue}{\bullet}}{\textcolor{green}{\bullet}}} = \textcolor{red}{\bullet}^{\textcolor{blue}{\bullet}}$

Aufgabe 9:

$a)\ \ b = 2m\ \ \text{und}\ \ g = 1m \Rightarrow f = 0,\bar{6}m$

$b)\ \ f = 25cm\ \ \text{und}\ \ g = 1,5m \Rightarrow b = 0,3m$

$c)\ \ b = 20cm\ \ \text{und}\ \ f = 10cm \Rightarrow g = 0,2m$

$d)\ \ b = 40cm\ \ \text{und}\ \ g = 60cm \Rightarrow f = 0,24m$

$e)\ \ f = 12,5cm\ \ \text{und}\ \ g = 2m \Rightarrow b = 0,1\bar{3}m$

$f)\ \ b = 30cm\ \ \text{und}\ \ f = 5cm \Rightarrow g = 0,06m$

Aufgabe 10:

$a)\ \ v_2' = 4\frac{m}{s}$ $\quad b)\ \ v_2' = \frac{19}{2}\frac{m}{s}$ $\quad c)\ \ v_2 = \frac{26}{3}\frac{m}{s}$ $\quad d)\ \ v_1' = 50\frac{m}{s}$ $\quad e)\ \ v_2' = 51,25\frac{m}{s}$

$f)\ \ v_2' = -\frac{505}{36}\frac{m}{s}$ $\quad g)\ \ v_2 = 0,76\frac{m}{s}$ $\quad h)\ \ v_1 = -\frac{2398}{9}\frac{m}{s}$ $\quad i)\ \ m_2 = 25kg$ $\quad j)\ \ m_1 = -1kg$

Aufgabe 11:

$a)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}$ $\qquad b)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{blue}\bullet}}{{\color{green}\bullet}}$

$c)\ \ {\color{red}\bullet} = -\frac{{\color{blue}\bullet}}{{\color{green}\bullet}}$ $\qquad d)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{blue}\bullet} + {\color{cyan}\bullet}}{{\color{green}\bullet}}$

$e)\ \ {\color{red}\bullet} = {\color{blue}\bullet} + {\color{cyan}\bullet}$ $\qquad f)\ \ {\color{red}\bullet} = -\frac{{\color{blue}\bullet} + {\color{cyan}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}$

$g)\ \ {\color{red}\bullet} = -\frac{{\color{blue}\bullet}}{{\color{magenta}\bullet} \cdot {\color{green}\bullet}}$ $\qquad h)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{magenta}\bullet} \cdot ({\color{cyan}\bullet} + {\color{blue}\bullet})}{{\color{green}\bullet}}$

$i)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{yellow}\bullet}}{{\color{red}\bullet}({\color{green}\bullet} + {\color{blue}\bullet})}$ $\qquad j)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{magenta}\bullet} \cdot {\color{yellow}\bullet} \cdot ({\color{cyan}\bullet} + {\color{blue}\bullet})}{{\color{green}\bullet}}$

$k)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{yellow}\bullet}}{{\color{blue}\bullet} + {\color{magenta}\bullet}}$ $\qquad l)\ \ {\color{red}\bullet} = {\color{magenta}\bullet} + {\color{green}\bullet}$

$m)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{yellow}\bullet}}{1 - {\color{blue}\bullet}}$ $\qquad n)\ \ {\color{red}\bullet} = \sqrt{{\color{blue}\bullet}^2 - {\color{magenta}\bullet}^2}$

$o)\ \ {\color{red}\bullet} = ({\color{yellow}\bullet} - {\color{magenta}\bullet})^2$ $\qquad p)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{({\color{magenta}\bullet} - {\color{yellow}\bullet})^2}{{\color{green}\bullet}}$

$q)\ \ {\color{red}\bullet} = -{\color{green}\bullet} \pm \sqrt{{\color{green}\bullet}^2 + {\color{blue}\bullet}}$ $\qquad r)\ \ {\color{red}\bullet} = -\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{magenta}\bullet}} \pm \sqrt{\frac{{\color{green}\bullet}^2}{{\color{magenta}\bullet}^2} + {\color{blue}\bullet}}$

$s)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{green}\bullet}}{2{\color{magenta}\bullet}} \pm \sqrt{\frac{{\color{green}\bullet}^2}{4{\color{magenta}\bullet}^2} - {\color{blue}\bullet} + {\color{cyan}\bullet}}$ $\qquad t)\ \ {\color{red}\bullet} = \frac{{\color{green}\bullet}{\color{gray}\bullet}}{2{\color{magenta}\bullet}} \pm \sqrt{\frac{{\color{green}\bullet}^2{\color{gray}\bullet}^2}{4{\color{magenta}\bullet}^2} + {\color{blue}\bullet} + {\color{cyan}\bullet}}$

Aufgabe 12:

a) ${\color{red}\bullet} = \sqrt{\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}}$

b) ${\color{red}\bullet} = \frac{{\color{green}\bullet}^2}{{\color{blue}\bullet}^2}$

c) ${\color{red}\bullet} = \arcsin\left(\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}\right)$

d) ${\color{red}\bullet} = \arccos\left(\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}\right)$

e) ${\color{red}\bullet} = \arctan\left(\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}\right)$

f) ${\color{red}\bullet} = \operatorname{arccot}\left(\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}\right)$

g) ${\color{red}\bullet} = e^{\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}}$

h) ${\color{red}\bullet} = 10^{\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}}$

i) ${\color{red}\bullet} = {\color{magenta}\bullet}^{\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}}$

j) ${\color{red}\bullet} = \ln\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}$

k) ${\color{red}\bullet} = \ln\frac{{\color{yellow}\bullet}}{{\color{magenta}\bullet}}$

l) ${\color{red}\bullet} = \frac{\ln\left(\frac{{\color{yellow}\bullet}+{\color{green}\bullet}}{{\color{blue}\bullet}}\right) - {\color{cyan}\bullet}}{{\color{magenta}\bullet}}$

m) ${\color{red}\bullet} = \frac{\arcsin\left({\color{green}\bullet} - {\color{cyan}\bullet}\right)}{{\color{magenta}\bullet}}$

n) ${\color{red}\bullet} = \frac{{\color{cyan}\bullet} - \ln\left(\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{yellow}\bullet}}\right)}{{\color{magenta}\bullet}}$

o) ${\color{red}\bullet} = \frac{{\color{cyan}\bullet} - \arcsin\left(\frac{{\color{green}\bullet}}{{\color{yellow}\bullet}}\right)}{{\color{magenta}\bullet}}$

p) ${\color{red}\bullet} = -{\color{green}\bullet}\cos\left({\color{magenta}\bullet}\right) \pm \sqrt{{\color{green}\bullet}^2\cos^2\left({\color{magenta}\bullet}\right) + {\color{blue}\bullet}^2 - {\color{green}\bullet}^2}$

Aufgabe 13:

Behauptung	wahr	falsch
$1m^2$ entspricht $100cm^2$.		x
1% von 2500 € sind 25 € .	x	
23 ist eine Primzahl.	x	
$0,43$ ist eine irrationale Zahl.		x
$750ml$ sind $\frac{3}{4}l$.	x	
$\sqrt{81}$ ist eine natürliche Zahl.	x	
$0,9^6 > 1$.		x
Der Logarithmus von Null existiert nicht.	x	
Man darf nicht durch e^x dividieren.		x
$\frac{10}{0,2} > 20$.	x	
$0,\bar{9}$ ist eine natürliche Zahl.	x	
$0,37284 \approx 0,372$		x

Aufgabe 14:

$a)\ x+5=7 \ \Rightarrow\ x=2$

$b)\ 3-x=9 \ \Rightarrow\ x=-6$

$c)\ 2\cdot x\cdot 4=\frac{1}{5} \ \Rightarrow\ x=\frac{1}{40}$

$d)\ \frac{x+2}{5}=3 \ \Rightarrow\ x=13$

$e)\ \frac{4\cdot x}{3}=\frac{1}{2} \ \Rightarrow\ x=\frac{3}{8}$

$f)\ x-8=4 \ \Rightarrow\ x=12$

$g)\ \frac{x}{5}+3=9 \ \Rightarrow\ x=30$

$h)\ x-7=2x+5 \ \Rightarrow\ x=-12$

$i)\ 5\cdot x+7=2x-3 \ \Rightarrow\ x=-\frac{4}{7}$

$j)\ 9\cdot x+8=6 \ \Rightarrow\ x=-\frac{2}{9}$

$k)\ \frac{x\cdot 2}{5}+11=x \ \Rightarrow\ x=\frac{55}{3}$

$l)\ 3\cdot x+2\cdot 7=\frac{x}{4} \ \Rightarrow\ x=-\frac{56}{11}$

$m)\ \frac{x}{5}-\frac{3}{4}=10 \ \Rightarrow\ x=\frac{215}{4}$

$n)\ (x+8)\cdot(2+1)=\frac{x}{2} \ \Rightarrow\ x=-\frac{48}{5}$

Aufgabe 15:

$\approx$ 300 Erbsen
$\approx$ 430 Steine
$\approx$ 450 Bälle
$\approx$ 200 Äpfel
$\approx$ 200 Kaffeebohnen
$\approx$ 430 Kaffeebohnen
$\approx$ 180 Jellys Beans
$\approx$ 210 Kastanien

Aufgabe 16:

$a)\ 120min$	$b)\ 210min$	$c)\ 450min$	$d)\ 1345min$
$e)\ 446min$	$f)\ 646min$	$g)\ 769min$	$h)\ 191min$
$i)\ 1123min$	$j)\ 605min$	$k)\ 1125min$	$l)\ 1233min$
$m)\ 843min$	$n)\ 761min$	$o)\ 911min$	$p)\ 1403min$

Aufgabe 17:

$a)$ $9h$	$b)$ $12h$ und $20min$	$c)$ $13h$ und $50min$
$d)$ $9h$ und $45min$	$e)$ $9h$ und $17min$	$f)$ $7h$ und $47min$
$g)$ $13h$ und $47min$	$h)$ $16h$ und $35min$	$i)$ $11h$ und $27min$
$j)$ $4h$ und $33min$	$k)$ $21h$ und $41min$	$l)$ $16h$ und $39min$
$m)$ $14h$ und $50min$	$n)$ $20h$ und $40min$	$p)$ $12h$ und $28min$
$q)$ $17h$ und $49min$		

Aufgabe 18:

$a)$ $18h$	$b)$ $12,\bar{3}h$	$c)$ $6,25h$	$d)$ $20,08\bar{3}h$
$e)$ $2,65h$	$f)$ $3,2\bar{6}h$	$g)$ $23,7\bar{6}h$	$h)$ $5,7\bar{6}h$
$i)$ $12,35h$	$j)$ $8,9h$	$k)$ $15,5\bar{6}h$	$l)$ $6,55h$
$m)$ $21,9\bar{3}h$	$n)$ $18,31\bar{6}h$	$p)$ $9,28\bar{3}h$	$q)$ $17,78\bar{3}h$

Aufgabe 19:

$a)$ $40h$	$b)$ $30h$	$c)$ $96h$ und $15min$
$d)$ $97h$ und $10min$	$e)$ $29h$ und $30min$	$f)$ $73h$ und $20min$
$g)$ $25h$ und $24min$	$h)$ $132h$ und $55min$	$i)$ $6h$ und $31min$
$j)$ $158h$ und $41min$	$k)$ $111h$ und $3min$	$l)$ $13h$ und $15min$
$m)$ $58h$ und $25min$	$n)$ $160h$ und $34min$	$p)$ $49h$ und $37min$
$q)$ $50h$ und $19min$		

Aufgabe 20:

$a)$ $4645 + 1307 \cdot 97 = 131424$	$b)$ $(126 + 758) : 4 = 221$
$c)$ $(723 - 478) \cdot (3321 : 9) = 90405$	$d)$ $(23 \cdot 87) - (309 + 578) = 2270$
$e)$ $5 \cdot (56 + 17 \cdot (823 - 677)) = 12690$	$f)$ $(1589 + 3691) : (894 - 888) = 880$

Aufgabe 21: $5305,67€ - \frac{124,93€ \cdot 310}{7} = -226,944€$

Aufgabe 22: $\frac{40l \cdot 6,949\frac{\$}{US.liq.gal.}}{3,785\frac{l}{US.liq.gal.} \cdot 1,17\frac{\$}{€}} \approx 62,77€$

Aufgabe 23: $29,77\frac{€}{g} \cdot 20,3\frac{g}{cm^3} \cdot 0,13cm \cdot 0,22cm \cdot 0,09cm \approx 1555,55€$

Aufgabe 24:

$a)$ $83 + 45 \cdot 28 = 1343$

$b)$ $54 \cdot 81 - 438 = 3936$

$c)$ $(88 + 56) : 4 = 36$

$d)$ $(94 + 134) \cdot (82 + 276) = 81624$

$e)$ $73 \cdot 92 + 24 \cdot 645 = 22196$

$f)$ $176 : 8 - 11 = 11$

$g)$ $(4234 - 2467) \cdot 56 \cdot 17 = 1682184$

$h)$ $158 \cdot 235 + 346 \cdot 278 = 133318$

$i)$ $28734 : 6 - 4788 = 1$

$j)$ $(7564 + 17566) : 5 = 5026$

$k)$ $(234645 - 29562) : (3 \cdot 3) = 22787$

$l)$ $(3726 + 2387 + 2359) \cdot (2466 - 932) = 12996048$

$m)$ $(525 + 125 \cdot 234) : 5 = 5955$

$n)$ $(42356 + 23566) \cdot (42356 - 23566) = 1238674380$

$o)$ $(34 + 12 \cdot [46 + 35 \cdot (91 + 46 \cdot 8)]) \cdot 2 = 386732$

Aufgabe 25:

s	r	k	$r \cdot s$	$k \cdot r + s = p$	$(p+k) \cdot r = q$	$p \cdot k + r \cdot (k+s) = z$	$z + p \cdot q$
2	6	3	12	20	138	90	2850
4	7	5	28	39	308	258	12270
8	3	9	24	35	352	366	12686
5	9	7	45	69	380	591	26811
7	3	4	21	19	161	109	3168
11	8	5	88	51	616	383	31799
6	8	7	42	62	414	538	26206

Aufgabe 26:

d	t	l	$d + t - l$ in $[dm]$	$2 \cdot d + 3 \cdot l$ in $[cm]$	$d \cdot l$ in $[m^2]$	$d \cdot l \cdot t$ in $[l]$
$3m$	$2dm$	$18cm$	$30,2dm$	$654cm$	$0,54m^2$	$108l$
$7dm$	$369cm$	$344mm$	$40,46dm$	243,2cm	$0,2408m^2$	$888,552l$
$4,2dm$	$1,03m$	$23mm$	$14,27dm$	90,9cm	$0,00966m^2$	$9,9498l$
$2,3m$	$5,5m$	$61,2dm$	$16,8dm$	2296cm	$14,076m^2$	$77797,5l$
$0,02km$	$2900mm$	$12dm$	$217dm$	4360cm	$24m^2$	$69600l$
$3,93dm$	$8,13m$	$45,23cm$	$80,707dm$	$214,29cm$	$0,1777539m^2$	$1445,139207l$

Aufgabe 27:

$a)$ 35 41
$b)$ 10
$c)$ 785 773
$d)$ 128 256 512
$e)$ 3600 25200
$f)$ 214
$g)$ 720 5040
$h)$ 36 49
$j)$ 343 512
$k)$ 46656 16777216

Aufgabe 28: *Ein Bauer besitzt* 56 *Hektar Ackerland, wovon* 17 *Hektar mit Weizen gepflanzt wurden. Berechne den prozentualen Anteil der Fläche, die mit Weizen bepflanzt wurde.*

$\frac{17}{56} \approx 30,357\%$

Aufgabe 29: *Ein Kapital von* 7800 € *wurde zu einem Jahreszins von* 2,3% *ein Jahr lang angelegt. Berechne wie viel Geld nach dem Jahr zu Verfügung steht.*

$7800\,€ \cdot 1,023 = 7979,40\,€$

Aufgabe 30: *Ein Preis von* $29,99\,€$ *soll um* 15% *gesenkt werden. Berechne den neuen Preis.*

$29,99\,€ \cdot (1-15\%) = 29,99\,€ \cdot 0,85 = 25,4915\,€$

Aufgabe 31: *Ein Preis wurde um* 35% *gesenkt und beträgt nun* $24,50\,€$*. Berechne wie hoch der ursprünglich Preis war.*

$24,50\,€ \cdot \frac{100}{100-35} \approx 37,692\,€$

Aufgabe 32: *Von* 4500 *befragten Menschen gaben* 3933 *an, dass sie nicht wissen, dass HTML eine Skriptsprache sei. Berechne den prozentualen Anteil.*

$\frac{3933}{4500} = 87,4\%$

Aufgabe 33: *Ein Produkt kostet* $450\,€$ *netto. Berechne den Bruttopreis, wenn* 19% *Mehrwertsteuer hinzukommen.*

$450\,€ \cdot 1,19 = 535,50\,€$

Aufgabe 34: *Ein Containerschiff hat eine Ladung von* $145000t$*, wovon nach* 7 *Stunden* 65% *gelöscht (entladen) wurden. Berechne wie lange die gesamte Entladung dauert.*

$7h \cdot \frac{100}{65} = \frac{140}{13}h \approx 10,769h$

Aufgabe 35: *Durch Inflation wird das Geld jedes Jahr durchschnittlich* $2,2\%$ *weniger Wert. Berechne wie viel* $4000\,€$ *nach einen Jahr nur noch Wert wären.*

$4000\,€ \cdot (1-0,022) = 3912\,€$

Aufgabe 36: *In der Bundesrepublik Deutschland leben* 82 *Millionen Menschen, wovon rund* 42 *Millionen Menschen einer Arbeit nach gehen könnten. Es sind* $5,5\%$ *der Menschen arbeitslos. Berechne die Anzahl der arbeitslosen Menschen in der Bundesrepublik Deutschland*

$42000000 \cdot 0,055 = 2310000$

Aufgabe 37: *Bestimme die Anzahl der unterschiedlichen Quader mit der angegebenen Anzahl von Würfeln. (Ohne Permutationen.)*

$a)$ $64 \Rightarrow 7$	$b)$ $96 \Rightarrow 12$	$c)$ $132 \Rightarrow 10$	$d)$ $625 \Rightarrow 4$
$e)$ $225 \Rightarrow 9$	$f)$ $75 \Rightarrow 4$	$g)$ $289 \Rightarrow 2$	$h)$ $512 \Rightarrow 15$

Aufgabe 38: *Bestimme wie viele Möglichkeiten der Addition von drei natürlichen Zahlen (außer 0) es für die gegebenen Zahlen gibt. (Ohne Permutationen.)*

a) $4 \Rightarrow 1$	*b)* $6 \Rightarrow 3$	*c)* $10 \Rightarrow 8$	*d)* $18 \Rightarrow 27$
e) $22 \Rightarrow 40$	*f)* $28 \Rightarrow 65$	*g)* $46 \Rightarrow 176$	*h)* $78 \Rightarrow 507$
i) $112 \Rightarrow 1045$	*j)* $122 \Rightarrow 1240$	*k)* $154 \Rightarrow 1976$	*l)* $196 \Rightarrow 3021$

Aufgabe 39: *Beschreibe die Auffälligkeiten zur Lösung von Aufgabe 38.*

Es existieren immer $\frac{n-1}{2}$ Anfangmöglichkeiten und anschließend reduzieren sich die Möglichkeiten um 1 oder 2 im Wechsel, sodass insgesamt $\frac{2}{3}$ Iterationsschritte durchgeführt werden müssen.

Aufgabe 40: *Bestimme wie viele Möglichkeiten der Addition von drei natürlichen Zahlen (außer 0) es für die gegebenen Zahlen gibt. (Ohne Permutationen.)*

a) $3 \Rightarrow 1$	*b)* $5 \Rightarrow 2$	*c)* $7 \Rightarrow 4$	*d)* $11 \Rightarrow 10$
e) $15 \Rightarrow 19$	*f)* $19 \Rightarrow 30$	*g)* $31 \Rightarrow 80$	*h)* $55 \Rightarrow 252$
i) $79 \Rightarrow 520$	*j)* $123 \Rightarrow 1261$	*k)* $137 \Rightarrow 1564$	*l)* $197 \Rightarrow 3234$

Aufgabe 41: *Gib einen allgemein gültigen Term zur Lösung von Aufgabe 38 und 40 an.*

Die Zahl $n \in \mathbb{N} \ \forall \ n \geq 3$ besitzt R Möglichkeiten, um durch die Addition von drei positiven natürlichen Zahlen dargestellt zu werden. Es gilt: $p = \frac{n-1}{2}$ und $k_{pre} = \frac{2}{3}p$ wobei k_{pre} auf eine natürliche Zahl k_{max} gerundet wird.

$$R_n = \sum_{k=0}^{k_{max}} \left[(p-k) \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right| + (p-2k) \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \right| \right]$$

Aufgabe 42: *Ein n-Eck besteht aus n Ecken, an denen Gummibänder gespannt werden sollen, sodass jeder Eckpunkt maximal eine Berührung eines Gummibandes besitzt. Jedes Gummiband muss mindestens zwei Eckpunkte berühren. Die Anzahl der Gummibänder kann variiert werden. Bestimme wie viele Möglichkeiten der Gummibandanordnungen es insgesamt für das gegebene regelmäßige n-Eck geben kann. (Mit Permutationen.)*

a) 1-Eck: 1	*b)* 2-Eck: 2	*c)* 3-Eck: 5	*d)* 4-Eck: 15	*e)* 5-Eck: 52
f) 6-Eck: 203	*g)* 7-Eck: 877	*h)* 8-Eck: 4140	*i)* 9-Eck: 21147	*i)* 10-Eck: 115975

Aufgabe 43: *Ein n-Eck besteht aus n Ecken, an denen Gummibänder gespannt werden sollen, sodass jeder Eckpunkt maximal eine Berührung eines Gummibandes besitzt. Jedes Gummiband muss mindestens zwei Eckpunkte berühren. Die Anzahl der Gummibänder kann variiert werden. Bestimme wie viele Möglichkeiten der Gummibandanordnungen es insgesamt für das gegebene regelmäßige n-Eck geben kann, ohne dass sich die Gummibänder überkreuzen. (Mit Permutationen.)*

a) 1-Eck: 1 *b*) 2-Eck: 2 *c*) 3-Eck: 5 *d*) 4-Eck: 14 *e*) 5-Eck: 42

f) 6-Eck: 132 *g*) 7-Eck: 429 *h*) 8-Eck: 1430 *i*) 9-Eck: 4862 *i*) 10-Eck: 16796

Aufgabe 44: *Gib einen allgemeinen Term zur Lösung von Aufgabe 43 an.*

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

Aufgabe 45: *Vervollständige die Tabelle.*

1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1	2	-	-	-	-	-	-	-	-
2	3	5	-	-	-	-	-	-	-
5	7	10	15	-	-	-	-	-	-
15	20	27	37	52	-	-	-	-	-
52	67	87	114	151	203	-	-	-	-
203	255	322	409	523	674	877	-	-	-
977	1080	1335	1657	2066	2589	3263	4140	-	-
4140	5107	6097	7432	9089	11155	13744	17007	21147	-
21147	25287	3034	36401	43833	52922	64077	77821	94828	115975

Aufgabe 46:

a)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
b)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c)			1	3	6	10	15	21	28	36	45
d)				1	4	10	20	35	56	84	120
e)					1	5	15	35	70	126	210
f)						1	6	21	56	126	252
g)							1	7	28	84	210
h)								1	8	36	120
i)									1	9	45

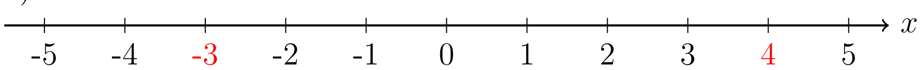
Es handelt sich um das Pascal'sche Dreieck. Außerdem gilt bei a), dass es sich um ein 0-dimensionales Dreieck handelt, bei b), dass es sich um ein 1-dimensionales Dreieck handelt, bei c), dass es sich um ein 2-dimensionales Dreieck handelt, bei d), dass es sich um ein 3-dimensionales Dreieck handelt, und so weiter.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (3.23).

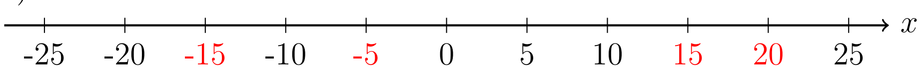
18.10.24 Lösungen zum Zahlenstrahl

Aufgabe 1:

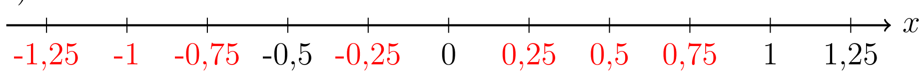
a)



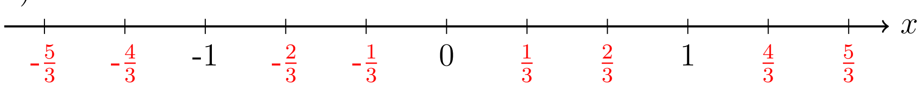
b)



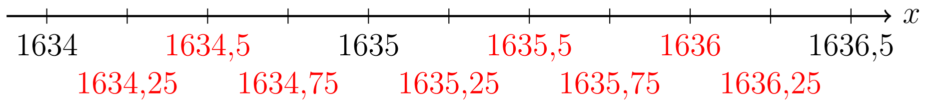
c)



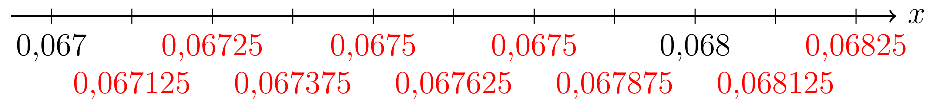
d)



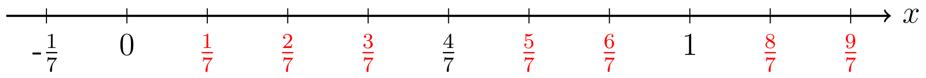
e)



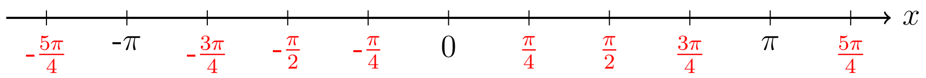
f)



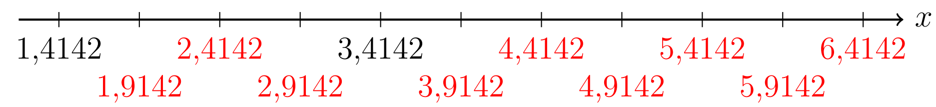
g)



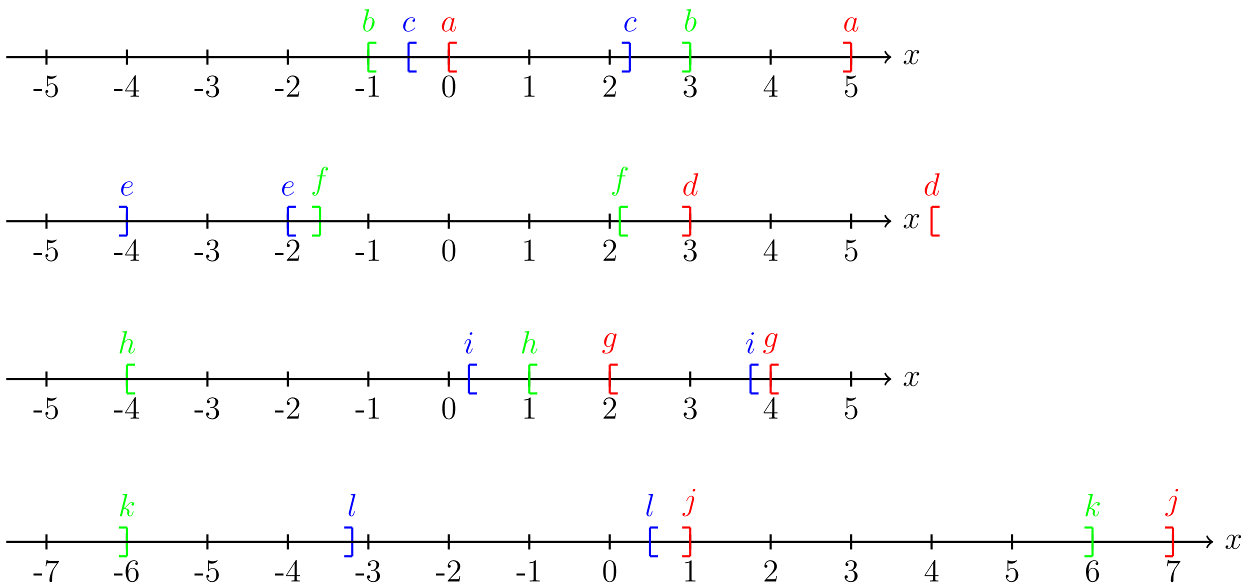
h)



i)



Aufgabe 2:



Aufgabe 3:

$a)$ rot: $[0,4]$ grün: $]-4,2\,]$ blau: $\left]-\frac{7}{2},\frac{19}{4}\right]$

$b)$ rot: $]\,1,2\,[$ grün: $[-5,-3]$ blau: $\left[-\frac{3}{2},\frac{13}{4}\right[$

$c)$ rot: $]\,3,4\,]$ grün: $[-4,1]$ blau: $\left[-\frac{9}{4},\frac{17}{4}\right]$

$d)$ rot: $[\,0,4\,[$ grün: $]-2,5\,[$ blau: $\left]-\frac{9}{2},\frac{7}{4}\right[$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.1.2).

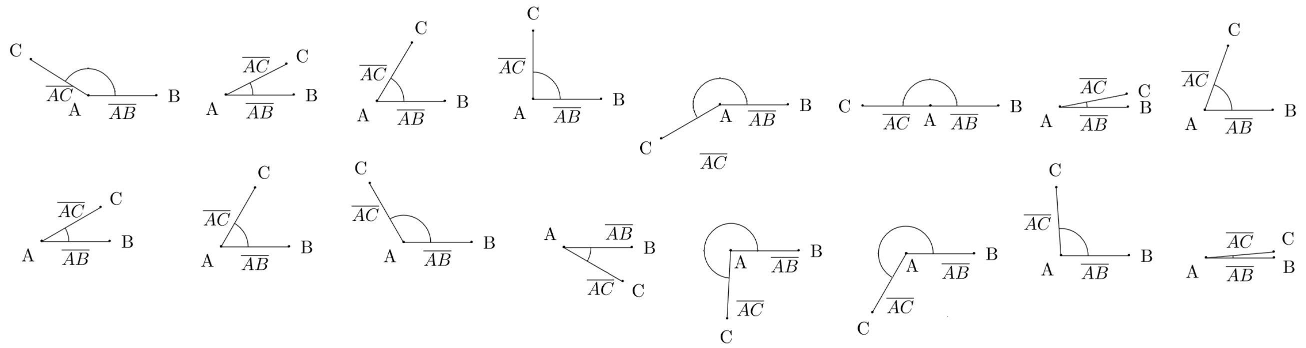
18.10.25 Lösungen zu Winkeln

Aufgabe 1:

$\measuredangle\left(\overline{AB},\overline{AC}\right) =$

57°: spitzer Winkel	133°: stumpfer Winkel	14°: überspitzer Winkel
214°: überstumpfer Winkel	75°: spitzer Winkel	300°: überstumpfer Winkel
117°: stumpfer Winkel	91°: stumpfer Winkel	270°: überstumpfer Winkel
179°: stumpfer Winkel	8°: überspitzer Winkel	45°: spitzer Winkel

Aufgabe 2:



Aufgabe 3:

$a \parallel b$,	$c \nparallel, d$	$e \parallel, f$
$g \nparallel h$,	$i \parallel, j$	$k \parallel, l$
Zusätzliche Parallelitäten:	$a \parallel c$,	$b \parallel c$

Aufgabe 4:

$a \not\perp b$, $c \not\perp d$, $e \perp f$, $g \not\perp h$

Aufgabe 6:

$a)\ c||b$ $b)\ c\perp b$ $c)\ c||b$ $d)\ d||a$ $e)\ d\perp a$ $f)\ d\perp a$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.2.1).

18.10.26 Lösungen zu Winkelbeziehungen

Aufgabe 1:

$a)\ \alpha = \gamma = 35°$ und $\beta = \delta = 145°$	$b)\ \beta = \delta = 11°$ und $\alpha = \gamma = 169°$
$c)\ \alpha = \gamma = 137°$ und $\beta = \delta = 43°$	$d)\ \alpha = \gamma = 27°$ und $\beta = \delta = 153°$
$e)\ \beta = \delta = 62°$ und $\alpha = \gamma = 118°$	$f)\ \beta = \delta = 111°$ und $\alpha = \gamma = 69°$
$g)\ \alpha = \gamma = 49°$ und $\beta = \delta = 131°$	$h)\ \beta = \delta = 23°$ und $\alpha = \gamma = 157°$
$i)\ \alpha = \gamma = 123°$ und $\beta = \delta = 57°$	$j)\ \beta = \delta = 86°$ und $\alpha = \gamma = 94°$
$k)\ \alpha = \gamma = 151°$ und $\beta = \delta = 29°$	$l)\ \alpha = \gamma = 173°$ und $\beta = \delta = 7°$

Aufgabe 2:

$a)$ $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 23^\circ$ und $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 157^\circ$

$b)$ $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 19^\circ$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 161^\circ$

$c)$ $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 146^\circ$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 34^\circ$

$d)$ $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 35^\circ$ und $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 145^\circ$

$e)$ $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 59^\circ$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 121^\circ$

$f)$ $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 38^\circ$ und $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 142^\circ$

$g)$ $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 142^\circ$ und $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 38^\circ$

$h)$ $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 75^\circ$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 105^\circ$

$i)$ $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 99^\circ$ und $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 81^\circ$

$j)$ $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 155^\circ$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 25^\circ$

$k)$ $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 3^\circ$ und $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 177^\circ$

$l)$ $\beta = \epsilon = \delta = \mu = 103^\circ$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = 77^\circ$

Aufgabe 3:

a) $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 56°$ und $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 124°$

b) $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 13°$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 167°$

c) $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 77°$ und $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 103°$

d) $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 153°$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 27°$

e) $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 95°$ und $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 85°$

f) $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 111°$ und $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 69°$

g) $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 43°$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 137°$

h) $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 24°$ und $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 156°$

i) $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 134°$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 46°$

j) $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 20°$ und $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 160°$

k) $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 6°$ und $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 174°$

l) $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 172°$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 8°$

m) $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 81°$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 99°$

n) $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 68°$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 112°$

o) $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 10°$ und $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 170°$

p) $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 167°$ und $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 13°$

q) $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 55°$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 125°$

r) $\beta = \delta = \nu = \omega = \kappa = \varphi = \epsilon = \mu = 64°$ und $\alpha = \gamma = \theta = \eta = \lambda = \xi = \sigma = \rho = 116°$

Aufgabe 4:

$a)$ $\alpha = \gamma = 34°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 79°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 67°$
und $\eta = \theta = 101°$ und $\nu = \omega = 113°$

$b)$ $\alpha = \gamma = 75°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 22°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 83°$
und $\eta = \theta = 158°$ und $\nu = \omega = 97°$

$c)$ $\alpha = \gamma = 21°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 33°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 126°$
und $\eta = \theta = 147°$ und $\nu = \omega = 54°$

$d)$ $\alpha = \gamma = 45°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 98°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 37°$
und $\eta = \theta = 82°$ und $\nu = \omega = 143°$

$e)$ $\alpha = \gamma = 79°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 28°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 73°$
und $\eta = \theta = 152°$ und $\nu = \omega = 107°$

$f)$ $\alpha = \gamma = 89°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 11°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 80°$
und $\eta = \theta = 169°$ und $\nu = \omega = 100°$

$g)$ $\alpha = \gamma = 86°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 41°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 53°$
und $\eta = \theta = 139°$ und $\nu = \omega = 127°$

$h)$ $\alpha = \gamma = 45°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 31°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 104°$
und $\eta = \theta = 149°$ und $\nu = \omega = 76°$

$i)$ $\alpha = \gamma = 52°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 77°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 51°$
und $\eta = \theta = 51°$ und $\nu = \omega = 129°$

$j)$ $\alpha = \gamma = 65°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 41°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 74°$
und $\eta = \theta = 139°$ und $\nu = \omega = 106°$

$k)$ $\alpha = \gamma = 74°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 38°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 68°$
und $\eta = \theta = 142°$ und $\nu = \omega = 112°$

$l)$ $\alpha = \gamma = 43°$ und $\beta = \delta = \epsilon = \mu = 34°$ und $\varphi = \psi = \kappa = \xi = 103°$
und $\eta = \theta = 146°$ und $\nu = \omega = 77°$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.3.1).

18.10.27 Lösungen zu Rechtecken

Aufgabe 1:

$a)$ $A = 18cm^2$ und $U = 18cm$

$b)$ $A = 14cm^2$ und $U = 18cm$

$c)$ $A = 108cm^2$ und $U = 42cm$

$d)$ $A = 68cm^2$ und $U = 42cm$

$e)$ $A = 81cm^2$ und $U = 60cm$

$f)$ $A = 90cm^2$ und $U = 123cm$

$g)$ $A = 1cm^2$ und $U = 5cm$

$h)$ $A = \frac{9}{10}cm^2$ und $U = \frac{39}{10}cm$

$i)$ $A = \frac{25}{21}cm^2$ und $U = \frac{95}{21}cm$

$j)$ $A = \frac{11}{40}cm^2$ und $U = \frac{73}{30}cm$

$k)$ $A = \sqrt{6}cm^2 \approx 2,45cm^2$ und $U \approx 6,29cm$

$l)$ $A \approx 1,74cm^2$ und $U \approx 5,38cm$

$m)$ $A = 2cm^2$ und $U = 16,5cm$

$n)$ $A \approx 8,54cm^2$ und $U \approx 11,72cm$

Aufgabe 2:

$a)$ $A = 1,8dm^2$ und $U = 7,2dm$

$b)$ $A = 4500mm^2$ und $U = 280mm$

$c)$ $A = 180600cm^2$ und $U = 1700cm$

$d)$ $A = 0,4cm^2$ und $U = 4,4cm$

$e)$ $A = 0,3dm^2$ und $U = \frac{2431}{45}dm \approx 54,022dm$

$f)$ $A = 9000m^2$ und $U = 18250m$

$g)$ $A \approx 0,005dm^2$ und $U \approx 1,444dm$

$h)$ $A = 0,44m^2$ und $U = 2,7m$

$i)$ $A = 1200\sqrt{111}cm^2 \approx 12642,785cm^2$ und $U = 20\sqrt{111}cm + 240cm \approx 450,713cm$

$j)$ $A \approx 77,088mm^2$ und $U \approx 35,144m$

Aufgabe 3:

$a)$ $a = 4cm$ und $U = 14cm$

$b)$ $A = 72cm^2$ und $b = 12cm$

$c)$ $A = 550cm^2$ und $U = 122cm$

$d)$ $a = 12cm$ und $U = 50cm$

$e)$ $A \approx 4,297dm^2$ und $a = 6,875dm$

$f)$ $b = \frac{9}{5}m$ und $U = 5,3\bar{7}m$

$g)$ $a \approx 0,137m$ und $b \approx 5,463m$ oder $a \approx 5,463m$ und $b \approx 0,137m$

$h)$ $a \approx 0,031mm$ und $b \approx 7,514mm$ oder $a \approx 7,514mm$ und $b \approx 0,031mm$

Aufgabe 4:
Variante I: 6 Schnitte in a-Richtung und 8 Schnitte in b-Richtung.
Variante II: 8 Schnitte in a-Richtung und 6 Schnitte in b-Richtung.
Variante III: 12 Schnitte in a-Richtung und 5 Schnitte in b-Richtung.
Variante IV: 5 Schnitte in a-Richtung und 12 Schnitte in b-Richtung.

Aufgabe 5:

	1	2	3	4	5	6
Seite a	4	7	5	7	$0,5$	$\frac{5}{4}$
Seite b	5	6	11	2	26	$\frac{1}{4}$
Flächeninhalt A	20	42	55	14	13	$\frac{5}{16}$
Umfang U	18	26	32	18	53	3

Aufgabe 6: $A = 32m$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.4.1).

18.10.28 Lösungen zu Dreiecken

Aufgabe 1:

$a)\ \ b \approx 8,06cm \Rightarrow A \approx 16,12cm^2, U \approx 21,06cm$

$b)\ \ b \approx 9,80cm \Rightarrow A \approx 24,49cm^2, U \approx 25,80cm$

$c)\ \ c \approx 7,21cm \Rightarrow A = 12cm^2, U \approx 17,21cm$

$d)\ \ a \approx 3,61cm \Rightarrow A \approx 10,82cm^2, U \approx 21,06cm$

$e)\ \ h \approx 2,24cm\ ;\ a = 3cm\ ;\ b \approx 3,35cm\ ;\ c = 4,5cm \Rightarrow A \approx 5,03cm^2, U \approx 10,85cm$

$f)\ \ p = 9cm\ ;\ h \approx 5,20cm\ ;\ a = 6cm\ ;\ b = 10,39cm \approx 5,20cm \Rightarrow A \approx 31,18cm^2, U \approx 28,39cm$

$g)\ \ c \approx 0,60cm \Rightarrow A \approx 0,083cm^2, U \approx 1,43cm$

$h)\ \ p = \frac{19}{12}cm\ ;\ h \approx 1,09cm\ ;\ a \approx 1,32cm\ ;\ b \approx 1,92cm \Rightarrow A \approx 16,2cm^2, U \approx 21,06cm$

$i)\ \ c = \frac{51}{20}\ ;\ h \approx 1,18cm\ ;\ a \approx 2,11cm\ ;\ b \approx 1,43cm \Rightarrow A \approx 1,50cm^2, U \approx 6,09cm$

$j)\ \ q = 3,63cm\ ;\ c \approx 4,96cm\ ;\ a \approx 4,24cm\ ;\ b \approx 2,57cm \Rightarrow A \approx 5,46cm^2, U \approx 11,78cm$

$k)\ \ p \approx 1,54cm\ ;\ c \approx 3,34cm\ ;\ a \approx 2,45cm\ ;\ b \approx 2,27cm \Rightarrow A \approx 2,79cm^2, U \approx 8,07cm$

$l)\ \ q \approx 4,05cm\ ;\ a \approx 4,78cm\ ;\ b \approx 3,02cm \Rightarrow A \approx 7,22cm^2, U \approx 13,46cm$

$m)\ \ c \approx 4,45cm\ ;\ a \approx 2,78cm\ ;\ b \approx 3,48cm \Rightarrow A \approx 4,83cm^2, U \approx 8,97cm$

$n)\ \ p \approx 2,16cm\ ;\ a \approx 5,09cm\ ;\ b \approx 3,68cm \Rightarrow A \approx 9,38cm^2, U \approx 15,06cm$

Aufgabe 2:
Da das Geodreieck mit einem 45° Winkel zum Boden gehalten wird, ist der Abstand zum Turm gleich die Resthöhe des Turms, da es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt. Die Höhe, in der das Geodreieck gehalten wird, muss anschließend noch dazu addiert werden: $h = 21,5m$

Aufgabe 3:

$a)\quad \alpha = 53°\ ;\quad \beta = 37°\quad$ und $\gamma = 90°$

$b)\quad \alpha = 45°\ ;\quad \beta = 45°\quad$ und $\gamma = 90°$

$c)\quad \alpha = 46°\ ;\quad \beta = 29°\quad$ und $\gamma = 105°$

$d)\quad \alpha = 25°\ ;\quad \beta = 48°\quad$ und $\gamma = 107°$

$e)\quad \alpha = 53°\ ;\quad \beta = 49°\quad$ und $\gamma = 97°$

$f)\quad \alpha = 26°\ ;\quad \beta = 33,5°\quad$ und $\gamma = 119,5°$

Aufgabe 4:

$a)\ \ a \approx 3cm \quad b)\ \ b \approx 5cm \quad c)\ \ b \approx 5,4cm$

$d)\ \ b \approx 8cm \quad e)\ \ c \approx 8,1cm \quad f)\ \ c \approx 6,75cm$

Aufgabe 5:

$a)\ \ c \approx 7,04cm\ ;\ b)\ \ b \approx 3,20cm\ ;\ c)\ \ a \approx 8,17cm\ ;\ d)\ \ c \approx 6,78cm$

Aufgabe 6:

$a)\ \ c \approx 6,5cm \quad b)\ \ c \approx 8,7cm \quad c)\ \ c \approx 6,3cm \quad d)\ \ c \approx 8,1cm$

Aufgabe 7:

$a)\ \ b \approx 7cm\ ;\ c \approx 3,1cm$ $\qquad b)\ \ b \approx 5,4cm\ ;\ a \approx 3,3cm$

$c)\ \ a \approx 6,9cm\ ;\ c \approx 8,1cm$ $\qquad d)\ \ b \approx 1,7cm\ ;\ c \approx 3,9cm$

Aufgabe 8:

$a)\ \ b \approx 10,6cm\ ;\ a \approx 9,9cm$ $\qquad b)\ \ b \approx 7,4cm\ ;\ a \approx 6,8cm$

$c)\ \ a \approx 5,5cm\ ;\ c \approx 3,9cm$ $\qquad d)\ \ b \approx 2,25cm\ ;\ c \approx 3,8cm$

Aufgabe 9:

$a)\ \ c \approx 9cm \quad \beta \approx 43° \quad \gamma \approx 104°$

$b)\ \ \alpha \approx 40° \quad \beta \approx 57° \quad \gamma \approx 83°$

$c)\ \ c \approx 7,8cm \quad \beta \approx 42° \quad \alpha \approx 58°$

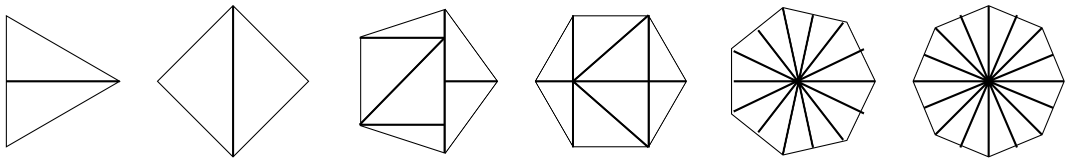
$d)\ \ a \approx 9cm \quad \beta \approx 45° \quad \gamma \approx 59°$

$e)\ \ \alpha \approx 41° \quad \beta \approx 56° \quad \gamma \approx 82°$

$f)\ \ \alpha \approx 45° \quad \beta \approx 56° \quad \gamma \approx 79°$

Aufgabe 10: *Hier ist nur eine von vielen Lösungen vorgestellt.*

$n = 2(2)$ $n = 2(2)$ $n = 10(6)$ $n = 12(8)$ $n = 14(14)$ $n = 16(16)$



Aufgabe 11:

a) $\alpha = 90°$; $\beta = 45°$ und $\gamma = 45°$.

b) $\alpha \approx 102,86°$; $\beta \approx 51,43°$ und $\gamma \approx 25,71°$.

c) $\alpha \approx 51,43°$; $\beta \approx 102,86°$ und $\gamma \approx 25,71°$.

d) $\alpha \approx 77,14°$; $\beta \approx 77,14°$ und $\gamma \approx 25,71°$.

e) $\alpha \approx 77,14°$; $\beta \approx 12,86°$ und $\gamma = 90°$.

f) $\alpha = 11,25°$; $\beta \approx 33,75°$ und $\gamma \approx 135°$.

g) $\alpha = 108°$; $\beta \approx 30,86°$ und $\gamma \approx 41,14°$.

h) $\alpha \approx 28,29°$; $\beta \approx 88,87°$ und $\gamma \approx 62,84°$.

Aufgabe 12:

	1	2	3	4	5	6
a	5	4	1	$\frac{56}{6}$	$\frac{398}{105}$	$\frac{11}{2}$
b	7	6	5	$\frac{56}{5}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{128}{51}$
c	6	9	12	7	$\frac{22}{5}$	$\frac{2239}{510}$
h_a	$\frac{18}{5}$	8	84	6	$\frac{539}{199}$	$\frac{66}{33}$
h_b	$\frac{18}{7}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{84}{5}$	5	$\frac{14}{5}$	$\frac{17}{4}$
h_c	3	$\frac{32}{9}$	7	8	$\frac{7}{3}$	$\frac{8160}{2239}$
A	9	16	42	28	$\frac{77}{15}$	$\frac{16}{3}$
U	18	19	18	$\frac{413}{15}$	$\frac{83}{7}$	$\frac{62}{5}$

Aufgabe 14: $c = 12,8cm$

Aufgabe 15:

Aufgabe 16: $b = 38cm$

	1	2	3	4	5	6
Grundseite g	7	23	14	$\frac{86}{5}$	$8,5$	$\frac{45}{8}$
Höhe h	3	8	$\frac{127}{7}$	5	$\frac{98}{17}$	$\frac{4}{5}$
Flächeninhalt A	$\frac{21}{2}$	92	18	43	$24,5$	$\frac{9}{4}$

Aufgabe 17:

$a)$ $c = 30$ $b)$ $c = 135$ $c)$ $c \approx 8,602$ $d)$ $c \approx 15,264$

$e)$ $a \approx 16,583$ $f)$ $b \approx 9,220$ $g)$ $b \approx 14,422$ $h)$ $a \approx 2,236$

$i)$ $a \approx 12,054$ $j)$ $c \approx 4,703$ $k)$ $a \approx 11,722$ $l)$ $a = \sqrt{32} \approx 5,657$

Aufgabe 18:

$a)$ $c = 5$; $a \approx 3,873$; $b \approx 3,162$; $h \approx 2,449$

$b)$ $q = 2,2$; $a = 6$; $b = 3,980$; $h = 3,317$

$c)$ $c \approx 8,588$; $p \approx 5,188$; $b \approx 5,404$; $a \approx 6,675$

$d)$ $c \approx 16,448$; $q \approx 12,198$; $b \approx 14,164$; $a \approx 8,361$

$e)$ $p = \dfrac{215}{56}$; $a \approx 4,254$; $b \approx 2,031$; $h \approx 1,833$

$f)$ $c \approx 10,206$; $b \approx 8,004$; $h \approx 4,967$; $q \approx 6,276$

Aufgabe 19:

$a)$ $e \approx 8,602cm$ $b)$ $U \approx 24,577cm$

$c)$ $A \approx 15,919cm^2$ $d)$ $U \approx 37,869cm$; $A \approx 64,580cm^2$

Aufgabe 20:

$a)$ $c \approx 8,062cm$ $b)$ $U \approx 26,885cm$

$c)$ $A \approx 205,207cm^2$ $d)$ $U \approx 32,464cm$; $A \approx 51,016cm^2$

Aufgabe 21:

$a)\ f \approx 8,268cm$ $b)\ c \approx 8,203cm$

$c)\ U \approx 8,743cm$ $d)\ A \approx 147,485cm^2$

Aufgabe 22:

$a)\ a \approx 5,253cm$ $b)\ x \approx 0,872cm$

$c)\ U \approx 24,567cm$ $d)\ A \approx 23,771cm^2$

Aufgabe 23:

$a)\ l \approx 1,759m$ $b)\ h \approx 1,942m$

Aufgabe 24:

$a)\ l \approx 6,718m \ \Rightarrow$ 17Schindeln $b)\ h = 5,4m$

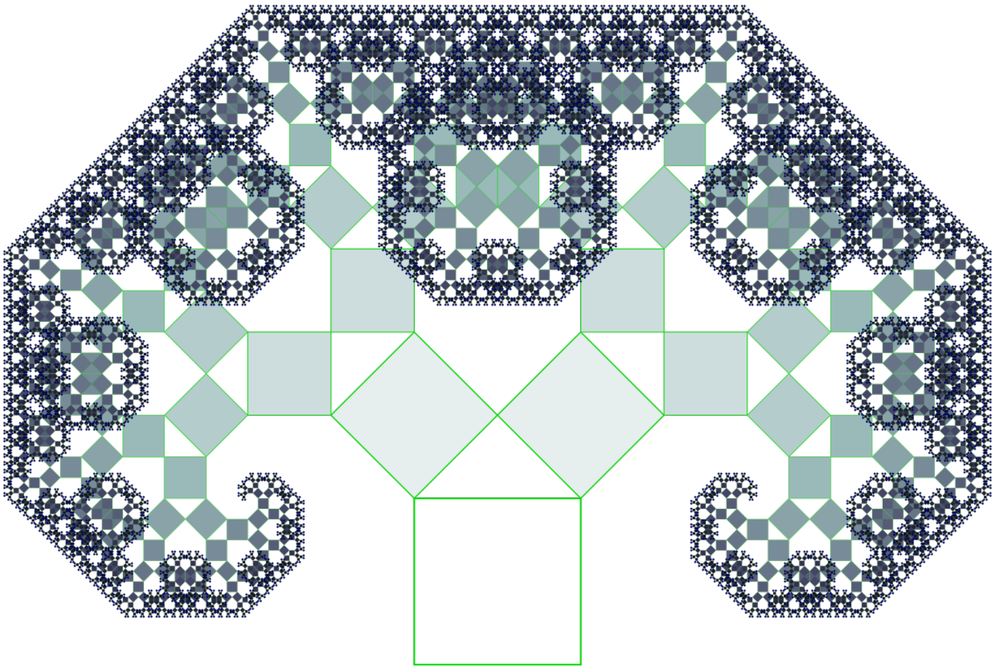
Aufgabe 25:

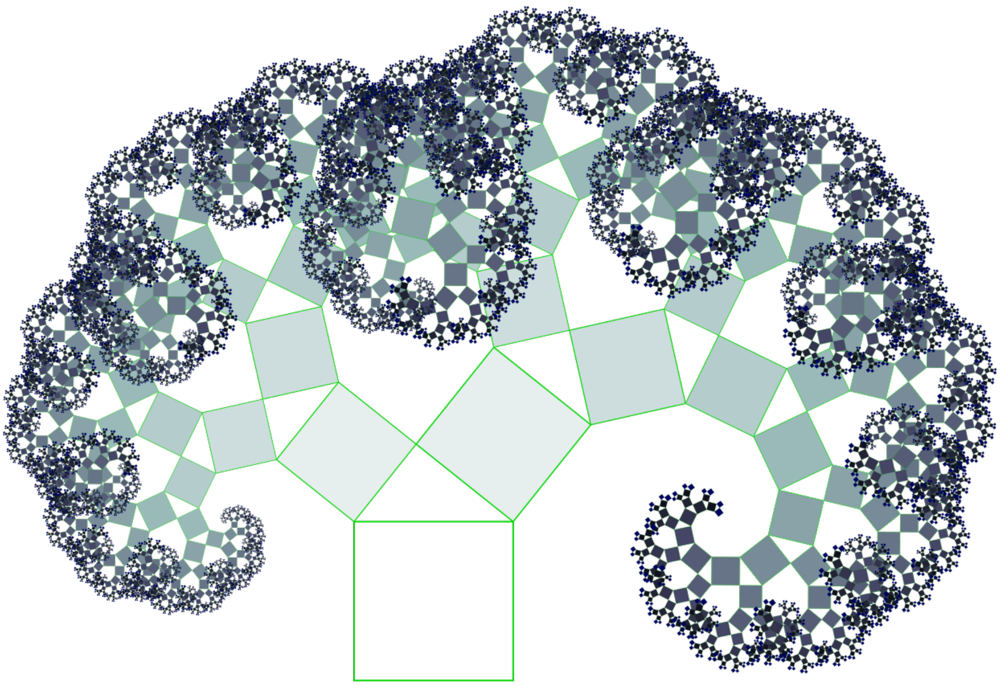
$a)\ h \approx 10,349m$ $b)\ l \approx 10,387m \ \Rightarrow$ Nein

Aufgabe 26:

Aufgabe 27:

Aufgabe 28:



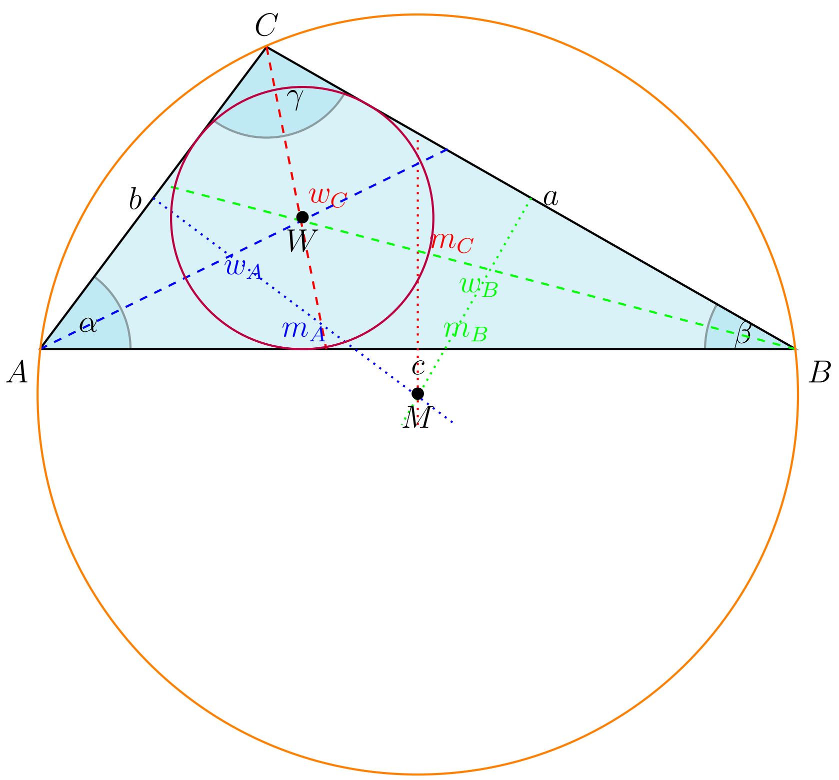


	1	2	3	4	5	6
Hypotenuse c	$\approx 11,402$	11	$\approx 8,860$	$\approx 4,525$	$\approx 4,644$	$\approx 7,174$
Kathete a	7	$6,7$	$\approx 6,610$	$3,2$	$\frac{11}{3}$	$\approx 2,430$
Kathete b	9	$\approx 8,724$	$5,9$	a	$\approx 2,850$	$\frac{27}{4}$
Höhe h	$\approx 5,525$	$\approx 5,314$	$\approx 4,402$	$\approx 2,263$	$\frac{9}{4}$	$\approx 2,286$
Umfang U	$\approx 27,402$	$\approx 26,424$	$\approx 21,370$	$\approx 28,963$	$\approx 11,160$	$\approx 16,354$
Flächeninhalt A	$= 31,5$	$\approx 29,226$	$19,5$	$= 5,12$	$\approx 5,224$	$\frac{41}{5}$

Aufgabe 29: *Ein Bildschirm hat eine Bilddiagonale von 28", was 71,12 cm entspricht. Berechne die Kantenlängen, die sich aus dem 16 : 9 Format ergeben. Der Bildschirm besitzt eine maximale Auflösung von 3840 zu 2160 Pixel. Berechne die Größe eines Pixels. Bestimme dann die Kantenlänge eines quadratischen Pixel.*

$$\begin{aligned}
(71{,}12\,\text{cm})^2 &= (9x)^2 + (16x)^2 \quad \Rightarrow \quad x \approx 3{,}8742\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad a = 34{,}8674\,\text{cm} \quad \wedge \quad b = 61{,}9865\,\text{cm} \\
A = a \cdot b &\approx 2161{,}3051\,\text{cm}^2 \\
\#(Pixel) &= 3840 \cdot 2160\,\text{px} = 8294400\,\text{px} \\
\frac{A}{\#(Pixel)} &\approx 0{,}026057402\,\frac{\text{mm}^2}{\text{px}} = 26057{,}402\,\frac{\mu\text{m}^2}{\text{px}} \\
\sqrt{\frac{A}{\#(Pixel)}} &\approx 161{,}423\,\mu\text{m}
\end{aligned}$$

Aufgabe 30: *Leite aus der Geometrie der Abbildung die Gleichung für den Innenkreis* $r = \frac{2A}{U}$ *her.*



Das Dreieck wird in drei Teildreiecke ΔABW, ΔAWC und ΔBCW unterteilt, wobei diese Dreiecke die Höhen der Strecken $\overline{WW_a} = \overline{WW_b} = \overline{WW_c} = r$ mit den Lotfußpunkten W_a, W_b und W_c hat. Somit ergibt sich

$$r = \frac{2A}{U} = \frac{2\left(A_{\Delta BCW} + A_{\Delta ABW} + A_{\Delta AWC}\right)}{a+b+c}$$
$$r = \frac{2\left(\frac{1}{2}a\overline{WW_a} + \frac{1}{2}b\overline{WW_b} + \frac{1}{2}c\overline{WW_c}\right)}{a+b+c}$$
$$r = \frac{a\overline{WW_a} + b\overline{WW_b} + c\overline{WW_c}}{a+b+c} \quad \text{mit: } \overline{WW_a} = \overline{WW_b} = \overline{WW_c} = r$$
$$r = \frac{(a+b+c)\overline{WW_a}}{a+b+c} = r \quad \square$$

Aufgabe 31: *Leite aus der Geometrie der Abbildung aus Aufgabe 1 die Gleichung für den Umkreis* $R = \frac{abc}{4A}$ *her.* (Benötigt Kapitel „Trigonometrie“)

Dadurch, dass verschiedene Dreiecke den gleichen Umkreisradius besitzen können, kann auch der Mittelpunkt des Umkreises - also der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten - festgesetzt werden. Wenn nun ein Winkel (Beispielsweise γ) und die gegenüberliegende Seite (in unserem Beispiel also c) feste Maße bekommen können die anderen beiden Seitenlängen und Winkelmaße verändert werden ohne, dass sich der Umkreisradius verändert. Nun können die restlichen Werte so verändert werden bis der Umkreismittelpunkt auf einer der Seiten der übrigen Strecken (im Beispiel a oder c) liegt. Folglich halbiert der der Umkreismittelpunkt nun diese Seite, welche ebenfalls den Durchmesser darstellt. Weiterhin ist nun der Satz des Thales zu erkennen, sodass der gegenüberliegende Winkel der halbierten Seite einen rechten Winkel besitzen muss. Über die trigonometrische Flächeninhaltsgleichung ergibt sich somit:

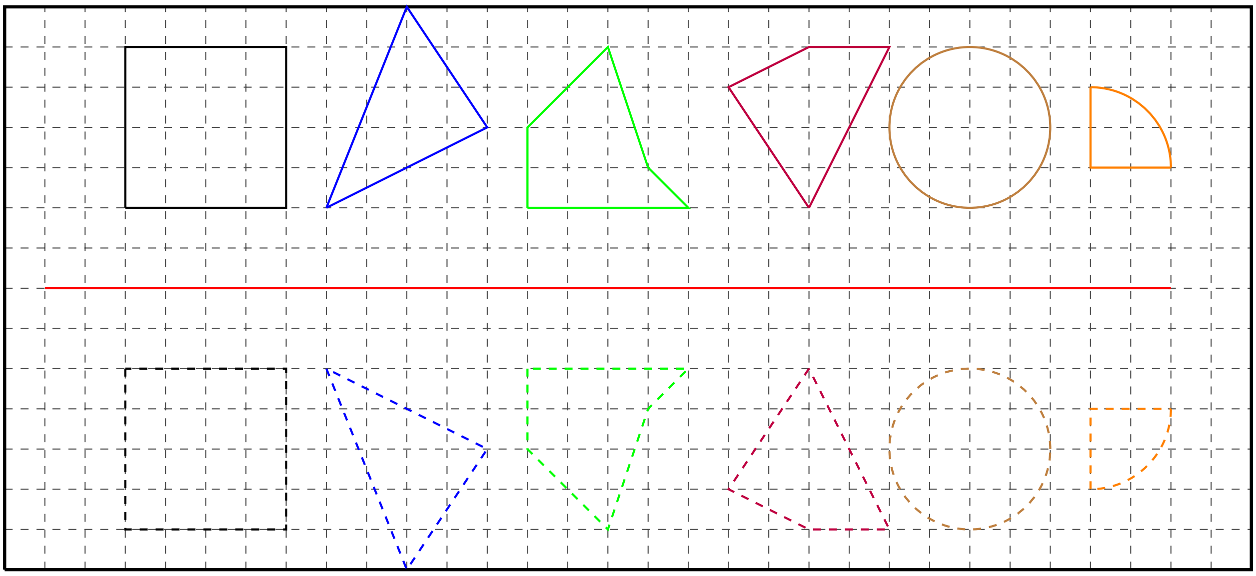
$$\sin(\gamma) = \frac{c}{b} = \frac{c}{2R}$$
$$R = \frac{c}{2\sin(\gamma)}$$
$$R = \frac{abc}{2ab\sin(\gamma)} \quad \text{mit: } A = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}cb\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta)$$
$$R = \frac{abc}{4A} \quad \square$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.5.1).

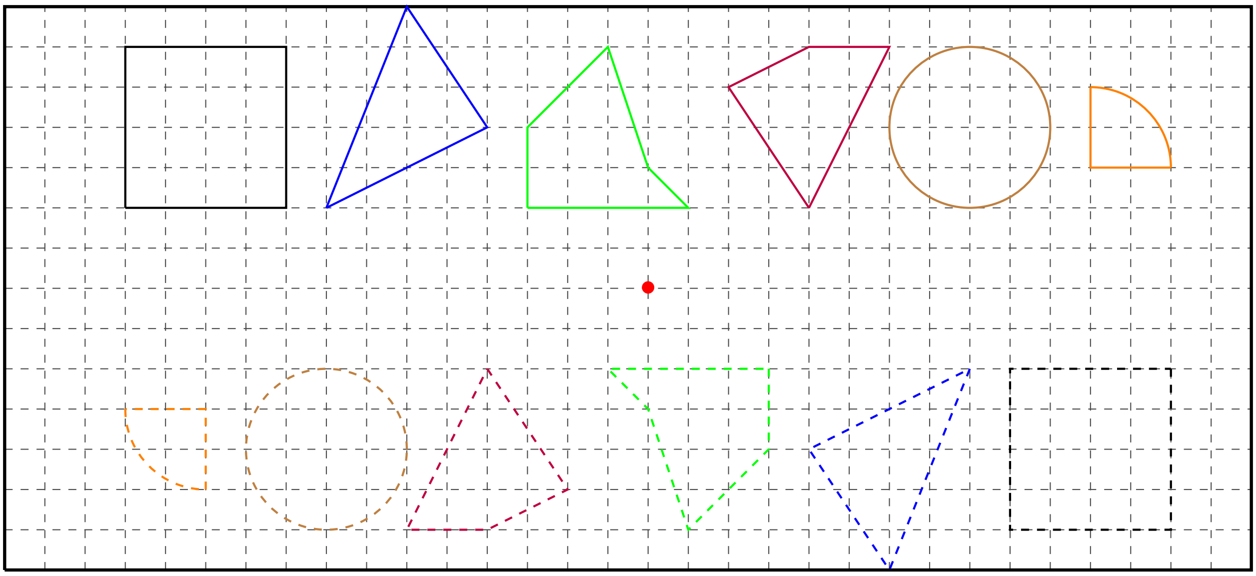
18.10.29 Lösungen zu Symmetrien

Aufgabe 1:

a)

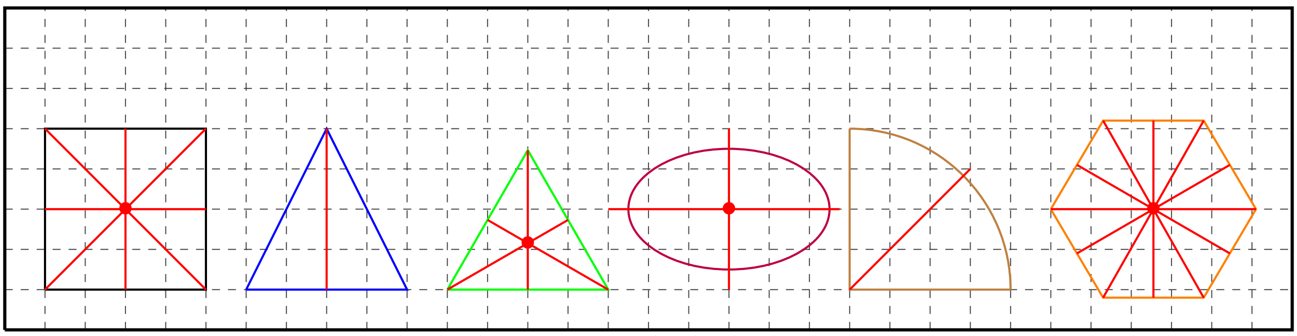


b)

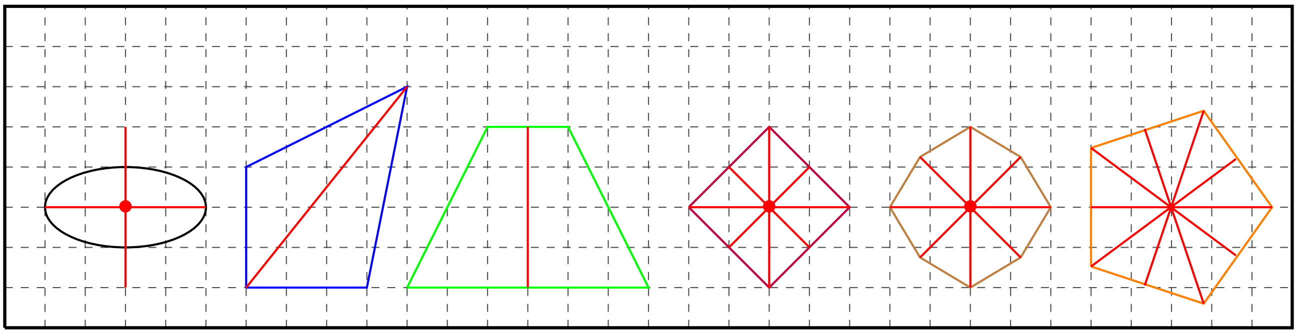


Aufgabe 2:

a)



b)

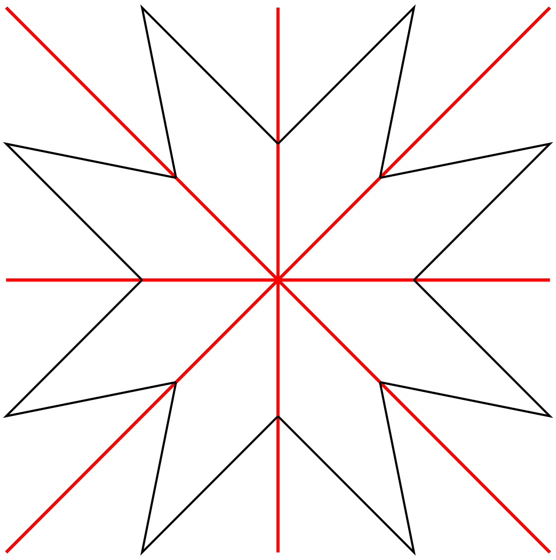


Aufgabe 3: *Wie viele Symmetrieachsen und Symmetriepunkte besitzen die Körper?*

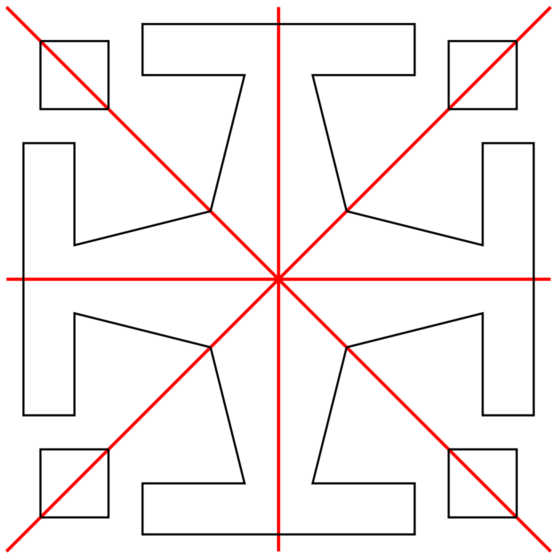
Figur	schwarz	blau	grün	lila	braun	orange
Achsen	∞	4	4	2	0	1
Punkte	1	1	1	1	0	0

Aufgabe 5:

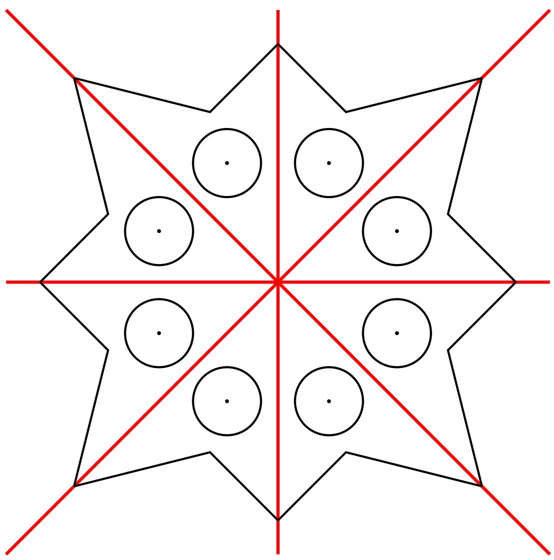
a)



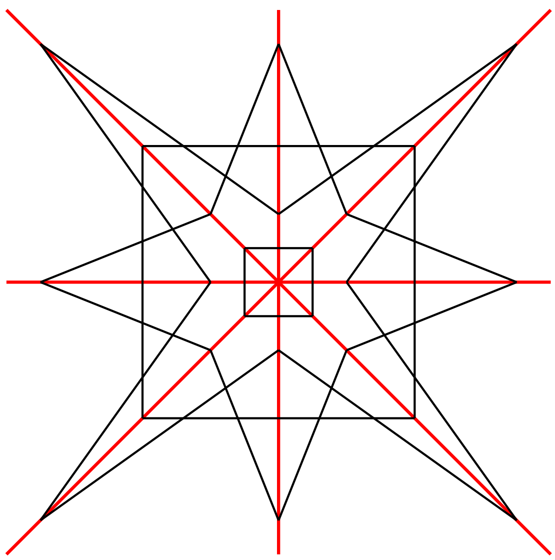
b)



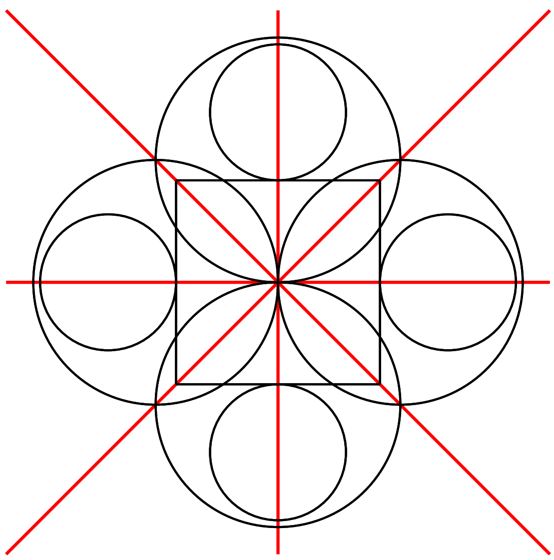
c)



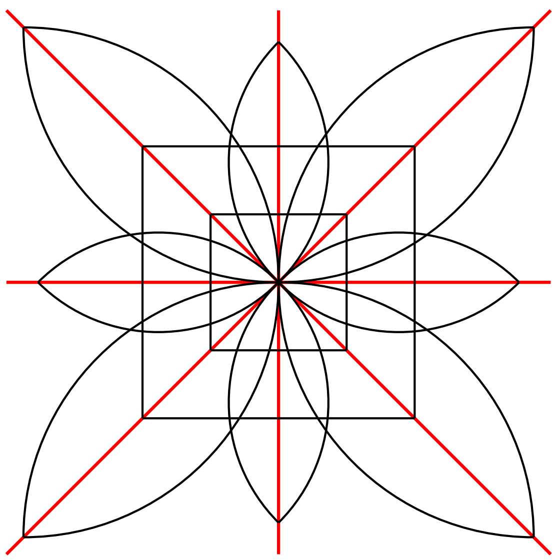
d)



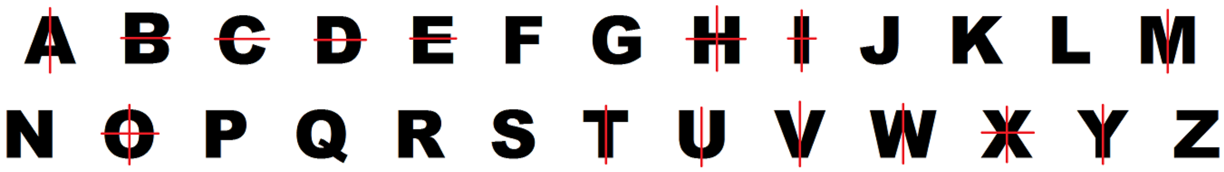
e)



f)



Aufgabe 6: *Finde alle Symmetrien des Alphabets.*



Aufgabe 7: *Finde alle Symmetrien der Flaggen.*

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.6.1).

18.10.30 Lösungen zu Streckungen

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.7.1).

18.10.31 Lösungen zu Kongruenz

Aufgabe 4:

a) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \ncong \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$	*b)* $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \cong \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$
c) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \cong \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$	*d)* $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \cong \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$
e) $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \ncong \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$	*f)* $\Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \cong \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$

Aufgabe 5:

$a)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$ $b)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$

$c)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$ $d)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \not\sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$

$e)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \not\sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$ $f)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$

Aufgabe 6:

$a)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \cong \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$ $b)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$

$c)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \not\sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$ $d)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \not\sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$

$e)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \cong \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$ $f)\ \Delta_{ABC,\alpha\beta\gamma} \sim \Delta_{DEF,\delta,\eta,\phi}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.8.1).

18.10.32 Lösungen zum Strahlensatz

Aufgabe 1:

$a)\quad \overline{ZA} = 5\ ;\quad \overline{ZB} = 9\ ;\quad \overline{AB} = 4\ ;\quad \overline{DB} = 4\ ;\quad \overline{AC} = \frac{36}{5}$

$b)\quad \overline{ZD} = 12\ ;\quad \overline{ZC} = 8\ ;\quad \overline{DC} = 4\ ;\quad \overline{DB} = \frac{9}{2}\ ;\quad \overline{AC} = 3$

$c)\quad \overline{ZA} = \frac{14}{11}\ ;\quad \overline{ZB} = 2\ ;\quad \overline{AB} = \frac{8}{11}\ ;\quad \overline{DB} = 7\ ;\quad \overline{AC} = 11$

$d)\quad \overline{ZA} = 5\ ;\quad \overline{ZB} = 8\ ;\quad \overline{AB} = 3\ ;\quad \overline{ZD} = \frac{32}{5}\ ;\quad \overline{ZC} = 4\ ;\quad \overline{DC} = \frac{12}{5}$

$e)\quad \overline{ZA} = \frac{15}{84}\ ;\quad \overline{ZB} = \frac{3}{4}\ ;\quad \overline{AB} = \frac{12}{21}\quad \overline{DB} = \frac{1}{3}\ ;\quad \overline{AC} = \frac{7}{5}$

$f)\quad \overline{ZD} = \pi\ ;\quad \overline{ZC} = \sqrt{2}\ ;\quad \overline{DC} = \pi - \sqrt{2}\ ;\quad \overline{DB} = e\ ;\quad \overline{AC} = e\frac{\sqrt{2}}{\pi}\ ;$

Aufgabe 2:

$x \approx 5,122\ ,\quad y \approx 3,147\ ,\quad u \approx 3,215\ ,\quad v \approx 3,265$

$r \approx 3,052\ ,\quad t \approx 4,495\ ,\quad p \approx 2,583\ ,\quad q \approx 1,785$

Aufgabe 3:

$$w \approx 6,883 \quad , \quad z \approx 3,892 \quad , \quad t \approx 4,278$$
$$x \approx 7,112 \quad , \quad y \approx 8,588$$

Aufgabe 4:

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad \text{und} \quad \frac{B}{G} = \frac{b-f}{f}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} = \frac{b}{f} - 1 \quad |: b$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{g} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b} \quad \Big| + \frac{1}{b}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

Aufgabe 5:

$a)$ $B = \frac{105}{22} cm \approx 4,773 cm$ und $f = \frac{770}{57} cm \approx 13,509 cm$

$b)$ $G = \frac{117}{200} cm = 0,585 cm$ und $g = \frac{783}{100} cm = 7,83 cm$

$c)$ $G = \frac{133}{4} cm = 33,25 cm$ und $b = \frac{33}{95} cm \approx 0,347 cm$

$d)$ $B = \frac{160}{9} mm = 1,\bar{7} cm$ und $f = \frac{1080}{67} cm \approx 16,119 cm$

$e)$ $G = \frac{630}{529} mm \approx 1,191 mm$ und $g = \frac{31220}{529} mm \approx 59,017 mm$

$f)$ $B \approx 1,087 cm$ und $b \approx 17,007 cm$

Aufgabe 6:

$a)$ $y = \frac{7}{2}$	$b)$ $s = 12$	$c)$ $x = \frac{14}{5}$
$d)$ $g = \frac{15}{4}$	$e)$ $d = \frac{28}{3}$	$f)$ $m = \frac{55}{4}$
$g)$ $d = \frac{637}{240}$	$h)$ $g = \frac{20}{9}$	$i)$ $n = \frac{49}{10}$
$j)$ $y \approx 5,54788$	$k)$ $d = \sqrt{39}$	$l)$ $s \approx 1,84927$

Aufgabe 7:

$\overline{AB} = 3,53\bar{5}km$

Aufgabe 8:

$b = 9,9m$

Aufgabe 9:

$$h = \frac{ab}{a+b} = \frac{22134}{1525}m \approx 14,514m$$

Aufgabe 10:

$a)\ x = \frac{37}{6} \qquad b)\ x = 4,4 \quad c)\ x \approx 2,15293$

Aufgabe 11:

$a)\ x = 5,6 \qquad b)\ x = \frac{40}{3} \qquad c)\ x = 3,65 \qquad d)\ x = \frac{495}{644} \approx 0,789$

Aufgabe 12:

$a)\ x = 1,5 \qquad b)\ x = 12,5 \qquad c)\ x = \frac{44}{3} \qquad d)\ x = \frac{22}{7}$

$d)\ x = \frac{5}{3} \qquad e)\ x = \frac{1771}{390} \approx 4,541 \qquad f)\ x = \frac{1173}{124} \approx 9,460 \qquad g)\ x = \frac{8}{21} \approx 0,381$

Aufgabe 13:

$a)\ x = 4,2 \qquad b)\ x = \frac{49}{6} \qquad c)\ x = \frac{1716}{265} \approx 6,475 \qquad d)\ x = \frac{208}{105} \approx 1,981$

Aufgabe 14:

$a)\ \ x = \frac{16}{3} \qquad b)\ \ x = \frac{7}{2} \qquad c)\ \ x = 16,24 \qquad d)\ \ x = \frac{273}{176} \approx 1,551$

Aufgabe 15:

$a)\ \ x = 6$	$b)\ \ x = 4,5$	$c)\ \ x = \frac{10}{7}$	$d)\ \ x = 13,75$
$e)\ \ x = \frac{744}{365} \approx 2,038$	$f)\ \ x = 5,6$	$g)\ \ x = \frac{1936}{225} = 8,60\bar{4}$	$h)\ \ x = \frac{637}{62} \approx 10,274$
$i)\ \ x = \frac{102}{79} \approx 1,291$	$j)\ \ x = \frac{8}{3}$	$k)\ \ x = \frac{27}{46} \approx 0,587$	$l)\ \ x = \frac{243}{242} \approx 1,004$

Aufgabe 16:
$a)$ f, k, h, d bilden ein Parallelogramm: $f = h$ und $k = d$, außerdem sind die Dreiecke Δacf und Δkbg ähnlich. Insgesamt ist ein gleichschenkliges Dreieck zu beobachten, sodass $d = b$ und $a = c$ gilt. $b)\ \ a = 4\ ;\ b = d = 5\ ;\ h = 3\ ;\ g = \frac{15}{4}$
$c)\ \ a = \frac{7}{2} \qquad d)\ \ \frac{g}{k} = \frac{f}{c}$ oder $\frac{k}{g} = \frac{c}{f}$ oder $\frac{f}{g} = \frac{c}{k}$ oder $\frac{g}{f} = \frac{k}{c}$.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.9.1).

18.10.33 Lösungen zu Vierecken

Aufgabe 1:

$a)$ Quadrat: $a = 2cm :\Rightarrow A = 4cm^2, U = 8cm$

$b)$ Raute: $a = 5cm$ und $h = 4cm :\Rightarrow A = 20cm^2, U = 20cm$

$c)$ Parallelogramm: $a = 6cm, b = 3cm$ und $h_a = 2cm :\Rightarrow A = 12cm^2, U = 18cm$

$d)$ Trapez: $a = 4cm, c = 11cm, d = b$ und $h = 4cm : b \approx 5,32, \Rightarrow A = 30cm^2, U \approx 25,64cm$

$e)$ Drachen: $a = 4cm, b = 6cm$ und $e = 6cm : d \approx 7,84cm \Rightarrow A \approx 47,04cm^2, U = 20cm$

Aufgabe 2:

$a)\ A = 16cm^2\ ;\ U = 16cm$ $\quad b)\ A = 131cm^2\ ;\ U = 44cm$

$c)\ A = 225dm^2\ ;\ U = 60dm$ $\quad d)\ A = \frac{25}{36}cm^2\ ;\ U = \frac{10}{3}cm$

$e)\ A = \frac{9}{16}km^2\ ;\ U = 3km$ $\quad f)\ A = \frac{25}{144}m^2\ ;\ U = \frac{5}{3}m$

$e)\ A = 5mm^2\ ;\ U = 4\sqrt{5}mm$ $\quad g)\ A = 149m^2\ ;\ U = 4\sqrt{149}m$

$h)\ A = 88mm^2\ ;\ U = 4\sqrt{88}mm$ $\quad i)\ A = e^2mm^2\ ;\ U = 4emm$

$j)\ A = \pi^2m^2\ ;\ U = 4\pi m$ $\quad k)\ A = \ln^2 2dm^2\ ;\ U = 4\ln 2dm$

Aufgabe 3:

$a)\ a = 4cm$ und $h = 6cm \ \Rightarrow U = 16cm\ ;\ A = 24cm^2$

$b)\ a = 9dm$ und $h = 11dm \ \Rightarrow U = 36dm\ ;\ A = 99dm^2$

$c)\ a = 2m$ und $h = 50cm \ \Rightarrow U = 8m\ ;\ A = 1m^2$

$d)\ a = 3km$ und $h = 100m \ \Rightarrow U = 12km\ ;\ A = 0,3km^2$

$e)\ a = \frac{1}{2}\mu m$ und $h = \frac{1}{3}\mu m \ \Rightarrow U = 2\mu m\ ;\ A = \frac{1}{6}\mu m^2$

$f)\ a = \frac{7}{8}cm$ und $h = \frac{3}{4}cm \ \Rightarrow U = \frac{7}{2}cm\ ;\ A = \frac{21}{32}cm^2$

$g)\ a = \frac{11}{3}mm$ und $h = \frac{6}{7}mm \ \Rightarrow U = \frac{44}{3}mm\ ;\ A = \frac{66}{21}mm^2$

$h)\ a = \frac{14}{5}km$ und $h = \frac{5}{9}km \ \Rightarrow U = \frac{66}{5}km\ ;\ A = \frac{14}{9}km^2$

$i)\ a = \frac{7}{4}dm$ und $h = \frac{7}{5}cm \ \Rightarrow U = 7dm\ ;\ A = \frac{49}{2}cm^2$

$j)\ a = \frac{17}{9}cm$ und $h = \frac{11}{8}mm \ \Rightarrow U = \frac{68}{9}cm\ ;\ A = \frac{935}{36}mm^2$

$k)\ a = \sqrt{5}Mm$ und $h = \sqrt{3}Mm \ \Rightarrow U = 4\sqrt{5}Mm\ ;\ A = \sqrt{15}Mm$

$l)\ a = \sqrt{17}nm$ und $h = \sqrt{2}nm \ \Rightarrow U = 4\sqrt{17}nm\ ;\ A = \sqrt{34}nm$

$m)\ a = emm$ und $h = \pi dm \ \Rightarrow U = 4emm\ ;\ A = 100e\pi mm^2$

$n)\ a = \ln 9m$ und $h = \ln 2m \ \Rightarrow U = 4\ln 9\ ;\ A \approx 1,523m^2$

Aufgabe 4:

$a)\ \ a = 3cm,\ b = 7cm$ und $\ h_a = 4cm \ \ \Rightarrow U = 20cm\ ;\ A = 12cm^2$

$b)\ \ a = 7dm,\ b = 6dm$ und $\ h_a = 5dm \ \ \Rightarrow U = 26dm\ ;\ A = 35dm^2$

$c)\ \ a = 9m,\ b = 8m$ und $\ h_a = 6m \ \ \Rightarrow U = 34m\ ;\ A = 54m^2$

$d)\ \ a = 4km,\ b = 44km$ und $\ h_a = 2km \ \ \Rightarrow U = 96km\ ;\ A = 8km^2$

$e)\ \ a = 2cm,\ b = 5dm$ und $\ h_a = 5mm \ \ \Rightarrow U = 104cm\ ;\ A = 1cm^2$

$f)\ \ a = 4m,\ b = 9cm$ und $\ h_a = 25dm \ \ \Rightarrow U = 818cm\ ;\ A = 10m^2$

$g)\ \ a = 90dm,\ b = 60mm$ und $\ h_a = 4m \ \ \Rightarrow U = 1812cm\ ;\ A = 36m^2$

$h)\ \ a = 46km,\ b = 1dm$ und $\ h_a = 1dm \ \ \Rightarrow U = 920002dm\ ;\ A = 4,6m^2$

$i)\ \ a = \frac{1}{4}cm,\ b = \frac{1}{2}cm$ und $\ h_a = \frac{1}{6}cm \ \ \Rightarrow U = \frac{3}{2}cm\ ;\ A = \frac{1}{24}cm^2$

$j)\ \ a = \frac{11}{3}dm,\ b = \frac{6}{7}dm$ und $\ h_a = \frac{7}{8}dm \ \ \Rightarrow U = \frac{190}{21}dm\ ;\ A = \frac{77}{24}dm^2$

$k)\ \ a = \frac{13}{8}dm,\ b = \frac{1}{10}mm$ und $\ h_a = \frac{144}{10}cm \ \ \Rightarrow U = \frac{1626}{5}mm\ ;\ A = 234cm^2$

$l)\ \ a = \sqrt{7}dm,\ b = \sqrt{2}dm$ und $\ \sqrt{3}dm \ \ \Rightarrow U = 2\sqrt{7} + 2\sqrt{2}dm \approx 8,12dm\ ;\ A = \sqrt{21}dm^2$

$m)\ \ a = \lg 125cm,\ b = \ln 6cm$ und $\ h_a = \mathrm{lb}5cm \ \ \Rightarrow U \approx 7,777cm\ ;\ A \approx 4,869cm^2$

$n)\ \ a = edm,\ b = \pi dm$ und $\ h_a = \sqrt{5}dm \ \ \Rightarrow U = 2e + 2\pi dm \approx 11,72dm\ ;\ A = \sqrt{5}edm^2$

Aufgabe 5:

$a)$	$a = 4cm, c = 3cm, d = b$	und	$h_a = 5cm \Rightarrow A \approx 17,5cm^2 \; ; \; U \approx 17,050cm$
$b)$	$a = 7cm, c = 5cm, d = b$	und	$h_a = 3cm \Rightarrow A \approx 18cm^2 \; ; \; U \approx 18,325cm$
$c)$	$a = 120mm, c = 6cm, d = b$	und	$h_a = 2,4cm \Rightarrow A \approx 21,6cm^2 \; ; \; U \approx 25,634cm$
$d)$	$a = 5dm, c = 11cm, d = b$	und	$h_a = 9cm \Rightarrow A \approx 274,5cm^2 \; ; \; U \approx 245,177cm$
$e)$	$a = 11cm, c = 4mm, d = b$	und	$h_a = \frac{7}{5}cm \Rightarrow A \approx 7,98cm^2 \; ; \; U \approx 22,364cm$
$f)$	$a = 3km, c = 1,5km, d = b$	und	$h_a = 1,65km \Rightarrow A \approx 3,7125km^2 \; ; \; U \approx 8,125km$
$g)$	$a = 9cm, c = \frac{1}{5}dm, d = b$	und	$h_a = 5,53cm \Rightarrow A \approx 30,415cm^2 \; ; \; U \approx 24,089cm$
$h)$	$a = \frac{3}{4}cm, c = \frac{5}{4}cm, d = b$	und	$h_a = \frac{4}{7}cm \Rightarrow A \approx \frac{4}{7}cm^2 \; ; \; U \approx 4,304cm$
$i)$	$a = \frac{15}{8}mm, c = \frac{7}{10}mm, d = b$	und	$h_a = \frac{5}{4}cm \Rightarrow A \approx 0,161cm^2 \; ; \; U \approx 2,760cm$
$j)$	$a = \frac{11}{5}dm, c = \frac{38}{9}cm, d = b$	und	$h_a = \frac{1}{8}dm \Rightarrow A \approx 0,164dm^2 \; ; \; U \approx 4,417dm$
$k)$	$a = \frac{7}{6}m, c = \frac{11}{4}dm, d = b$	und	$h_a = \frac{3}{4}m \Rightarrow A \approx 54,0625dm^2 \; ; \; U \approx 31,867dm$
$l)$	$a = \frac{9}{4}m, c = \frac{6}{5}m, d = b$	und	$h_a = \frac{8}{3}dm \Rightarrow A \approx 0,46m^2 \; ; \; U \approx 4,628m$
$m)$	$a = \sqrt{17}cm, c = \sqrt{3}cm, d = b$	und	$h_a = \sqrt{7}cm \Rightarrow A \approx 7,746cm^2 \; ; \; U \approx 11,662cm$
$n)$	$a = \ln 2cm, c = \pi mm, d = b$	und	$h_a = emm \Rightarrow A \approx 13,691mm^2 \; ; \; U \approx 16,700mm$

Aufgabe 6:

$a)$	$a = 4cm, b = 9cm,$	und	$e = 6cm \Rightarrow A \approx 33,393cm^2 \; ; \; U \approx 26cm$
$b)$	$a = 5cm, b = 6cm,$	und	$e = 5,5cm \Rightarrow A \approx 26,148cm^2 \; ; \; U \approx 22cm$
$c)$	$a = 4,2cm, b = 114mm,$	und	$e = 7,2cm \Rightarrow A \approx 46,728cm^2 \; ; \; U \approx 31,2cm$
$d)$	$a = 14dm, b = 1,7m,$	und	$e = 2,25m \Rightarrow A \approx 237,128cm^2 \; ; \; U \approx 62cm$
$e)$	$a = \frac{1}{2}cm, b = \frac{4}{5}cm,$	und	$e = \frac{5}{8}cm \Rightarrow A \approx 0,352cm^2 \; ; \; U \approx 2,6cm$
$f)$	$a = \frac{6}{7}mm, b = \frac{1}{6}cm,$	und	$e = \frac{5}{4}mm \Rightarrow A \approx 0,013cm^2 \; ; \; U \approx 0,505cm$
$g)$	$a = \frac{2}{30}dm, b = \frac{7}{3}cm,$	und	$e = \frac{1}{100}m \Rightarrow A \approx 1,360cm^2 \; ; \; U \approx 6cm$
$h)$	$a = \sqrt{10}cm, b = \pi cm,$	und	$e = ecm \Rightarrow A \approx 7,730cm^2 \; ; \; U \approx 12,608cm$

Aufgabe 7:

a) $A = 8cm^2 + 18cm^2 + 20cm^2 = 46cm^2, U = 2 \cdot 2cm + 4cm + 2 \cdot \sqrt{13} + 2 \cdot \sqrt{45} \approx 28,63cm$

b) $A = 2 \cdot 9cm^2 + 2 \cdot 10cm^2 + 36cm^2 = 74cm^2, U = 2 \cdot 4cm + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{18} \approx 33,92cm$

c) $A = 28cm^2, U \approx 24,944cm$

d) $A = 66cm^2, U \approx 22,708cm$

e) $A = 28cm^2, U = 32cm$

f) $A = 66cm^2, U \approx 29,134cm$

Aufgabe 8:

a) $\alpha \approx 31,304°; \beta \approx 15,652°; \gamma \approx 62,609°; \delta \approx 250,435°$

b) $\alpha \approx 120°; \beta \approx 60°; \gamma \approx 120°; \delta \approx 60°$

c) $\alpha \approx 135°; \beta \approx 45°$

d) $\alpha \approx 120°; \beta \approx 72°; \gamma \approx 48°$

e) $\alpha \approx 120°; \beta \approx 120°; \gamma \approx 60°; \delta \approx 60°$

f) $\alpha \approx 55°; \beta \approx 55°; \gamma \approx 125°; \delta \approx 125°$

g) $\alpha \approx 10,909°; \beta \approx 21,818°; \gamma \approx 65,455°; \delta \approx 261,818°$

h) $\alpha \approx 115°; \beta \approx 86,667°; \gamma \approx 43,333°$

Aufgabe 9:

	1	2	3	4	5	6
Seite a	4	4	5	35, 5	0, 5	$\frac{4}{5}$
Seite c	6	8	11	4, 5	8, 5	$\frac{37}{10}$
Hilfsgröße $m = \frac{a+c}{2}$	5	6	8	20	4, 5	$\frac{9}{4}$
Höhe h	3	7	$\frac{25}{8}$	2, 1	4	$\frac{26}{9}$
Flächeninhalt A	15	42	25	42	18	$\frac{13}{2}$

Aufgabe 10:

Aufgabe 15: Quadrat mit $a \approx 4,24cm$.

Aufgabe 16: Raute mit $a \approx 3,20cm$

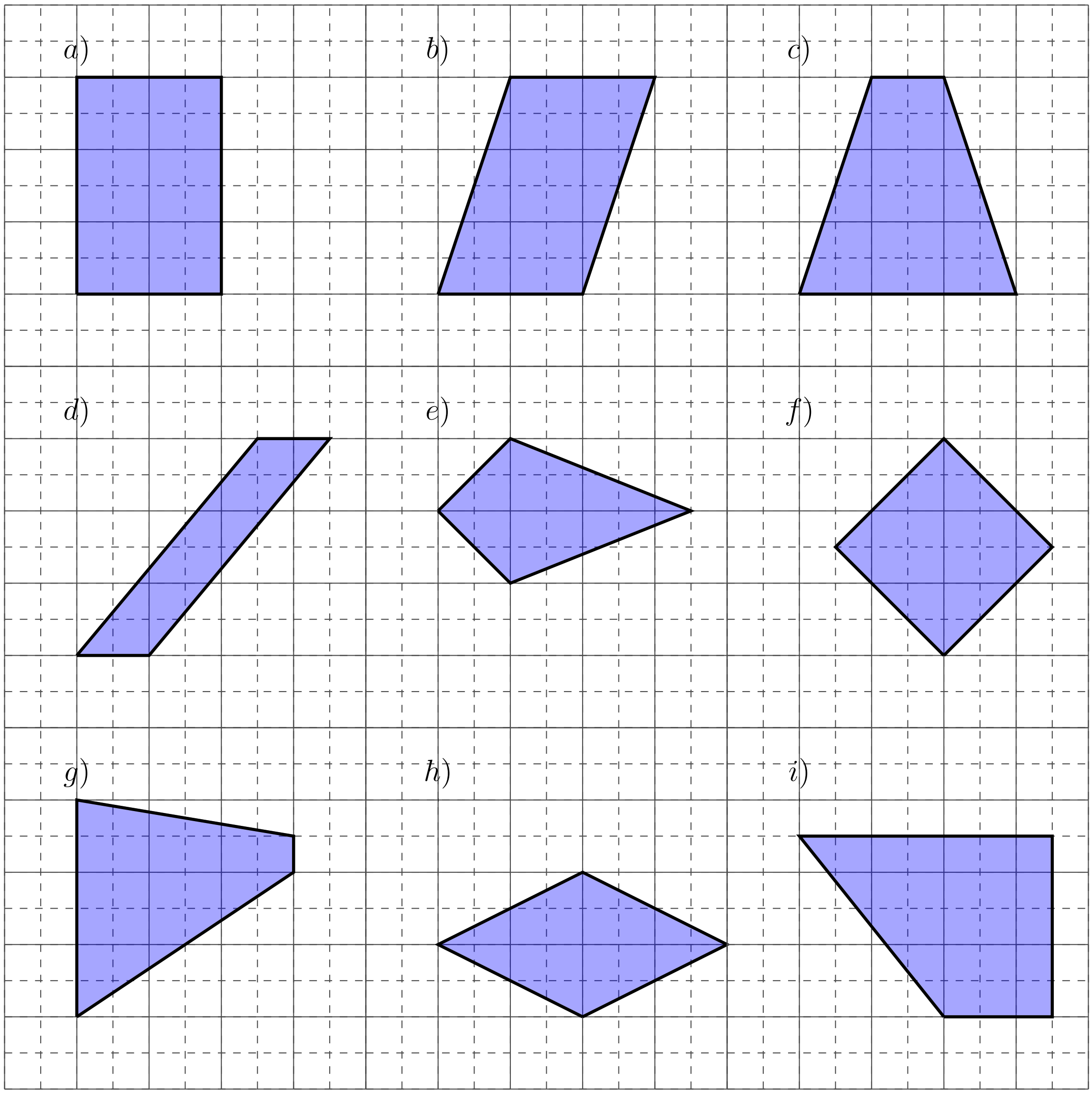
Aufgabe 17: Drachen mit $a \approx 5,83cm$ und $b \approx 3,61cm$

Behauptung	wahr	falsch
Jedes Quadrat ist ein Rechteck.	x	
Bei einem Drachen sind die gegenüberliegenden Seiten gleich lang.		x
Ein Rechteck ist gleichzeitig ein Trapez.	x	
Ein Kreis hat 180°.		x
Ein Drachen besteht aus zwei gleichschenkligen Dreiecken.	x	
Jedes Rechteck ist ein Trapez.	x	
Ein Quadrat ist eine Raute.	x	
Die Seiten einer Raute sind alle gleichlang.	x	
Ein Parallelogramm hat eine Winkelsumme von 180°.		x
Die Winkelsumme eines Sechsecks beträgt immer 720°.	x	
Ein Trapez, dass ein Parallelogramm ist und einen rechten Winkel hat, nennt man immer Rechteck.	x	
Die längste Seite eines Dreiecks wird Hypotenuse genannt.		x
Jede Raute ist ein Parallelogramm.	x	
Die gegenüberliegenden Winkel einer Raute sind gleichgroß.	x	
Ein gleichmäßiges Sechseck besteht aus gleichseitigen Dreiecken.	x	

Aufgabe 18: symmetrisches Trapez mit $c \approx 2,5cm$ und $d \approx 4,1cm$

Aufgabe 19: Rechteck mit $e \approx 6,40cm$

Aufgabe 20: *Berechne die Flächeninhalte der dargestellten Vierecke und gib die Art des Vierecks an.*

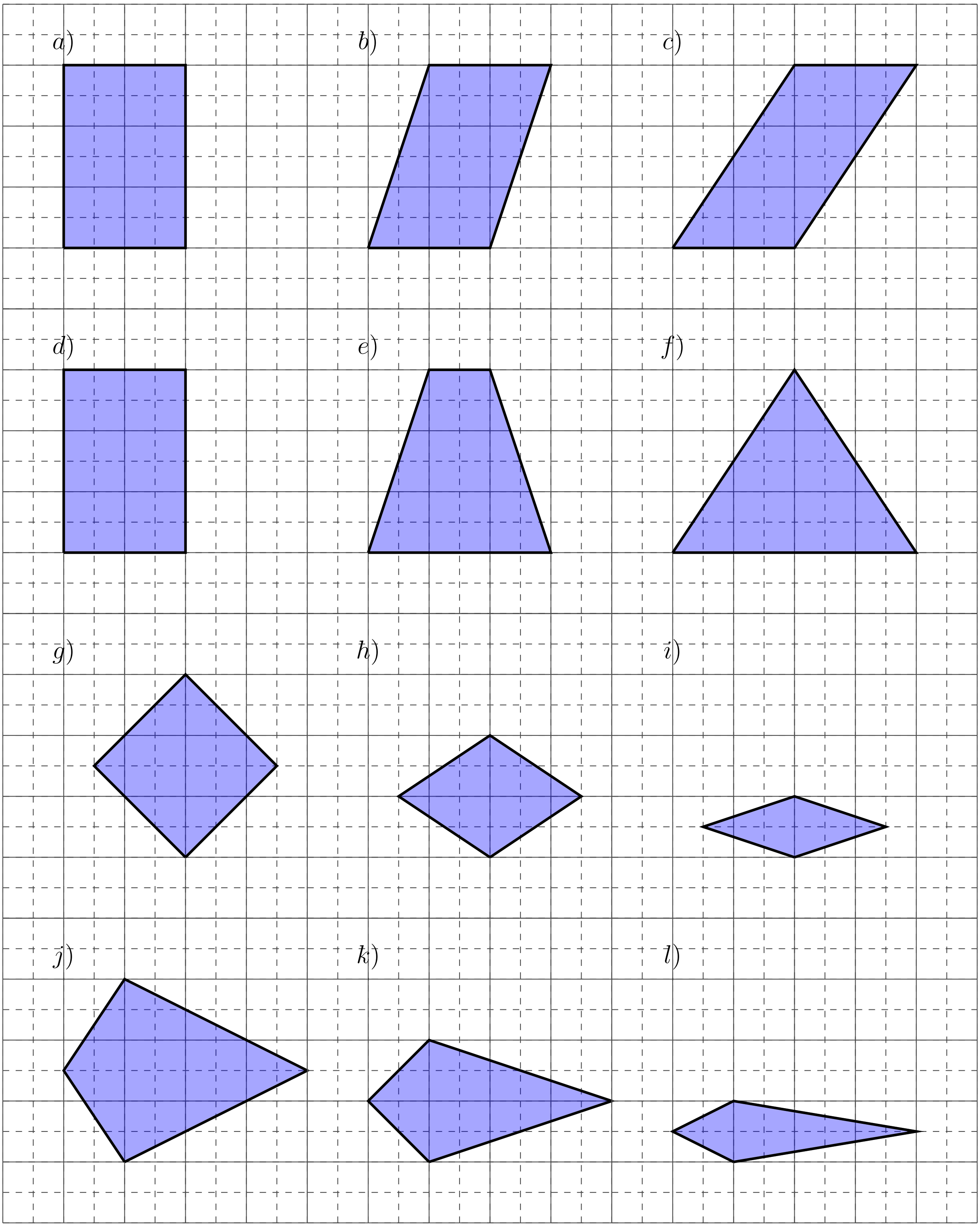


$a)$ 6cm^2 $b)$ 6cm^2 $c)$ 6cm^2

$d)$ 3cm^2 $e)$ $3,5\text{cm}^2$ $f)$ $4,5\text{cm}^2$

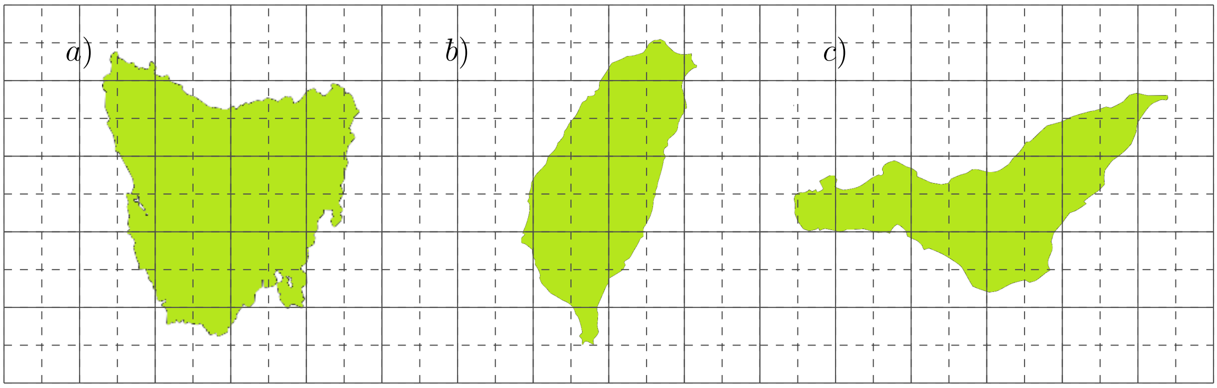
$g)$ $5,25\text{cm}^2$ $h)$ 4cm^2 $i)$ $6,25\text{cm}^2$

Aufgabe 21: *Berechne die Flächeninhalte der dargestellten Vierecke und gib die Art des Vierecks an. Beschreibe die Auffälligkeit in jeder Zeile.*



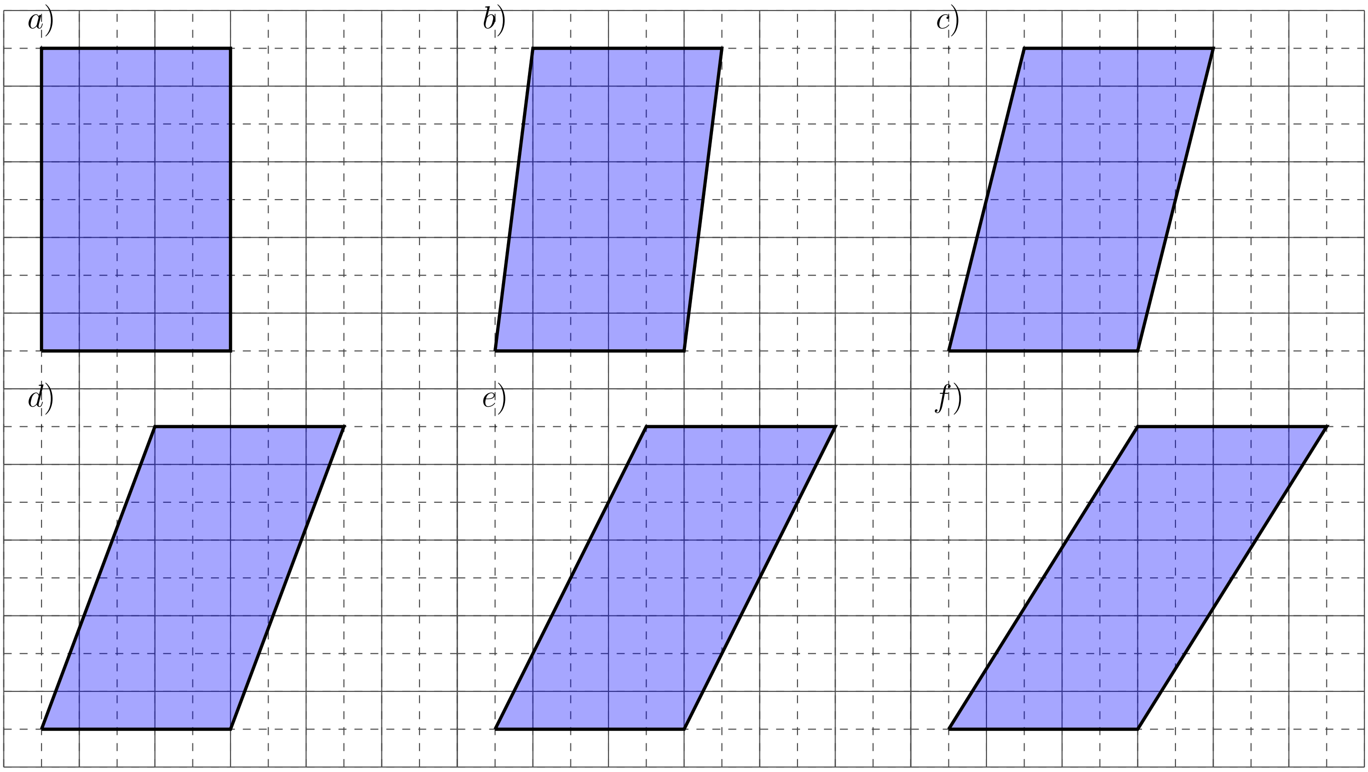
$a)$ 6cm^2 $b)$ 6cm^2 $c)$ 6cm^2
$d)$ 6cm^2 $e)$ 6cm^2 $f)$ 6cm^2
$g)$ $4,5\text{cm}^2$ $h)$ 3cm^2 $i)$ $1,5\text{cm}^2$
$j)$ 6cm^2 $k)$ 4cm^2 $l)$ 2cm^2

Aufgabe 22: *Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang näherungsweise.*



$a)$ $A \approx 8\text{cm}^2 \;\wedge\; U \approx 12\text{cm}$ $b)$ $A \approx 4,5\text{cm}^2 \;\wedge\; U \approx 10,5\text{cm}$ $c)$ $A \approx 4,5\text{cm}^2 \;\wedge\; U \approx 15\text{cm}$

Aufgabe 23: *Berechne die Flächeninhalte der dargestellten Vierecke und gib die Art des Vierecks jeweils an. Beschreibe die Auffälligkeit.*

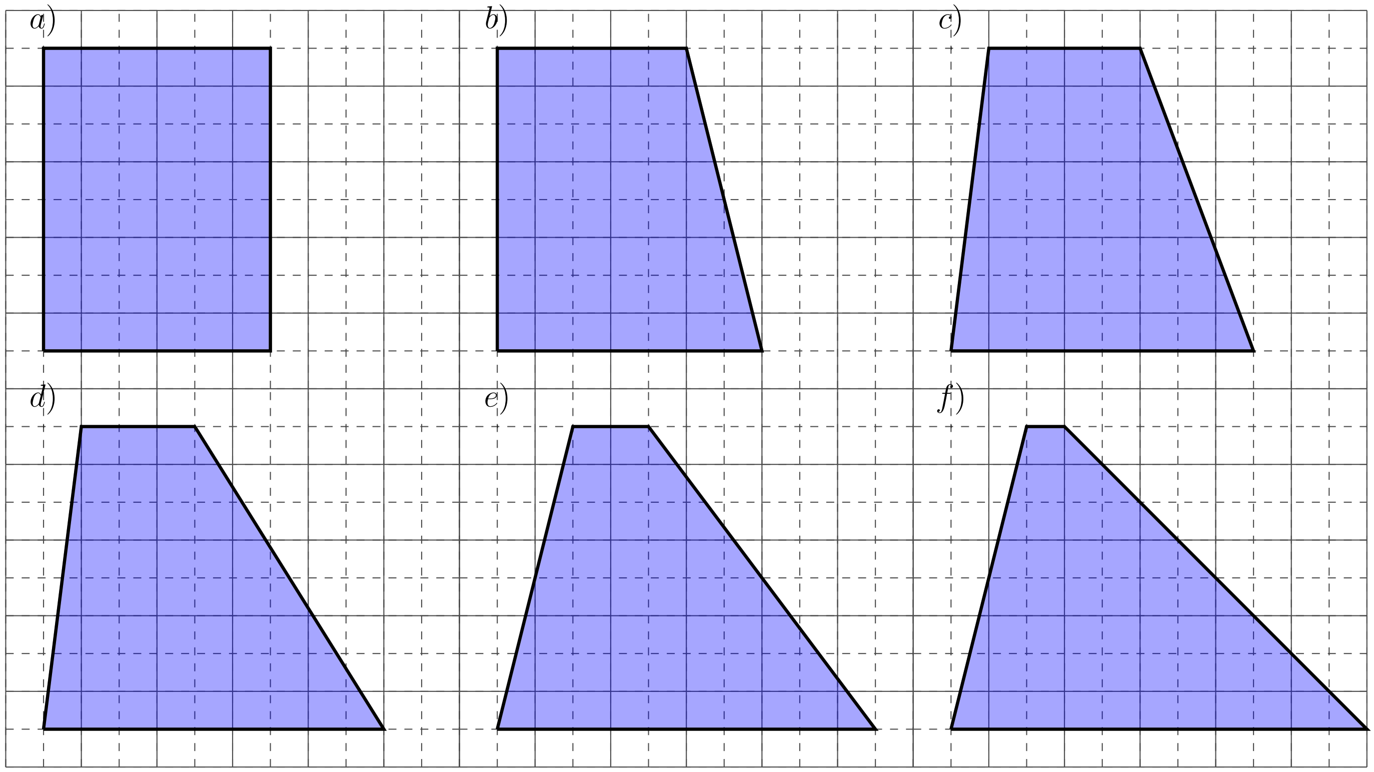


Es sind immer 10cm^2, da sich die Grundseite und die Höhe nicht ändert.

Aufgabe 24: *Stelle dazu eine Gleichung zur Berechnung des Flächeninhalts für alle Teilaufgaben zu Aufgabe 23 auf.*

$A = gh$

Aufgabe 25: *Berechne die Flächeninhalte der dargestellten Vierecke. Beschreibe die Auffälligkeit.*



Es sind immer 12cm^2, da sich und die Höhe und die Summe aus der Grundseite mit der Gegenseite nicht ändert.

Aufgabe 26: *Stelle dazu eine Gleichung zur Berechnung des Flächeninhalts für alle Teilaufgaben zu Aufgabe 25 auf.*

$$A = \frac{a+c}{2}h$$

Aufgabe 27: *Gib die Winkelmaße aller Winkel für die jeweiligen Vierecke an. Gib die Art des Vierecks an.* (Es handelt sich um Skizzen, die nicht maßstabsgetreu sind!)

Von links nach rechts!

Ein symmetrisches Trapez: $\alpha = 35° \quad \wedge \quad \beta = 35° \quad \wedge \quad \gamma = 145° \quad \wedge \quad \delta = 145°$

Ein symmetrischer Drachen: $\alpha = 75° \quad \wedge \quad \beta = 127,5° \quad \wedge \quad \gamma = 30° \quad \wedge \quad \delta = 127,5°$

Ein Parallelogramm: $\alpha = 63° \quad \wedge \quad \beta = 117° \quad \wedge \quad \gamma = 63° \quad \wedge \quad \delta = 117°$

Ein rechtwinkliges Trapez: $\alpha = 90° \quad \wedge \quad \beta = 66° \quad \wedge \quad \gamma = 124° \quad \wedge \quad \delta = 90°$

Ein Parallelogramm: $\alpha = 38° \quad \wedge \quad \beta = 142° \quad \wedge \quad \gamma = 38° \quad \wedge \quad \delta = 142°$

Eine Raute: $\alpha = 77° \quad \wedge \quad \beta = 103° \quad \wedge \quad \gamma = 77° \quad \wedge \quad \delta = 103°$

Ein symmetrisches Trapez: $\alpha = 52° \quad \wedge \quad \beta = 52° \quad \wedge \quad \gamma = 128° \quad \wedge \quad \delta = 128°$

Ein symmetrischer konkaver Drachen: $\alpha = 270° \quad \wedge \quad \beta = 17° \quad \wedge \quad \gamma = 56° \quad \wedge \quad \delta = 17°$

Aufgabe 28: *Berechne die fehlenden Werte der jeweiligen Parallelogramme.*

	1.	2.	3.	4.	5.	6.
a	8cm	7, 2cm	6, 5cm	7cm	24cm	13, 75cm
b	4cm	6cm	3, 5cm	1dm	120mm	22cm
h_a	3cm	2cm	2, 8cm	54mm	3, 5cm	7, 2cm
h_b	6cm	2, 4cm	5, 2cm	3, 78cm	7cm	4, 5cm
U	24cm	24, 4cm	2dm	34cm	72cm	71, 5cm
A	24cm^2	14, 4cm^2	18, 2cm^2	37, 8cm^2	0, 84dm^2	99cm^2

Aufgabe 29: *Markiere alle Felder, die eine wahre Aussage widerspiegeln.*

Aufgabe 30: *Ergänze die fehlenden Koordinaten, sodass aus den beschriebenen Punkten das angegebene Viereck entsteht.*

ist auch...	Ein Quadrat	Ein Rechteck	Ein Parallelogramm	Eine Raute	Ein symmetrisches Trapez	Ein Trapez	Ein symmetrischer Drachen
ein Quadrat	✓						
ein Rechteck	✓	✓					
ein Parallelogramm	✓	✓	✓	✓			
eine Raute	✓			✓			
ein symmetrisches Trapez	✓	✓			✓		
ein Trapez	✓	✓	✓	✓	✓	✓	
ein symmetrischer Drachen	✓	✓		✓			✓

a) Ein Quadrat: $A\,(1\,|3) \quad \wedge \quad B\,(4\,|3) \quad \wedge \quad C\left(4\,\middle|\,6\right) \quad \wedge \quad D\left(1\,\middle|\,6\right)$

b) Ein Rechteck: $A\,(3\,|0) \quad \wedge \quad B\,(5\,|0) \quad \wedge \quad C\left(5\,\middle|\,7\right) \quad \wedge \quad D\left(3\,|7\right)$

c) Eine Raute: $A\,(5\,|1) \quad \wedge \quad B\,(8\,|3) \quad \wedge \quad C\left(11\,\middle|\,1\right) \quad \wedge \quad D\left(2\,\middle|\,3\right)$

d) Ein Quadrat: $A\,(4\,|3) \quad \wedge \quad B\,(6\,|5) \quad \wedge \quad C\left(4\,\middle|\,7\right) \quad \wedge \quad D\left(2\,\middle|\,5\right)$

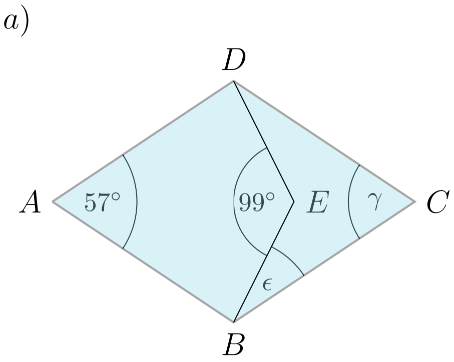
e) Ein Parallelogramm: $A\,(1\,|2) \quad \wedge \quad B\,(6\,|3) \quad \wedge \quad C\left(8\,\middle|\,10\right) \quad \wedge \quad D\,(3\,|9)$

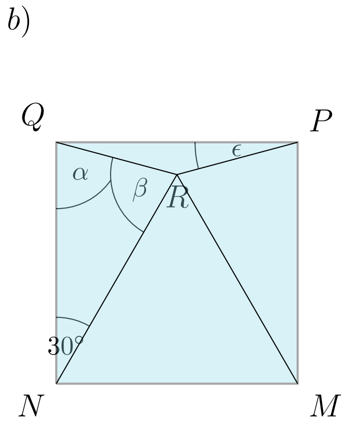
f) Ein symmetrisches Trapez: $A\,(2\,|0) \quad \wedge \quad B\,(9\,|0) \quad \wedge \quad C\left(7\,\middle|\,5\right) \quad \wedge \quad D\,(4\,|5)$

g) Ein symmetrischer Drachen: $A\,(1\,|6) \quad \wedge \quad B\,(4\,|3) \quad \wedge \quad C\,(11\,|6) \quad \wedge \quad D\left(4\,\middle|\,9\right)$

h) Ein symmetrischer Drachen: $A\,(2\,|5) \quad \wedge \quad B\left(4\,\middle|\,5\right) \quad \wedge \quad C\,(7\,|10) \quad \wedge \quad D\,(2\,|7)$

Aufgabe 31: *Berechne den Winkel ϵ. Bei dem Dreieck ΔNMR handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck.*

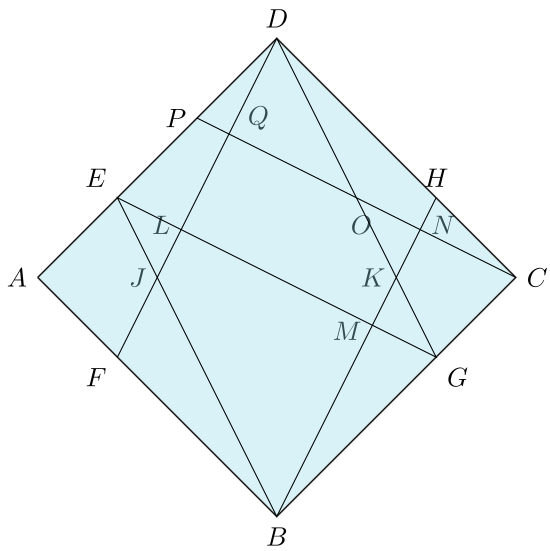




$a)$ $\gamma = 57° \quad \Rightarrow \quad \epsilon = \frac{360°-57°-(360°-99°)}{2} = 21°$

$b)$ $\alpha = \beta = 75° \quad \Rightarrow \quad \epsilon = 15\circ$

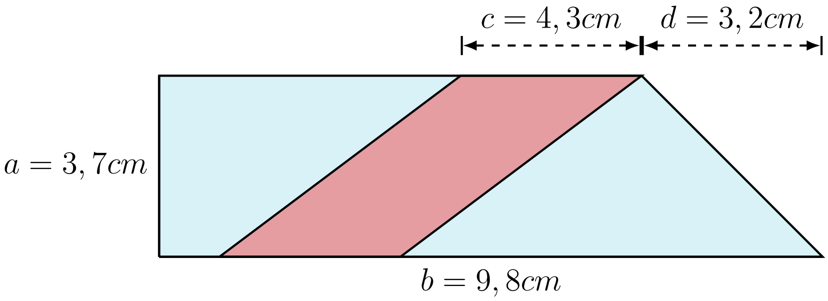
Aufgabe 32: *Gib alle speziellen Vierecke an und benenne diese nach ihrer Art.*



Quadrat: $\square ABCD$
Rechteck: $\square LMNQ$
Parallelogramm: $\square DFBH$
Parallelogramm: $\square EBGD$
Parallelogramm: $\square PEGC$
symmetrischer Drachen: $\square KGHC$
symmetrischer Drachen: $\square AFJE$
symmetrischer Drachen: $\square EBHD$
symmetrischer Drachen: $\square FBGD$

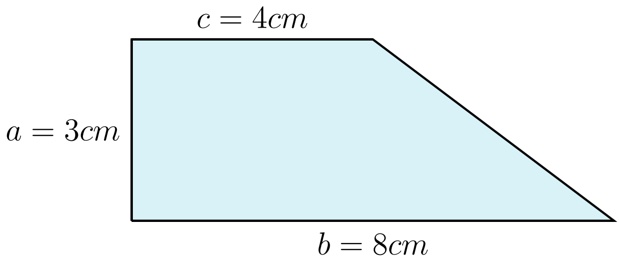
symmetrischer Drachen: $\square DJBC$
symmetrischer Drachen: $\square DABK$
Raute: $\square DJBK$
Trapez: $\square DJBH$
Trapez: $\square JBNQ$
Trapez: $\square JBML$
Trapez: $\square JBML$
Trapez: $\square CNMG$
Trapez: $\square BGEA$
und viele weitere Trapeze!

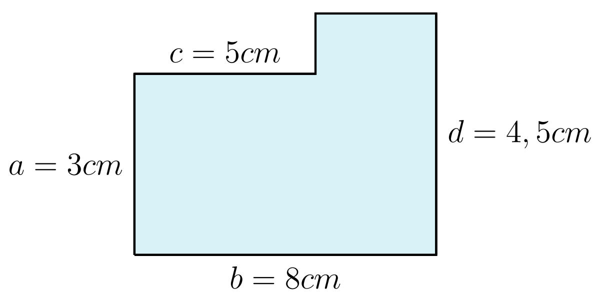
Aufgabe 33: *Berechne den Flächeninhalt der roten Fläche und bestimme wie viel Prozent der gesamten Fläche durch die rote Fläche abgedeckt ist.*



$$A_{rot} = \frac{ca}{2} = \frac{4,3cm \cdot 3,7cm}{2} = 7,955cm^2$$
$$A_{blau} == \frac{b + (b - d)}{2} a = \frac{9,8cm + (9,8cm - 3,2cm)}{2} 3,7cm = 30,34cm^2$$
$$\frac{A_{rot}}{A_{blau}} = \frac{7,955cm^2}{30,34cm^2} = 26,2\overline{195}\%$$

Aufgabe 34: *Berechne den Flächeninhalt der dargestellten Flächen.*

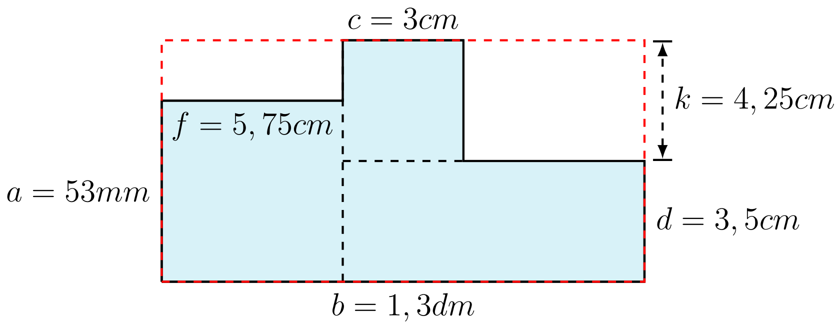




$$A = 4cm \cdot 3cm + \frac{4cm \cdot 3cm}{2}$$
$$A = 18cm^2$$

$$A = 8cm \cdot 3cm + 1,5cm \cdot 3cm$$
$$A = 28,5cm^2$$

Aufgabe 35: *Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der dargestellten Fläche.*



Durch die Unterteilung in Rechtecke lässt sich der Flächeninhalt. (Ein Beispiel für die Unterteilung ist dargestellt.) Der Umfang ist durch die Addition aller Strecken gegeben, hierbei kann auch ein größeres einschließendes Rechteck (in rot) betrachtet werden.

$U = 2(k + d) + 2b = 2(3,5cm + 4,25cm) + 2 \cdot 1,3dm = 2 \cdot 7,75cm + 2 \cdot 13cm = 41,5cm$

$A = kc + af + (b - f)d = 4,25cm \cdot 3cm + 5,3cm \cdot 5,75cm + (13cm - 5,75cm) \cdot 3,5cm = 68,6cm^2$

Aufgabe 36: *Zeichne in ein Koordinatensystem die angegebenen Punkte in ein Koordinatensystem und verbinde diese. Benenne die dargestellte geometrische Figur und berechne den Flächeninhalt.*

$a)$ $A(1|2) \wedge B(6|2) \wedge C(5|4) \wedge D(0|4)$

$b)$ $A(3|1) \wedge B(5|3) \wedge C(3|5) \wedge D(1|3)$

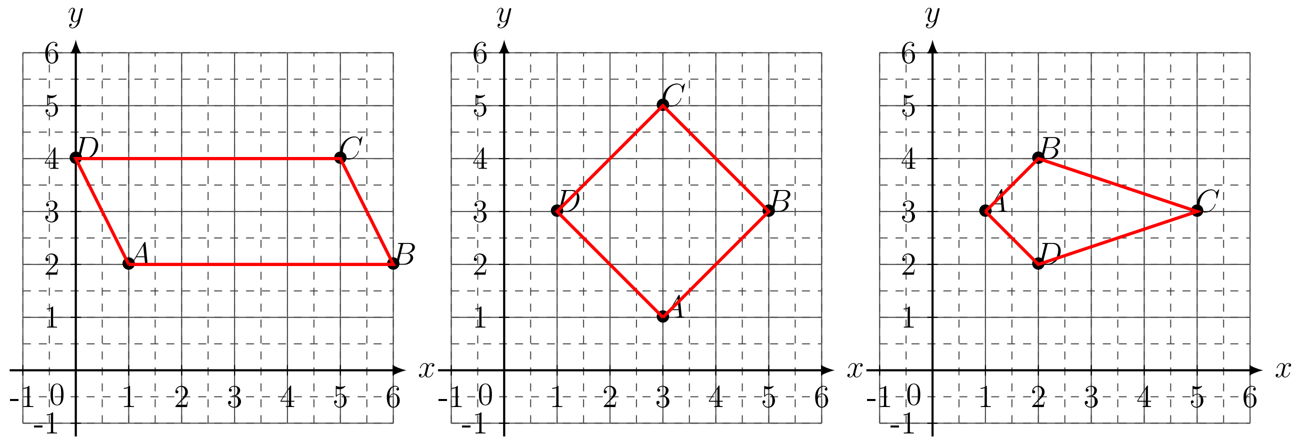
$c)$ $A(1|3) \wedge B(2|4) \wedge C(5|3) \wedge D(2|2)$

$d)$ $A(3|0) \wedge B(5|3) \wedge C(3|6) \wedge D(1|3)$

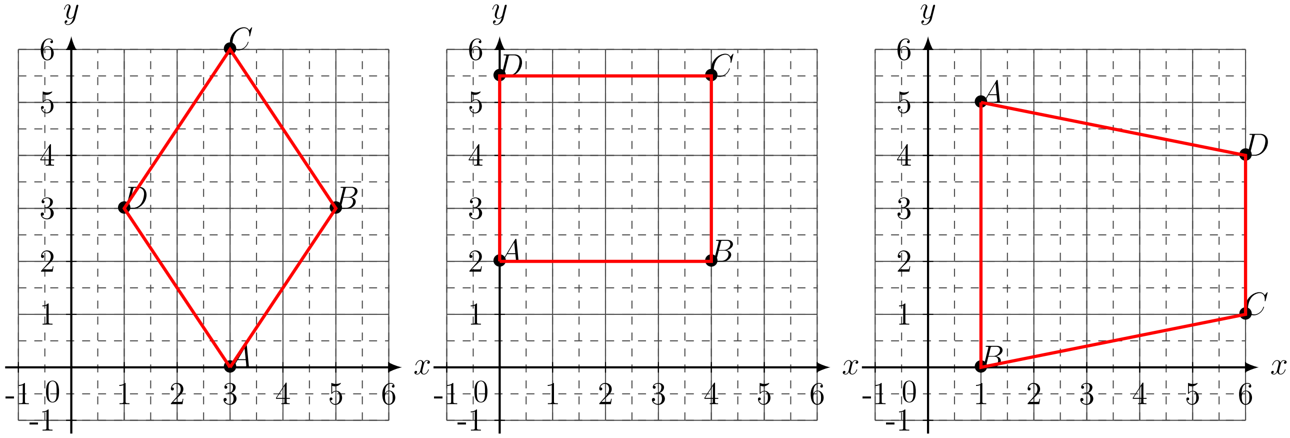
$e)$ $A(0|2) \wedge B(4|2) \wedge C(4|5,5) \wedge D(0|5,5)$

$f)$ $A(1|5) \wedge B(1|0) \wedge C(6|1) \wedge D(6|4)$

$a)$ Parallelogramm $b)$ Quadrat $c)$ Drachen



$d)$ Raute $\qquad$ $e)$ Rechteck $\qquad$ $f)$ symmetrisches Trapez

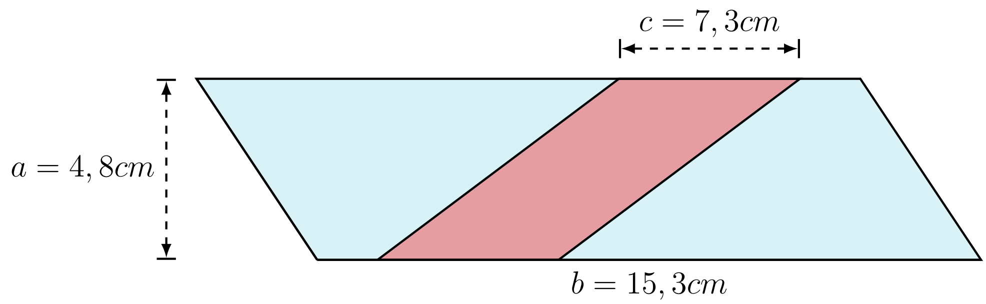


$a)\ A = 2 \cdot 5 = 10FE$ $\qquad$ $b)\ A = \dfrac{4 \cdot 4}{2} = 8FE$

$c)\ A = \dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4FE$ $\qquad$ $d)\ A = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12FE$

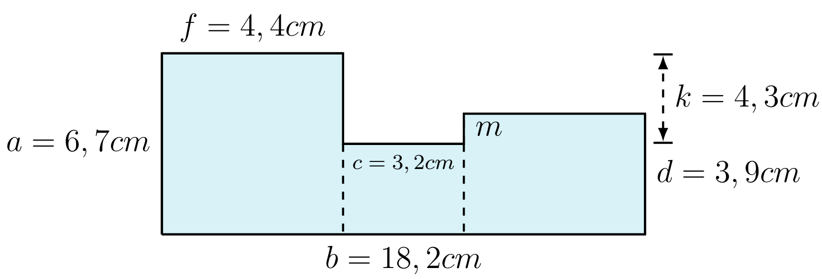
$e)\ A = 3,5 \cdot 4 = 14FE$ $\qquad$ $f)\ A = \dfrac{5+3}{2} \cdot 5 = 20FE$

Aufgabe 37: *Berechne den Flächeninhalt der roten Fläche und bestimme wie viel Prozent der gesamten Fläche durch die rote Fläche abgedeckt ist.*



$$A_{rot} = 7,3cm \cdot 4,8cm = 35,04cm^2$$
$$A_{blau} = 15,3cm \cdot 4,8cm = 73,44cm^2$$
$$\frac{A_{rot}}{A_{blau}} \approx 47,712\%$$

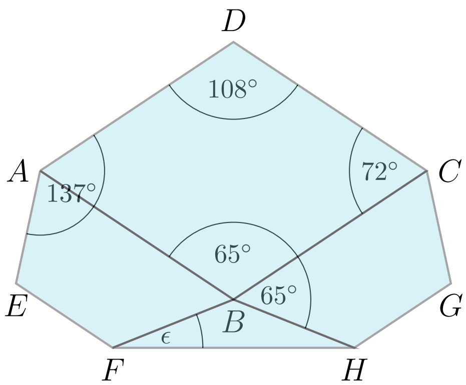
Aufgabe 38: *Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der dargestellten Fläche.*



$$A = af + c(a-k) + d(b-f-c)$$
$$A = 6,7cm \cdot 4,4cm + 3,2cm \cdot (6,7cm - 4,3cm) + 3,9cm \cdot (18,2cm - 4,4cm - 3,2cm)$$
$$A = 6,7cm \cdot 4,4cm + 3,2cm \cdot 2,4cm + 3,9cm \cdot 10,6cm$$
$$A = 29,48cm^2 + 7,68cm^2 + 41,34cm^2$$
$$A = 78,5cm^2$$

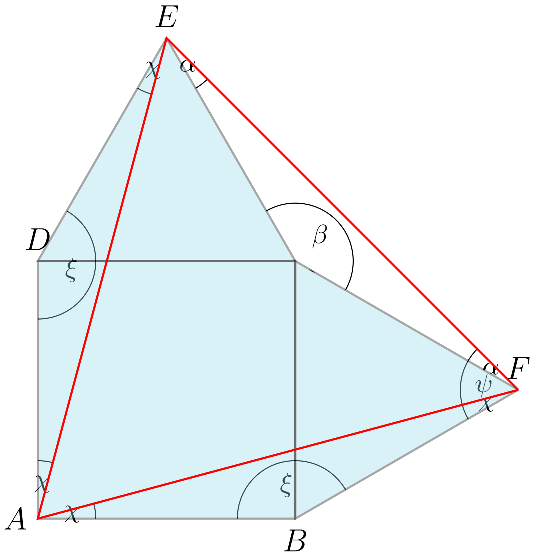
$$U = a + b + d + (b-f-c) + m + c + k + f$$
$$U = a + 2b + d + k + m$$
$$U = a + 2b + d + k + (d + k - a)$$
$$U = 2b + 2d + 2k$$
$$U = 2 \cdot 18,2cm + 2 \cdot 3,9cm + 2 \cdot 4,3cm$$
$$U = 52,8cm$$

Aufgabe 39: *Berechne den Winkel ϵ.*



$2\epsilon + (360° + 2 \cdot 65° - 108°) = 180°$
$\epsilon = \frac{180° - (360° + 2 \cdot 65° - 108°)}{2} = 29°$

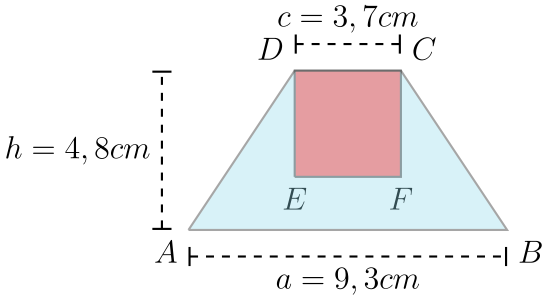
Aufgabe 40: *Das Viereck $\square ABCD$ ist ein Quadrat und die Dreiecke ΔDCE sowie ΔBCF sind gleichseitig. Zeige, dass das Dreieck ΔAEF gleichseitig sein muss.*



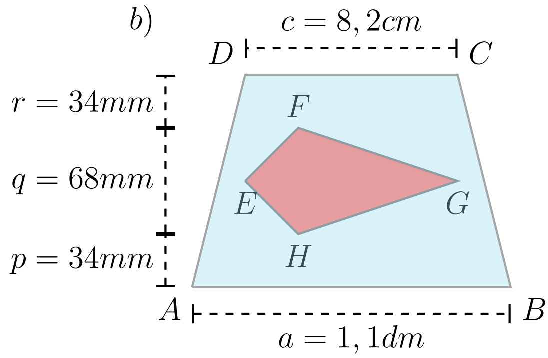
$\beta = 360° - 90° - 2 \cdot 60° = 150°$
$2 \cdot \alpha + \beta = 180° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 15°$
$\xi = 360° - 90° - 2 \cdot 60° = 150°$
$2 \cdot \chi + \xi = 180° \quad \Rightarrow \quad \chi = 15°$
$\psi + \xi = 60° \quad \Rightarrow \quad \psi = 45°$
$\psi + \alpha = 60° \quad \square$

Aufgabe 41: *Im folgenden wurde aus dem blauen Viereck ein rotes Viereck herausgetrennt. Berechne den Flächeninhalt der jeweiligen Vierecke. Gib anschließend das prozentuale Anteil der roten Fläche an der blauen Fläche an.*

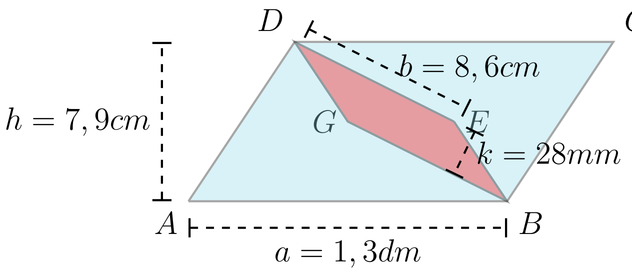
a)



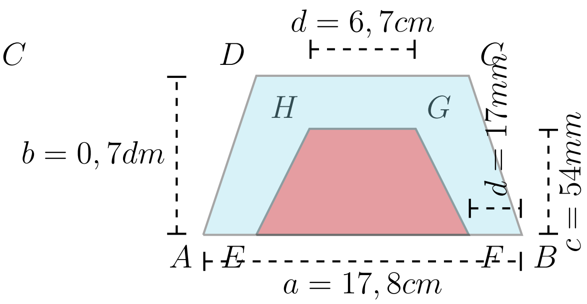
b)



c)



d)



a) $A_{rot} = 13,69cm^2 \quad \wedge \quad A_{blau} = 31,2cm^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{rot}}{A_{blau}} \approx 43,878\%$

b) $A_{rot} = 27,88cm^2 \quad \wedge \quad A_{blau} = 130,56cm^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{rot}}{A_{blau}} \approx 21,354\%$

c) $A_{rot} = 24,08cm^2 \quad \wedge \quad A_{blau} = 102,7cm^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{rot}}{A_{blau}} \approx 23,447\%$

d) $A_{rot} = 56,97cm^2 \quad \wedge \quad A_{blau} = 112,7cm^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_{rot}}{A_{blau}} \approx 50,550\%$

Aufgabe 42: *Gib an welche spezielle Vierecksarten aus den gegebenen Strecken erstellt werden können.*

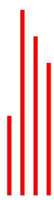
a)

b)

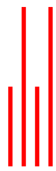
c)

d)

e)



f)



a) Rechteck, Drachen, Parallelogramm

b) Quadrat, Raute

c) Trapez

d) Symmetrisches Trapez

e) Trapez

$f)$ Rechteck, Drachen, Parallelogramm

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.10.1).

18.10.34 Lösungen zu mehrdimensionalen Vielecken

Aufgabe 1:

$a)\ V = 80cm^3\ ,\ O = 112cm^2$ $b)\ V = 72cm^3\ ,\ O = 108cm^2$
$c)\ V = 27cm^3\ ,\ O = 78cm^2$ $d)\ V = 49cm^3\ ,\ O = 126cm^2$
$e)\ V = 42cm^3\ ,\ O = 92cm^2$ $f)\ V = 144cm^3\ ,\ O = 176cm^2$
$g)\ V = 176cm^3\ ,\ O = 252cm^2$ $h)\ V = 378cm^3\ ,\ O = 318cm^2$
$i)\ V = 56cm^3\ ,\ O = 100cm^2$ $j)\ V = 50km^3\ ,\ O = 90km^2$
$k)\ V = 99dm^3\ ,\ O = 238cm^2$ $l)\ V = 72m^3\ ,\ O = 132m^2$
$m)\ V = 48m^3\ ,\ O = 104cm^2$ $n)\ V = 0mm^3\ ,\ O = 288mm^2$

Aufgabe 2:

$a)\ V = \frac{1}{15}cm^3\ ,\ O = 1cm^2$ $b)\ V = \frac{9}{80}cm^3\ ,\ O = \frac{63}{40}cm^2$
$c)\ V = \frac{40}{63}cm^3\ ,\ O = \frac{68}{9}cm^2$ $d)\ V = \frac{5}{24}cm^3\ ,\ O = \frac{119}{24}cm^2$
$e)\ V = \frac{35}{4}cm^3\ ,\ O = 33cm^2$ $f)\ V = \frac{36}{1925}cm^3\ ,\ O = \frac{1044}{275}cm^2$
$g)\ V = 3cm^3\ ,\ O = \frac{83}{4}cm^2$ $h)\ V = \frac{10000}{3}mm^3\ ,\ O = \frac{9950}{7}mm^2$
$i)\ V = 116550mm^3\ ,\ O = \frac{50809}{2}mm^2$ $j)\ V = 2500cm^3\ ,\ O = \frac{5425}{3}cm^2$

Aufgabe 3:

$a)\ V = 36cm^3$ $b)\ V = 30cm^3$ $c)\ V = 99cm^3$ $d)\ V = 33cm^3$
$e)\ V = 49km^3$ $f)\ V = 289dm^3$ $g)\ V = 20m^3$

Aufgabe 4:

$a)\ V = 64l \qquad b)\ V = 30l \qquad c)\ V = 72l$

$d)\ V = 40l \qquad b)\ V = 33l \qquad c)\ V = 204l$

Aufgabe 5:

$V_{\text{Würfel}} = 3 \cdot V_{\text{Pyramide}} \Rightarrow V_{\text{Pyramide}} = 20l$

Aufgabe 6:

$V = 250dm \cdot 100dm \cdot 20dm = 500000dm^3 = 500000l$

Aufgabe 7:

$O = 2 \cdot 12cm \cdot 6cm + 2 \cdot 12cm \cdot 4cm + 2 \cdot 6cm \cdot 4cm = 144cm^2 + 96cm^2 + 42cm^2 = 282cm^2$

Aufgabe 8:

$$V_{\text{Karton}} = 10cm \cdot 10cm \cdot 10cm = 1000cm^3, V_{\text{Würfel}} = 1cm \cdot 1cm \cdot 1cm = 1cm^3,$$
$$\Rightarrow \frac{V_{\text{Karton}}}{V_{\text{Würfel}}} = 1000$$

Aufgabe 9:

$V = G \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{V}{G} = \dfrac{81dm^3}{9dm^2} = 9dm$

Aufgabe 10:

$V = G \cdot h = 1dm^2 \cdot 2dm = 2dm^3 = 2l$

Aufgabe 11:

$a)\ \ a = 4cm\ \Rightarrow\ V = 64cm^3\ ;\ O = 96cm^2$

$b)\ \ a = 7dm\ \Rightarrow\ V = 343dm^3\ ;\ O = 294dm^2$

$c)\ \ a = 11m\ \Rightarrow\ V = 1331m^3\ ;\ O = 726m^2$

$d)\ \ a = 12km\ \Rightarrow\ V = 1728km^3\ ;\ O = 864km^2$

$e)\ \ a = \frac{3}{5}cm\ \Rightarrow\ V = \frac{27}{125}cm^3\ ;\ O = \frac{54}{25}cm^2$

$f)\ \ a = \frac{6}{7}dm\ \Rightarrow\ V = \frac{216}{343}dm^3\ ;\ O = \frac{219}{49}dm^2$

$g)\ \ a = \frac{11}{9}m\ \Rightarrow\ V = \frac{1331}{729}m^3\ ;\ O = \frac{242}{27}m^2$

$h)\ \ a = \frac{17}{3}km\ \Rightarrow\ V = \frac{4913}{27}km^3\ ;\ O = \frac{578}{3}km^2$

$i)\ \ a = 3,6cm\ \Rightarrow\ V = 46,656cm^3\ ;\ O = 77,76cm^2$

$j)\ \ a = 2,8dm\ \Rightarrow\ V = 21,952dm^3\ ;\ O = 47,04dm^2$

$k)\ \ a = 8,2m\ \Rightarrow\ V = 551,368m^3\ ;\ O = 403,44m^2$

$l)\ \ a = 14,24km\ \Rightarrow\ V = 2887,553024km^3\ ;\ O = 1216,6656km^2$

$m)\ \ a = \sqrt{7}cm\ \Rightarrow\ V \approx 18,52cm^3\ ;\ O = 42cm^2$

$n)\ \ a = \sqrt{15}dm\ \Rightarrow\ V \approx 58,09dm^3\ ;\ O = 90dm^2$

$o)\ \ a = \sqrt{467}m\ \Rightarrow\ V \approx 10092,96m^3\ ;\ O = 2802m^2$

$p)\ \ a = \sqrt{214,346}km\ \Rightarrow\ V \approx 3138,15km^3\ ;\ O \approx 1286,08km^2$

$q)\ \ a = \ln 5cm\ \Rightarrow\ V \approx 4,17cm^3\ ;\ O \approx 15,54cm^2$

$r)\ \ a = \ln 2dm\ \Rightarrow\ V \approx 0,33dm^3\ ;\ O \approx 2,88dm^2$

$s)\ \ a = em\ \Rightarrow\ V = e^3m^3\ ;\ O = 6e^2m^2$

$t)\ \ a = \pi km\ \Rightarrow\ V = \pi^3km^3\ ;\ O = 6\pi^2km^2$

Aufgabe 12:

$a)$ Dreiecksprisma: $G = 4cm^2$ und $h = 3cm \Rightarrow V = 12cm^3$

$b)$ Vierecksprisma: $G = 6cm^2$ und $h = 8cm \Rightarrow V = 42cm^3$

$c)$ Sechsecksprisma: $G = 7,4cm^2$ und $h = 3,2cm \Rightarrow V = 23,68cm^3$

$d)$ Zehnecksprisma: $G = \frac{1}{3}cm^2$ und $h = \frac{5}{6}cm \Rightarrow V = \frac{5}{18}cm^3$

$e)$ Dreiecksprisma: $G = \frac{13}{4}cm^2$ und $h = \frac{9}{2}cm \Rightarrow V = \frac{39}{2}cm^3$

$f)$ Fünfecksprisma: $G = \frac{6}{7}cm^2$ und $h = \frac{7}{9}cm \Rightarrow V = \frac{2}{3}cm^3$

$g)$ Neunecksprisma: $G = \sqrt{2}cm^2$ und $h = \sqrt{3}cm \Rightarrow V = \sqrt{6}cm^3$

$h)$ Vierecksprisma: $G = ecm^2$ und $h = \pi cm \Rightarrow V = e\pi cm^3$

Aufgabe 13:

$a)$ $V = 32cm^3$ $\quad O \approx 66,596cm^2$

$b)$ $V = 18cm^3$ $\quad O \approx 45,747cm^2$

$c)$ $V \approx 11,345cm^3$ $\quad O \approx 33,872cm^2$

$d)$ $V \approx 4,272cm^3$ $\quad O \approx 21,891cm^2$

$e)$ $V = \frac{11}{27}cm^3$ $\quad O \approx 4,583cm^2$

$f)$ $V = \frac{\sqrt{30}}{3}cm^3$ $\quad O \approx 9,903cm^2$

$g)$ $V \approx 0,409cm^3$ $\quad O \approx 3,749cm^2$

$h)$ $V \approx 10,852cm^3$ $\quad O \approx 32,462cm^2$

Aufgabe 14:

$a)\ V = 98cm^3 \qquad O \approx 129,074cm^2$

$b)\ V = \dfrac{108}{5}cm^3 \qquad O \approx 56,451cm^2$

$c)\ V \approx 33,152cm^3 \qquad O \approx 53,745cm^2$

$d)\ V \approx 4,605cm^3 \qquad O \approx 43,201cm^2$

$e)\ V = \dfrac{1870}{567}cm^3 \qquad O \approx 24,187cm^2$

$f)\ V \approx 3,298cm^3 \qquad O \approx 31,965cm^2$

$g)\ V \approx 4,808cm^3 \qquad O \approx 16,975cm^2$

$h)\ V \approx 9,060cm^3 \qquad O \approx 25,306cm^2$

Aufgabe 15:

$a)\ V \approx 7,542cm^3 \qquad O \approx 27,713cm^2$

$b)\ V \approx 85,913cm^3 \qquad O \approx 140,296cm^2$

$c)\ V \approx 0,050cm^3 \qquad O \approx 0,974cm^2$

$d)\ V \approx 0,323cm^3 \qquad O \approx 3,395cm^2$

$e)\ V \approx 9,590cm^3 \qquad O \approx 32,524cm^2$

$f)\ V \approx \dfrac{1}{3}cm^3 \qquad O \approx 3,464cm^2$

$g)\ V \approx 0,156cm^3 \qquad O \approx 2,090cm^2$

$h)\ V \approx 3,654cm^3 \qquad O \approx 17,095cm^2$

$i)\ V \approx 2,367dm^3 \qquad O \approx 12,798dm^2$

Aufgabe 16:

$a) \quad \Rightarrow V = 27cm^3, O = 54cm^2$

$b) \quad \Rightarrow V = 72cm^3, O = 122cm^2$

$c) \quad \Rightarrow V = 32cm^3, O = 2\sqrt{52} \cdot 6cm^2 + 16cm^2 \approx 102,53cm^2$

$d) \quad \Rightarrow V = 20cm^3, O = 5\sqrt{41}cm^2 + 5\sqrt{34}cm^2 + 12cm^2 \approx 73,17cm^2$

$e) \quad \Rightarrow V = 80cm^3, O = 6 \cdot 5cm^2 + 2 \cdot 4 \cdot 6cm^2 + 2 \cdot 4 \cdot 5cm^2 + 4 \cdot \sqrt{41}cm^2 + 4 \cdot \sqrt{52}cm^2 \approx 172,46cm^2$

$f) \quad \Rightarrow V \approx 41,67cm^3, O \approx 72,81cm^2$

Aufgabe 17:

$a) \; V \approx 20,785cm^3 \qquad O \approx 77,569cm^2$

$b) \; V = 48cm^3 \qquad O = 176cm^2$

$c) \; V \approx 85,583cm^3 \qquad O \approx 335,276cm^2$

$d) \; V \approx 124,788cm^3 \qquad O \approx 570,831cm^2$

$e) \; V \approx 174,428cm^3 \qquad O \approx 897,996cm^2$

$f) \; V \approx 231,765cm^3 \qquad O \approx 1332,077cm^2$

$g) \; V \approx 2,117cm^3 \qquad O \approx 15,619cm^2$

$h) \; V \approx 4,889cm^3 \qquad O \approx 28,889cm^2$

$i) \; V \approx 8,411cm^3 \qquad O \approx 48,920cm^2$

$j) \; V \approx 12,702cm^3 \qquad O \approx 77,426cm^2$

$k) \; V \approx 17,766cm^3 \qquad O \approx 116,111cm^2$

$l) \; V \approx 23,606cm^3 \qquad O \approx 166,675cm^2$

Aufgabe 18:

$a)\ V = 12cm^3$ $O \approx 27,713cm^2$
$b)\ V \approx 27,713cm^3$ $O \approx 43,713cm^2$
$c)\ V \approx 47,679cm^3$ $O \approx 62,169cm^2$
$d)\ V = 72cm^3$ $O \approx 83,138cm^2$
$e)\ V \approx 2,021cm^3$ $O \approx 8,329cm^2$
$f)\ V \approx 4,668cm^3$ $O \approx 13,540cm^2$
$g)\ V \approx 8,031cm^3$ $O \approx 19,635cm^2$
$h)\ V \approx 12,128cm^3$ $O \approx 26,635cm^2$

Aufgabe 19:

$a)\ V \approx 32,332cm^3$ $O \approx 101,218cm^2$
$b)\ V \approx 128,462cm^3$ $O \approx 200,657cm^2$
$c)\ V \approx 193,990cm^3$ $O \approx 257,861cm^2$
$d)\ V \approx 1,015cm^3$ $O \approx 10,110cm^2$
$e)\ V \approx 4,032cm^3$ $O \approx 19,971cm^2$
$f)\ V \approx 6,089cm^3$ $O \approx 25,633cm^2$

Aufgabe 20:

$a)\ ; h = \frac{42}{55}cm$ $b)\ ; h = \frac{12}{5}cm$
$c)\ ; h = 5cm$ $d)\ ; h = \frac{4}{7}cm$
$e)\ ; h \approx 0,10062cm$ $f)\ ; h = \frac{\pi}{e}cm$

Aufgabe 21:

Aufgabe 22:

	1	2	3	4	5	6
a	6	3	$\approx 3{,}538$	3,3	$\approx 8{,}553$	5,5
b	2	$\approx 2{,}762$	9	$\approx 3{,}718$	5,7	$15{,}745 \vee 1{,}4781$
c	8	7	4	5,6	3,2	$1{,}4781 \vee 15{,}745$
V	96	58	$\approx 127{,}385$	68,7	156	128
O	160	$\approx 97{,}238$	164	$\approx 103{,}132$	$\approx 188{,}717$	236

	1	2	3	4	5	6
s	7	$\approx 9{,}947$	$\approx 3{,}644$	3,45	$\approx 4{,}651$	$\approx 3{,}022$
V	$\approx 40{,}423$	116	$\approx 5{,}703$	$\approx 4{,}839$	$\frac{83}{7}$	$\approx 3{,}253$
O	$\approx 84{,}871$	$\approx 171{,}387$	23	$\approx 20{,}616$	$\approx 37{,}468$	$\frac{174}{11}$

Aufgabe 23:

	1	2	3	4	5	6
G	13	27	$\approx 5{,}676$	3,95	$\frac{67}{33}$	$\approx 0{,}882 \vee 13{,}310$
h	7	$\approx 3{,}185$	5	$\approx 1{,}832$	$\frac{11}{2}$	$\approx 13{,}310 \vee 0{,}882$
V	91	86	$\approx 28{,}379$	$\approx 7{,}237$	$\frac{67}{6}$	$\frac{55}{7}$
O	$\approx 126{,}955$	$\approx 120{,}203$	59	24,5	$\approx 33{,}233$	$\frac{599}{17}$
Ecken	4	4	4	3	6	4

Aufgabe 24:

	1	2	3	4	5	6
a	8	5	6,5	5,358	2,3	4,8
b	8	4	4,935	7,058	7,4	6,6
h	11	8,411	8,8	6,9	8,234	5,142
h_{Δ_a}	11,705	8,646	9,139	7,75	9,027	6,110
h_{Δ_b}	11,705	8,775	9,381	7,402	8,314	5,675
s	12,369	9	9,7	8,2	9,1	6,564
V	234,667	56,075	94,086	86,977	46,714	54,3
O	251,275	98,329	137,771	131,581	102,942	98,460

Aufgabe 25: $c = \frac{16}{3}$

Aufgabe 26:

	1	2	3	4	5	6
Seite a	2	9	5	2	3	$\frac{10}{3}$
Seite b	3	4	7	11	8	$\frac{4}{5}$
Seite c	4	7	6	$3,5$	$\frac{15}{8}$	$\frac{3}{4}$
Volumen V	24	252	210	77	45	2
Oberfläche O	52	254	214	135	$\frac{357}{4}$	$\frac{178}{15}$

Aufgabe 27:

$V = Gh$	$V = \frac{1}{3}Gh$	$V = \frac{4}{3}Gh$
Quader	Kegel	Kugel
Prisma	Oktaeder	
Zylinder	Tetraeder	
schiefes Prisma		
Würfel		

Aufgabe 36:

$a)$ $V = \pi r^2 h \approx 141,372cm^3$

$b)$ $V = \pi r^2 h \approx 95,033cm^3$

$c)$ $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \approx 104,720cm^3$

$d)$ $V = \dfrac{1}{3}\pi h_1 \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right) \approx 183,260cm^3$

$e)$ $V = \pi r_1^2 h_1 + \pi r_2^2 h_2 \approx 241,903cm^3$

$f)$ $V = \pi r^2 h + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 \approx 184,307cm^3$

$g)$ $V = \pi r_1^2 h_1 + \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 \approx 170,824cm^3$

$h)$ $V = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 + \dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 \approx 83,776cm^3$

$i)$ $V = \pi r_1^2 h_1 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r_2^3 \approx 271,093cm^3$

$j)$ $V = \pi r_1^2 h_1 + \dfrac{4}{3}\pi r_2^3 \approx 52,753cm^3$

$k)$ $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r^3 \approx 84,823cm^3$

$l)$ $V = \dfrac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 + \pi r_2^2 h_2 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi r_3^3 \approx 95,033cm^3$

Aufgabe 37:

a)

5	3	2	2	
4	2	2	1	
2	1			
1				

b)

6	3	3	1	1
3	3	3		
4	2	2	1	
2	1			
2				

c)

4	4	4	3	3
3	3	3	3	3
2	3	3	3	1
2	2	2	1	
1	2	1		

d)

4	5	7	3	
4	3	3	2	1
3	1	1		
2				
6	2			

e)

2	2	3	2	1
2	2	2	2	2
3	2	3	2	3
2	2	2	2	2
1	2	3	2	1

f)

7	4	6	5	4
3	4	5	2	2
3	2			
1				
8				

g)

9	1	1	2	6
1	1	1		
1	1	1		
5	1	1		
7				

h)

6	6	4	2	2
7				
5				
6				
4	3	3	2	1

Aufgabe 38:

$a)\ M = 63cm^2$ $\quad b)\ M = 156cm^2$ $\quad c)\ M = 120cm^2$

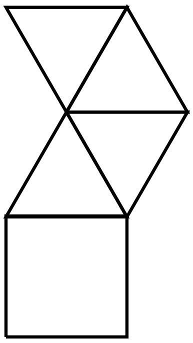
$d)\ M = 324cm^2$ $\quad e)\ M = 1001cm^2$ $\quad f)\ M = 4216cm^2$

$g)\ M = \frac{57}{7}cm^2$ $\quad h)\ M = \frac{299}{12}cm^2$ $\quad i)\ M = \frac{133}{3}cm^2$

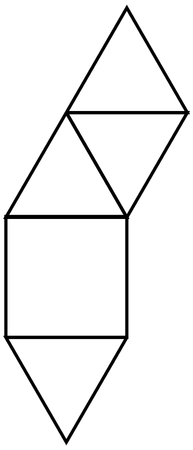
$j)\ M = \frac{1825}{6}cm^2$ $\quad k)\ M = \frac{1161}{5}cm^2$ $\quad l)\ M = \frac{1149}{5}cm^2$

Aufgabe 40: *Bestimme ob aus dem dargestellten Netz ein Würfel entstehen könnte.*

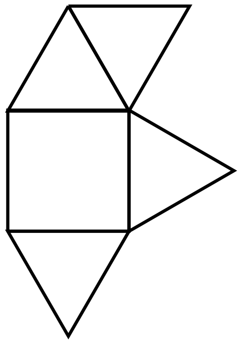
a)



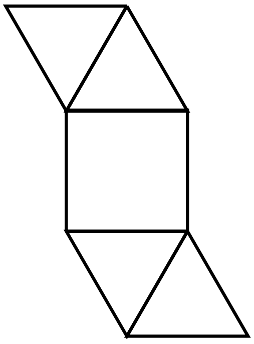
b)



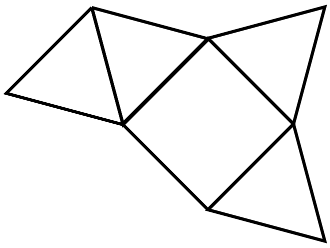
c)



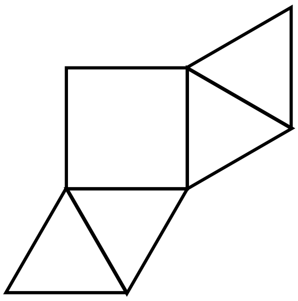
d)



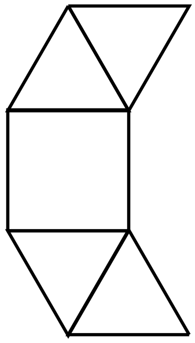
e)



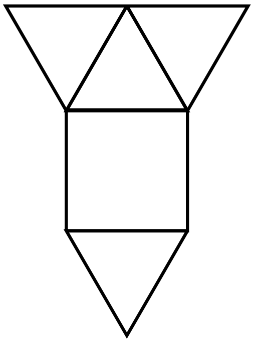
f)



g)



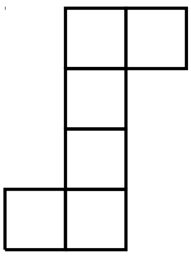
h)



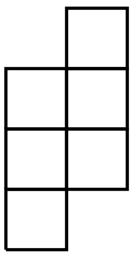
a) ja *b*) nein *c*) nein *d*) ja
e) ja *f*) ja *g*) nein *h*) ja

Aufgabe 41: *Bestimme ob aus dem dargestellten Netz ein Würfel entstehen könnte.*

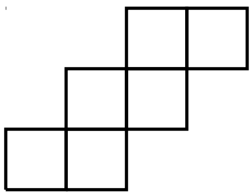
a)



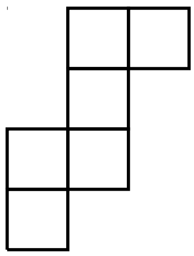
b)



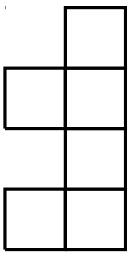
c)



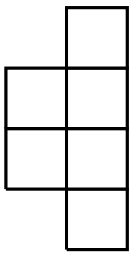
d)



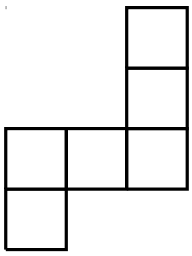
e)



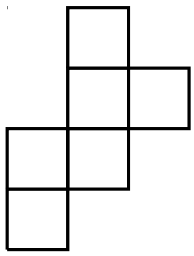
f)



g)

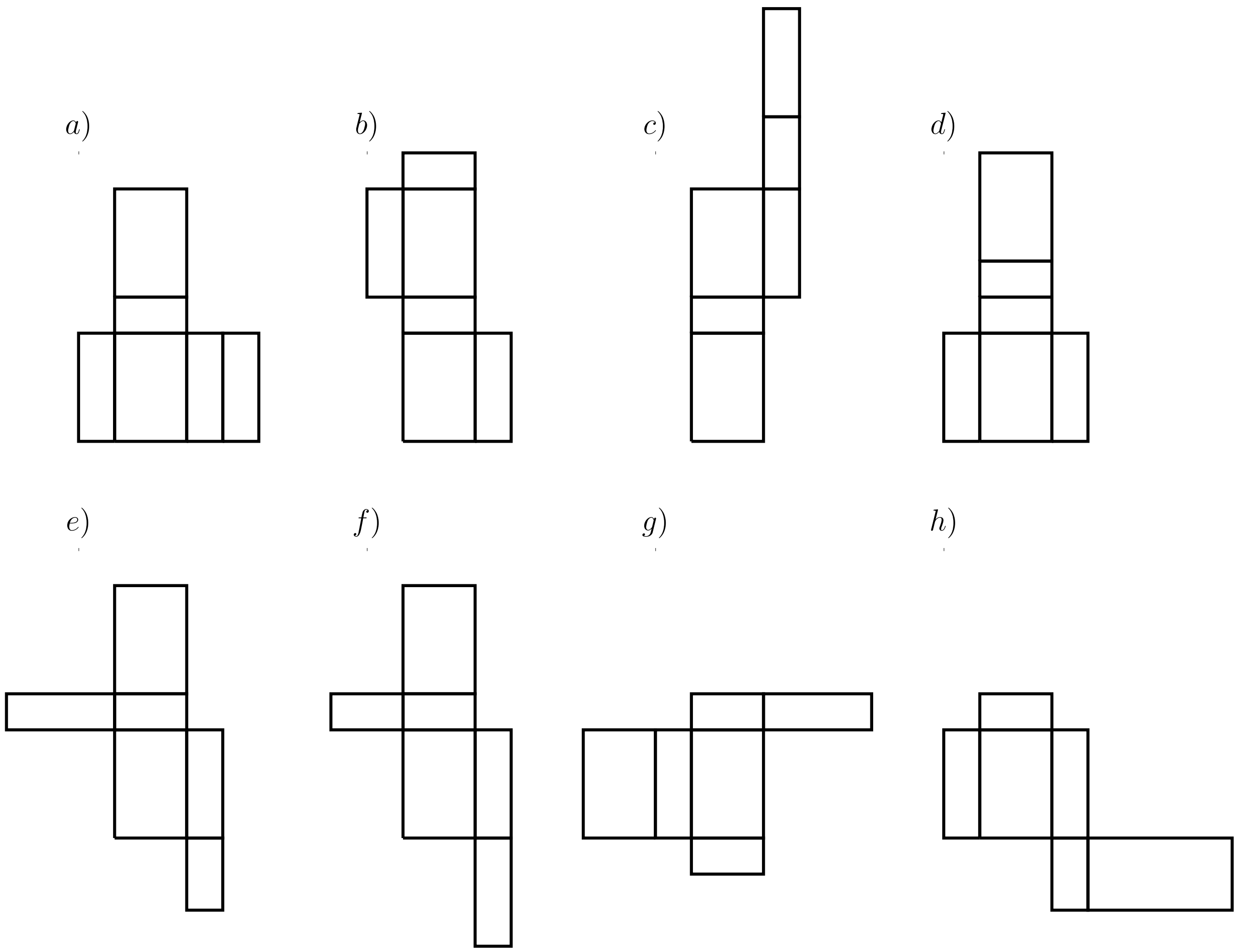


h)



$a)$ ja $b)$ nein $c)$ ja $d)$ ja
$e)$ nein $f)$ nein $g)$ nein $h)$ ja

Aufgabe 42: *Bestimme ob aus dem dargestellten Netz ein Quader entstehen könnte.*



$a)$ nein $b)$ ja $c)$ ja $d)$ nein
$e)$ ja $f)$ nein $g)$ ja $h)$ ja

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.11.1).

18.10.35 Lösungen zu Kreisen

Aufgabe 1:

$a)\ \ A \approx 28,27cm^2, U \approx 18,85cm$

$b)\ \ A \approx 113,097cm^2, U \approx 37,699cm$

$c)\ \ A \approx 95,033cm^2, U \approx 34,558cm$

$d)\ \ A \approx 2,181mm^2, U \approx 4,189mm$

$e)\ \ A \approx 1,396dm^2, U \approx 5,236dm$

$f)\ \ A \approx 2,405m^2, U \approx 5,498m$

$g)\ \ A \approx 0,256cm^2, U \approx 1,795cm$

$h)\ \ A \approx 10,179cm^2, U \approx 11,310cm$

$i)\ \ A \approx 10,559cm^2, U \approx 11,519cm$

$j)\ \ A \approx 15,708cm^2, U \approx 14,050cm$

$k)\ \ A \approx 31,01cm^2, U \approx 19,74cm$

$l)\ \ A \approx 5,629cm^2, U \approx 11,258cm$

$m)\ \ A \approx 0,20cm^2, U \approx 1,57cm$

$n)\ \ A \approx 23,21cm^2, U \approx 17,08cm,$

$o)\ \ A \approx 2,31cm^2, U \approx 5,39cm$

Aufgabe 2:

$a)\ \ A \approx 13,09cm^2, U \approx 15,24cm$

$b)\ \ A \approx 8,03cm^2, U \approx 12,03cm$

$c)\ \ A \approx 26,26cm^2, U \approx 20,98cm$

$d)\ \ A \approx 4,32cm^2, U \approx 8,88cm$

$e)\ \ A \approx 62,00cm^2, U \approx 31,72cm$

$f)\ \ A \approx 16,91cm^2, U \approx 18,53cm$

$g)\ \ A \approx 0,640cm^2, U \approx 3,207cm$

$h)\ \ A \approx 2,583cm^2, U \approx 8,476cm$

$i)\ \ A \approx 0,480cm^2, U \approx 3,909cm$

$j)\ \ A \approx 0,389cm^2, U \approx 3,177cm$

$k)\ \ A \approx 0,00587cm^2, U \approx 1,846cm$

$l)\ \ A \approx 53,276cm^2, U \approx 31,185cm$

Aufgabe 3:

$a)$ $180° = \pi\text{rad}$ $b)$ $360° = 2\pi\text{rad}$ $c)$ $90° = \frac{1}{2}\pi\text{rad}$

$d)$ $45° = \frac{1}{4}\pi\text{rad}$ $e)$ $30° = \frac{1}{6}\pi\text{rad}$ $f)$ $120° = \frac{2}{3}\pi\text{rad}$

$g)$ $36° = \frac{1}{5}\pi\text{rad}$ $h)$ $55° \approx 0,960\text{rad}$ $i)$ $193°\text{rad} \approx 3,368\text{rad}$

$j)$ $11° \approx 0,192\text{rad}$ $k)$ $466° \approx 8,133\text{rad}$ $l)$ $1643° \approx 28,676\text{rad}$

$m)$ $\frac{3\pi}{4}\text{rad} = 135°$ $n)$ $\frac{3\pi}{2}\text{rad} = 270°$ $o)$ $\frac{5\pi}{4}\text{rad} = 225°$

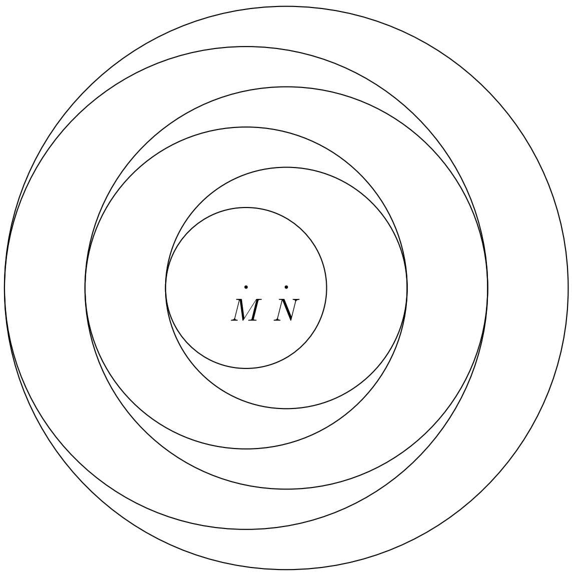
$p)$ $1,2\pi\text{rad} = 216°$ $q)$ $1,75\text{rad} = 315°$ $r)$ $0,\bar{3}\text{rad} = 60°$

$s)$ $\frac{4\pi}{5}\text{rad} = 144°$ $t)$ $\frac{\pi}{9}\text{rad} = 20$ $u)$ $\frac{9\pi}{7}\text{rad} \approx 231,429°$

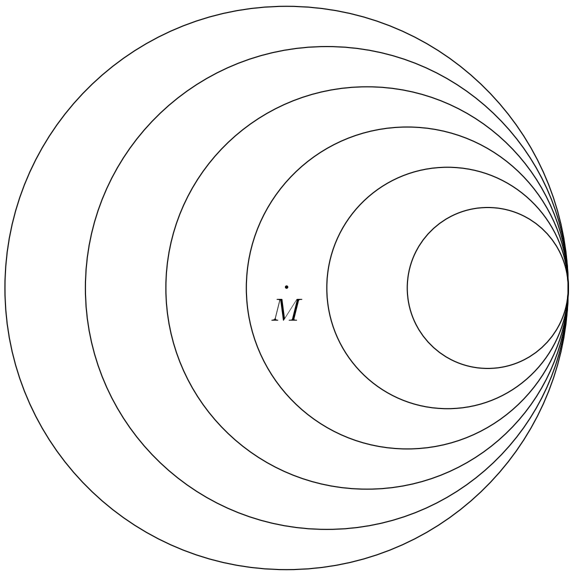
$v)$ $\frac{\pi}{12}\text{rad} = 15°$ $w)$ $\frac{7\pi}{3}\text{rad} = 420°$ $x)$ $\frac{11\pi}{9}\text{rad} = 220°$

Aufgabe 4:
(Alle Größen wurden mit $\frac{1}{2}$ multipliziert.)

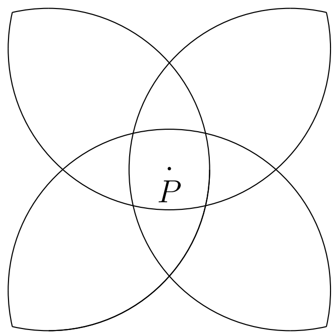
$a)$



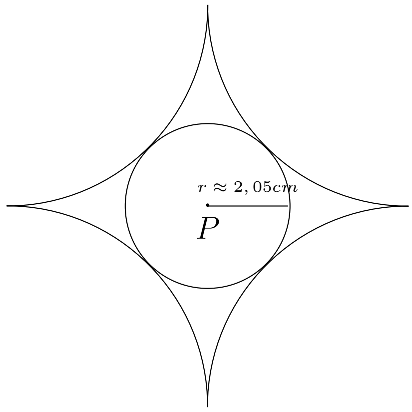
$b)$



c)



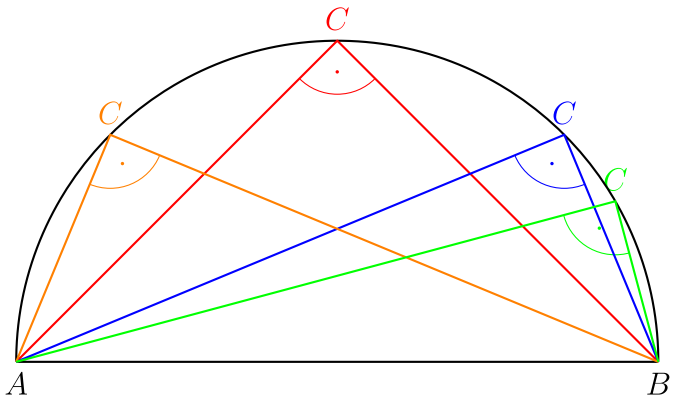
d)



Aufgabe 5:

Der Abstand der Mittelpunkte nimmt nach rechts immer weiter um $0,5cm$ zu, während die Radien der Kreise um $0,5cm$ abnehmen.

Aufgabe 6:



Aufgabe 7:

a) $s \approx 7,071cm$; $h \approx 3,536cm \;\Rightarrow\; A \approx 7,13cm^2$; $U \approx 14,925cm$

b) $s \approx 4,870cm$; $h \approx 3,845cm \;\Rightarrow\; A \approx 1,11cm^2$; $U \approx 10,016cm$

c) $s \approx 13,032cm$; $h \approx 3,612cm \;\Rightarrow\; A \approx 35,56cm^2$; $U \approx 28,895cm$

d) $s \approx 0,897cm$; $h \approx 2,205cm \;\Rightarrow\; A \approx 0,027cm^2$; $U \approx 1,800cm$

e) $s \approx 0,794cm$; $h \approx 0,364cm \;\Rightarrow\; A \approx 0,096cm^2$; $U \approx 1,686cm$

f) $s \approx 5,060cm$; $h \approx 0,774cm \;\Rightarrow\; A \approx 6,96cm^2$; $U \approx 11,802cm$

g) $s \approx 2,562cm$; $h \approx 0,531cm \;\Rightarrow\; A \approx 1,58cm^2$; $U \approx 5,828cm$

h) $s \approx 2,718cm$; $h \approx 2,354cm \;\Rightarrow\; A \approx 0,67cm^2$; $U \approx 5,565cm$

Aufgabe 11:

$a)\ \ r \approx 5,730cm \ \ , \ \ d \approx 11,459cm \ \ , \ \ A \approx 103,132cm^2$

$b)\ \ r \approx 5,078cm \ \ , \ \ d \approx 10,155cm \ \ , \ \ U \approx 31,904cm$

$c)\ \ r = \frac{11}{8}cm \ \ , \ \ U \approx 8,639cm \ \ , \ \ A \approx 5,940cm^2$

$d)\ \ d = \frac{17}{3}dm \ \ , \ \ U \approx 17,802dm \ \ , \ \ A \approx 25,220dm^2$

$e)\ \ r \approx 0,910m \ \ , \ \ d \approx 1,819m \ \ , \ \ U \approx 5,716m$

$f)\ \ r \approx 1,220cm \ \ , \ \ d \approx 2,440cm \ \ , \ \ A \approx 4,677cm^2$

$g)\ \ r \approx 0,856dm \ \ , \ \ d \approx 1,711dm \ \ , \ \ U \approx 5,376dm$

$h)\ \ r \approx 1,995cm \ \ , \ \ d \approx 3,989cm \ \ , \ \ U \approx 12,533cm$

$i)\ \ d = \frac{21}{3}cm \ \ , \ \ U \approx 21,991cm \ \ , \ \ A \approx 38,485cm^2$

$j)\ \ r \approx 0,756cm \ \ , \ \ d \approx 1,512cm \ \ , \ \ A \approx 1,795cm^2$

$k)\ \ r \approx 0,660mm \ \ , \ \ d \approx 1,321mm \ \ , \ \ U \approx 4,149mm$

$l)\ \ r \approx 4,403mm \ \ , \ \ d \approx 8,807mm \ \ , \ \ A \approx 60,912mm^2$

$m)\ \ r \approx 0,656cm \ \ , \ \ d \approx 1,312cm \ \ , \ \ A \approx 1,352cm^2$

$n)\ \ r \approx 0,605cm \ \ , \ \ d \approx 1,211cm \ \ , \ \ A \approx 1,151cm^2$

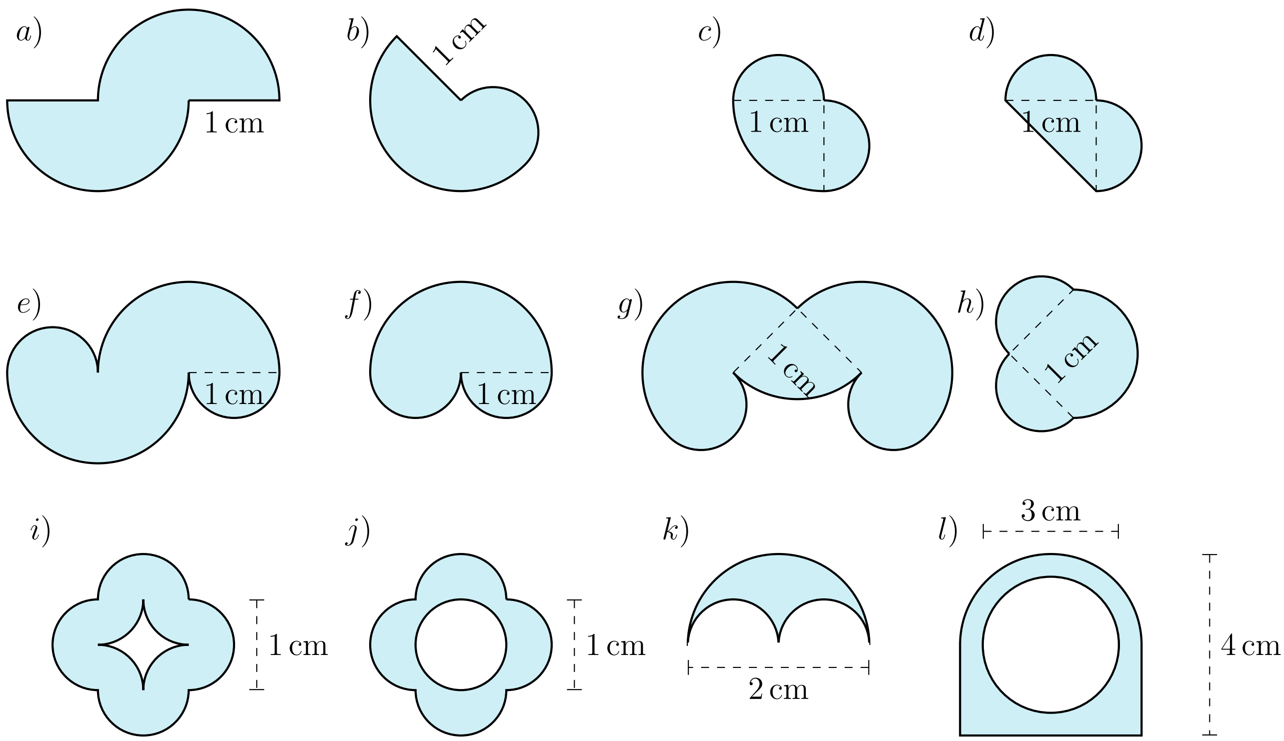
$o)\ \ r \approx 1,342cm \ \ , \ \ d \approx 2,684cm \ \ , \ \ U \approx 8,431cm$

$p)\ \ r \approx \frac{\sqrt{7}}{4}m \ \ , \ \ U \approx 4,156m \ \ , \ \ A \approx 1,374m^2$

$q)\ \ r \approx 0,719m \ \ , \ \ d \approx 1,438m \ \ , \ \ U \approx 4,517m$

$r)\ \ r \approx 0,866dm \ \ , \ \ d \approx 1,731dm \ \ , \ \ U \approx 5,439dm$

Aufgabe 12: *Berechne den Umfang und den Flächeninhalt der dargestellten Figuren.*



a) $A = \pi\,\text{cm}^2 \approx 3,142\,\text{cm}^2$, $U = (2 + 2\pi)\,\text{cm} \approx 8,283\,\text{cm}$

b) $A = \frac{5\pi}{8}\,\text{cm}^2 \approx 1,963\,\text{cm}^2$, $U = (1 + \frac{3}{2}\pi)\,\text{cm} \approx 5,712\,\text{cm}$

c) $A = \frac{1}{2}\pi\,\text{cm}^2 \approx 1,571\,\text{cm}^2$, $U = \frac{3}{2}\pi\,\text{cm} \approx 4,712\,\text{cm}$

d) $A = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\,\text{cm}^2 \approx 1,285\,\text{cm}^2$, $U = \sqrt{2} + \pi\,\text{cm} \approx 4,556\,\text{cm}$

e) $A = \frac{5}{4}\pi\,\text{cm}^2 \approx 3,927\,\text{cm}^2$, $U = 3\pi\,\text{cm} \approx 9,425\,\text{cm}$

f) $A = \frac{3}{4}\pi\,\text{cm}^2 \approx 2,356\,\text{cm}^2$, $U = 2\pi\,\text{cm} \approx 6,283\,\text{cm}$

g) $A = \frac{3}{2}\pi\,\text{cm}^2 \approx 4,712\,\text{cm}^2$, $U = \frac{7}{2}\pi\,\text{cm} \approx 10,996\,\text{cm}$

h) $A = \frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4}\,\text{cm}^2 \approx 2,856\,\text{cm}^2$, $U = (\sqrt{2} + 1)\pi\,\text{cm} \approx 7,584\,\text{cm}$

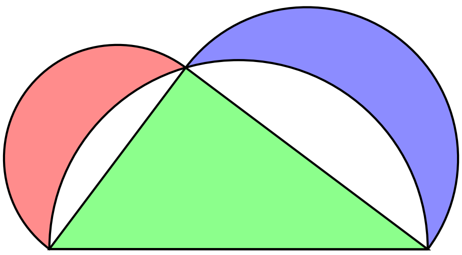
i) $A = \frac{3}{4}\pi\,\text{cm}^2 \approx 2,356\,\text{cm}^2$, $U = 3\pi\,\text{cm} \approx 9,425\,\text{cm}$

j) $A = 1 + \frac{1}{4}\pi\,\text{cm}^2 \approx 1,785\,\text{cm}^2$, $U = 3\pi\,\text{cm} \approx 9,425\,\text{cm}$

k) $A = \frac{1}{4}\pi\,\text{cm}^2 \approx 0,785\,\text{cm}^2$, $U = 2\pi\,\text{cm} \approx 6,283\,\text{cm}$

l) $A = 2 + \frac{55}{16}\pi\,\text{cm}^2 \approx 12,799\,\text{cm}^2$, $U = 4 + 7\pi\,\text{cm} \approx 25,991\,\text{cm}$

Aufgabe 13: *Zeige, dass die Summe der roten und blauen Flächeninhalte gleich dem Flächeninhalt das Dreiecks ist.*



$$
\begin{aligned}
A_{\text{Halbkreis,Hypotenuse}} &= A_{\text{Halbkreis,rot}} + A_{\text{Halbkreis,blau}}\\
A_{\text{Mond,rot}} + A_{\text{Mond,blau}} &= A_{\text{Halbkreis,rot}} + A_{\text{Halbkreis,blau}} - A_{\text{Halbkreis,Segmente}}\\
A_{\text{Halbkreis,Segmente}} &= A_{\text{Halbkreis,Hypotenuse}} - A_{\text{Dreieck,grün}}\\
\Rightarrow\quad A_{\text{Mond,rot}} + A_{\text{Mond,blau}} &= A_{\text{Halbkreis,rot}} + A_{\text{Halbkreis,blau}} - (A_{\text{Halbkreis,Hypotenuse}} - A_{\text{Dreieck,grün}})\\
\Leftrightarrow\quad A_{\text{Mond,rot}} + A_{\text{Mond,blau}} &= A_{\text{Halbkreis,rot}} + A_{\text{Halbkreis,blau}} - A_{\text{Halbkreis,Hypotenuse}} + A_{\text{Dreieck,grün}}\\
\Leftrightarrow\quad A_{\text{Mond,rot}} + A_{\text{Mond,blau}} &= A_{\text{Halbkreis,rot}} + A_{\text{Halbkreis,blau}} - A_{\text{Halbkreis,rot}} - A_{\text{Halbkreis,blau}} + A_{\text{Dreieck,grün}}\\
\Leftrightarrow\quad A_{\text{Mond,rot}} + A_{\text{Mond,blau}} &= A_{\text{Dreieck,grün}}
\end{aligned}
$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.12.3).

18.10.36 Lösungen zu Zylindern und Kegeln

Aufgabe 1:

$a)\ \ r = 5cm$ und $h = 11cm \Rightarrow V \approx 863,94cm^3, O \approx 329,87cm^2$

$b)\ \ r = 47cm$ und $h = 85cm \Rightarrow V \approx 589551,15cm^3, O \approx 26430,22cm^2$

$c)\ \ r = \frac{1}{4}cm$ und $h = \sqrt{9}cm \Rightarrow V \approx 0,59cm^3, O \approx 2,75cm^2$

$d)\ \ r = \sqrt{7}cm$ und $h = 2cm \Rightarrow V \approx 43,98cm^3, O \approx 60,61cm^2$

$e)\ \ r = \frac{7}{3}cm$ und $h = \sqrt{5}cm \Rightarrow V \approx 38,25cm^3, O \approx 50,60cm^2$

$f)\ \ r = \sqrt{50}cm$ und $h = \sqrt{\frac{3}{16}}cm \Rightarrow V \approx 68,02cm^3, O \approx 323,78cm^2$

Aufgabe 2:

a) $r = 4cm$ und $h = 2,7cm \Rightarrow V \approx 45,24cm^3, s \approx 4,83cm, O \approx 110,91cm^2$

b) $r = \sqrt{2}cm$ und $h = \dfrac{2}{5}cm \Rightarrow V \approx 0,84cm^3, s \approx 1,47cm, O \approx 12,81cm^2$

c) $r = 7cm$ und $h = 4,3cm \Rightarrow V \approx 220,65cm^3, s \approx 8,22cm, O \approx 334,60cm^2$

d) $r = \dfrac{10}{7}cm$ und $h = 4cm \Rightarrow V \approx 8,55cm^3, s \approx 4,25cm, O \approx 25,47cm^2$

e) $r = 5cm$ und $h = 1,4cm \Rightarrow V \approx 36,65cm^3, s \approx 5,19cm, O \approx 160,10cm^2$

f) $r = \dfrac{1}{8}cm$ und $h = 9cm \Rightarrow V \approx 0,15cm^3, s \approx 9,00cm, O \approx 3,58cm^2$

Aufgabe 3:

a) $r_1 = 4cm, r_2 = 2cm$ und $h_1 = 5cm \Rightarrow V \approx 146,61cm^3, s_1 \approx 5,39cm, O \approx 164,34cm^2$

b) $r_1 = 3,5cm, r_2 = 1,5cm$ und $h_1 = 7cm \Rightarrow V \approx 144,78cm^3, s_1 \approx 7,28cm, O \approx 159,91cm^2$

c) $r_1 = 6cm, r_2 = 2cm$ und $h_1 = 9cm, \Rightarrow V \approx 490,09cm^3, s_1 \approx 9,85cm, O \approx 373,19cm^2$

d) $r_1 = \dfrac{1}{3}cm, r_2 = \dfrac{9}{4}cm$ und $h_1 = \dfrac{13}{2}cm \Rightarrow V \approx 40,32cm^3, s_1 \approx 6,78cm, O \approx 38,55cm^2$

e) $r_1 = 1cm, r_2 = 5cm$ und $h_1 = \dfrac{7}{4}cm \Rightarrow V \approx 56,81cm^3, s_1 \approx 4,37cm, O \approx 163,98cm^2$

f) $r_1 = \pi cm, r_2 = 2,718cm$ und $h_1 = \sqrt{2}cm \Rightarrow V \approx 38,20cm^3, s_1 \approx 1,48cm, O \approx 81,39cm^2$

Aufgabe 4:
Beide Körper haben das gleiche Volumen und die gleiche Oberfläche. $\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(h_1 + h_2)r_1^2 - 2\frac{1}{3}\pi h_2 r_2^2 \approx 100,53cm^3, O = \pi r_1^2 + \pi(s_1 + s_2)r_1 \approx 499,85cm^2$. Dabei ist das Volumen des kleines Kegels zweimal vom großen Kegel zu subtrahieren. Die Oberfläche ist dabei identisch zur Oberfläche eines großen Kegels.

Aufgabe 5:

Aufgabe 6:

	1	2	3	4	5	6
r	5	4	0,874	4	0,775	$\frac{17}{4}$
h	7	0,179	5	0,477	$\frac{7}{3}$	5,482
V	549,779	9	12	24	$\frac{22}{5}$	311,085
O	267,035	102,781	18,529	106,531	9,451	$\frac{999}{10}$

	1	2	3	4	5	6
r	5	4	7,483	0,752	1,342	2
h	7	5,745	5	5,549	$\frac{7}{3}$	47,105
s	8,602	7	9	5,6	2,692	47,147
V	183,260	96,251	293,215	3,284	$\frac{22}{5}$	197,311
O	213,665	138,230	387,515	15	17,005	$\frac{1544}{5}$

Aufgabe 7: Benutze den Strahlensatz und setze ein!

$$\begin{aligned}
&\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_2}{h} = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \\
&\Rightarrow h_2 = \frac{h_1}{r_1\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)} = \frac{h_1}{r_1 \frac{r_1 - r_2}{r_2 r_1}} = \frac{h_1 r_2 \cancel{r_1}}{\cancel{r_1}\left(r_1 - r_2\right)} \\
&\Rightarrow V = \frac{1}{3} G_1 h - \frac{1}{3} G_2 h_2 \\
&\quad = \frac{\pi}{3}\left(r_1^2 (h_1 + h_2) - r_2^2 h_2\right) \\
&\quad = \frac{\pi}{3}\left(r_1^2 h_1 + r_1^2 \frac{h_1 r_2}{r_1 - r_2} - r_2^2 \frac{h_1 r_2}{r_1 - r_2}\right) \\
&\quad = \frac{\pi}{3} h_1 \left(r_1^2 + r_2 \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2}\right) \\
&\quad = \frac{\pi}{3} h_1 \left(r_1^2 + r_2 \frac{\left(r_1 - r_2\right)\left(r_1 + r_2\right)}{r_1 - r_2}\right) \\
&\quad = \frac{\pi}{3} h_1 \left(r_1^2 + r_2 \left(r_1 + r_2\right)\right) \\
&\quad = \frac{\pi}{3} h_1 \left(r_1^2 + r_2 r_1 + r_2^2\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 14:

$a)\ G \approx 12,566cm^2\ ,\ V \approx 37,699cm^3$

$b)\ r \approx 0,714cm\ ,\ V = 6,4cm^3$

$c)\ G \approx 24,630cm^2\ ,\ h \approx 6,472cm$

$d)\ r \approx 4,570cm\ ,\ h \approx 3,630cm$

$e)\ r \approx 2,953cm\ ,\ V \approx 184,402cm^3$

$f)\ G \approx 83,000cm^2\ ,\ V \approx 625,817cm^3$

$g)\ G = \frac{1101}{299}cm^2\ ,\ r \approx 1,083cm$

$h)\ r \approx 0,995cm\ ,\ h = \frac{485}{156}cm$

$i)\ h \approx 2,200cm\ ,\ G \approx 9,621cm^2$

$j)\ V \approx 52,589cm^3\ ,\ r \approx 2,483cm$

$k)\ h \approx 0,515cm\ ,\ G \approx 45,928cm^2$

$l)\ G = \frac{8195}{444}cm^2\ ,\ r \approx 2,424cm$

$m)\ h \approx 1,366cm\ ,\ r \approx 1,839cm$

$n)\ V \approx 114,861cm^3\ ,\ r \approx 2,028cm$

$o)\ G \approx 47,909cm^2\ ,\ h \approx 0,563cm$

$p)\ r \approx 2,447cm\ ,\ h \approx 0,059cm$

$q)\ G \approx 491,905cm^2\ ,\ V \approx 1511,358cm^3$

$r)\ G \approx 1,900cm^2\ ,\ r \approx 0,778cm$

Aufgabe 15:

$a)\ s \approx 5,831cm\ ,\ G \approx 28,274cm^2\ ,\ V \approx 47,124cm^3$

$b)\ r \approx 1,954cm\ ,\ h \approx 6,722cm\ ,\ V \approx 26,887cm^3$

$c)\ h \approx 3,527cm\ ,\ s \approx 4,899cm\ ,\ G \approx 12,106cm^2$

$d)\ h \approx 10,006cm\ ,\ r \approx 2,367cm\ ,\ s \approx 10,282cm$

$e)\ V \approx 100,352cm^3\ ,\ s \approx 8,584cm\ ,\ r \approx 3,496cm$

$f)\ h \approx 2,313cm\ ,\ V \approx 13,189cm^3\ ,\ G \approx 17,104cm^2$

$g)\ G \approx 7,480cm^2\ ,\ s \approx 6,357cm\ ,\ r \approx 1,543cm$

$h)\ h = \frac{341}{80}cm\ ,\ r \approx 2,041cm\ ,\ s \approx 4,726cm$

$i)\ h \approx 1,222cm\ ,\ s \approx 4,870cm\ ,\ G \approx 69,820cm^2$

$j)\ V = \frac{153}{8}cm^3\ ,\ r \approx 2,539cm\ ,\ s \approx 3,804cm$

$k)\ h \approx 3,370cm\ ,\ s \approx 4,080cm\ ,\ G \approx 16,619cm^2$

$l)\ G \approx 100,588cm^2\ ,\ s \approx 5,833cm\ ,\ r \approx 5,658cm$

$m)\ h \approx 4,467cm\ ,\ r \approx 2,356cm\ ,\ s \approx 5,050cm$

$n)\ V \approx 45,216cm^3\ ,\ r \approx 2,197cm\ ,\ s \approx 9,210cm$

$o)\ G \approx 10,210cm^2\ ,\ h \approx 2,578cm\ ,\ s \approx 3,146cm$

$p)\ h \approx 0,715cm\ ,\ r \approx 1,878cm\ ,\ s \approx 2,009cm$

$q)\ h \approx 2,113cm\ ,\ G \approx 3,829cm^2\ ,\ V \approx 2,696cm^3$

$r)\ V \approx 4,613cm^3\ ,\ h \approx 3,781cm\ ,\ r \approx 1,079cm$

Aufgabe 16:

$$V \approx 20526,166m^3 \approx 20,526dm^3 \quad \Rightarrow \quad V_{85\%} \approx 17448,09l \approx 17,448m^3$$
$$\Rightarrow \quad \approx 12213,66\,e \quad , \quad \rho V_{85\%} \approx 13717,689kg$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.13.1).

18.10.37 Lösungen zu Kugeln

Aufgabe 1:

$a)\;\; r = 3cm \Rightarrow V \approx 113,10cm^3, O \approx 113,10cm^2$
$b)\;\; r = \pi cm \Rightarrow V \approx 129,88cm^3, O \approx 124,03cm^2$
$c)\;\; d = 4cm \Rightarrow V \approx 33,51cm^3, O \approx 50,27cm^2$
$d)\;\; d = 0,5cm \Rightarrow V \approx 0,066cm^3, O \approx 0,785cm^2$
$e)\;\; r = 2,718cm \Rightarrow V \approx 84,11cm^3, O \approx 92,83cm^2$
$f)\;\; d = \frac{6}{7}cm \Rightarrow V \approx 2,64cm^3, O \approx 9,23cm^2$

Aufgabe 2:

$a)\;\; h \approx 1,172cm \;\Rightarrow\; V \approx 39,260cm^3$ und $O \approx 259,951cm^2$
$b)\;\; h \approx 0,533cm \;\Rightarrow\; V \approx 54,683cm^3$ und $O \approx 576,416cm^2$
$c)\;\; h \approx 1,190cm \;\Rightarrow\; V \approx 27,626cm^3$ und $O \approx 171,744cm^2$
$d)\;\; h \approx 0,025cm \;\Rightarrow\; V \approx 1,096cm^3$ und $O \approx 34,660cm^2$
$e)\;\; h \approx 0,196cm \;\Rightarrow\; V \approx 0,182cm^3$ und $O \approx 1,205cm^2$
$f)\;\; h \approx 2,754cm \;\Rightarrow\; V \approx 46,150cm^3$ und $O \approx 209,513cm^2$
$g)\;\; h \approx 1,328cm \;\Rightarrow\; V \approx 8,929cm^3$ und $O \approx 44,244cm^2$
$h)\;\; h \approx 0,068cm \;\Rightarrow\; V \approx 1,055cm^3$ und $O \approx 17,205cm^2$

Aufgabe 3:

$a)\ h \approx 2,343cm \ \Rightarrow \ V \approx 124,501cm^3$ und $O \approx 218,298cm^2$

$b)\ h \approx 0,124cm \ \Rightarrow \ V \approx 0,143cm^3$ und $O \approx 4,626cm^2$

$c)\ h \approx 3,729cm \ \Rightarrow \ V \approx 213,053cm^3$ und $O \approx 243,098cm^2$

$d)\ h \approx 0,005cm \ \Rightarrow \ V \approx 0,00041cm^3$ und $O \approx 0,330cm^2$

$e)\ h \approx 0,148cm \ \Rightarrow \ V \approx 0,034cm^3$ und $O \approx 0,933cm^2$

$f)\ h \approx 0,0006cm \ \Rightarrow \ V \approx 0,00042cm^3$ und $O \approx 0,282cm^2$

$g)\ h \approx 0,145cm \ \Rightarrow \ V \approx 0,103cm^3$ und $O \approx 2,867cm^2$

$h)\ h \approx 0,413cm \ \Rightarrow \ V \approx 1,383cm^3$ und $O \approx 13,572cm^2$

Aufgabe 4:

	1	2	3	4	5	6
r	11	2,17	6,56	8,62	2,22	2,14
V	5575,28	43	1183,23	2682,94	$\frac{137}{3}$	40,89
O	760,27	29,68	541	466,87	30,89	$\frac{287}{5}$

Aufgabe 5:

$a)\ h \approx 0,675445cm \ \Rightarrow \ V \approx 9,710cm^3$ und $O \approx 57,982cm^2$

$b)\ h \approx 0,182858cm \ \Rightarrow \ V \approx 0,351cm^3$ und $O \approx 7,708cm^2$

$c)\ h \approx 0,472301cm \ \Rightarrow \ V \approx 4,879cm^3$ und $O \approx 41,557cm^2$

$d)\ h \approx 0,494712cm \ \Rightarrow \ V \approx 4,294cm^3$ und $O \approx 34,977cm^2$

$e)\ h \approx 0,121225cm \ \Rightarrow \ V \approx 0,069cm^3$ und $O \approx 2,308cm^2$

$f)\ h \approx 0,168502cm \ \Rightarrow \ V \approx 0,363cm^3$ und $O \approx 8,641cm^2$

$g)\ h \approx 0,561050cm \ \Rightarrow \ V \approx 2,922cm^3$ und $O \approx 21,160cm^2$

$h)\ h \approx 0,396848cm \ \Rightarrow \ V \approx 1,279cm^3$ und $O \approx 13,061cm^2$

Aufgabe 6:

$a)$ $h \approx 7,26867cm \;\Rightarrow\; V \approx 1024,35cm^3$ und $O \approx 619,035cm^2$

$b)$ $h \approx 9,63592cm \;\Rightarrow\; V \approx 468,494cm^3$ und $O \approx 291,711cm^2$

$c)$ $h \approx 2,53159cm \;\Rightarrow\; V \approx 32,450cm^3$ und $O \approx 57,983cm^2$

$d)$ $h \approx 1,49569cm \;\Rightarrow\; V \approx 110,071cm^3$ und $O \approx 296,712cm^2$

$e)$ $h \approx 0,047417cm \;\Rightarrow\; V \approx 0,0073cm^3$ und $O \approx 0,622cm^2$

$f)$ $h \approx 0,696109cm \;\Rightarrow\; V \approx 6,039cm^3$ und $O \approx 35,209cm^2$

$g)$ $h \approx 1,71986cm \;\Rightarrow\; V \approx 2,797cm^3$ und $O \approx 9,602cm^2$

$h)$ $h \approx 1,76901cm \;\Rightarrow\; V \approx 17,596cm^3$ und $O \approx 43,064cm^2$

Aufgabe 7:

$a)$ $h \approx 7,29689cm \;\Rightarrow\; V \approx 764,053cm^3$ und $O \approx 474,595cm^2$

$b)$ $h \approx 2,19958cm \;\Rightarrow\; V \approx 34,454cm^3$ und $O \approx 67,723cm^2$

$c)$ $h \approx 3,63908cm \;\Rightarrow\; V \approx 216,63cm^3$ und $O \approx 251,983cm^2$

$d)$ $h \approx 9,15490cm \;\Rightarrow\; V \approx 1368,75cm^3$ und $O \approx 685,808cm^2$

$e)$ $h \approx 1,96953cm \;\Rightarrow\; V \approx 11,802cm^3$ und $O \approx 28,032cm^2$

$f)$ $h \approx 4,74603cm \;\Rightarrow\; V \approx 188,276cm^3$ und $O \approx 182,269cm^2$

$g)$ $h \approx 0,639466cm \;\Rightarrow\; V \approx 2,807cm^3$ und $O \approx 17,984cm^2$

$h)$ $h \approx 5,42872cm \;\Rightarrow\; V \approx 84,134cm^3$ und $O \approx 92,853cm^2$

Aufgabe 8:

$a)$ $h \approx 0,417424cm \;\Rightarrow\; V \approx 21,856cm^3$ und $O \approx 222,648cm^2$

$b)$ $h \approx 0,343316cm \;\Rightarrow\; V \approx 10,937cm^3$ und $O \approx 109,264cm^2$

$c)$ $h \approx 0,644893cm \;\Rightarrow\; V \approx 59,192cm^3$ und $O \approx 569,959cm^2$

$d)$ $h \approx 0,208997cm \;\Rightarrow\; V \approx 19,944cm^3$ und $O \approx 298,396cm^2$

$e)$ $h \approx 0,634968cm \;\Rightarrow\; V \approx 7,240cm^3$ und $O \approx 49,088cm^2$

$f)$ $h \approx 0,222551cm \;\Rightarrow\; V \approx 8,856cm^3$ und $O \approx 108,642cm^2$

$g)$ $h \approx 0,613540cm \;\Rightarrow\; V \approx 50,730cm^3$ und $O \approx 488,055cm^2$

$h)$ $h \approx 0,677603cm \;\Rightarrow\; V \approx 77,484cm^3$ und $O \approx 762,644cm^2$

Aufgabe 9:

$a)\ h \approx 0,160584cm \ \Rightarrow\ V \approx 7,066cm^3$ und $O \approx 100,578cm^2$

$b)\ h \approx 0,580896cm \ \Rightarrow\ V \approx 12,807cm^3$ und $O \approx 99,685cm^2$

$c)\ h \approx 0,277543cm \ \Rightarrow\ V \approx 8,360cm^3$ und $O \approx 89,417cm^2$

$d)\ h \approx 19,69790cm \ \Rightarrow\ V \approx 9844,39cm^3$ und $O \approx 40666,3cm^2$

$e)\ h \approx 0,569243cm \ \Rightarrow\ V \approx 1,537cm^3$ und $O \approx 8,600cm^2$

$f)\ h \approx 4,576910cm \ \Rightarrow\ V \approx 157,828cm^3$ und $O \approx 681,644cm^2$

$g)\ h \approx 1,044630cm \ \Rightarrow\ V \approx 1,735cm^3$ und $O \approx 7,390cm^2$

$h)\ h \approx 0,298985cm \ \Rightarrow\ V \approx 0,558cm^3$ und $O \approx 3,603cm^2$

Aufgabe 10:

$a)\ h \approx 7,87813cm \ \Rightarrow\ V \approx 697,121cm^3$ und $O \approx 2934,51cm^2$

$b)\ h \approx 7,76342cm \ \Rightarrow\ V \approx 406,492cm^3$ und $O \approx 1546,75cm^2$

$c)\ h \approx 6,03177cm \ \Rightarrow\ V \approx 439,752cm^3$ und $O \approx 1964,31cm^2$

$d)\ h \approx 10,8639cm \ \Rightarrow\ V \approx 713,543cm^3$ und $O \approx 2328,89cm^2$

$e)\ h \approx 1,94706cm \ \Rightarrow\ V \approx 11,984cm^3$ und $O \approx 51,633cm^2$

$f)\ h \approx 3,85581cm \ \Rightarrow\ V \approx 250,343cm^3$ und $O \approx 1267,00cm^2$

$g)\ h \approx 2,35052cm \ \Rightarrow\ V \approx 32,388cm^3$ und $O \approx 149,991cm^2$

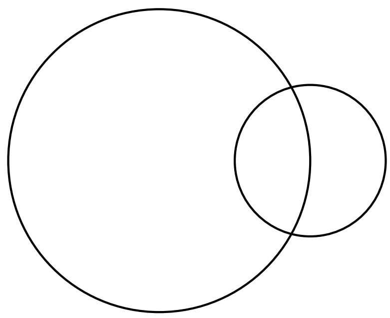
$h)\ h \approx 2,03275cm \ \Rightarrow\ V \approx 31,458cm^3$ und $O \approx 155,435cm^2$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.14.1).

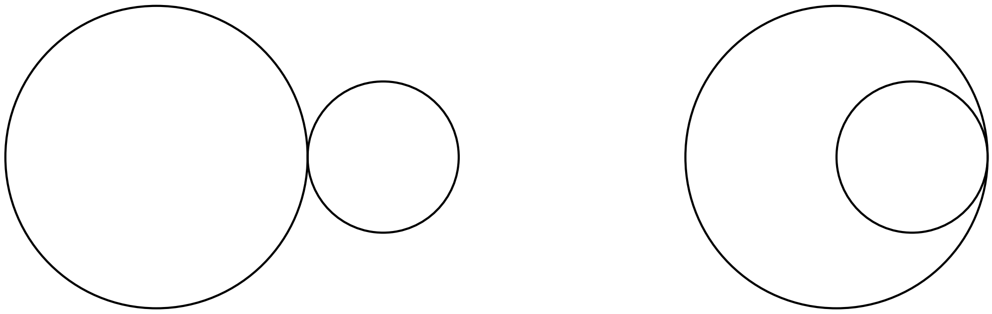
Lösungen zu Zirkelkonstruktionen

Aufgabe 1: Das Streckenverhältnis zwischen den Schnittpunkten beträgt 2:1.

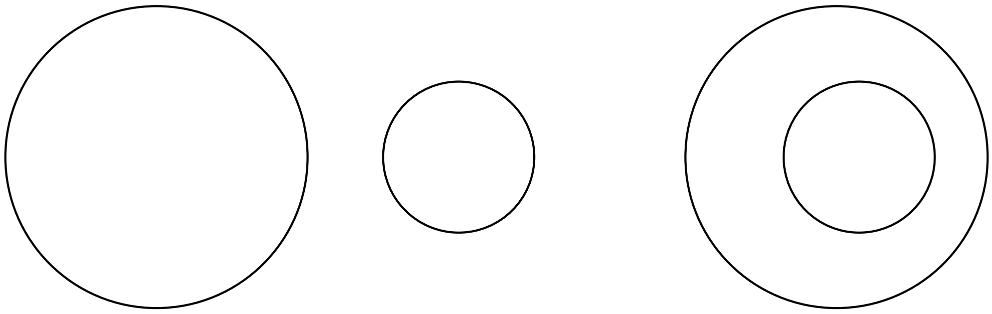
Aufgabe 4: (verkleinert)



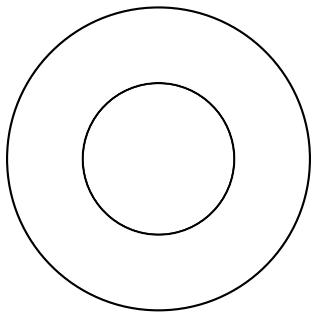
Aufgabe 5: (verkleinert)



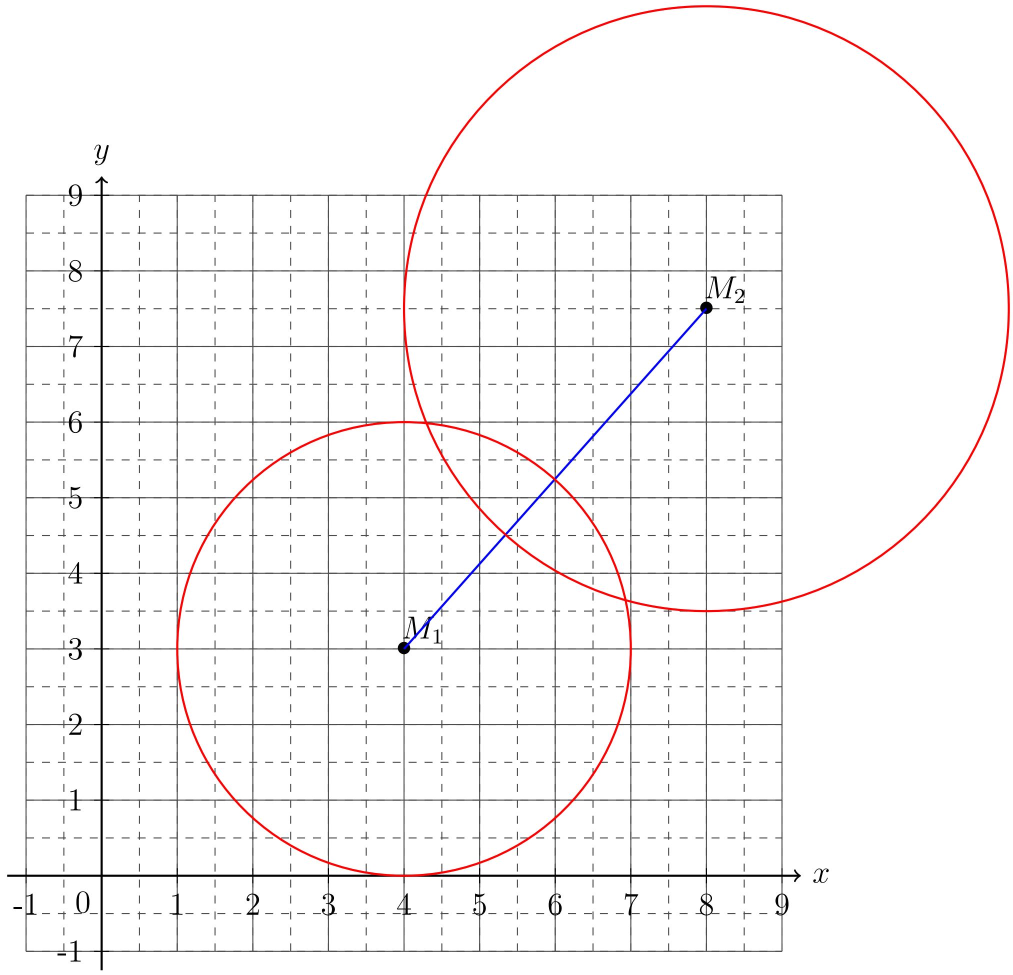
Aufgabe 6: (verkleinert)



Aufgabe 7: (verkleinert)

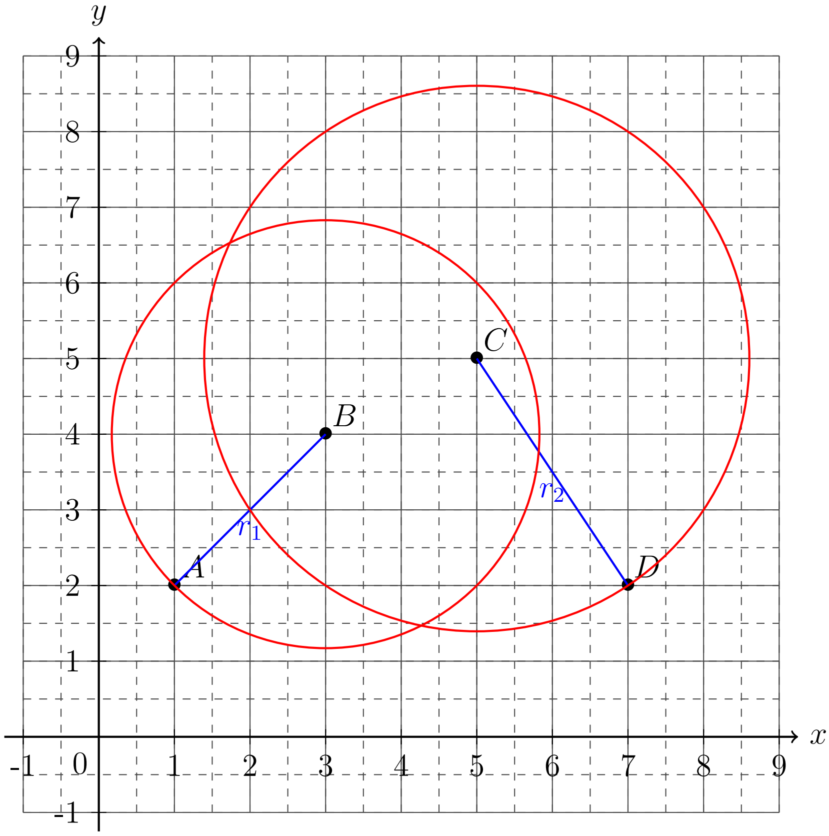


Aufgabe 8: (verkleinert)



$\overline{M_1M_2} \approx 5,315cm$ und $I_1(5|5), I_2(6|5)$

Aufgabe 9: (verkleinert)



$I_1(2|3), I_2(2|4), I_3(2|5), I_4(2|6), I_5(3|2),$
$I_6(3|3), I_7(3|4), I_8(3|5), I_9(3|6), I_{10}(4|2), I_{11}(4|3),$
$I_{12}(4|4), I_{13}(4|5), I_{14}(4|6), I_{15}(5|2), I_{16}(5|3), I_{17}(5|4), I_{18}(5|5), I_{19}(5|6)$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.16.1).

18.10.38 Lösungen zu den gemischten Geometrieaufgaben

Aufgabe 1:

$a)\ c_\Delta \approx 20,445cm\ \ ,\ \ A_\Delta \approx 99,318cm^2$

$b)\ c_\Delta \approx 22,780cm\ \ ,\ \ A_\Delta \approx 122,988cm^2$

$c)\ c_\Delta \approx 33,340cm\ \ ,\ \ A_\Delta \approx 276,479cm^2$

Aufgabe 2:

$a)\ V = 54cm^3$

$b)\ V \approx 135,974cm^3$

$c)\ V \approx 146,351cm^3$

Aufgabe 3:

$a)\ V \approx 130,271cm^3$

$b)\ V \approx 206,681cm^3$

$c)\ V \approx 327,932cm^3$

Aufgabe 4:

$a = 14\sqrt{2}\ \ ,\ \ m \approx 175,093kg$

Aufgabe 5:

$r \approx 4,750cm$

Aufgabe 6:

$$r = \frac{45}{16} cm = 2,8125 cm$$

Aufgabe 7:

$$\frac{12V_K}{V_\square} \approx \frac{2155,13 cm^3}{4116 cm^3} \approx 47,640 \quad , \quad O_\square = 1372 cm^2$$

Aufgabe 8:

a) $a_P = 4,5 \quad , \quad h_b \approx 3,994cm \quad , \quad h_a \approx 3,912cm \quad , \quad O \approx 60,699cm^2 \quad , \quad V = 34,65cm^3$

b) $a_P = 2,1 \quad , \quad h \approx 3,860cm \quad , \quad h_a \approx 4,545cm \quad , \quad O \approx 63,957cm^2 \quad , \quad V \approx 42,611cm^3$

c) $a \approx 8,545 \quad , \quad a_P = 3,425 \quad , \quad h_b \approx 7,041cm \quad , \quad h \approx 6,830cm \quad , \quad h_a \approx 7,065cm \quad ,$
$O \approx 104,695cm^2 \quad , \quad V \approx 91,516cm^3$

Aufgabe 9:

a) $c_\Delta \approx 6,004cm \quad , \quad A_\Delta \approx 7,925cm^2$

b) $h \approx 3,197cm \quad , \quad c_\Delta \approx 6,343cm \quad , \quad A_\Delta \approx 10,139cm^2$

c) $a \approx 7,550cm \quad , \quad h \approx 7,835cm \quad , \quad c_\Delta \approx 7,762cm \quad , \quad A_\Delta \approx 30,409cm^2$

Aufgabe 10:

a) $A \approx 19,448cm^2$

b) $h \approx 3,363cm \quad , \quad A \approx 21,823cm^2$

c) $a \approx 8,124cm \quad , \quad h \approx 7,526cm \quad , \quad A \approx 44,115cm^2$

Aufgabe 11:

$V_Z \approx 452,389cm^3 \quad , \quad 2V_K \approx 201,868cm^3 \quad \Rightarrow \quad V = V_Z - 2V_K \approx 250,521$

Aufgabe 12:

$V_Z \approx 997,456cm^3 \quad , \quad V_K \approx 381,704cm^3 \quad \Rightarrow \quad V = V_Z - V_K \approx 615,752$

Aufgabe 13:

$a) \ \ d \approx 7,212cm \quad , \quad h_P \approx 2,249cm \quad , \quad V \approx 366,625cm^3$

$b) \ \ d \approx 6,440cm \quad , \quad h_P \approx 8,853cm \quad , \quad V \approx 766,463cm^3$

$c) \ \ d \approx 4,243cm \quad , \quad h_P \approx 1,265cm \quad , \quad V \approx 72,537cm^3$

Aufgabe 14:

$$a_O = \frac{1}{\sqrt{2}} a_W \approx 5,070cm \quad , \quad V_O = \frac{\sqrt{2}}{3} a_O^3 \approx 61,434cm$$

Aufgabe 15:

$a) \ \ V = Gh = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} r^2 h \approx 181,865cm^3 \quad , \quad O \approx 151,548cm^2$

$b) \ \ V \approx 42,754cm^3 \quad , \quad O \approx 57,455cm^2$

$c) \ \ V \approx 502,988cm^3 \quad , \quad O \approx 289,792cm^2$

$d) \ \ V \approx 636,659cm^3 \quad , \quad O \approx 335,969cm^2$

Aufgabe 16:

$a) \ \ V = \dfrac{1}{3} Gh = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r^2 h \approx 41,569cm^3 \quad , \quad O \approx 14,556cm^2$

$b) \ \ V \approx 48,324cm^3 \quad , \quad O \approx 24,280cm^2$

$c) \ \ V \approx 38,909cm^3 \quad , \quad O \approx 20,643cm^2$

$d) \ \ V \approx 37,050cm^3 \quad , \quad O \approx 149,992cm^2$

Aufgabe 17:

$a)$

$b)$

$c)$

$d)$

Aufgabe 18:

$a)\ \ V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 s \approx 226,195 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 188,496 cm^2$

$b)\ \ V \approx 1050,884 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 506,676 cm^2$

$c)\ \ V \approx 160,695 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 151,927 cm^2$

$d)\ \ V \approx 154,115 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 158,408 cm^2$

Aufgabe 19:

$a)\ \ V = \frac{4}{3}\pi r_K^3 + \pi r_Z^2 s \approx 431,969 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 406,836 cm^2$

$b)\ \ V \approx 333,219 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 263,425 cm^2$

$c)\ \ V \approx 147,355 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 216,424 cm^2$

Aufgabe 20:

$a)\ \ V \approx 27,528 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 57,747 cm^2$

$b)\ \ V \approx 51,202 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 101,370 cm^2$

$c)\ \ V \approx 614,316 cm^3 \ \ , \ \ O \approx 518,087 cm^2$

Aufgabe 21:

$a)$

$b)$

$c)$

Aufgabe 22:

$a)$

$b)$

$c)$

Aufgabe 23:

$a)$

$b)$

$c)$

Aufgabe 24:

Aufgabe 25:

$a)$ 25	$b)$ 61	$c)$ 26	$d)$ 41
$e)$ 20	$f)$ 26	$g)$ 53	$h)$ 39
$i)$ 40	$j)$ 31	$k)$ 48	$l)$ 37

Aufgabe 26:

$$\rho = \frac{m}{V} \approx 3,052 \frac{g}{cm^3}$$

Aufgabe 27:

$m = V\rho = \pi r^2 h\rho \approx 675,455g$

Aufgabe 28:

$$V_W = a^3 \;\Rightarrow\; a = \sqrt[3]{V_W} = 6,25cm = d_Z = h_Z = 2r_Z$$
$$\Rightarrow\; V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3 \;\Rightarrow\; m = 2\pi r^3\rho \approx 1,510kg$$

Aufgabe 29:

$m = 0,66V\rho = 0,66lbh\rho \approx 178,886g$

Aufgabe 30:

$$V = \frac{m}{\rho} \approx 1947,566cm^3$$

Aufgabe 31:

$m = V\rho = \pi r^2 h\rho \approx 1035,018kg$

Aufgabe 32:

$$V_Z = \pi r^2 h \approx 180,642cm^3 \;\Rightarrow\; \frac{m}{V_Z \cdot 0,85} \approx 3,256\frac{g}{cm^3}$$

Aufgabe 33:

$$\frac{V}{h} = G = \pi r^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{V}{\pi h}} = r \approx 2,130cm$$

Aufgabe 34:

Ecken: 22 , Kanten: 33 , Flächen: 13

Aufgabe 35:

$$V = Gh = 10,29l$$

Aufgabe 36:

$$r = \frac{U}{2\pi} \Rightarrow O = 2G + M = 2\pi r^2 + Uh \approx 23,191dm^3$$

Aufgabe 37:

$$\frac{9l}{V} = 98,5\bar{2}\%$$

Aufgabe 38:

$$a)\;\; O = 2G + M = 2\frac{ab}{2} + Uh = 103,2cm^2 \;\;,$$
$$V = Gh = \frac{ab}{2}h = 45,6cm^3$$
$$b)\;\; O = 2G + M = 2\frac{h_\delta c}{2} + Uh = 137,6cm^2 \;\;,$$
$$V = Gh = \frac{h_\Delta c}{2}h = 85,2cm^3$$

Aufgabe 39:

$$a)\;\; O = 2G + M = 2\frac{a+c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} + Uh \approx 167,795cm^2 \;\;,$$
$$V = Gh = \frac{a+c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)}h \approx 113,008cm^3$$
$$b)\;\; O = 2G + M = 2\frac{a+c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} + Uh \approx 270,253cm^2 \;\;,$$
$$V = Gh = \frac{a+c}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)}h \approx 102,217cm^3$$

Aufgabe 40:

$$a)\;\; O = 2G + M = 2ah_R + 4ah = 243,78cm^2 \;\;,\;\; V = Gh = 173,349cm^3$$
$$b)\;\; O = 2G + M = 2ah_P + 2ah + 2bh = 148,36cm^2 \;\;,\;\; V = Gh = 69,36cm^3$$

Aufgabe 41:

$$a)\;\; O = 2G + M = 2\frac{c\sqrt{\frac{c^2}{4} + a^2}}{2} + Uh \approx 117,273cm^2 \;\;,\;\; V = Gh \approx 134,951cm^3$$
$$b)\;\; O = 2G + M = 2\frac{c\sqrt{\frac{c^2}{4} + a^2}}{2} + (2a+c)h + 2bh \approx 86,452cm^2 \;\;,\;\; V = Gh \approx 62,776cm^3$$

Aufgabe 42:

$$a)\ \ O = 2G + M = 2 \cdot 2\frac{d\sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}}}{2} + 4ah \approx 107,152cm^2 \ \ , \ \ V = Gh \approx 75,088cm^3$$

$$b)\ \ O = 2G + M = 2\frac{ef}{2} + 4\sqrt{\frac{e^2}{4} + \frac{d^2}{4}}h \approx 143,451cm^2 \ \ , \ \ V = Gh \approx 103,716cm^3$$

Aufgabe 43:

$$a)\ \ O = 2G + M = 2\left(ab + \frac{a\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}\right) + Uh \approx 781,485m^2 \ \ ,$$

$$V = Gh \approx 1237,797m^3$$

$$b)\ \ O = 2G + M = 2\left(ab + \frac{a\sqrt{c^2 - \frac{a^2}{4}}}{2}\right) + Uh \approx 541,195cm^2 \ \ ,$$

$$V = Gh \approx 655,146cm^3$$

Aufgabe 44:

$a)\ \ O = 115,92cm^2 \ \ , \ \ V = 68,796cm^3$ $\qquad$ $b)\ \ O = 76,22cm^2 \ \ , \ \ V = 36,465cm^3$

$c)\ \ O = 188,22cm^2 \ \ , \ \ V = 154,836cm^3$

Aufgabe 45:

$a)\ \ O \approx 163,803cm^2 \ \ , \ \ V \approx 157,375cm^3$ $\qquad$ $b)\ \ O \approx 99,537cm^2 \ \ , \ \ V \approx 75,613cm^3$

$c)\ \ O \approx 35,288cm^2 \ \ , \ \ V \approx 11,883cm^3$

Aufgabe 46:

$a)\ \ O \approx 137,191cm^2 \ \ , \ \ V \approx 77,091cm^3$ $\qquad$ $b)\ \ O \approx 74,923cm^2 \ \ , \ \ V \approx 33,498cm^3$

Aufgabe 47:

$a)\ O \approx 81,901cm^2\ \ ,\ \ V \approx 40,334cm^3$ $b)\ O \approx 79,248cm^2\ \ ,\ \ V \approx 35,596cm^3$

Aufgabe 48:

$a)\ O \approx 780,160cm^2\ \ ,\ \ V = 1114,818cm^3$ $b)\ O \approx 687,441cm^2\ \ ,\ \ V = 925,68cm^3$

Aufgabe 49:

$a)\ O = 155,16cm^2\ \ ,\ \ V = 147,619cm^3$ $b)\ O = 234,1708cm^2\ \ ,\ \ V = 395,81388cm^3$
$c)\ O = 188,8648cm^2\ \ ,\ \ V = 276,21664cm^3$

Aufgabe 50:

$a)\ O = 40651cm^2\ \ ,\ \ V = 40770cm^3$ $b)\ O = 104604cm^2\ \ ,\ \ V = 105984cm^3$

Aufgabe 51:

$a)\ O = 30961,6cm^2\ \ ,\ \ V = 27753cm^3$ $b)\ O = 46629,2cm^2\ \ ,\ \ V = 43929,9cm^3$

Aufgabe 52:

$a)\ O \approx 1646,7m^2\ \ ,\ \ V = 2132,55m^3$ $b)\ O \approx 11752,1m^2\ \ ,\ \ V = 19246,7m^3$

Aufgabe 53:

$a)\ O \approx 429,826cm^2\ \ ,\ \ V = 652,982cm^3$ $b)\ O \approx 250,316cm^2\ \ ,\ \ V = 244,339cm^3$

Aufgabe 54:

$a)\ \ O \approx 58,417cm^2\ \ ,\ \ V = 19,712cm^3$ $\qquad b)\ \ O \approx 42,001cm^2\ \ ,\ \ V = 3,804cm^3$

Aufgabe 55: $d \approx 5,391cm \ \Rightarrow\ h \approx 7,744cm \ \Rightarrow\ V \approx 37,044cm^3 \ \Rightarrow\ m \approx 166,697g$

Aufgabe 56: $h = 4cm \ \Rightarrow\ O \approx 75,398cm^2$

Aufgabe 57: $V \approx 26,522cm^3 \ \wedge\ O \approx 43,008cm^2$

Aufgabe 58: Es muss sich um einen Würfel handeln, das bedeutet, dass die Oberfläche minimiert wird.
$V_K \approx 53,384cm^3 \ \Rightarrow\ r = a \approx 2,336cm \ \Rightarrow\ V_W \approx 12,745cm^3$

Aufgabe 59: 1. Szenario: $r = 3,35cm \ \Rightarrow\ V_P \approx 175,071cm^3 \ \Rightarrow\ V_K \approx 137,500cm^3 \ \Rightarrow \approx 21,46\%$ Verschnitt
2. Szenario: $a \approx 4,738cm \ \Rightarrow\ V_K \approx 550,002cm^3 \ \Rightarrow\ V_P \approx 87,536cm^3 \ \Rightarrow \approx 84,08\%$ Verschnitt
$\Rightarrow\ 1 : 3,918$

Aufgabe 60: $r = 2,1cm \ \Rightarrow\ h_K = 7,1cm \ \Rightarrow\ V \approx 52,185cm^3 \ \Rightarrow\ O \approx 56,077cm^2$

Aufgabe 61: 1. Szenario: $V_Q = 5a^3 \approx 383,828cm^3 \ \Rightarrow\ V_P \approx 127,943 \ \Rightarrow\ 66,\bar{6}\%$ Luft
$\Rightarrow\ O_Q = 216,75cm^2$
2. Szenario: $V_Q = 3a^3 \approx 230,297cm^3 \ \Rightarrow\ V_P \approx 127,943 \ \Rightarrow\ 40\%$ Luft $\ \Rightarrow\ O_Q = 144,5cm^2$

Aufgabe 62:

$a)\ \ f \perp g \qquad b)\ \ f||g \qquad c)\ \ f||g \qquad d)\ \ g \perp f$

Aufgabe 63:

$a)\ \ 5r + 2s \qquad b)\ \ 2n + 2u + 2t \qquad c)\ \ 3x + 4r + k$
$d)\ \ z + p + 3r + 6s \qquad d)\ \ p + z + 4h \qquad d)\ \ 7h + q + 2k$

Aufgabe 64:

Die Anzahl der Flächen nach oben mal der Anzahl der Flächen zur Seite.

$a)$ $A = 15$ $b)$ $A = 16$ $c)$ $A = 28$
$d)$ $A = 45$ $e)$ $A = 60$ $f)$ $A = 48$

Aufgabe 65:

Die Anzahl der Flächen nach oben mal der Anzahl der Flächen zur Seite ist gleich die Gesamtanzahl der Flächen.
Die Anzahl der Strecken zur Seite addiert mit der Anzahl der Strecken nach oben. Die Summe mit zwei multipliziert, ergibt die Gesamtanzahl der Strecken.

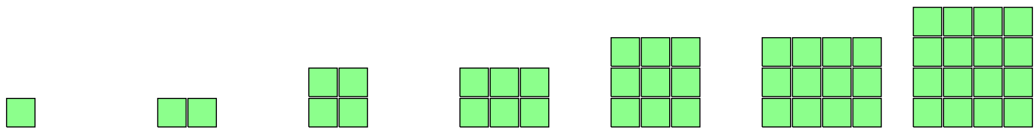
$a)$ $A = 8 \wedge U = 12$ $b)$ $A = 15 \wedge U = 16$ $c)$ $A = 30 \wedge U = 22$
$d)$ $A = 15 \wedge U = 16$ $e)$ $A = 42 \wedge U = 26$ $f)$ $A = 72 \wedge U = 34$

Aufgabe 66:

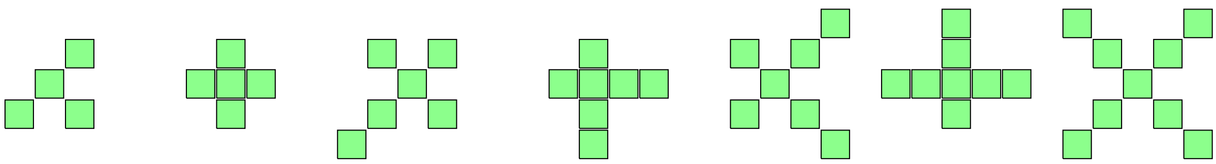
Die Anzahl der Würfel nach oben mal der Anzahl der Würfel zur Seite mal der Anzahl der Würfel nach hinten ist gleich die Gesamtanzahl der Würfel.

$a)$ $V = 8$ $b)$ $V = 27$ $c)$ $V = 64$ $d)$ $V = 125$
$e)$ $V = 24$ $f)$ $V = 72$ $g)$ $V = 40$ $h)$ $V = 168$

Aufgabe 67: *Beschreibe das Muster der Folge. Bestimme wie viele Flächen jeweils bei den nächsten drei Schritten gezeichnet werden müssten und zeichne den nächsten Schritt.*

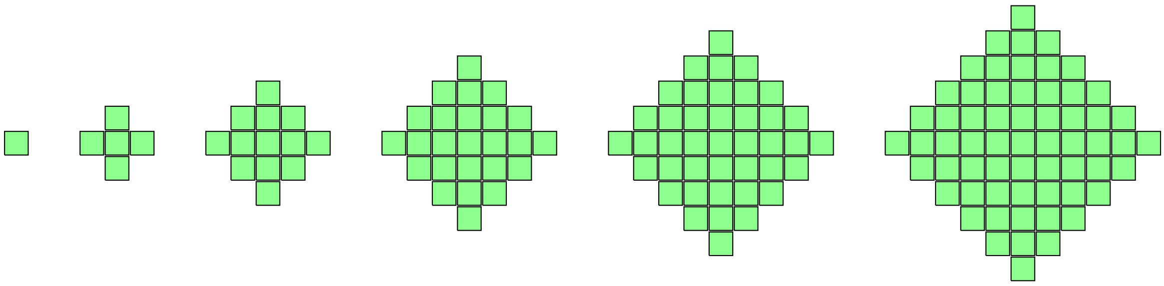
$a)$


1 2 4 6 9 12 16 20 25

$b)$


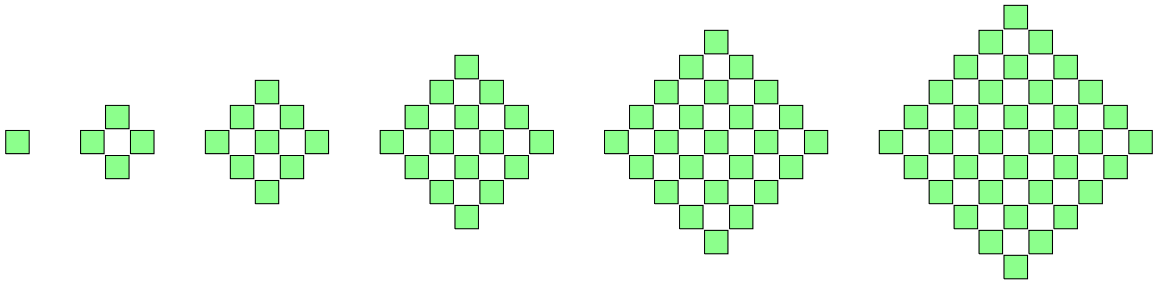
4 5 6 7 8 9 10 11 12

c)



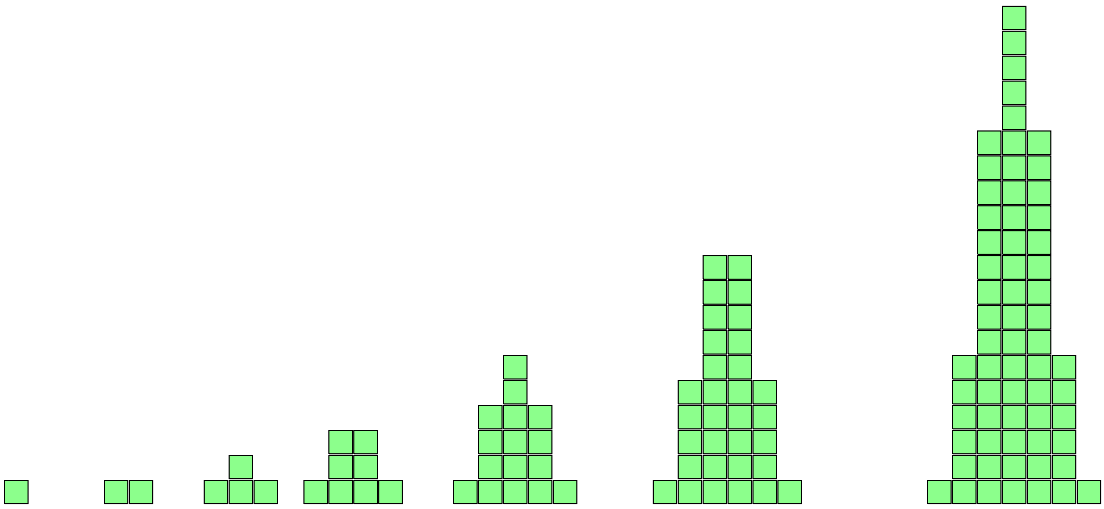
1 5 13 25 41 61 75 93

d)



1 4 9 16 25 36 49 64

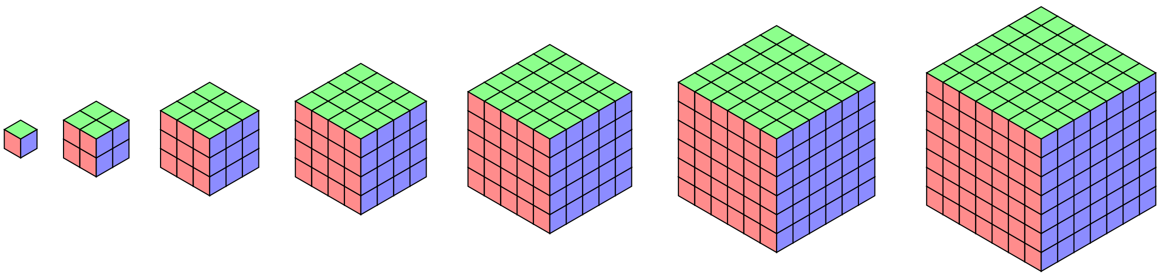
e)



1 2 4 16 32 64 128 256

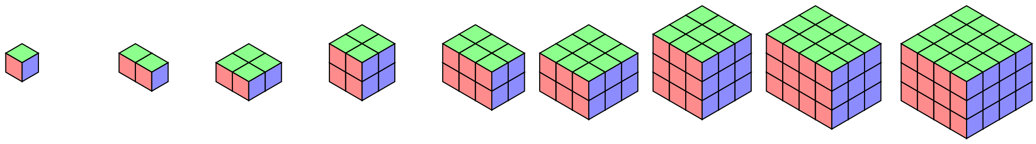
Aufgabe 68: *Beschreibe das Muster der Folge. Bestimme wie viele Würfel jeweils bei den nächsten drei Schritten gezeichnet werden müssten und zeichne den nächsten Schritt.*

a)



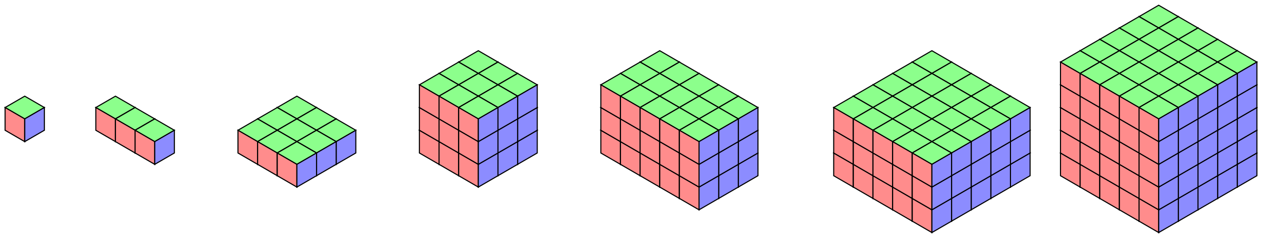
1 8 27 64 125 216 343 512 729

b)



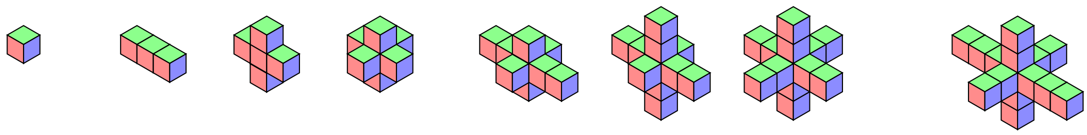
1 2 4 8 12 18 27 36 48 64 80

c)



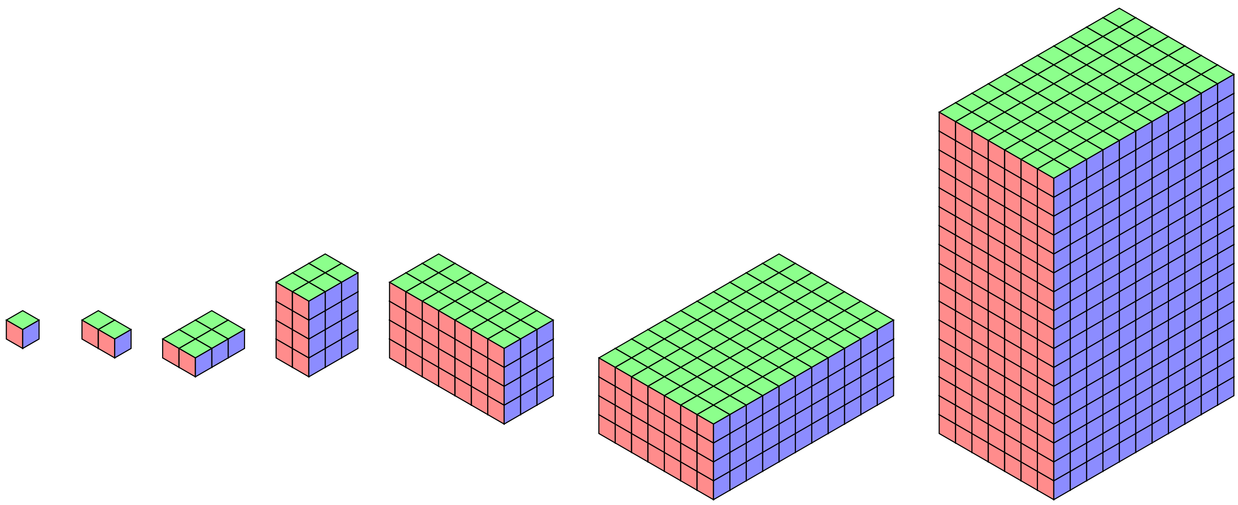
1 3 9 27 45 75 125 175 210

d)



1 3 5 7 9 11 13 15 17 19

e)

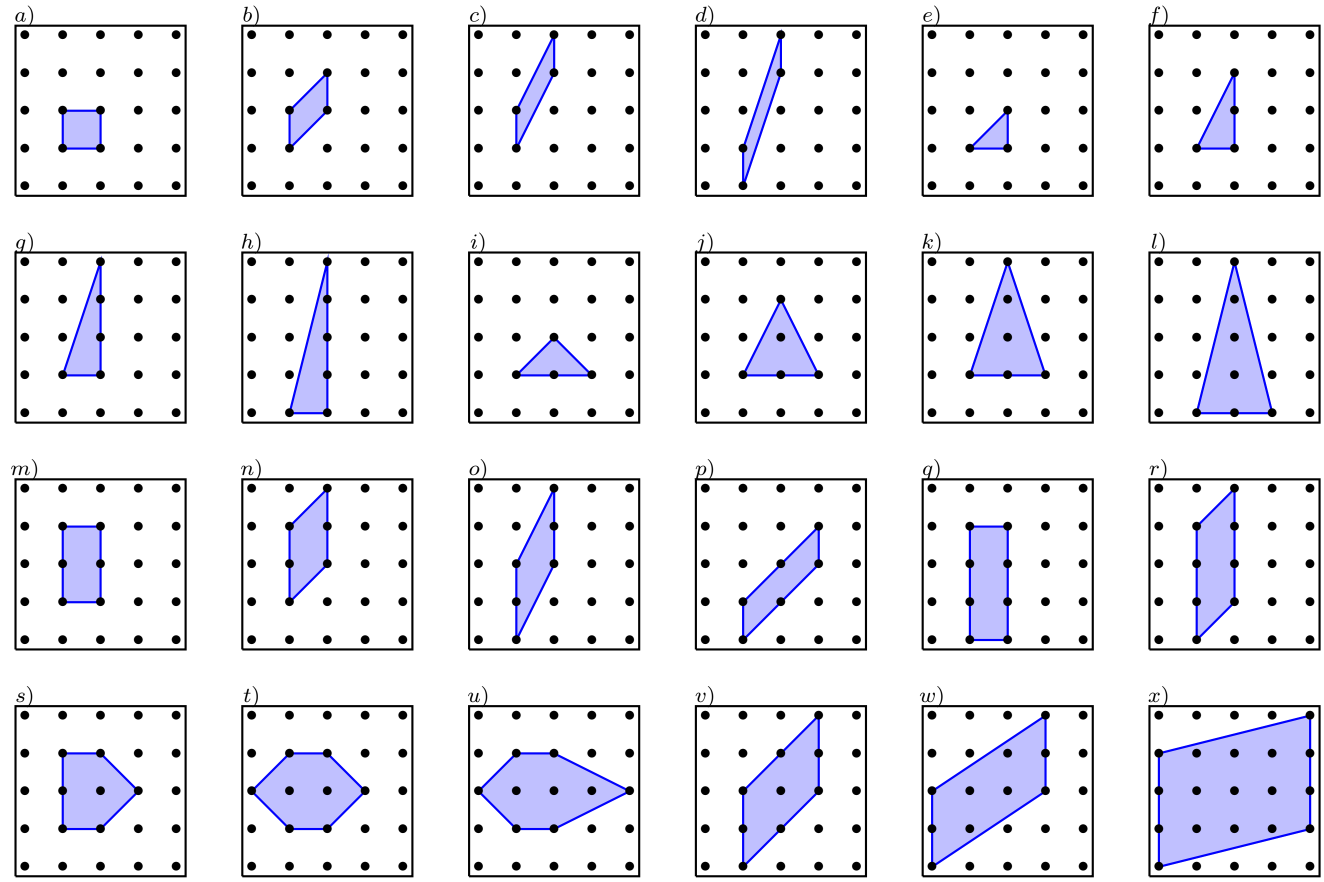


$28 \cdot 17 \cdot 11$ - Quader müsste im zweiten Extraschritt ergänzt werden.

$28 \cdot 17 \cdot 41$ - Quader müsste im dritten Extraschritt ergänzt werden.

1 2 6 24 84 308 1039 5236 21420

Aufgabe 69: *Bestimme den Flächeninhalt (Angaben in* cm^2*) von jeder Figur. Bestimme die Randpunkte R und die Innenpunkte I. Leite anschließend bestimmten Informationen eine allgemeine Gleichung her für den Wert des Flächeninhalts A her.*



	a)	b)	c)	d)	e)	f)
	$A = 1\text{cm}^2$	$A = 1\text{cm}^2$	$A = 1\text{cm}^2$	$A = 1\text{cm}^2$	$A = 0,5\text{cm}^2$	$A = 1\text{cm}^2$
	$R = 4$	$R = 4$	$R = 4$	$R = 4$	$R = 3$	$R = 4$
	$I = 0$	$I = 0$	$I = 0$	$I = 0$	$I = 0$	$I = 0$

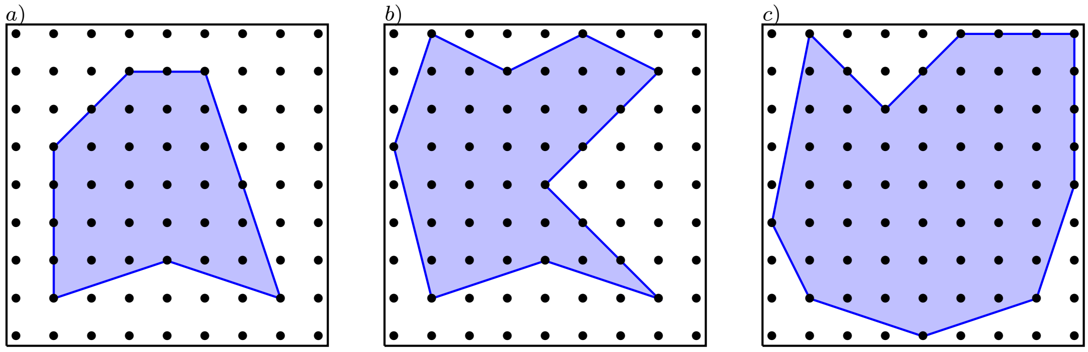
	g)	h)	i)	j)	k)	l)
	$A = 1,5\text{cm}^2$	$A = 2\text{cm}^2$	$A = 1\text{cm}^2$	$A = 2\text{cm}^2$	$A = 3\text{cm}^2$	$A = 4\text{cm}^2$
	$R = 5$	$R = 6$	$R = 4$	$R = 4$	$R = 4$	$R = 4$
	$I = 0$	$I = 0$	$I = 0$	$I = 1$	$I = 3$	$I = 4$

	m)	n)	o)	p)	q)	r)
	$A = 2\text{cm}^2$	$A = 2\text{cm}^2$	$A = 2\text{cm}^2$	$A = 2\text{cm}^2$	$A = 3\text{cm}^2$	$A = 3\text{cm}^2$
	$R = 6$	$R = 6$	$R = 6$	$R = 6$	$R = 8$	$R = 8$
	$I = 0$	$I = 0$	$I = 0$	$I = 0$	$I = 0$	$I = 0$

	s)	t)	u)	v)	w)	x)
	$A = 3\text{cm}^2$	$A = 4\text{cm}^2$	$A = 5\text{cm}^2$	$A = 4\text{cm}^2$	$A = 6\text{cm}^2$	$A = 12\text{cm}^2$
	$R = 6$	$R = 6$	$R = 6$	$R = 8$	$R = 6$	$R = 8$
	$I = 1$	$I = 2$	$I = 3$	$I = 1$	$I = 4$	$I = 9$

Betrachtet werden die Innenpunkte I und die Randpunkt R, sodass daraus der Satz von Pick abgeleitet werden kann: $A\,[\text{cm}^2] = I + \frac{R}{2} - 1$.

Aufgabe 70: *Bestimme den Flächeninhalt (Angaben in* cm^2*) von jeder Figur. Benutze die* *hergeleitete Gleichung aus Aufgabe 69.*



Betrachtet werden die Innenpunkte I und die Randpunkt R, sodass daraus der Satz von Pick abgeleitet werden kann: $A\,[\mathrm{cm}^2] = I + \dfrac{R}{2} - 1$.

	$A = 25\mathrm{cm}^2$		$A = 30,5\mathrm{cm}^2$		$A = 50\mathrm{cm}^2$
a)	$R = 12$	*b)*	$R = 13$	*c)*	$R = 16$
	$I = 20$		$I = 25$		$I = 43$

Aufgabe 71:

a) 1 1 1 1
b) 6 7 8 9
c) 21 28 36 45
d) 36 49 64 81

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (4.17).

Lösungen zur Trigonometrie

Aufgabe 1:

$a)$	$a = 7cm$	und $c = 11cm$:	$\Rightarrow b \approx 8,49cm,$	$\alpha \approx 39,52°,$	$\beta \approx 50,48°$
$b)$	$a = 4cm$	und $b = 6cm$:	$\Rightarrow c \approx 7,21cm,$	$\alpha \approx 33,69°,$	$\beta \approx 56,31°$
$c)$	$\alpha = 55°$	und $c = 9cm$:	$\Rightarrow a \approx 7,37cm,$	$b \approx 5,16cm,$	$\beta \approx 35°$
$d)$	$a = 5,35cm$	und $\beta = 18°$:	$\Rightarrow b \approx 1,74cm,$	$\alpha \approx 72°,$	$c \approx 5,63cm$
$e)$	$b = 14cm$	und $\beta = 81°$:	$\Rightarrow c \approx 14,18cm,$	$a \approx 2,22cm,$	$\beta \approx 9°$
$f)$	$a = \pi cm$	und $\alpha = 27,18°$:	$\Rightarrow b \approx 6,12cm,$	$c \approx 6,88cm,$	$\beta \approx 62,82°$
$g)$	$c = \sqrt{60}cm$	und $\beta = \frac{1}{3}\pi\text{rad}$:	$\Rightarrow b \approx 6,71cm,$	$a \approx 3,87cm,$	$\alpha \approx 30°$
$h)$	$c = \frac{83}{17}cm$	und $\alpha = \frac{1}{7}\pi\text{rad}$:	$\Rightarrow b \approx 2,12cm,$	$a \approx 4,40cm,$	$\beta \approx 64,29°$

Aufgabe 2:

$a)$	$c \approx 5,292cm$	$\beta \approx 79,107°$	$\alpha \approx 40,893°$
$b)$	$b \approx 4,762cm$	$\alpha \approx 76,046°$	$\gamma \approx 69,954°$
$c)$	$a \approx 9,145cm$	$\beta \approx 74,610°$	$\gamma \approx 33,391°$
$d)$	$c \approx 0,999cm$	$\beta \approx 144,436°$	$\alpha \approx 31,564°$
$e)$	$a \approx 7,119cm$	$c \approx 5,429cm$	$\alpha = 112°$
$f)$	$a \approx 3,636cm$	$b \approx 4,006cm$	$\beta = 98°$
$g)$	$b \approx 40,602km$	$c \approx 40,403km$	$\gamma = 46,7°$
$h)$	$a \approx 3,125$	$b \approx 2,465$	$\alpha = 49,1°$

Aufgabe 3:

$c \approx 6,929cm$	$\psi = 60°$	$a \approx 3,464cm$
$z \approx 5,895cm$	$\chi \approx 45,96°$	$\xi \approx 44,04°$
$f \approx 8,238cm$	$\epsilon = 28°$	$e \approx 4,380cm$
$g \approx 7,742cm$	$\theta \approx 35,538°$	$\nu \approx 54,462°$
$r \approx 9,641cm$	$s \approx 5,802cm$	$\tau = 37°$
$j \approx 1,075cm$	$l \approx 5,057cm$	$\sigma = 78°$
$q \approx 6,271cm$	$p \approx 16,338cm$	$\eta = 69°$
$w \approx 6,132cm$	$\phi \approx 43,07°$	$\rho \approx 46,93°$
$a \approx 2,932cm$	$\lambda \approx 22,45°$	$\kappa \approx 67,55°$

Aufgabe 4:

$x \approx 13,465km$ $h \approx 8,611km$

Aufgabe 5:

$l \approx 181,238m$ Neigung: $\approx 4,98\%$

Aufgabe 6:

$\alpha \approx 16,346°$ $\beta \approx 50,027°$

Aufgabe 7:

$a)$ $a \approx 18,463m$ $b)$ $g \approx 35,000m$

$c)$ $h \approx 30,001m$ $d)$ Seillänge $\approx 174,479m$

$e)$ $h_{\text{neu}} \approx 38,501m$

Aufgabe 8:

$a)$ $l_1 \approx 8,000m$ $l_2 \approx 5,333m$

$b)$ Aktionsradius $\approx 13,040m$ $c)$ maximale Höhe $\approx 24,560m$

$d)$ Seillänge $\approx 28,881m$ $e)$ minimaler Abstand $\approx 4,324m$

Aufgabe 9:

$a)$ $l \approx 20,928m$ $b)$ $m \approx 20681,65kg$

$c)$ $\phi \approx 34,987°$

$d)$ $\chi \approx 24,166°$ Höhe des Brückenendes $\approx 17,282m$

Aufgabe 10:

$a)$ $\overline{GM} \approx 8,005km$ $\overline{GP} \approx 19,814km$

$b)$ $\overline{GM} \approx 29,611km$ $c)$ $\overline{AG} \approx 39,554km$

$d)$ $\overline{PB} \approx 27,488km$ $e)$ Zeit $\approx 4,879$Tage

Aufgabe 11:

$a)$ $\overline{BC} \approx 1203,619m$

$b)$ $\overline{AC} \approx 1203,619m$ $\overline{AB} \approx 1380,735m$

$c)$ $h_{\overline{AB}} \approx 985,947m$ $h_{\overline{CB}} = h_{\overline{AC}} \approx 1131,032m$

$d)$ $h_{\overline{AB},C} \approx 502,546m$ $h_{\overline{CB},A} = h_{\overline{AC},B} \approx 842,783m$

Aufgabe 12:

Aufgabe 13: $\overline{DC} \approx 41,486m$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.0.1).

Behauptung	wahr	falsch
Man kann die Kosinusfunktion durch die Sinusfunktion ausdrücken.	x	
Gegenkathete durch Hypotenuse ist gleich der Kosinus des Winkels.		x
Der Tangens ist der invertierte Kotangens.	x	
Der Sinus von 180° ist gleich 1.		x
Der minimale Funktionswert vom Kosinus ist 0.		x
Tangens ist der Quotient aus Sinus und Kosinus.	x	
Der Kosinus ist um der 90° verschobene Sinus.	x	
Da der Tangens von 90° nicht definiert ist, ist auch der Kotangens von 90° nicht definiert.		x
$\cos(180°) = \cos(\pi rad)$.	x	
$\sin^{-1}(\sin(x)) = \arcsin(\sin(x)) = x$	x	
Der Kosinus wiederholt sich nach $4\pi rad$.		x

18.10.39 Lösungen zu den gemischten Trigonometrieaufgaben

Aufgabe 1:

	1	2	3	4	5	6
a	2	4	6	4,7	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$
b	3	6	9	7,05	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{20}$
c	$\approx 3{,}606$	$\approx 7{,}211$	$\approx 10{,}817$	$\approx 8{,}473$	$\approx 0{,}901$	$\approx 0{,}541$
$\frac{a}{b}$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$	$\approx 0{,}667$
$\frac{b}{a}$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$	$\approx 1{,}5$
$\frac{a}{c}$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$	$\approx 0{,}555$
$\frac{b}{c}$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$	$\approx 0{,}832$

Aufgabe 2:

	1	2	3	4	5	6
α in [°]	5	11	30	45	60	90
α in $[rad]$	$\approx 0{,}087$	$\approx 0{,}192$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	$\approx 0{,}087$	$\approx 0{,}191$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	$\approx 0{,}996$	$\approx 0{,}982$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	$\approx 0{,}087$	$\approx 0{,}194$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\cot\alpha$	$\approx 11{,}430$	$\approx 5{,}145$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

	1	2	3	4	5	6
α in [°]	120	135	210	240	300	315
α in $[rad]$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\tan\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1
$\cot\alpha$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1

Aufgabe 3:

	1	2	3	4	5	6
a	4	7	3,4	5,35	$\frac{7}{3}$	$\sqrt{10}$
b	5	9	7,2	8,31	$\frac{8}{5}$	$\sqrt{15}$
c	$\approx 6{,}40$	$\approx 11{,}40$	$\approx 7{,}96$	$\approx 9{,}88$	$\approx 2{,}83$	5
$\alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$ in [°]	$\approx 38{,}66$	$\approx 37{,}88$	$\approx 25{,}28$	$\approx 32{,}77$	$\approx 55{,}56$	$\approx 39{,}23$
$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right)$ in [°]	$\approx 38{,}66$	$\approx 37{,}88$	$\approx 25{,}28$	$\approx 32{,}77$	$\approx 55{,}56$	$\approx 39{,}23$
$\alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right)$ in [°]	$\approx 38{,}66$	$\approx 37{,}88$	$\approx 25{,}28$	$\approx 32{,}77$	$\approx 55{,}56$	$\approx 39{,}23$
$\beta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ in [°]	$\approx 51{,}34$	$\approx 52{,}12$	$\approx 64{,}72$	$\approx 57{,}23$	$\approx 34{,}44$	$\approx 50{,}77$
$\beta = \arcsin\left(\frac{b}{c}\right)$ in [°]	$\approx 51{,}34$	$\approx 52{,}12$	$\approx 64{,}72$	$\approx 57{,}23$	$\approx 34{,}44$	$\approx 50{,}77$
$\beta = \arccos\left(\frac{a}{c}\right)$ in [°]	$\approx 51{,}34$	$\approx 52{,}12$	$\approx 64{,}72$	$\approx 57{,}23$	$\approx 34{,}44$	$\approx 50{,}77$

Aufgabe 5:

$a)$ $\alpha \approx 8,850^\circ$; $\beta \approx 81,150^\circ$ und $b \approx 12,845cm$

$b)$ $\alpha \approx 1^\circ$; $\beta \approx 89^\circ$ und $a = 4999,9996m$

$c)$ $\alpha \approx 51,073^\circ$; $\beta \approx 38,928^\circ$ und $c \approx 10,027$

$d)$ $\beta = 55,4^\circ$; $c \approx 13,364dm$ und $a \approx 7,588dm$

$e)$ $\gamma \approx 66,120^\circ$; $\alpha \approx 23,880^\circ$ und $c \approx 57,982cm$

$f)$ $\gamma = 30,82^\circ$; $c \approx 8,591cm$ und $a \approx 16,768cm$

Aufgabe 6:

$$\frac{d}{\cos(\alpha)} = a \approx 3,304mm \ , \ a\sin(\alpha) = x \approx 2,944mm \ , \ p = \frac{a}{x} \approx 112,233\%$$

$$Rp = D \approx 7150,34km \ , \ \frac{D}{c_0} = t_6 \approx 0,023851s \ , \ \frac{t_6}{t_0} \approx 112,233\%$$

Aufgabe 7:

$$\frac{Dn}{c_0} = t_7 \approx 0,034775s \ , \ t_7 : t_6 = 1 : 1,458$$

Aufgabe 8:

$$h = c\sin(\alpha) \ , \ \frac{a}{2h_\Delta} = \tan\left(\frac{360}{2n}\right) \Rightarrow h_\Delta = \frac{a}{2\tan\left(\frac{360}{2n}\right)}$$

$$G = \frac{a^2n}{2\tan\left(\frac{360}{2n}\right)} \Rightarrow V = Gh = \frac{a^2nc\sin(\alpha)}{2\tan\left(\frac{360}{2n}\right)} \Rightarrow V = \frac{1}{3}Gh = \frac{a^2nc\sin(\alpha)}{6\tan\left(\frac{360}{2n}\right)}$$

Aufgabe 9:

$$h = c\sin(\alpha) \ , \ \frac{a}{2h_\Delta} = \tan\left(\frac{360}{2n}\right) \Rightarrow h_\Delta = \frac{a}{2\tan\left(\frac{360}{2n}\right)}$$

$$G = \frac{a^2n}{2\tan\left(\frac{360}{2n}\right)} \ , \ M = U_Gh = nac\sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow O = 2G + M = \frac{a^2n}{\tan\left(\frac{360}{2n}\right)} + nac\sin(\alpha)$$

Aufgabe 10:

a) $\dfrac{n_1 \sin\alpha}{\sin\beta} \approx 1,28554$

b) $\dfrac{d}{\cos\beta} = h \approx 5,14704cm$

$\dfrac{d}{\cos\alpha} = h_{ohne} \approx 6,80521cm \quad \Rightarrow \quad 1 - \dfrac{h}{h_{ohne}} \approx 24,3662\%$

c) $2\sqrt{h^2 - d^2} = D \approx 6,47827cm \quad , \quad 2c \approx 10,2941cm$

d) $c_n = \dfrac{h}{t} \;\Rightarrow\; t = \dfrac{hn_2}{c_0} \approx 2,2071 \cdot 10^{-8}s$

e) $\dfrac{2h}{\lambda} \approx 22875725,615878 \quad \Rightarrow \quad (1 - 0,615878)\lambda \approx 172,8549nm$

Aufgabe 11:

a) $O \approx 301,153cm^2 \;\;,\;\; V = 307,856cm^3$ *b)* $O \approx 112,730cm^2 \;\;,\;\; V = 151,455cm^3$

Aufgabe 12:

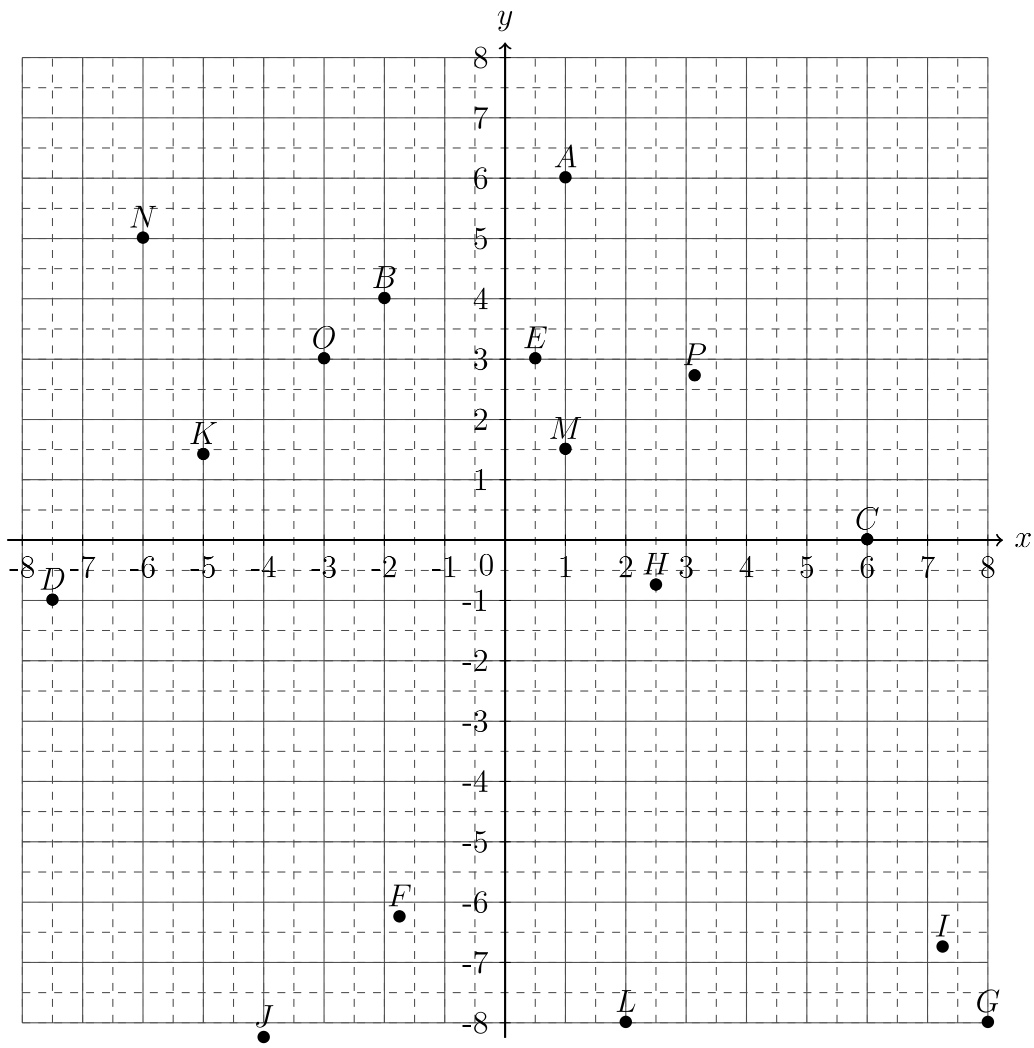
a) $V = 2821,25l$

b) Wasser: $\approx 11,140\%$; Öl: $\approx 10,794\%$; Milch: $\approx 11,241\%$;

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (5.1).

18.10.40 Lösungen zu Wertetabellen und Punkte

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

$a)$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	7	5	3	2	1	0	-1
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	5,83	3,67	2,6	0,71	-2,44	-3,28	-5,25

b)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	22	7	-2	-4,25	-5	-4,25	-2
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-12,49	$\frac{1}{3}$	-3,08	-4,94	3,86	8,76	24,26

c)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-22	-3	2	$\frac{9}{8}$	-1	$\frac{29}{8}$	-6
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-8,83	1,52	1,85	-1,73	7,47	-6,47	4,09

d)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	3	-6	-5	-$\frac{87}{16}$	-6	- $\frac{71}{16}$	3
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-5	- $\frac{422}{81}$	-5,08	-5,91	34,82	72,67	250

e)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-3	-4	-3	-1,75	0	2,25	5
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-3,828	$-\frac{32}{9}$	$-\frac{64}{25}$	$\frac{29}{49}$	9,826	13,153	22,246

f)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	22	7	-2	-4,25	-5	-4,25	-2
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	12,485	$\frac{1}{3}$	$-\frac{77}{25}$	$-\frac{242}{49}$	3,857	8,759	24,261

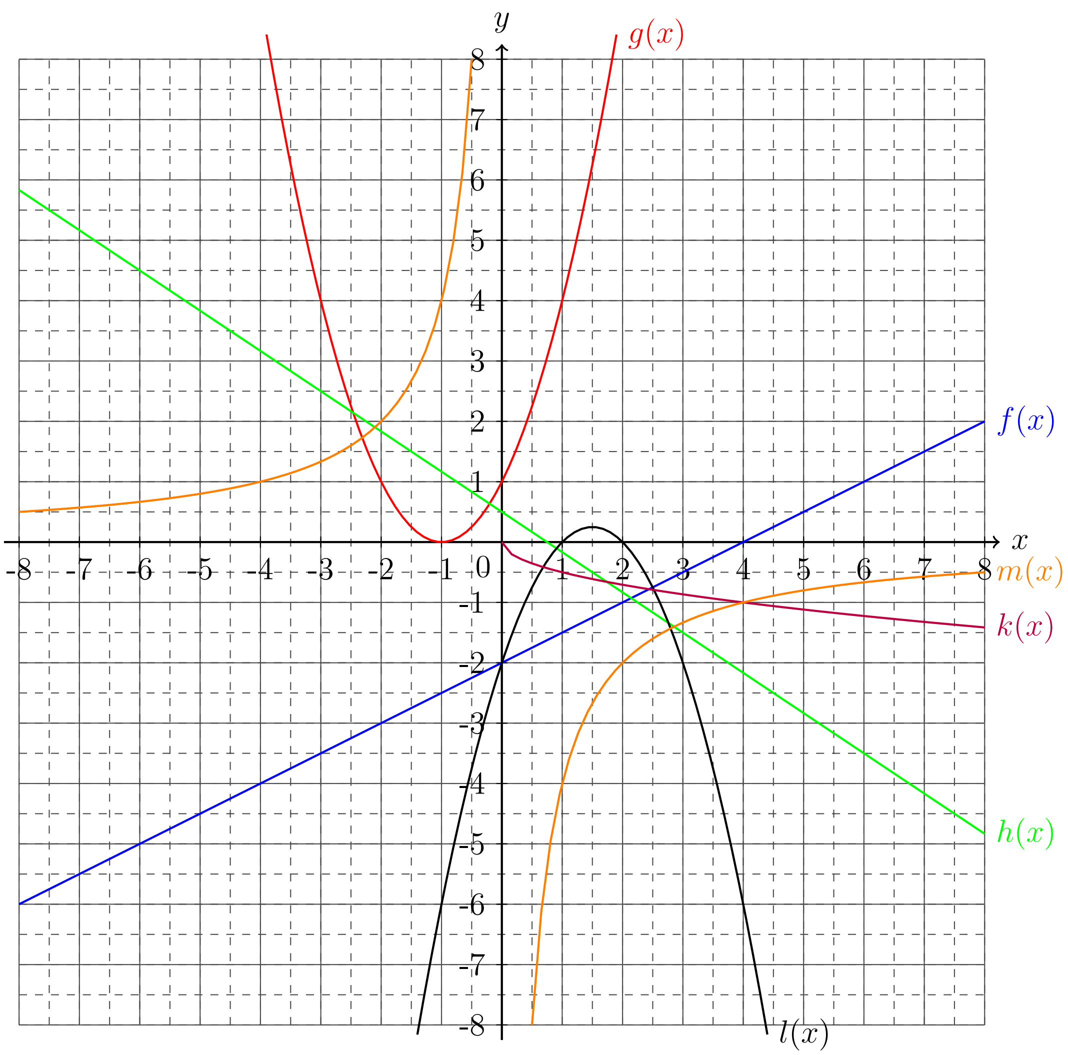
g)

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	-22	-3	2	1,125	-1	3,625	-6
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-8,828	$\frac{41}{27}$	$\frac{231}{125}$	$-\frac{594}{343}$	-7,471	-6,472	4,093

$h)$

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	3	-6	-5	-5,4375	-6	-4,4375	3
x	$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{7}$	e	π	$\sqrt{17}$
$f(x)$	-5	$-\frac{422}{81}$	$-\frac{3174}{625}$	$-\frac{14181}{2401}$	34,820	72,670	250

Aufgabe 3:



$a)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}\,, \quad \mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$

$b)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}\,, \quad \mathbb{W} = \left\{g(x) \in \mathbb{R}^+\right\}$

$c)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}\,, \quad \mathbb{W} = \{h(x) \in \mathbb{R}\}$

$d)\ \mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R}^+\right\}\,, \quad \mathbb{W} = \left\{k(x) \in \mathbb{R}^-\right\}$

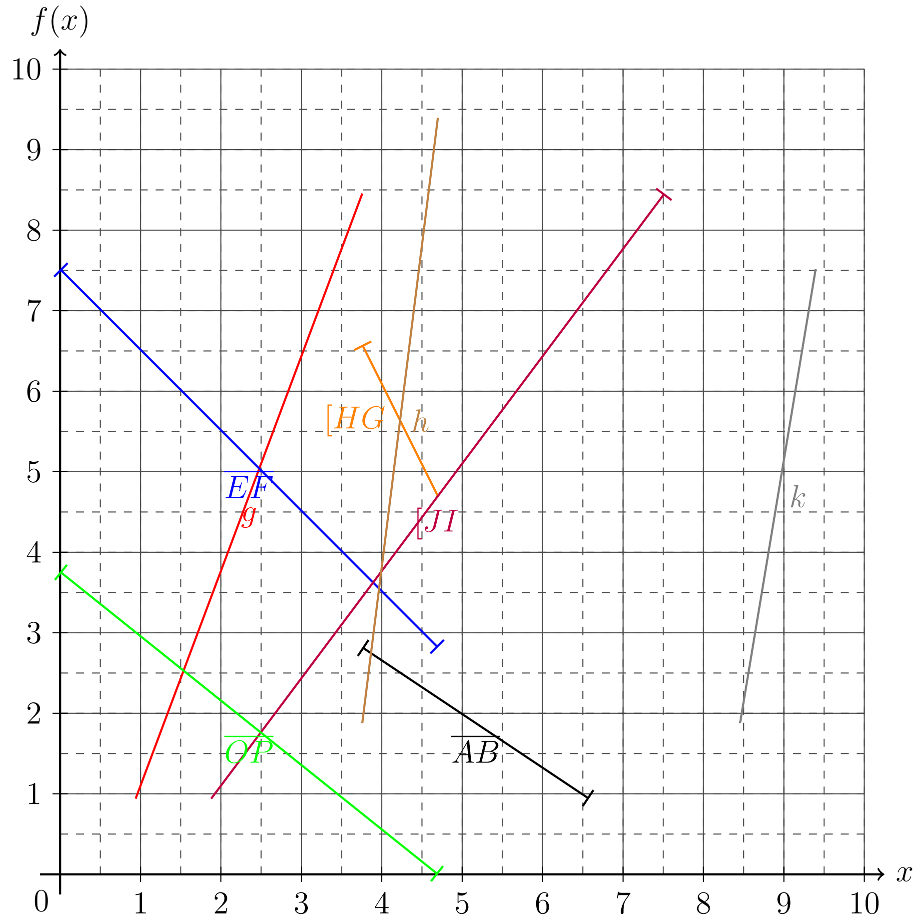
$e)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}\,, \quad \mathbb{W} = \left\{l(x) \in \mathbb{R} | l(x) \leq \frac{1}{4}\right\}$

$f)\ \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}\,, \quad \mathbb{W} = \{m(x) \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 4:

$A\,(1\,\vert 6\,)$	$B\,(-2\,\vert -3\,)$	$C\,(3\,\vert 1\,)$	$D\,(-2,5\,\vert -1,5\,)$
$E\,(4,5\,\vert -3,75\,)$	$F\,(-3,75\,\vert 7,25\,)$	$G\,(-7\,\vert 8\,)$	$H\,(2,25\,\vert -6,75\,)$
$I\,(7,25\,\vert -0,75\,)$	$J\,(-5\,\vert 5,25\,)$	$K\,(-8\,\vert 2\,)$	$L\,(3,75\,\vert -7,75\,)$
$M\,(1,75\,\vert 1,5\,)$	$N\,(-6,5\,\vert -3\,)$	$O\,(-3,25\,\vert -3,25\,)$	$P\,(8,25\,\vert 8,25\,)$
$Q\,(4,75\,\vert 3,5\,)$	$R\,(-2,5\,\vert 2\,)$	$S\,(2,25\,\vert 3,25\,)$	$T\,(-3\,\vert -6,75\,)$

Aufgabe 5:



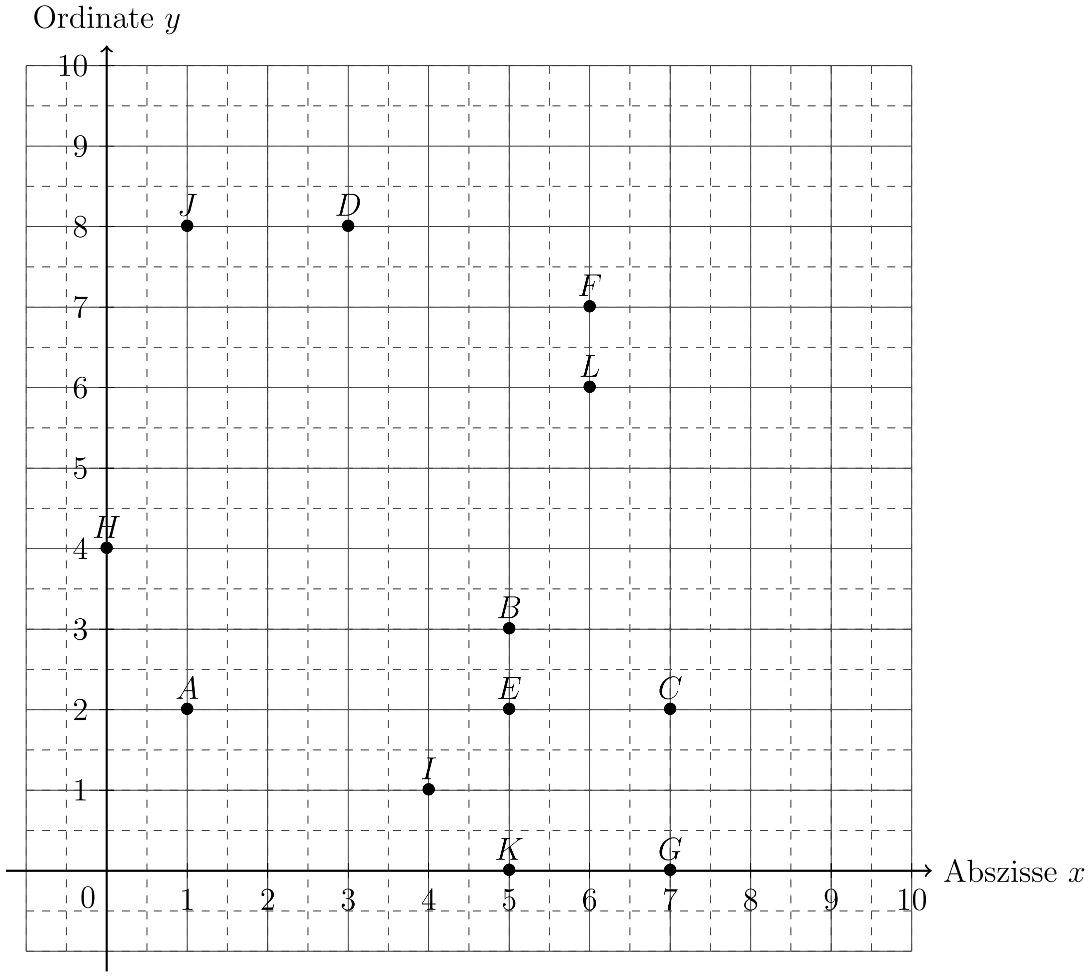
Aufgabe 6:

a) Quadrat *b*) Parallelogramm *c*) Trapez
d) Rechteck *e*) Quadrat *f*) Raute

Aufgabe 7: $d\frac{n(n-1)}{2}$

Anzahl der Punkte	3	4	5	6	7	8	13	22	50
Anzahl der Strecken	3	6	10	15	21	28	78	231	1225

Aufgabe 9:



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.1.1).

18.10.41 Lösungen zu Geraden

Aufgabe 1:

$a)\ \ f_a(x) = \frac{3}{2} \cdot x + 4 \quad \Rightarrow x_N = -\frac{8}{3}$

$b)\ \ f_b(x) = \frac{15}{2} \cdot x - \frac{11}{4} \quad \Rightarrow x_N = \frac{11}{30}$

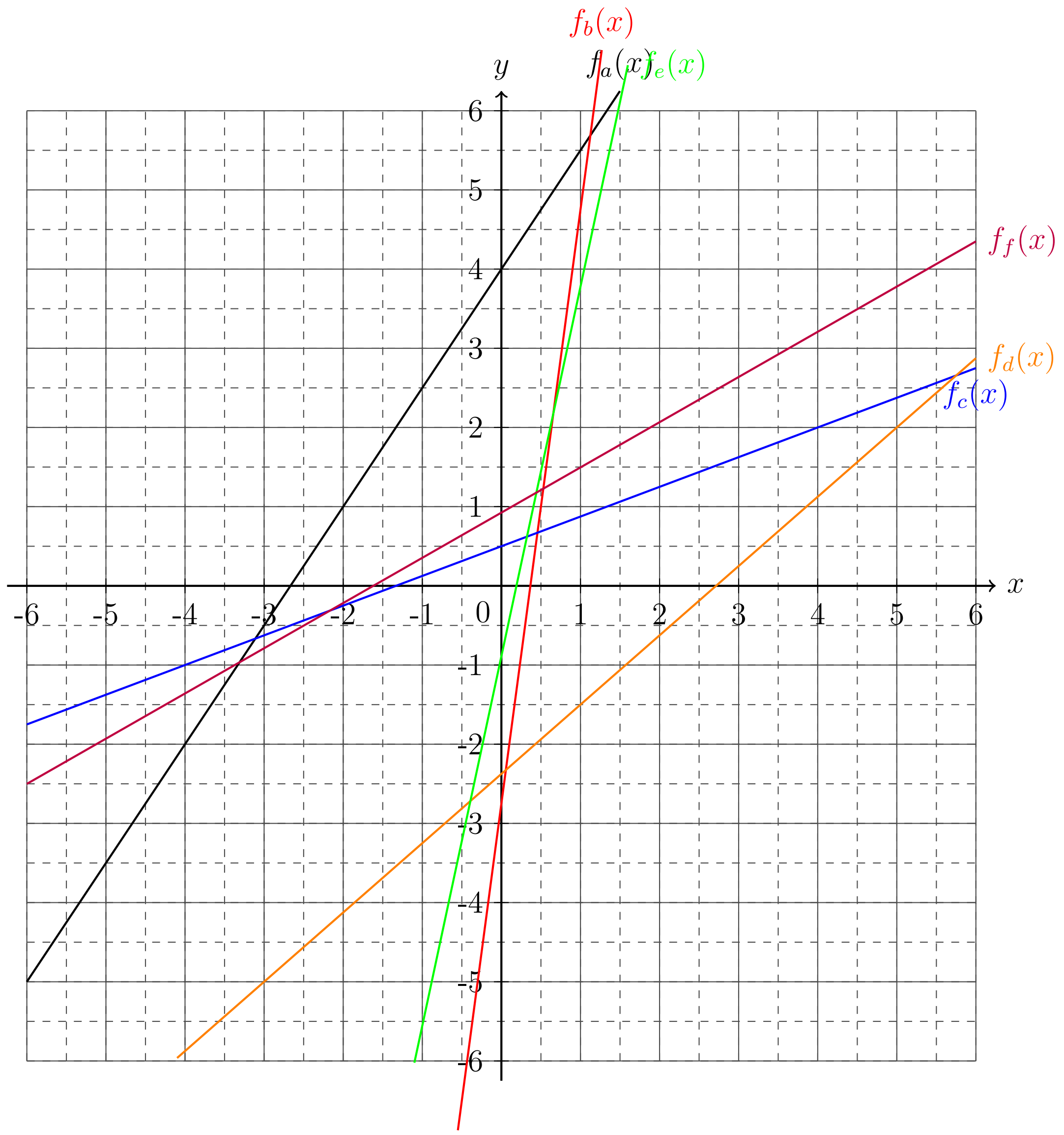
$c)\ \ f_c(x) = \frac{3}{8} \cdot x + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x_N = -\frac{4}{3}$

$d)\ \ f_d(x) = \frac{7}{8} \cdot x - \frac{19}{8} \quad \Rightarrow x_N = \frac{19}{7}$

$e)\ \ f_e(x) = \frac{14}{3} \cdot x - \frac{8}{9} \quad \Rightarrow x_N = \frac{4}{21}$

$f)\ \ f_f(x) = \frac{e-\sqrt{3}}{\pi-\sqrt{2}} \cdot x + e - \frac{e-\sqrt{3}}{\pi-\sqrt{2}} \cdot \pi$

$f_f(x) \approx 0,571 \cdot x + 0,925 \quad \Rightarrow x_N = -1,620$



Aufgabe 2:

$a)$ $f_a(x) = \frac{5}{4} \cdot x + 1$

$b)$ $f_b(x) = \frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{2}$

$c)$ $f_c(x) = -2 \cdot x + \frac{9}{4}$

$d)$ $f_d(x) = 6 \cdot x - 2$

$e)$ $f_e(x) = -\frac{1}{4} \cdot x - 5$

$f)$ $f_f(x) = -x + \frac{1}{3}$

Aufgabe 3:

$a)$ $P_x\left(\frac{5}{2}\middle|\frac{11}{2}\right)$

$b)$ $P_x\left(\frac{54}{95}\middle|-\frac{86}{95}\right)$

$c)$ $P_x\left(\frac{6}{5}\middle|-\frac{18}{5}\right)$

$d)$ $P_x\left(1,99\,|3,64\right)$

$e)$ $P_x\left(1,30\,|4,35\right)$

$f)$ $P_x\left(2,85\,|-4,03\right)$

Aufgabe 4:

$a)$ $f(x) = 5x - 9 \Rightarrow x_N = \frac{9}{5}$

$b)$ $f(x) = \frac{1}{3}x - 6 \Rightarrow x_N = 18$

$c)$ $f(x) = -3x + 4 \Rightarrow x_N = \frac{4}{3}$

$d)$ $f(x) = -12x + \frac{8}{17} \Rightarrow x_N = \frac{8}{204}$

$e)$ $f(x) = 9x + 4 \Rightarrow x_N = -\frac{4}{9}$

$f)$ $f(x) = 15x + \sqrt{2} \Rightarrow x_N = -\frac{\sqrt{2}}{15}$

$g)$ $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{5} \Rightarrow x_N = -\frac{4}{15}$

$h)$ $f(x) = 3x - \frac{5}{6} \Rightarrow x_N = \frac{5}{18}$

$i)$ $f(x) = -\sqrt{2}x - 45 \Rightarrow x_N = -\frac{45}{\sqrt{2}}$

$j)$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \ln 4 \Rightarrow x_N = -\ln 4\sqrt{2}$

Aufgabe 5:

$f_a(x) = x + 2$	$f_b(x) = 2x - 2,5$	$f_c(x) = x + 2.25$
$f_d(x) = 1,5x + 0,5$	$f_e(x) = -0,5x - 3,5$	$f)\ \ f_f(x) = 1,5x + 3,25$
$f_g(x) = 3x + 0,5$	$f_h(x) = -2x - 0,75$	$f_i(x) = 0,25x - 4$
$f_j(x) = 0,25x + 5$	$f_k(x) = -0,2x - 1,25$	$f_l(x) = 1,25x - 3,25$
$f_m(x) = \frac{1}{3}x - 2$	$f_n(x) = -0,8x + 1$	$f_o(x) = \frac{2}{3}x + 2,75$
$f_p(x) = 1,75x + 1,75$	$f_q(x) = -1,2x - 2,25$	$f_r(x) = 2,4x - 3$

Aufgabe 6:

$a)\ \ x_N = 3$	$b)\ \ x_N = \frac{3}{2}$	$c)\ \ x_N = -\frac{2}{3}$
$d)\ \ x_N = 2$	$e)\ \ x_N = \frac{9}{4}$	$f)\ \ x_N = 14$
$g)\ \ x_N = \frac{4}{3}$	$h)\ \ x_N = \frac{10}{9}$	$i)\ \ x_N = \frac{42}{25}$
$j)\ \ x_N = -\frac{32}{15}$	$k)\ \ x_N = \frac{63}{40}$	$l)\ \ x_N = \frac{21}{10}$
$m)\ \ x_N = \frac{86}{15}$	$n)\ \ x_N = -\frac{345}{136}$	$o)\ \ x_N = \frac{53}{427}$
$p)\ \ x_N = \frac{345}{124}$	$q)\ \ x_N = -\frac{23}{5}$	$r)\ \ x_N = \frac{12}{7}$

Aufgabe 7:

Es gibt keinen Schnittpunkt, somit sind die Geraden parallel zu einander.

Aufgabe 8:

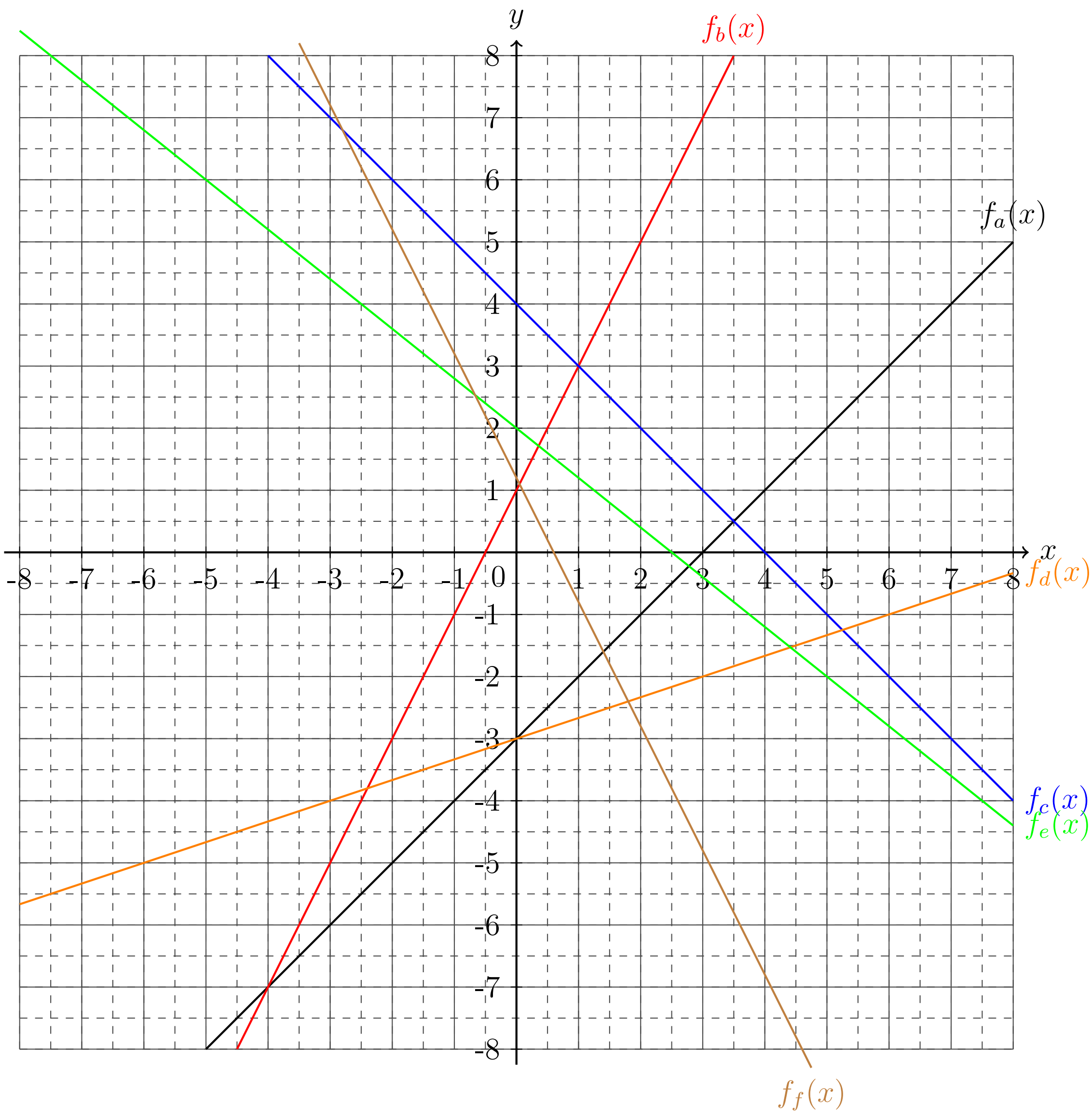
$a)$ $P_\times\left(7\,|9\right)$ $b)$ $P_\times\left(\frac{3}{5}\middle|-\frac{31}{5}\right)$ $c)$ $P_\times\left(\frac{7}{6}\middle|\frac{17}{6}\right)$

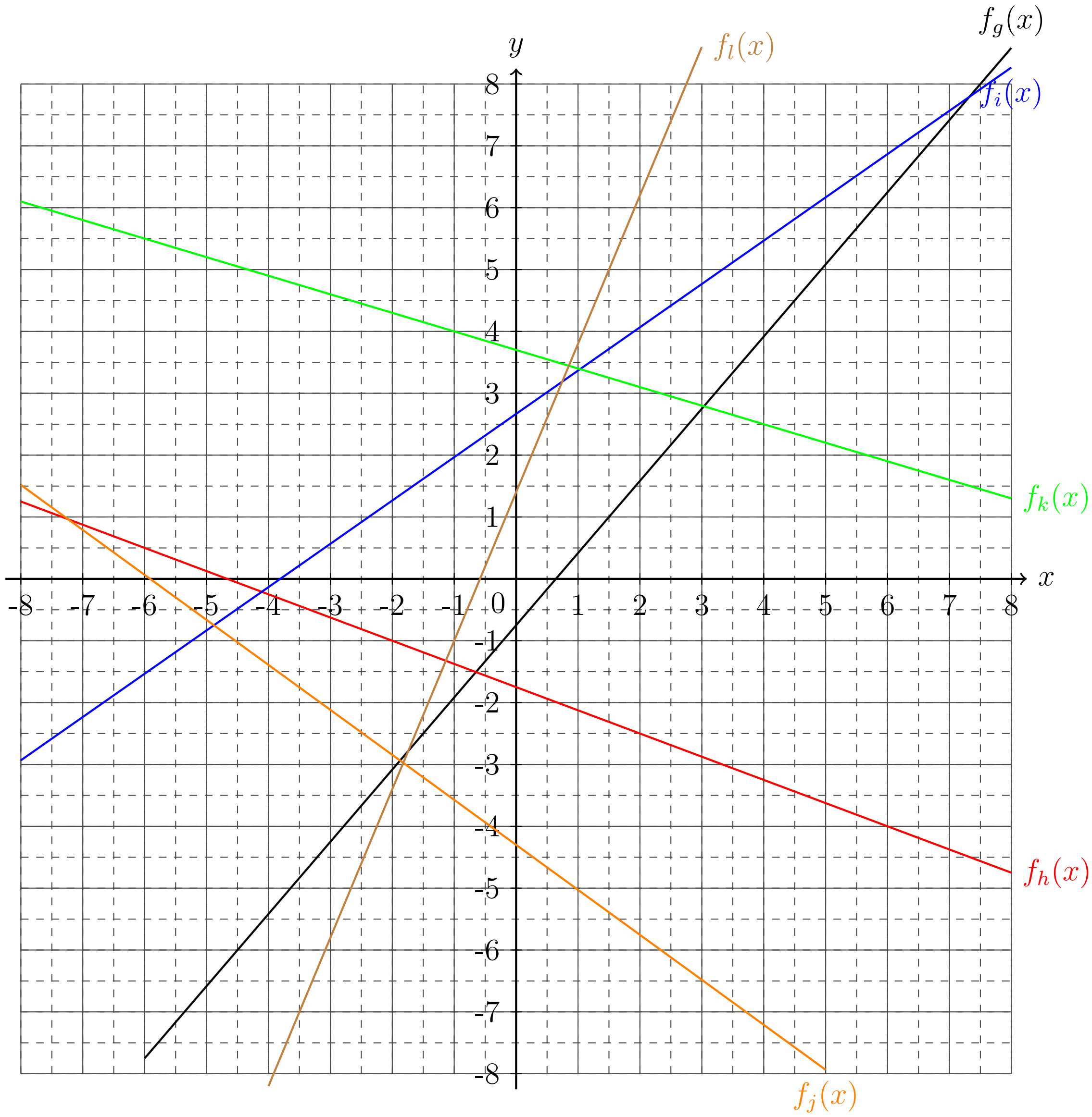
$d)$ $P_\times\left(\frac{1}{2}\,|0\right)$ $e)$ $P_\times\left(-\frac{21}{20}\middle|\frac{23}{10}\right)$ $f)$ $P_\times\left(\frac{357}{344}\middle|-\frac{435}{344}\right)$

$g)$ $P_\times\left(-\frac{21}{170}\middle|\frac{96}{85}\right)$ $h)$ $P_\times\left(\frac{209}{135}\middle|\frac{169}{675}\right)$ $i)$ $P_\times\left(-\frac{998}{315}\middle|\frac{479}{45}\right)$

$j)$ $P_\times\left(\frac{905}{2191}\middle|\frac{5905}{4382}\right)$ $k)$ $P_\times\left(-\frac{620}{3227}\middle|\frac{129173}{161350}\right)$ $l)$ $P_\times\left(\frac{359307}{13607}\middle|\frac{2608739}{136070}\right)$

Aufgabe 9:





Aufgabe 10:

a) $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} + 3$ b) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$ c) $f^{-1}(x) = \frac{x}{3} - \frac{2}{3}$

d) $f^{-1}(x) = -x + 2$ e) $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{9}{4}$ f) $f^{-1}(x) = 2x + 14$

g) $f^{-1}(x) = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ h) $f^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{10}{9}$ i) $f^{-1}(x) = \frac{7}{5}x + \frac{42}{25}$

j) $f^{-1}(x) = -\frac{8}{3}x - \frac{4}{15}$ k) $f^{-1}(x) = -\frac{7}{4}x + \frac{63}{40}$ l) $f^{-1}(x) = \frac{6}{5}x + \frac{14}{15}$

m) $f^{-1}(x) = \frac{4}{3}x + \frac{86}{15}$ n) $f^{-1}(x) = \frac{25}{34}x - \frac{345}{136}$ o) $f^{-1}(x) = \frac{100}{427}x + \frac{53}{427}$

p) $f^{-1}(x) = \frac{5}{62}x + \frac{345}{124}$ q) $f^{-1}(x) = 20x - \frac{23}{5}$ r) $f^{-1}(x) = \frac{25}{28}x + \frac{12}{7}$

Aufgabe 11:

$a)$ Ja $b)$ Ja $c)$ Nein $d)$ Ja $e)$ Nein $f)$ Nein
$g)$ Ja $h)$ Ja $i)$ Nein $j)$ Nein $k)$ Nein $l)$ Ja

Aufgabe 12:

$a)$ $P\,(5\,|1\,)$ $b)$ $P\,(-3\,|-15\,)$ $c)$ $P\,(7\,|19\,)$

$d)$ $P\,(2\,|-1\,)$ $e)$ $P\left(\frac{4}{5}\middle|-\frac{8}{5}\right)$ $f)$ $P\left(-\frac{27}{14}\middle|-\frac{9}{4}\right)$

$g)$ $P\left(\frac{849}{616}\middle|\frac{9}{11}\right)$ $h)$ $P\left(\frac{8}{7}\middle|-\frac{7}{2}\right)$ $i)$ $P\left(-\frac{11}{3}\middle|-\frac{179}{36}\right)$

$j)$ $P\,(8,8\,|4,52\,)$ $k)$ $P\,(32,4\,|-51,612\,)$ $l)$ $P\left(\frac{3625}{194}\,|-12,4\right)$

Aufgabe 13: *Prüfe, ob der gegebene Punkte ein Punkt der gegebenen Funktion ist.*

$a)$ $f(x) = -2x + 3 \quad \wedge \quad P\,(3\,|-3\,) \qquad P \in f$

b

$c)$ $f(x) = \frac{3}{4} - \frac{4}{5}x \quad \wedge \quad P\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{39}{20}\right) \qquad P \notin f$

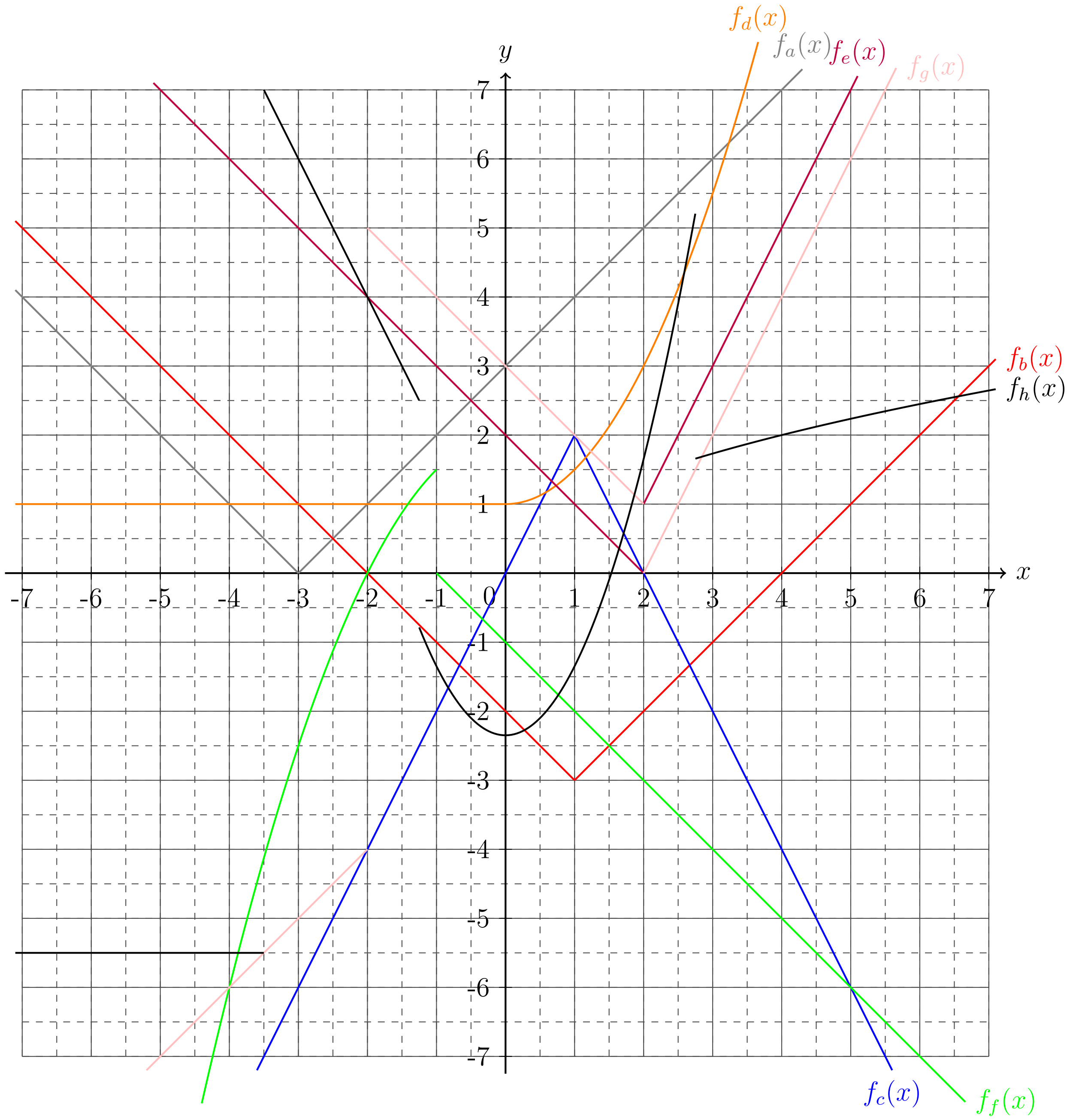
$e)$ $f(x) = \frac{11}{8}x + \frac{14}{5} \quad \wedge \quad P\left(\frac{8}{5}\,|4\right) \qquad P \notin f$

$f)$ $f(x) = -\frac{14}{11}x + \frac{13}{3} \quad \wedge \quad P\left(-\frac{5}{6}\middle|\frac{178}{33}\right) P \in f$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.2.1).

18.10.42 Lösungen zu Stufenfunktionen

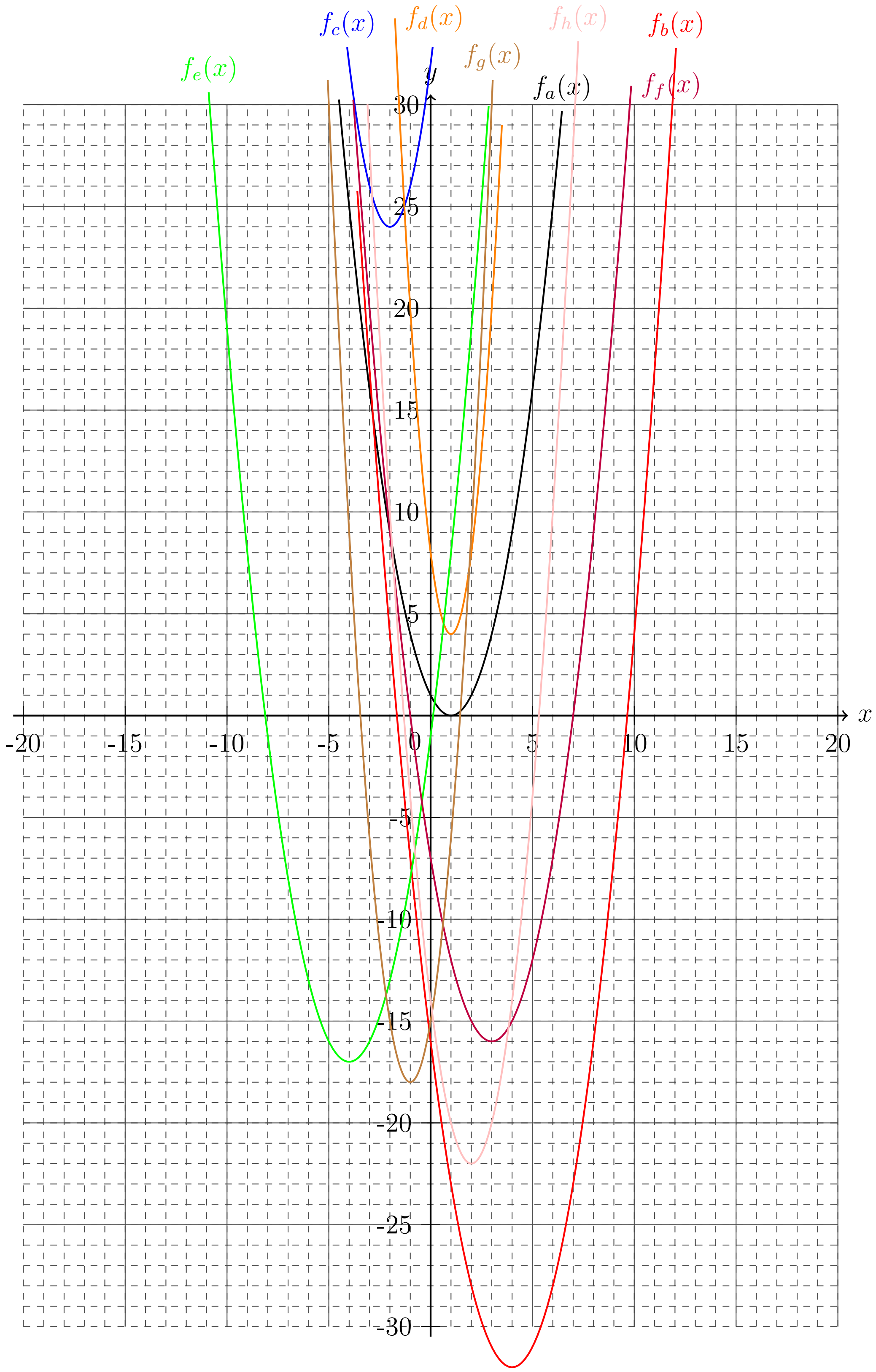
Aufgabe 1:



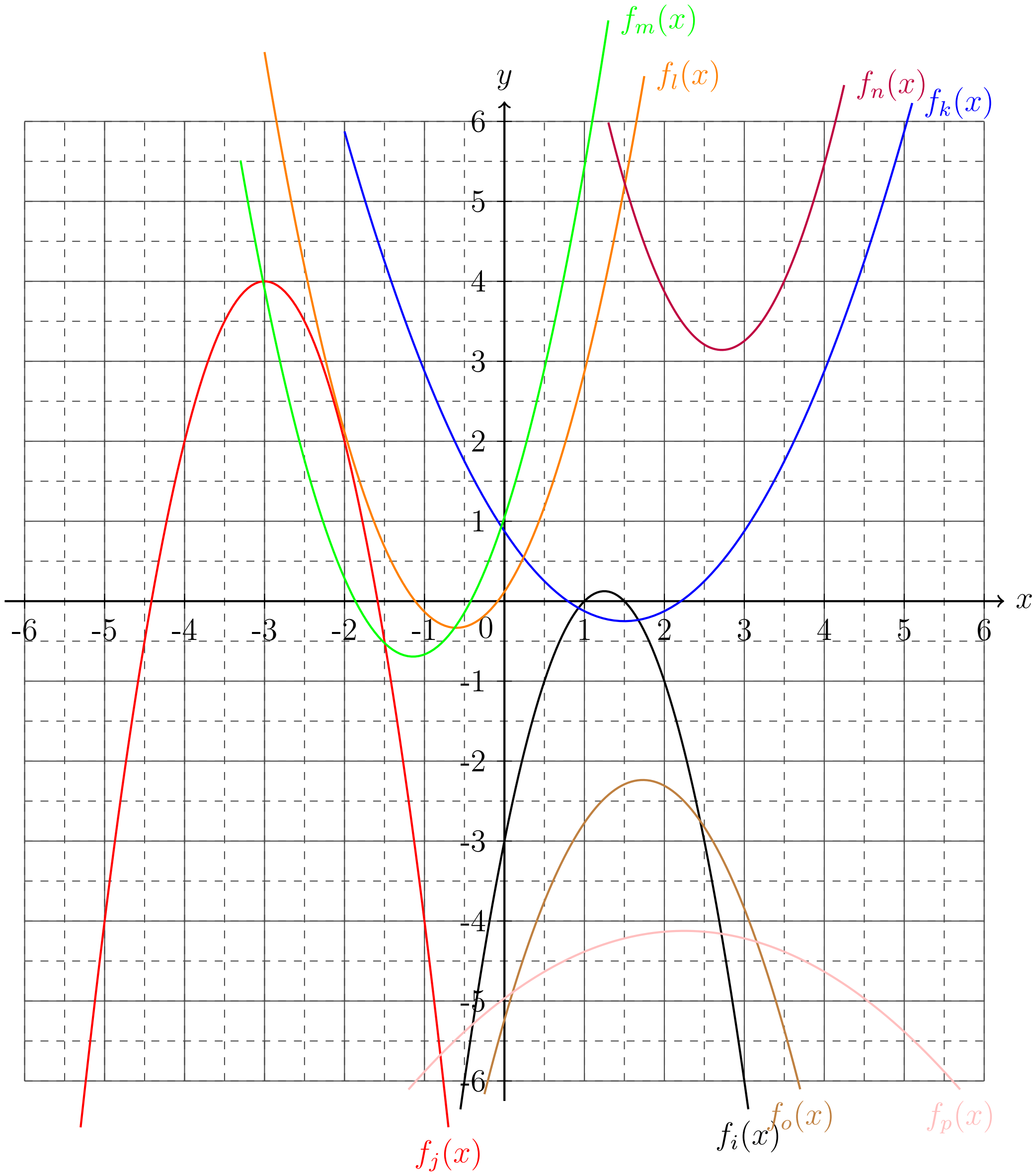
Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.3.1).

18.10.43 Lösungen zu Parabeln

Aufgabe 1:



$f_c(x)$
$f_d(x)$
$f_h(x)$
$f_b(x)$
$f_e(x)$
$f_g(x)$
$f_a(x)$
$f_f(x)$
y
x
30
25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-20
-15
-10
-5
5
10
15
20



$f_m(x)$
$f_l(x)$
$f_n(x)$
$f_k(x)$
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
$f_j(x)$
$f_i(x)$
$f_o(x)$
$f_p(x)$

a) $f_a(x) = (x-1)^2, \Rightarrow S(1|0)$, Nullstellen:$x_N = 1$

b) $f_b(x) = (x-4)^2, \Rightarrow S(4|0)$, Nullstellen:$x_N = 4$

c) $f_c(x) = 2(x+4)^2 + 24, \Rightarrow S(-4|24)$, Nullstellen: keine

d) $f_d(x) = 4(x-1)^2 + 4, \Rightarrow S(1|4)$, Nullstellen: keine

e) $f_e(x) = (x+4)^2 - 17, \Rightarrow S(-4|-17)$, Nullstellen:$x_{N_{1,2}} = -4 \pm \sqrt{17}$

f) $f_f(x) = (x-3)^2 - 16, \Rightarrow S(3|-16)$, Nullstellen:$x_{N_1} = 7 \wedge x_{N_2} = -1$

g) $f_g(x) = 3(x+1)^2 - 18, \Rightarrow S(-1|-18)$, Nullstellen:$x_{N_{1,2}} = -1 \pm \sqrt{6}$

h) $f_h(x) = 2(x-2)^2 - 22, \Rightarrow S(2|-22)$, Nullstellen:$x_{N_{1,2}} = 2 \pm \sqrt{11}$

i) $f_i(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{1}{8}, \Rightarrow S\left(\frac{5}{4}\middle|\frac{1}{8}\right)$, Nullstellen:$x_{N_1} = 1 \wedge x_{N_2} = \frac{3}{2}$

j) $f_j(x) = -2(x+3)^2 + 4, \Rightarrow S(-3|4)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = -3 \pm \sqrt{2}$

k) $f_k(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \Rightarrow S\left(\frac{3}{2}\middle|-\frac{1}{4}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

l) $f_l(x) = \frac{5}{4}\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{1}{3}, \Rightarrow S\left(-\frac{3}{5}\middle|-\frac{1}{3}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{9 \pm \sqrt{15}}{15}$

m) $f_m(x) = \frac{4}{3}\left(x + \frac{8}{7}\right)^2 - \ln 2, \Rightarrow S\left(-\frac{8}{7}|-\ln 2\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{-16 \pm 7\sqrt{3\ln 2}}{14}$

n) $f_n(x) = \sqrt{2}(x-e)^2 + \pi, \Rightarrow S(e|\pi)$, Nullstellen: keine

o) $f_o(x) = -\left(x - \sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{5}, \Rightarrow S\left(\sqrt{3}\middle|-\sqrt{5}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{5}$

p) $f_p(x) = -\frac{1}{6}\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \sqrt{17}, \Rightarrow S\left(\frac{9}{4}\middle|-\sqrt{17}\right)$, Nullstellen: $x_{N_{1,2}} = \frac{9 \pm 4\sqrt{6}\sqrt[4]{17}}{4}$

Aufgabe 2:

a) $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{10}$ b) $x_{1,2} = 1 \pm \frac{2}{5}\sqrt{15}$

c) $x_1 = -2 \quad \wedge \quad x_2 = 4$ d) $\mathbb{L} = \varnothing$

Aufgabe 3:

a) $S\left(3|-4\right)$; $x_1 = 1 \quad \wedge \quad x_2 = 5$; $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $S\left(-2|-1\right)$; $x_1 = -3 \quad \wedge \quad x_2 = -1$; $f(x) = x^2 + 4x + 3$

c) $S\left(2|8\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = x^2 - 4x + 12$

d) $S\left(1|-7\right)$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$; $f(x) = 2x^2 - 4x - 5$

e) $S\left(-2|\frac{1}{2}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = -x^2 - 4x - \frac{9}{2}$

f) $S\left(\frac{1}{2}|\frac{4}{3}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = 4x^2 - 4x + \frac{7}{3}$

g) $S\left(-\frac{3}{4}|\frac{1}{8}\right)$; $x_1 = -1 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{1}{2}$; $f(x) = -2x^2 - 3x - 1$

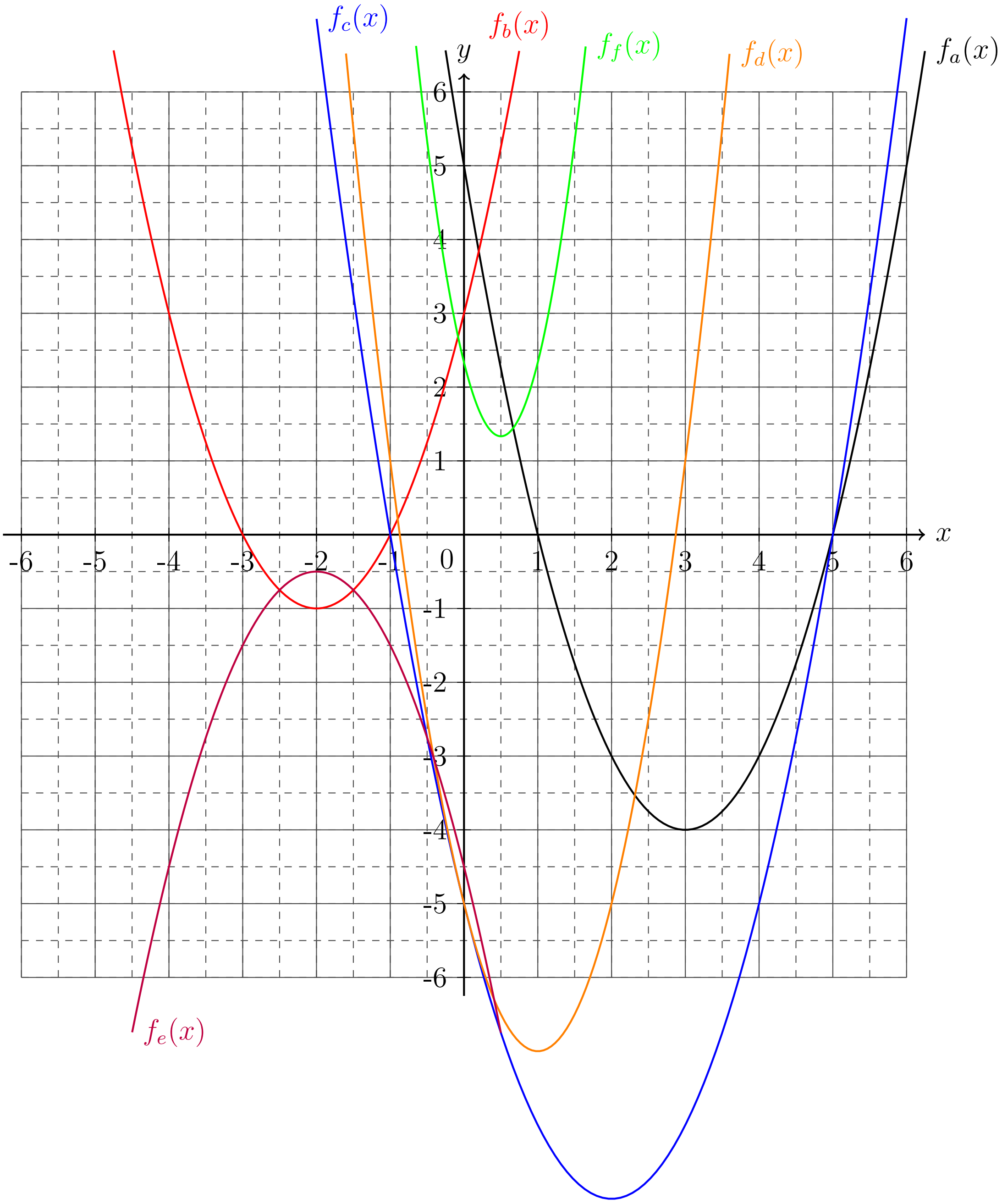
h) $S\left(\frac{4}{3}|-\frac{1}{4}\right)$; $x_{1,2} = \frac{4}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{23}{36}$

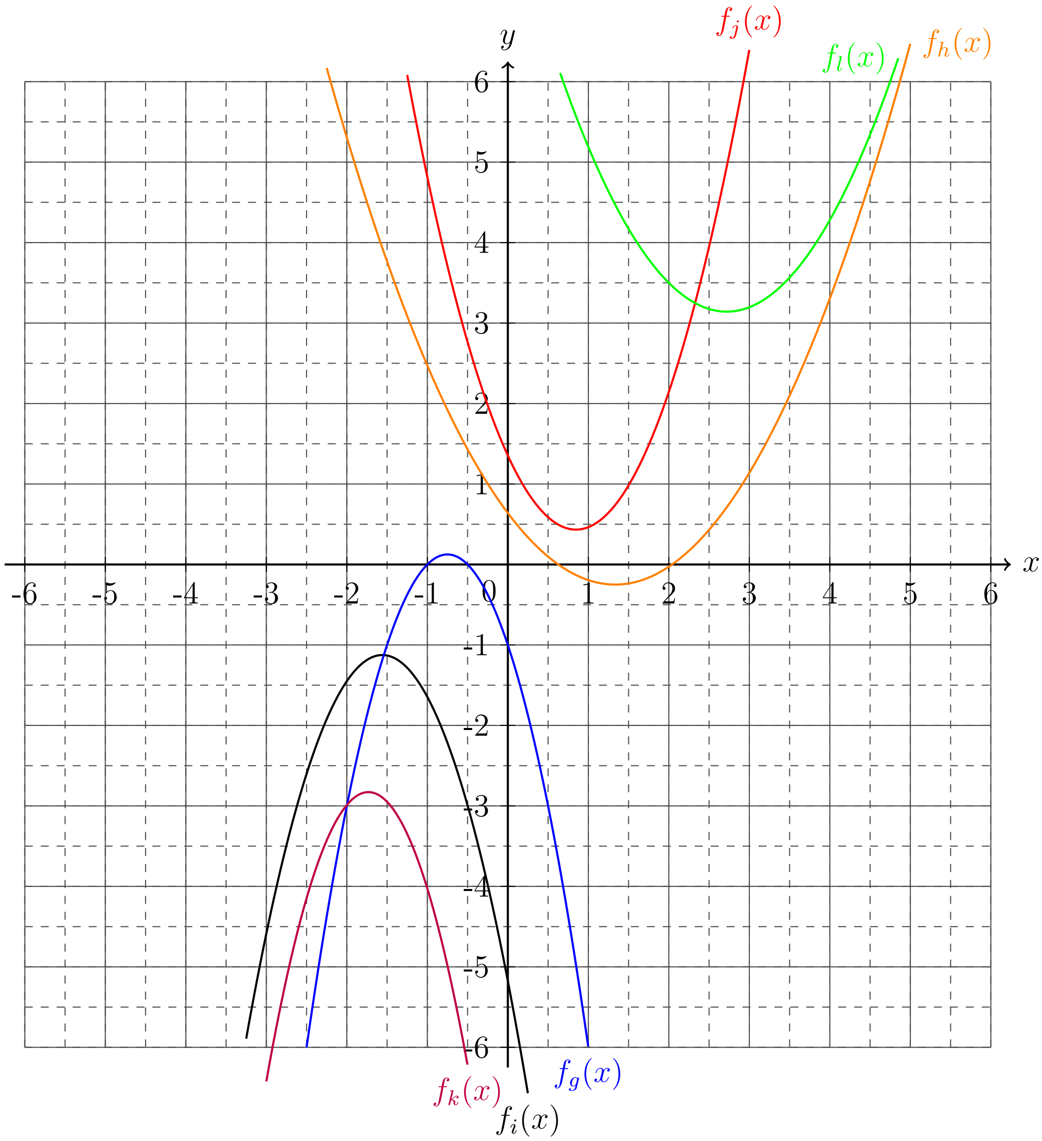
i) $S\left(-\frac{53}{34}|-\frac{9}{8}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = -\frac{5}{3}x^2 - \frac{256}{51}x - \frac{35893}{6936}$

j) $S\left(\frac{11}{13}|\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = \frac{9}{7}x^2 - \frac{198}{91}x + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1089}{1183}$

k) $S\left(-\sqrt{3}|-\sqrt{8}\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = -\sqrt{5}x^2 - 2\sqrt{15}x - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

l) $S\left(e|\pi\right)$; Nullstellen: keine ; $f(x) = \ln(2)x^2 - e\ln(2)x + \pi + e^2\ln(2)$


$f_c(x)$
$f_b(x)$
$f_f(x)$
$f_d(x)$
$f_a(x)$
$f_e(x)$
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6


$f_j(x)$
$f_l(x)$
$f_h(x)$
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
1
2
3
4
5
6
$f_k(x)$
$f_g(x)$
$f_i(x)$

Aufgabe 4:

$$a)\ \ f(x) = 2\left(x+2\right)^2 - 2$$
$$b)\ \ g(x) = -\frac{1}{2}\left(x+1\right)^2 + 3$$
$$c)\ \ h(x) = \frac{1}{4}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$
$$d)\ \ k(x) = \frac{5}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$
$$e)\ \ l(x) = -4\left(x-4\right)^2 + 4$$
$$f)\ \ m(x) = -2\left(x+1\right)^2 - 2$$
$$f)\ \ n(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1$$
$$f)\ \ o(x) = \frac{1}{8}\left(x-3\right)^2 + 1$$

Aufgabe 5:

$a)$ Achsensymmetrisch
$b)$ Nicht achsensymmetrisch
$c)$ Achsensymmetrisch
$d)$ Achsensymmetrisch

Aufgabe 6:

$$a)\ \ f(x) = -\frac{4}{243}x^2 + 12$$
$$b)\ \ f(x) = 9 \ \Rightarrow\ x_{1,2} = \pm 13,5m \ \Rightarrow\ A = 13,5m \cdot 9m = 121,5m^2$$
$$c)\ \ f(x) = 3 \ \Rightarrow\ x_{1,2} = \pm\frac{27\sqrt{3}}{2}m \ \Rightarrow\ A_H = 27\sqrt{3}m \cdot 112m \approx 5237,72m^2$$
$$A_F = 90,2m^2 \ \Rightarrow\ \frac{A_H}{A_F} \approx 58$$

Aufgabe 7:

$a)$ $f(x) = 0,0005(x-1700)^2 + 2$

$g(x) = 0,000625(x+500)^2$

$h(x) = 0,000625(x-3900)^2$

$b)$ $f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; x_L \approx -12,375$

$f(x) = h(x) \;\Rightarrow\; x_R \approx 3412,375$

$\Rightarrow\; f(x=-12,375) = f(x=3412,375) \approx 148,611m$

$c)$ $500 + 3900 = 4400m \;\;,\;\; |x_L| + |x_R| \approx 3404,410m$

$e)$ $\dfrac{V \cdot \rho}{44t} = \dfrac{4400m \cdot 6 \cdot 2,6m \cdot 0,09m \cdot 1433\frac{kg}{m^3}}{44000kg} = \dfrac{8852500,8}{44000kg} \approx 201,193 \;\Rightarrow\; 202LKW$

Aufgabe 8:

$a)$ $f(x) = 0,00025(x-600)^2 + 7$

$b)$ $x_1 = 0 \;\wedge\; x_2 = 1200$

$c)$ $g_L(x) = 0,18x + 97 \;\wedge\; g_R(x) = -0,18x + 313$

$d)$ $L = 2277,\bar{7}m$

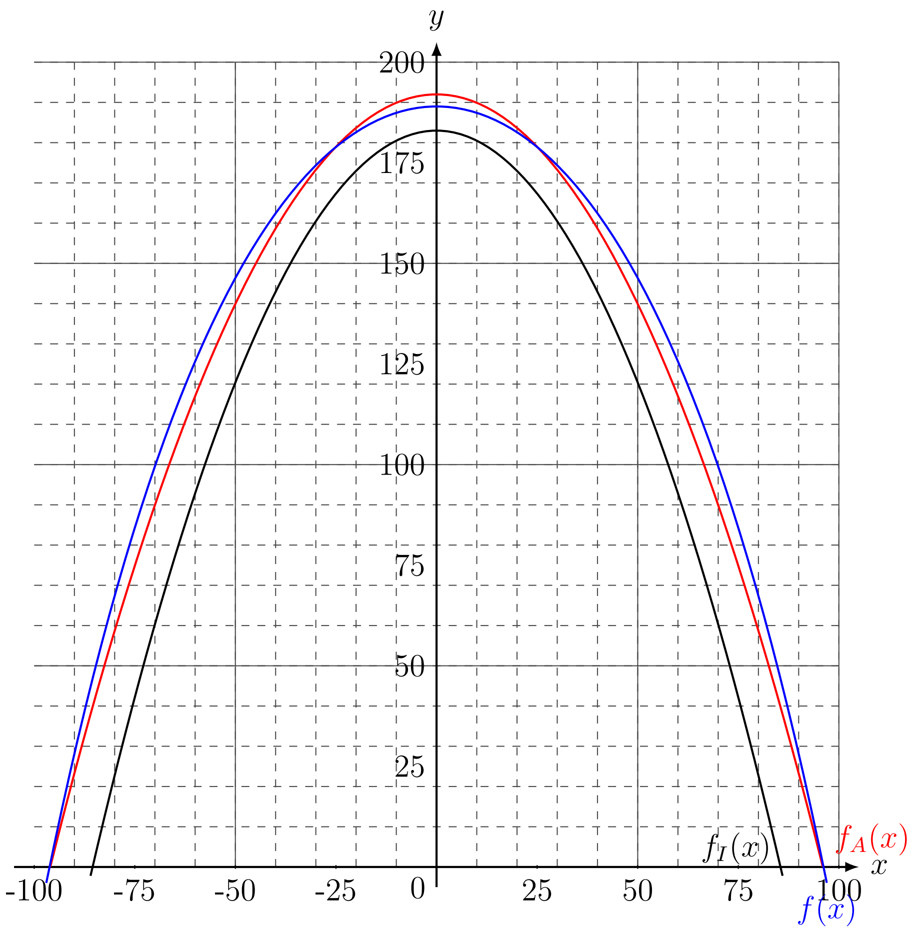
$d)$ $b(x) == -0,000003(x-600)^2 + 2 \;\Rightarrow\; 40m - 25m + 2m = 17m$

Aufgabe 9:

$a)$ $f_I(x) \approx 183 - 0,0250333x^2$

$b)$ $f_A(x) = 192 - 0,0208\bar{3}x^2$

$d)$ $x_{1,2} \approx \pm 96,1912 \;\Rightarrow\;$ Breite: $192,382m$, Höhe: $189m$



Aufgabe 10:

$a)$ $f(x) = -\dfrac{67}{66125}x^2 + 53,6$ Ordinate durch das Maximum

$b)$ $g_L(x) = -x - 306 \;\Rightarrow\;$ Nein. $g_R(x) = 2x - 612 \;\Rightarrow\;$ Ja.

Aufgabe 11:

$a)\ \ f(x) = (x-3)^2 + 2 \ \ \wedge \ \ P\,(5\,|4) \qquad P \notin f$

$b)\ \ f(x) = x^2 - 2x - 1 \ \ \wedge \ \ P\,(-3\,|14) \qquad P \in f$

$c)\ \ f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \ \ \wedge \ \ P\left(-\frac{3}{4}\middle|-\frac{9}{8}\right) \qquad P \in f$

$d)\ \ f(x) = -x^2 - 1,5x + \frac{6}{5} \ \ \wedge \ \ P\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{5}\right) \qquad P \in f$

$e)\ \ f(x) = -\frac{8}{3}\left(x - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{9}{7} \ \ \wedge \ \ P\left(-\frac{2}{3}\middle|-\frac{8869}{1350}\right) \qquad P \in f$

$f)\ \ f(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{5}{6} \ \ \wedge \ \ P\left(-1\middle|-\frac{7}{24}\right) \qquad P \notin f$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.4.1).

Aufgabe 1: *Beschriebe die Verschiebungen der Funktion.*
a) $f(x+1)$ Verschiebung um 1 nach links.
b) $f(x) - 4$ Verschiebung um 4 nach unten.
c) $f(x-2) - 2$ Verschiebung um 2 nach rechts und 2 nach unten.
d) $3f(x)$ Steckung um den Faktor 3.
e) $-f(x) + 1$ Verschiebung um 1 nach oben und Spiegelung an der Abszisse.
f) $-f(-x)$ Spiegelung an der Ordinate und der Abszisse (wirkt wie eine 180° Drehung um den Ursprung.
g) $\frac{1}{5}f(x)$ Stauchung um den Faktor $\frac{1}{5}$.
h) $f(x-3) - 4$ Verschiebung um 3 nach rechts und 4 nach unten.
i) $-2f(x-7) + 3$ Verschiebung um 7 nach rechts und 3 nach oben sowie einer Streckung um den Faktor 2 mit einer Spiegelung an der Abszisse.

Aufgabe 2: *Gib die Funktionsgleichung jeweils um den angegebenen Wert v verschoben in die jeweiligen Abszissen- und Ordinatenrichtungen in Parameterdarstellung an.*

$a)\ \ f(x) = (x+1)^2 - 2 \quad \text{mit:} \quad v = 2$

links $\Rightarrow \quad f(x+2) = x^2 + 6x + 7$

oben $\Rightarrow \quad f(x) + 2 = x^2 + 2x + 1$

unten $\Rightarrow \quad f(x) - 2 = x^2 - 2x - 3$

$b)\ \ f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 5 \quad \text{mit:} \quad v = -3$

rechts $\Rightarrow \quad f(x - (-3)) = \frac{1}{2}x^2 + 5$

links $\Rightarrow \quad f(x + (-3)) = \frac{1}{2}x^2 - 6x + 23$

oben $\Rightarrow \quad f(x) + (-3) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2}$

unten $\Rightarrow \quad f(x) - (-3) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{25}{2}$

$c)\ \ f(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{6} \quad \text{mit:} \quad v = \frac{2}{3}$

rechts $\Rightarrow \quad f\left(x - \frac{2}{3}\right) = -2x^2 + \frac{17}{3}x - \frac{229}{72}$

links $\Rightarrow \quad f\left(x + \frac{2}{3}\right) = -2x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{59}{72}$

oben $\Rightarrow \quad f(x) + \frac{2}{3} = -2x^2 + 3x + \frac{3}{8}$

unten $\Rightarrow \quad f(x) - \frac{2}{3} = -2x^2 + 3x + \frac{23}{24}$

$d)\ \ f(x) = -\frac{3}{8}\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{5}{7} \quad \text{mit:} \quad v = -\frac{5}{4}$

links $\Rightarrow \quad f\left(x + \left(-\frac{5}{4}\right)\right) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{147}{80}x - \frac{66421}{22400}$

oben $\Rightarrow \quad f(x) + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{10}x - \frac{1753}{700}$

unten $\Rightarrow \quad f(x) - \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{9}{10}x - \frac{3}{700}$

Aufgabe 3: *Bestimme den gemeinsamen Funktionswerte der Funktion mit der verschobenen Funktion.*

$a)\;\; f(x) = f(x-2) \;\text{ für: }\; f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2}$

$b)\;\; f(x) = -2f(x) + 6 \;\text{ für: }\; f(x) = -x^2 + 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \;\; \wedge \;\; x_2 = 2$

$c)\;\; f(x) = f(x+4) - 2 \;\text{ für: }\; f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

$d)\;\; f\left(-\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}\right) - 2 = -\frac{1}{2}f\left(x - \frac{1}{2}\right) \;\text{ für: }\; f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{8}{5}x - 2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{257 \pm \sqrt{115774}}{170}$

18.10.44 Lösungen zu Umkehrfunktionen

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.5.1).

18.10.45 Lösungen zu Umkehrfunktionen

Aufgabe 1:

$a)\;\; f^{-1}(x) = x - 6$

$b)\;\; f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 3$

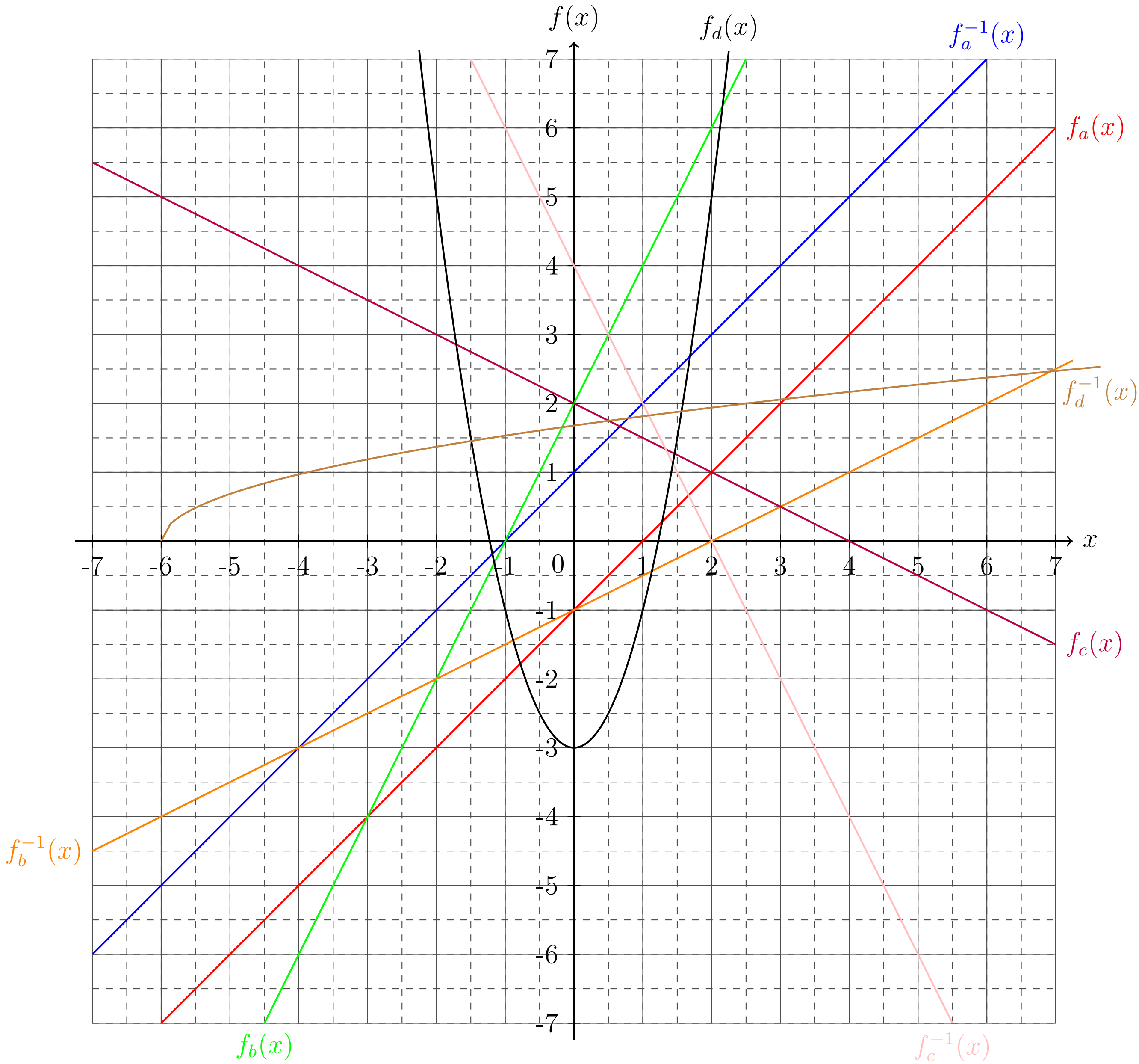
$c)\;\; f^{-1}(x) = \sqrt{x + 64}$

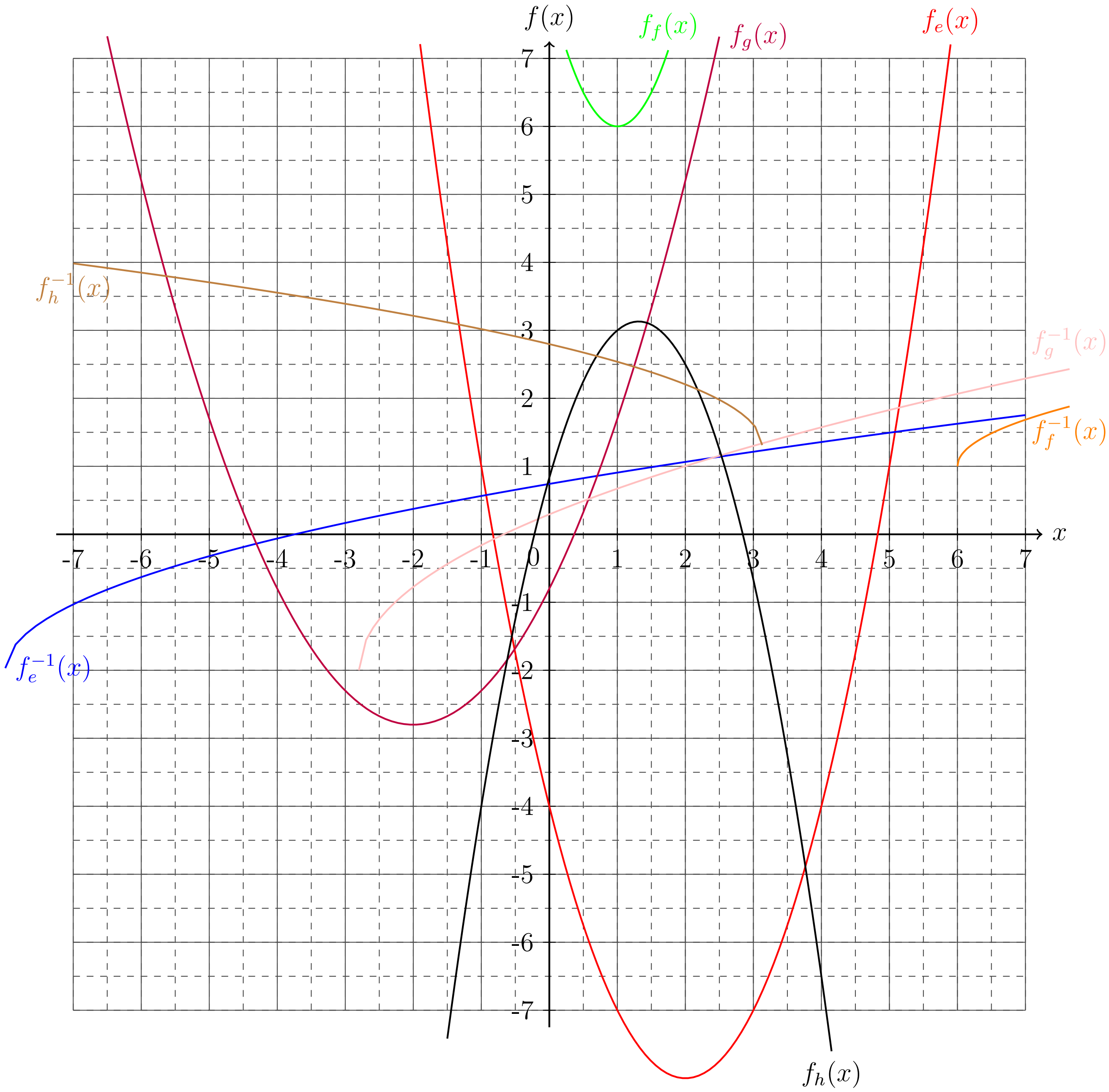
$d)\;\; f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{41 - 4x} + 3}{2}$

$e)\;\; f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{x + 10} - 2}{2}$

$f)\;\; f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{12x - 1} - 1}{3}$

Aufgabe 2:


$f(x)$
$f_d(x)$
$f_a^{-1}(x)$
$f_a(x)$
$f_d^{-1}(x)$
$f_c(x)$
$f_b^{-1}(x)$
$f_b(x)$
$f_c^{-1}(x)$
x
-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
7 6 5 4 3 2 1 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.6.1).

18.10.46 Lösungen zu Hyperbeln

Aufgabe 1:

$a)\ \ x_N = \frac{1}{2}, \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

$b)\ \ x_N = -8, \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$

$c)\ \ x_N = \frac{5}{3}, \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\}$

$d)\ \ x_N = -\frac{44}{9}, \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}\}$

$e)\ \ x_N = -\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3}, \mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}\right\}$

$f)\ \ x_N = \frac{e\sqrt{2} - \pi}{e}, \mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{2}\right\}\right\}$

Aufgabe 2:

$a)\ \ f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 3$

$b)\ \ f^{-1}(x) = \frac{3}{2\,(3x+1)}$

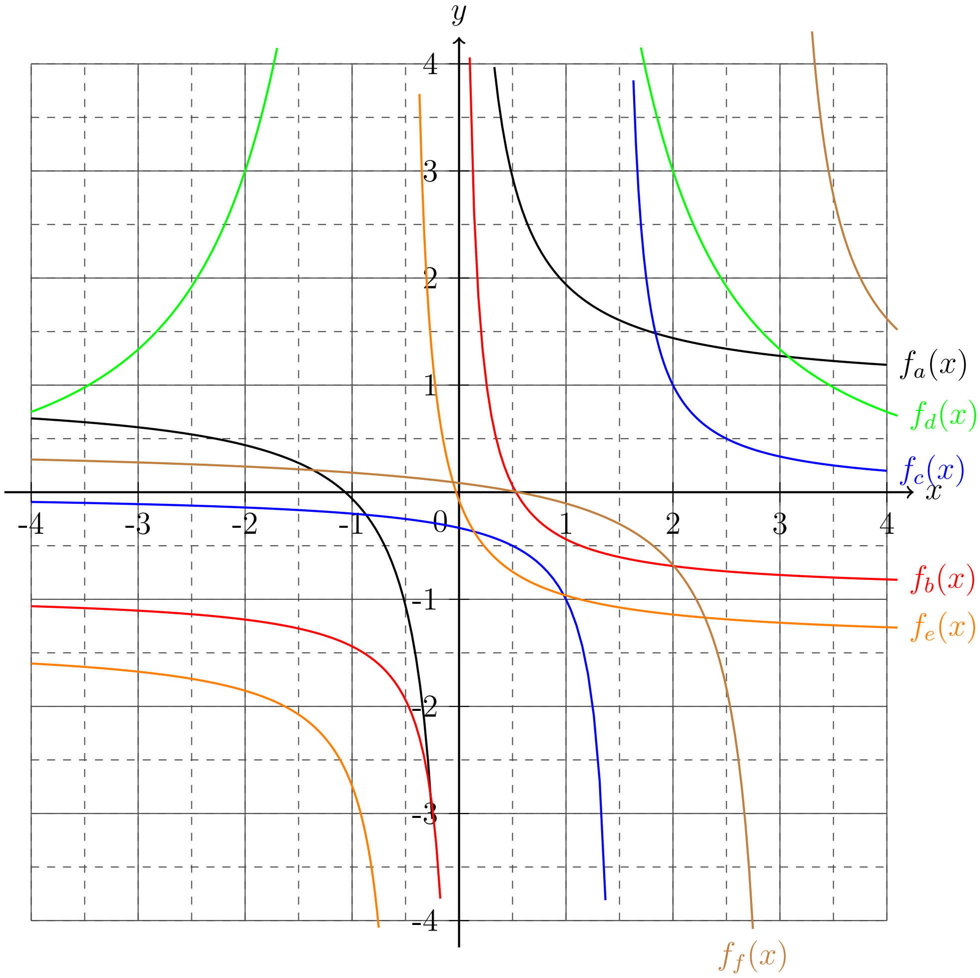
$c)\ \ f^{-1}(x) = \frac{9}{4\,(x-3)} + \frac{1}{2}$

$d)\ \ f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{4x-16} + 6}$

$e)\ \ f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{\frac{x}{2} - \frac{7}{16}} + 27}$

$f)\ \ f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln 2}\sqrt{\frac{e}{x - \sqrt{2}} + \pi}$

Aufgabe 3:



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.7.1).

18.10.47 Lösungen zu Grenzwerte

Aufgabe 1:

a) $\lim\limits_{x \nearrow 6} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \searrow 6} f(x) = \infty$

b) $\lim\limits_{x \nearrow 4} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \searrow 4} f(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x \nearrow \frac{2}{5}} f(x) = -\infty \qquad \lim\limits_{x \searrow \frac{2}{5}} f(x) = \infty$

d) $\lim\limits_{x \nearrow 3} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow 3} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow -3} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow -3} f(x) = \infty$

e) $\lim\limits_{x \nearrow \sqrt{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow \sqrt{2}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow -\sqrt{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow -\sqrt{2}} f(x) = \infty$

f) $\lim\limits_{x \nearrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow \frac{1}{2}} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x \nearrow -\frac{1}{2}} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \searrow -\frac{1}{2}} f(x) = \infty$

Aufgabe 2: *Bestimme das Verhalten der Funktionen im Unendlichen.*

a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

b) $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) $f(x) = -x^4 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +0$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -0$

f) $f(x) = -\dfrac{1}{x^4} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -0$

g) $f(x) = 3^x \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

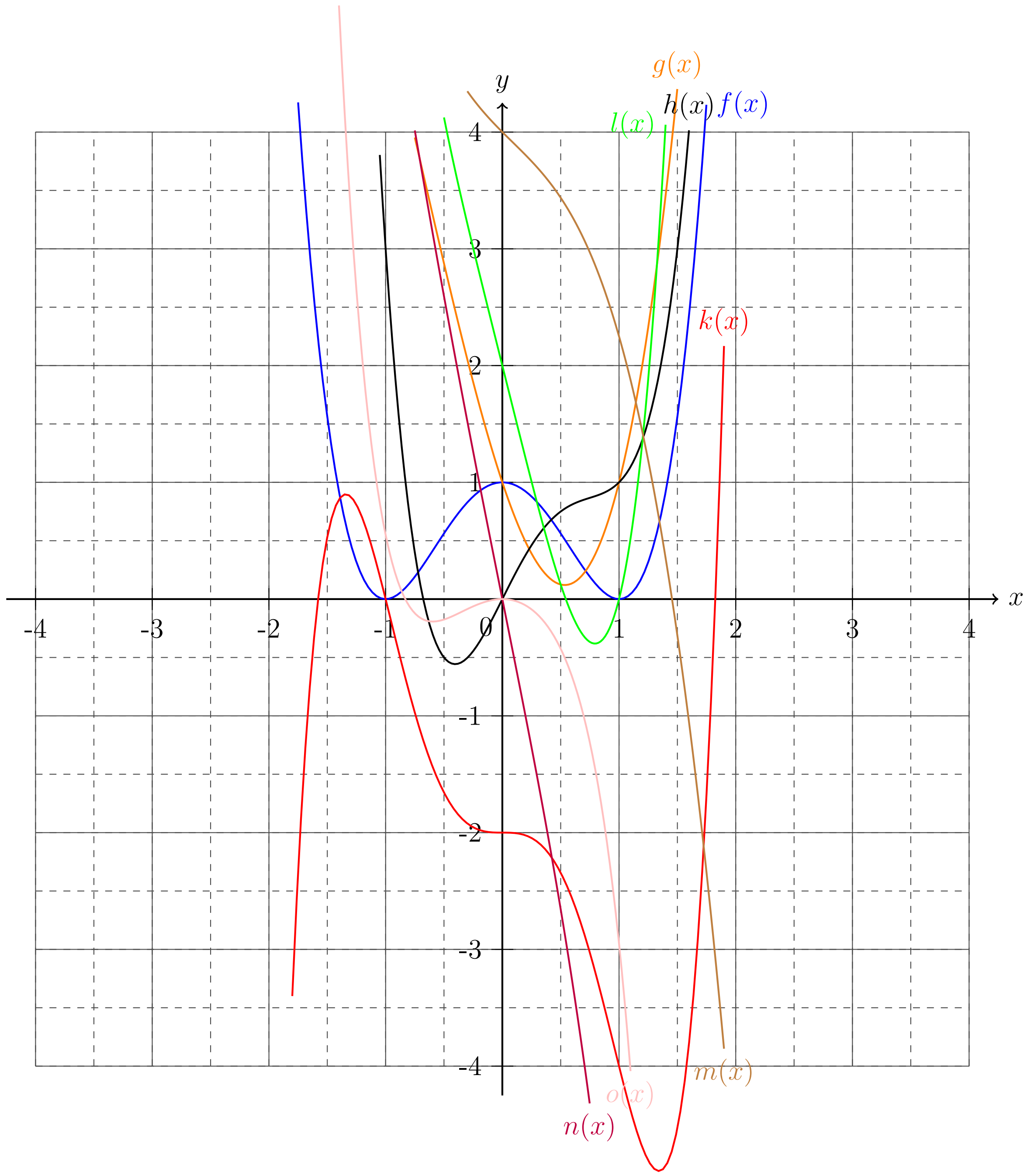
h) $f(x) = 4^{-x} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

i) $f(x) = -\dfrac{1}{2^x} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -0 \quad \wedge \quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.8.1).

18.10.48 Lösungen zu Polynomfunktionen

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

$a)$ $\mathbb{L} = \varnothing$ $\qquad$ $b)$ $x_1 = 0 \ \wedge \ x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{11}$

$c)$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{\sqrt{11} + 2}$ $\qquad$ $d)$ $\mathbb{L} = \varnothing$

$e)$ $x_1 = 0 \ \wedge \ x_2 = -3$ $\qquad$ $f)$ $x_1 = 0 \ \wedge \ x_{2,3} = -3 \pm 3\sqrt{2}$

$g)$ $x_1 = 0 \ \wedge \ x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{6}$ $\qquad$ $h)$ $x_1 = 0 \ \wedge \ x_{2,3} = -\dfrac{1}{4} \pm \dfrac{\sqrt{29}}{4}$

Aufgabe 3:

$a)$ 3. Ordnung ; $b)$ 4. Ordnung ; $c)$ 2. Ordnung ; $d)$ 5. Ordnung

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.9.1).

18.10.49 Lösungen zu Reihen

Aufgabe 1:

$a)\ 1+2+3+4+5+6$

$b)\ 1+1+2+6+24+120+720$

$c)\ 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$

$d)\ x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$

$e)\ x+\sqrt{2x}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[4]{4x}+\sqrt[5]{5x}+\sqrt[6]{6x}$

$f)\ x^3+\frac{x^4}{5}+\frac{x^5}{23}+\frac{x^6}{119}$

$g)\ x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[5]{x}\sqrt[6]{x}$

$h)\ 1\sqrt{2}\sqrt[3]{6}\sqrt[4]{24}\sqrt[5]{120}\sqrt[6]{720}$

$i)\ x2!x^2 3!x^3 4!x^4 5!x^5 6!x^6 = 24883200x^{21}$

$j)\ x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-4)\,(x-5)\,(x-6)$

$k)\ 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}$

$l)\ -x+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{120}x^6$

$m)\ -3+6-10+15-21+28-35=-20$

$n)\ 1!\cdot 3!\cdot 6!\cdot 10!$

$o)x+2x^2+\sqrt[3]{10}x^3+\sqrt[4]{20}x^4+\sqrt[5]{35}x^5+\sqrt[6]{56}x^6$

$p)\sum\limits_{n=1}^{5}\left(n+n^2+n^3\right)=1+1+1-1-4-8+1+9+27-1-16-64+1+25+125=97$

Aufgabe 2:

$$a)\quad \sum_{n=0}^{8} n = \sum_{n=1}^{8} n = \sum_{n=0}^{7}(n+1) = \ldots$$

$$b)\quad \sum_{n=1}^{5} n! = \sum_{n=0}^{4}(n+1)! = \ldots$$

$$c)\quad \prod_{n=1}^{8} x^n = \prod_{n=0}^{7} x^{n+1} = \ldots$$

$$d)\quad \prod_{n=0}^{6}(x-n)^n = \prod_{n=1}^{6}(x-n)^n = \ldots$$

$$e)\quad \sum_{n=1}^{9} nx^n(-1)^{n+1} = sum_{n=0}^{8}(n+1)x^{n+1}(-1)^n = \ldots$$

$$f)\quad \sum_{n=1}^{6} \frac{x^{2n}}{n} = \ldots$$

$$g)\quad \sum_{n=2}^{6} \frac{x^{n-4}}{n!} = \ldots$$

$$h)\quad \sum_{n=0}^{5}(-1)^{n+1}(n+1)!x^{2n+1} = \ldots$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.10.1).

18.10.50 Lösungen zu gebrochen rationalen Funktionen

Aufgabe 1:

$a)\ x^2 + 2x + 1$	$b)\ x^3 - x + 5$
$c)\ 5x^2 - 7$	$d)\ x^2 - 5$
$e)\ x^3 - \frac{7}{3}$	$f)\ -x^2 - 7x + 3$
$g)\ -\ln 2 \cdot x^2 - e^{\pi}$	$h)\ \sqrt{2}x^3 - ex + \pi$

Aufgabe 2:

$a)$ $x-9\frac{47}{x+5}$

$b)$ $x+3\frac{2x+1}{x^2-2}$

$c)$ $6x^3+6x^2+7x+7-\frac{8}{x-1}$

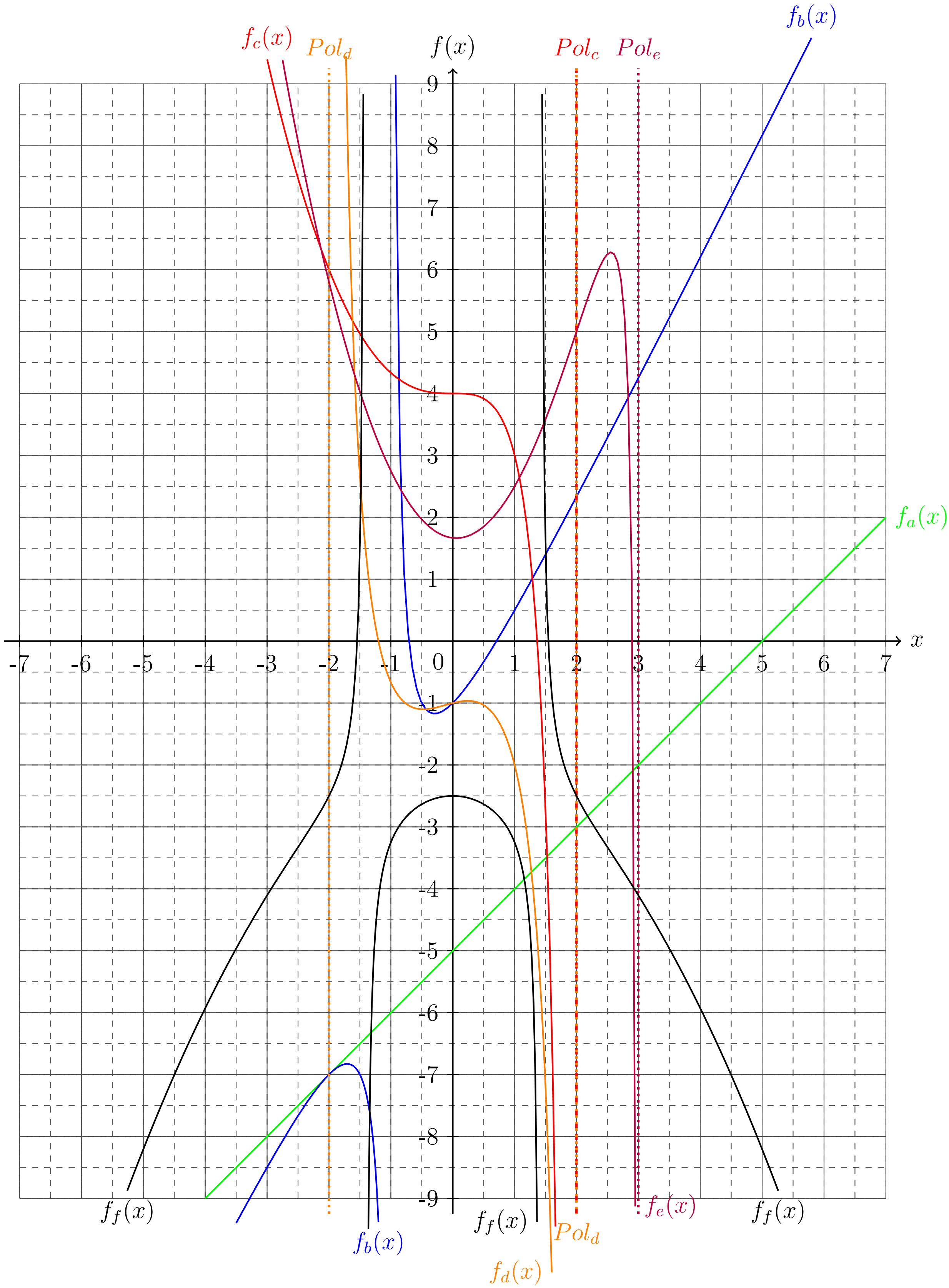
$d)$ $\frac{x^4}{6}-\frac{5x^2}{6}+\frac{5}{12}+\frac{43}{6\,(4x^2+2)}$

$e)$ $-35x^2-525x-7920-\frac{118790}{x-15}$

$f)$ $x^7+3x^5+9x^3-x^2+27x-2+\frac{81-5}{x^2-3}$

Aufgabe 3:
$a)$ echt, $b)$ echt, $c)$ unecht, $d)$ echt, $e)$ unecht, $f)$ echt.

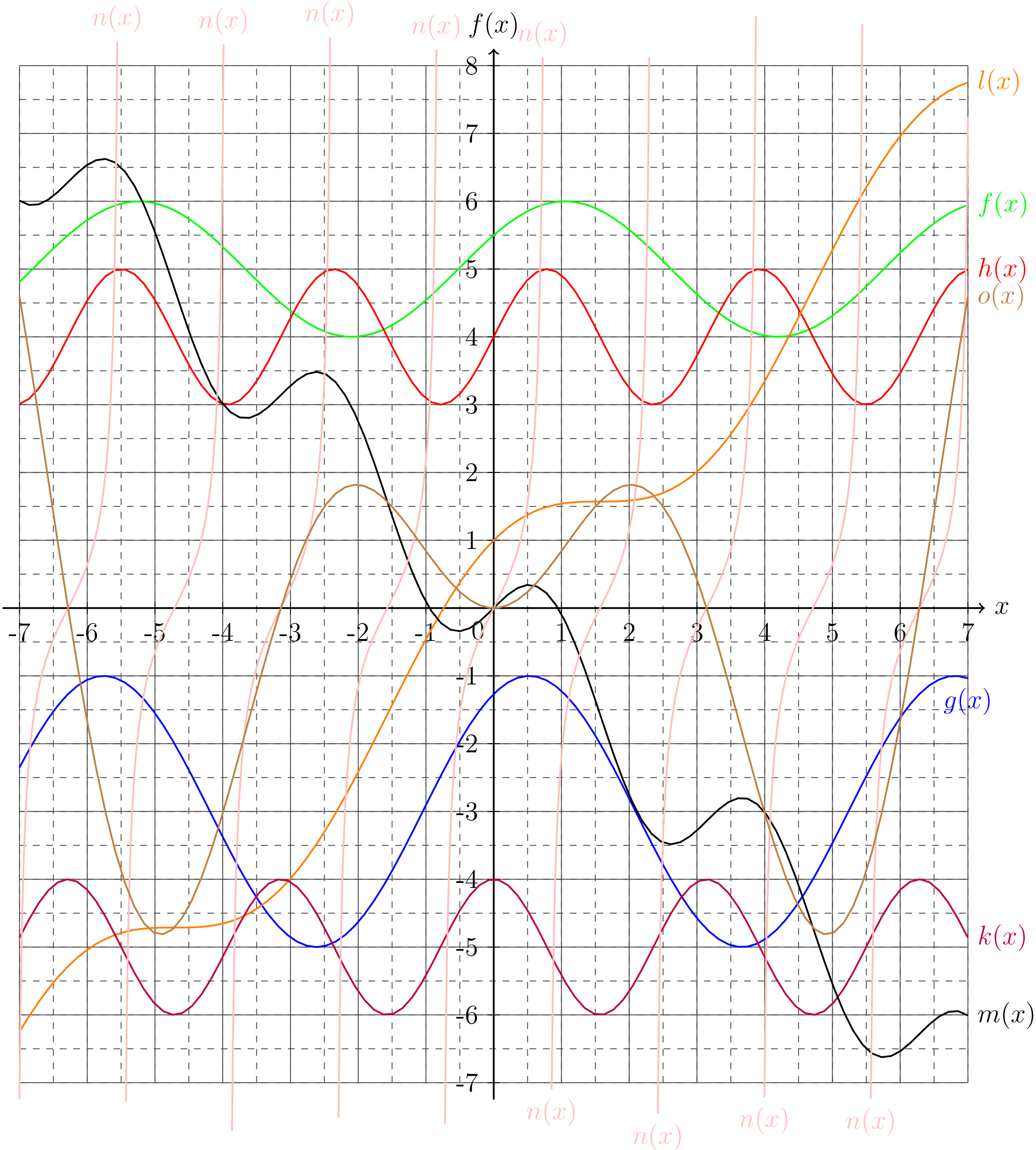
Aufgabe 4: Wenn die Polstellen mit angegeben sind, sind weiterführende Teile der Funktion nicht mit abgebildet. Dabei handelt es sich unter anderem um Extrem- und Wendepunkte.



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.11.1).

18.10.51 Lösungen zu trigonometischen Funktionen

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

$$
\begin{aligned}
a)\ \sin(2x) &= \sin(x+x) \\
&= \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) \\
&= \sin(x)\cos(x) + \sin(x)\cos(x) \\
&= 2\sin(x)\cos(x) \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b)\ \cos(2x) &= \cos(x+x) \\
&= \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) \\
&= \cos^2(x) - \sin^2(x) \qquad \square \quad \text{mit: } 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \\
&= 1 - \sin^2(x) - \sin^2(x) \\
&= 1 - 2\sin^2(x) \qquad \square \quad \text{mit: } 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) \\
&= 1 - 2\left(1 - \cos^2(x)\right) \\
&= 2\cos^2(x) - 1 \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\ \cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 \quad |+1 \\
\cos(2x) + 1 &= 2\cos^2(x) \quad |:2 \\
\frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 1\right) &= \cos^2(x) \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d)\ \cos(2x) &= 2\cos^2(x) - 1 \quad \text{mit: } 1 = \cos^2(x) + \sin^2(x) \Rightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \\
\cos(2x) &= 2 - 2\sin^2(x) - 1 \quad |-1 \\
\cos(2x) - 1 &= 2\sin^2(x) \quad |:2 \\
\frac{1}{2}\left(\cos(2x) - 1\right) &= \sin^2(x) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3:

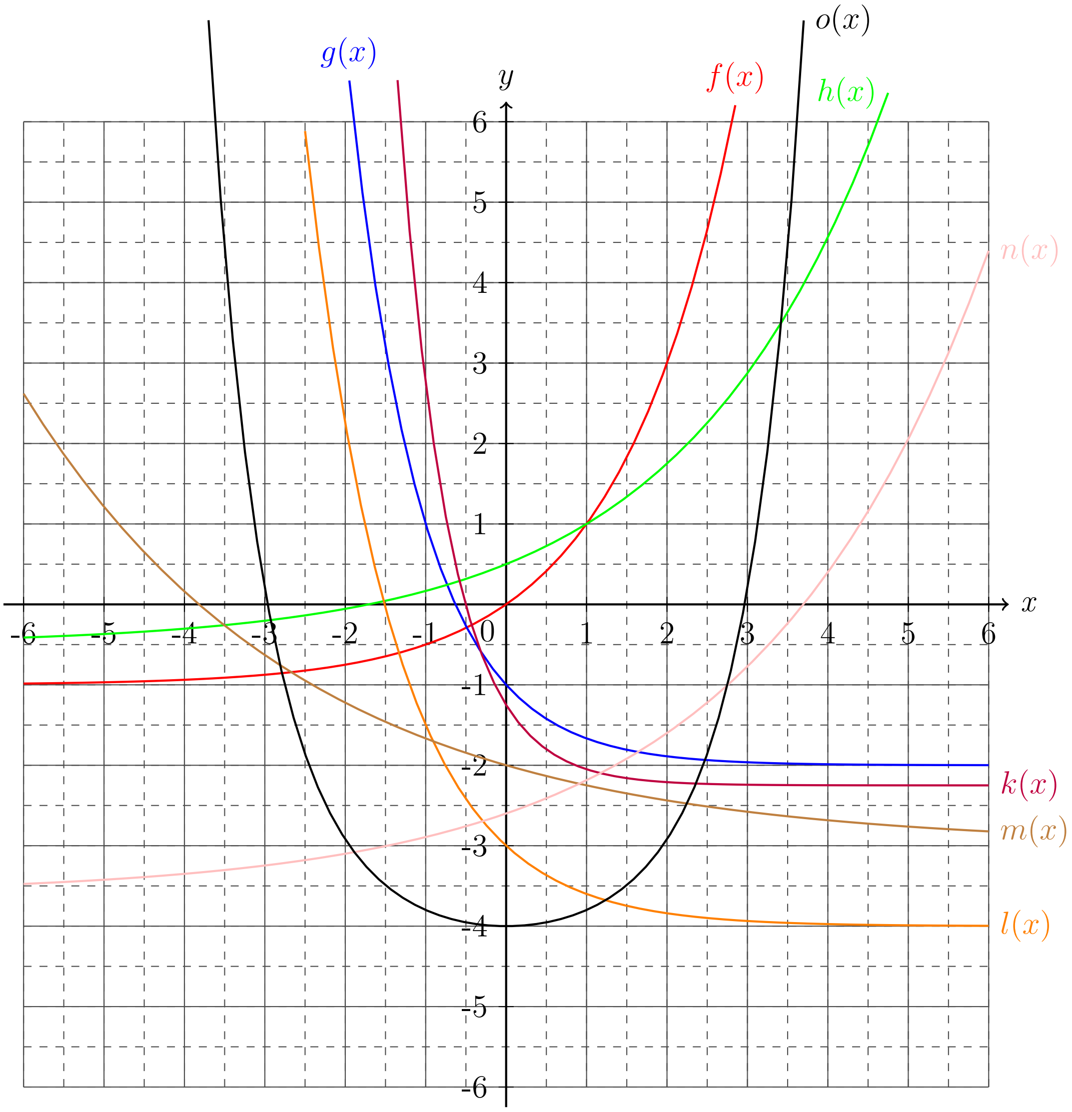
a) $x_n = n\pi \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$ *b)* $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$

c) $x_n = n\pi \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$ *d)* $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.13.1).

18.10.52 Lösungen zu Exponentialfunktionen

Aufgabe 1:



Aufgabe 2:

$a)\ \ f(x) = 3^x$ $\qquad$ $b) g(x) = \ \ 0,5^x$

$c)\ \ h(x) = 5^x - 2$ $\qquad$ $d)\ \ l(x) = 2^{-x} + 1,5$

$e)\ \ k(x) = 1,5^{-x} - 1,75$ $\qquad$ $f)\ \ m(x) = 0,75^{-x} - 0,25$

Aufgabe 3:

a)

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau} \approx 9,85 \cdot 10^{-10} \text{ (gilt nur für Zeit in Jahren)} \tag{18.6}$$

b)

$$\tau = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau} = 0,140 \text{ (gilt nur für Zeit in Stunden)} \tag{18.7}$$

c)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t} \quad = 25000 e^{-\frac{ln2}{5730a} 15300a} \approx 3928 \tag{18.8}$$

d)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{\tau} t} \quad = 214000 e^{-\frac{ln2}{19s} 2700s} \approx 3,57 \cdot 10^{-38} \approx 0 \tag{18.9}$$

e)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow 0,25 = 1 e^{-\frac{ln2}{13,16d} t} \quad \Rightarrow t = \frac{-\tau \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{\ln 2} = 26,32d \tag{18.10}$$

f)

$$\Rightarrow t = \frac{-\tau \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{\ln 2} = \frac{-2,898a \ln\left(\frac{0,05}{1}\right)}{\ln 2} \approx 12,53a \tag{18.11}$$

g)

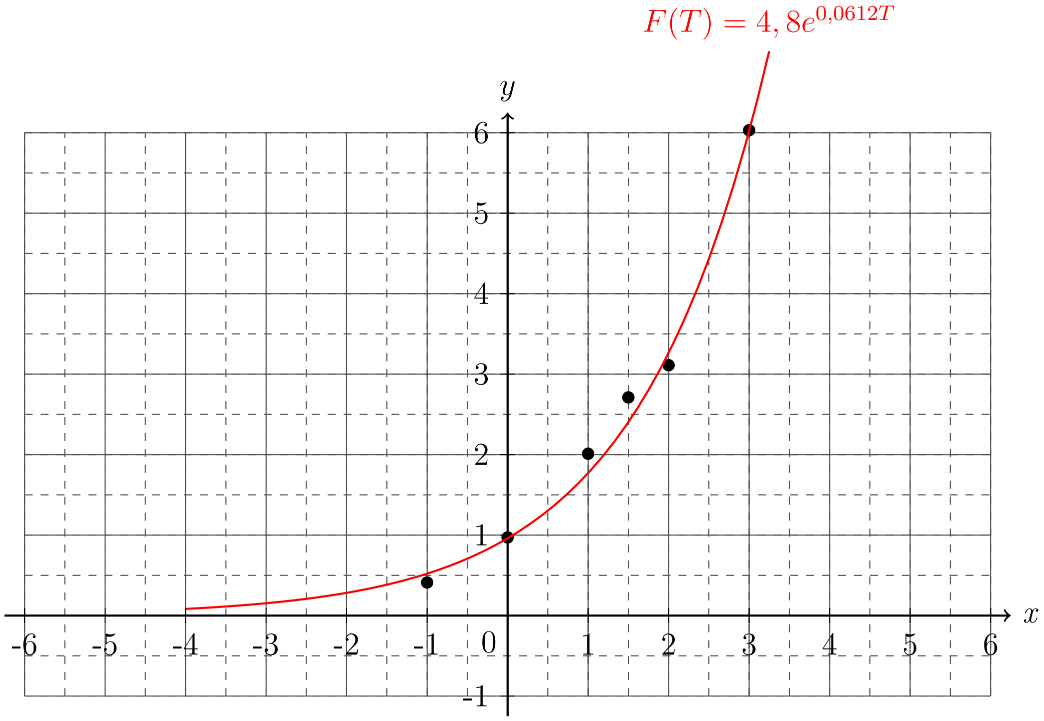
$$\Rightarrow t = \frac{-\tau \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{\ln 2} = \frac{-4,28d \ln\left(\frac{14578}{43688}\right)}{\ln 2} \approx 6,777d \tag{18.12}$$

h)

$$\Rightarrow t = \frac{-\tau \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)}{\ln 2} = \frac{-12,33a \ln\left(\frac{2,454 \cdot 10^4}{5,346 \cdot 10^{12}}\right)}{\ln 2} \approx 341,53a \tag{18.13}$$

Aufgabe 4:

a) *b)* *c)*



d)

T in $[°C]$	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35	40
$F(T)$ in $\left[\frac{g}{m^3}\right]$	2,60	3,53	4,80	6,52	8,85	12,02	16,32	22,17	30,10	40,88	55,51
F_R in $[\%]$	0,20	0,27	0,37	0,50	0,68	0,92	1,25	1,69	2,28	3,06	4,12

e) $0,73F(15°C) = 8,77\frac{g}{m^3} \Rightarrow 0,674\%$

$H_2O\ \ 16,852 : 1\ \ CO_2, \quad H_2O\ \ 3744,88 : 1\ \ CH_4, \quad CO_2\ \ 222,\bar{2} : 1\ \ CH_4$

Aufgabe 5:

a) $\lambda = 0,000121\frac{1}{a}$

b) $m_{^{14}C} = 2,51 \cdot 10^{-16}kg$

c) $t_c \approx 4300a$

d) Ein Sonnensturm kann die ^{14}C-Produktion erhöhen.

$N(t) = 1,90216 \cdot 10^{-13}g = N_0e^{-0,000121\frac{1}{a}4478a} \Rightarrow N_0 = 3,27012 \cdot 10^{-13g}$

$\Rightarrow^{14} C_{\text{normal}}\ \ 1 : 1,719\ \ ^{14}C_{\text{früher}}$

$\Rightarrow^{12} C\ \ 1 : 1,719 \cdot 10^{12}\ \ ^{14}C_{\text{früher}}$

Aufgabe 6:

a) $\lambda_{235} = 9,8485 \cdot 10^{-10}\frac{1}{a}$

b) $\lambda_{238} = 1,55125 \cdot 10^{-10}\frac{1}{a}$

c) $^{207}Pb\ \ 1 : 21,7033\ \ ^{206}Pb$

$d)$ $T_{\oplus} = 4,543 \cdot 10^9 a$

Aufgabe 7:

$a)$ $\bar{x}_I = 1,5\overline{90}\%$; $\bar{x}_W = 1,2\overline{90}\%$

$b)$ $f_I(n) = 1,015\overline{90}^n$; $f_W(n) = 1,012\overline{90}^n$

$c)$ $\dfrac{0,8 \cdot f_I(0)}{f_I(9)} \approx 70,51\%$

$\dfrac{0,8 \cdot f_I(0)}{f_I(45)} \approx 39,95\%$

$d)$ $0,1 f_w(n) \stackrel{!}{=} 1 \;\Rightarrow\; f_w(n) = 10 = 1,012\overline{90}^n \;\Rightarrow\; n = 179,518a$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.14.1).

18.10.53 Lösungen zu Proportionalitäten

Aufgabe 1:

proportional	antiproportional	proportional
beliebig	proportional	antiproportional
beliebig	antiproportional	beliebig
proportional	beliebig	beliebig
proportional	proportional	antiproportional

Aufgabe 2:

$a)$ Proportional ; $b)$ beliebig ; $c)$ Antiproportional
$d)$ beliebig ; $e)$ Proportional ; $f)$ Proportional
$g)$ beliebig ; $h)$ Antiproportional ; $i)$ beliebig
$j)$ beliebig ; $k)$ Proportional ; $l)$ Antiproportional

Aufgabe 4:

$a)$ $f(x) = 3x$ $e)$ $f(x) = 3,24x$
$f)$ $f(x) = -1,93x$ $k)$ $f(x) = 0,03x$

Aufgabe 5:

$c)\ f(x) = \dfrac{80}{x}$ $\quad h)\ f(x) = \dfrac{25000}{x}$

$l)\ f(x) = \dfrac{50}{x}$

Aufgabe 6:

$a)\ \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{a_1}{a_2} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 30$ $\quad b)\ \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{D_1}{D_2} \quad \Rightarrow \quad D_2 = 480$

$c)\ \dfrac{D_1}{D_2} = \dfrac{s_2}{s_1} \quad \Rightarrow \quad s_2 = 180$ $\quad d)\ \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{a_2}{a_1} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 67,1$

$e)\ \dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \quad \Rightarrow \quad R_1 = \dfrac{299880}{23} \approx 13038,261$ $\quad f)\ \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{A_1}{A_2} \quad \Rightarrow \quad l_2 = 5$

$g)\ \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \dfrac{554}{3} = 184,\bar{6}$ $\quad h)\ \dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad E_1 = \dfrac{983691}{769} \approx 1279,169$

Aufgabe 7:

$a)\ H \propto DU$ $\quad b)\ p \propto Amc$

$c)\ a \propto \dfrac{y}{x}$ $\quad d)\ k \propto \dfrac{fz}{T}$

$e)\ E \propto \dfrac{Q}{r}$ $\quad f)\ P \propto \dfrac{T}{dN}$

$g)\ L \propto \dfrac{nU}{Nd}$ $\quad h)\ W \propto \dfrac{IC}{gHT}$

$i)\ F \propto \dfrac{mv^2}{r}$ $\quad j)\ G \propto \dfrac{\ln(m)e^{\lambda}\sqrt{z}y^3}{r^2}$

Aufgabe 8: *Gegeben sind die folgenden proportionalen Zuordnungen. Fülle die Tabellen vollständig aus.*

	$a)\ A$	B	
	8	72	
: 8			: 8
	1	9	
·12			·12
	12	108	

	$b)\ P$	R	
	11	121	
: 11			: 11
	1	11	
·8			·8
	8	88	

	$c)\ P$	R	
	35	2800	
: 35			: 35
	1	80	
·82			·82
	82	6560	

Aufgabe 9: *Fünf Waldarbeiter durchsuchen ein Waldgebiet von* $1450m^2$ *in acht Stunden. Berechne wie lange neun Waldarbeiter für dieses Waldgebiet bräuchten.*

$4,\bar{4}h$

Aufgabe 10: *Ein Handwerker stellte für seine vierstündige Arbeit eine Rechnung in Höhe von* 316 €*. Berechne wie viel Geld der Handwerker für sieben Stunden dieser Arbeit verlangt hätte.*

553 €

Aufgabe 11: *Sechs Waldarbeiter durchsuchen ein Waldgebiet von* $1920m^2$ *in acht Stunden. Berechne wie lange zehn Waldarbeiter für ein Waldgebiet von* $5600m^2$ *Größe bräuchten.*

Ein Waldarbeit schafft pro Stunde $240m^2$. Somit brauchen 10 Waldarbeiter $2,\bar{3}h$ für $5600m^2$.

Aufgabe 12: *Neun Joghurts werden in* 54 *s hergestellt. Berechne wie lange die Produktion von* 50 *Joghurts dauern würde.*

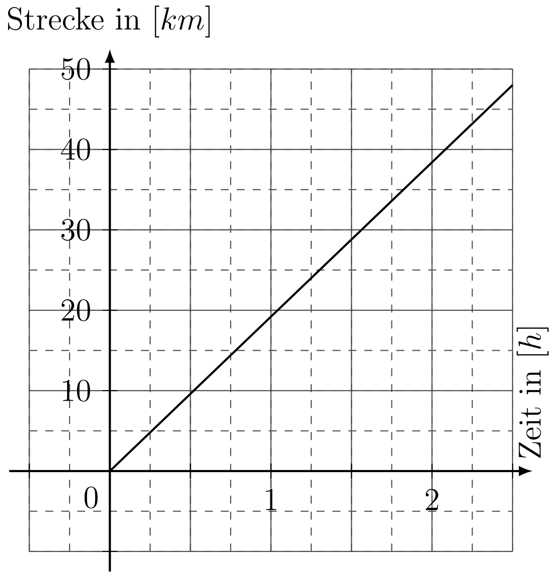
300

Aufgabe 13: 500 *Joghurts werden von* 8 *Maschinen in* 24 *min hergestellt. Berechne wie lange die Produktion von* 500 *Joghurts mit* 3 *Maschinen dauern würde.*

64 min

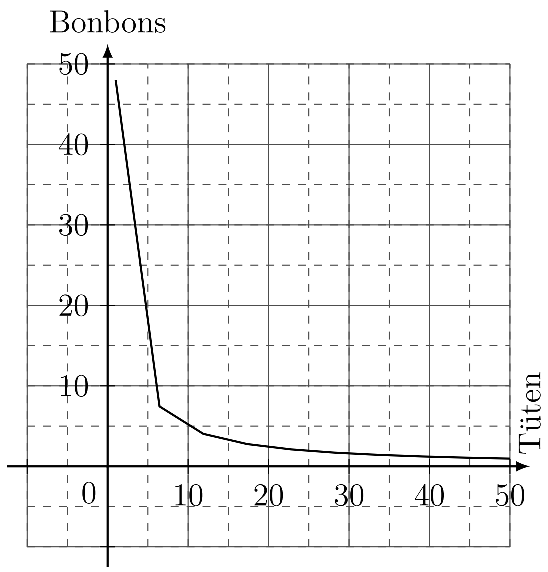
Aufgabe 14: *Ein Bagger hat nach* 30 *min eine Strecke von* 12 *km zurückgelegt. Berechne wie viel Kilometer der Bagger nach* 2 *h zurückgelegt hat, wenn dieser seine Geschwindigkeit hält. Zeichne den Graphen dieser Zuordnung in ein geeignetes Koordinatensystem.*

$48km$ in $2h$.



Aufgabe 15: *In jeder von vier Tüten befinden sich jeweils* 24 *Bonbons. Berechne wie viele Bonbons sich in jeder Tüte befinden müssten, wenn diese gerecht auf* 16 *kleinere Tüten verteilt werden würden. Zeichne den Graphen dieser Zuordnung in ein geeignetes Koordinatensystem.*

6 Bonbons in je 16 Tüten.



Aufgabe 16: *Vier Traktoren pflügen einen Acker in drei Stunden. Berechne wie lange fünf Traktoren für diese Arbeit brauchen würden.*

$2,4h$

Aufgabe 17: *Gegeben sind die folgenden antiproportionalen Zuordnungen. Fülle die Tabellen vollständig aus.*

	a) A	B	
	2	60	
$:2$			$\cdot 2$
	1	120	
$\cdot 5$			$:5$
	5	24	

	b) P	R	
	36	15	
$:36$			$\cdot 36$
	1	540	
$\cdot 20$			$:20$
	20	27	

	c) P	R	
	120	12	
$:12$			$\cdot 12$
	10	144	
$\cdot 9$			$:9$
	90	16	

	d) A	B	
	4	72	
$:4$			$\cdot 4$
	1	288	
$\cdot 9$			$:9$
	9	32	

	e) P	R	
	9	45	
$:9$			$\cdot 9$
	1	405	
$\cdot 5$			$:5$
	5	81	

	f) P	R	
	12	63	
$:12$			$\cdot 12$
	1	756	
$\cdot 7$			$:7$
	7	108	

Aufgabe 18: *Ein Kinder im Alter von drei Jahren wiegt* $14kg$ *und wurde in diesem Jahr um* $2kg$ *schwerer. Berechne das Gewicht dieses Menschens, wenn dieser* 20 *Jahre alt ist.*

Es handelt sich um eine beliebige Zuordnung.

Aufgabe 19: *Eine Pumpe fördert in vier Stunden genau* 182 *Liter Wasser. Berechne, wie viel Liter Wasser die Pumpe in sieben Stunden fördert.*

$318,5l$

Aufgabe 20: *Die Lebensmittelvorräte einer Gruppe mit fünf Personen reichen für zwölf Tage. Berechne wie lange die Lebensmittel reichen, wenn die Gruppe aus sechs Personen bestehen würde.*

10 Tage

Aufgabe 21: *Drei Schüler benötigen für ihren Schulweg zusammen* $15min$. *Berechne wie viel Zeit nur zwei dieser Schüler zur Schule benötigen.*

Es handelt sich um eine beliebige Zuordnung.

Aufgabe 22: *Vier Arbeiter verdienen in acht Tagen* 1680 €. *Berechne wie viel Lohn der Arbeitgeber aus zahlen muss, wenn dieser fünf Arbeiter fünf Tage lang beschäftigt?*

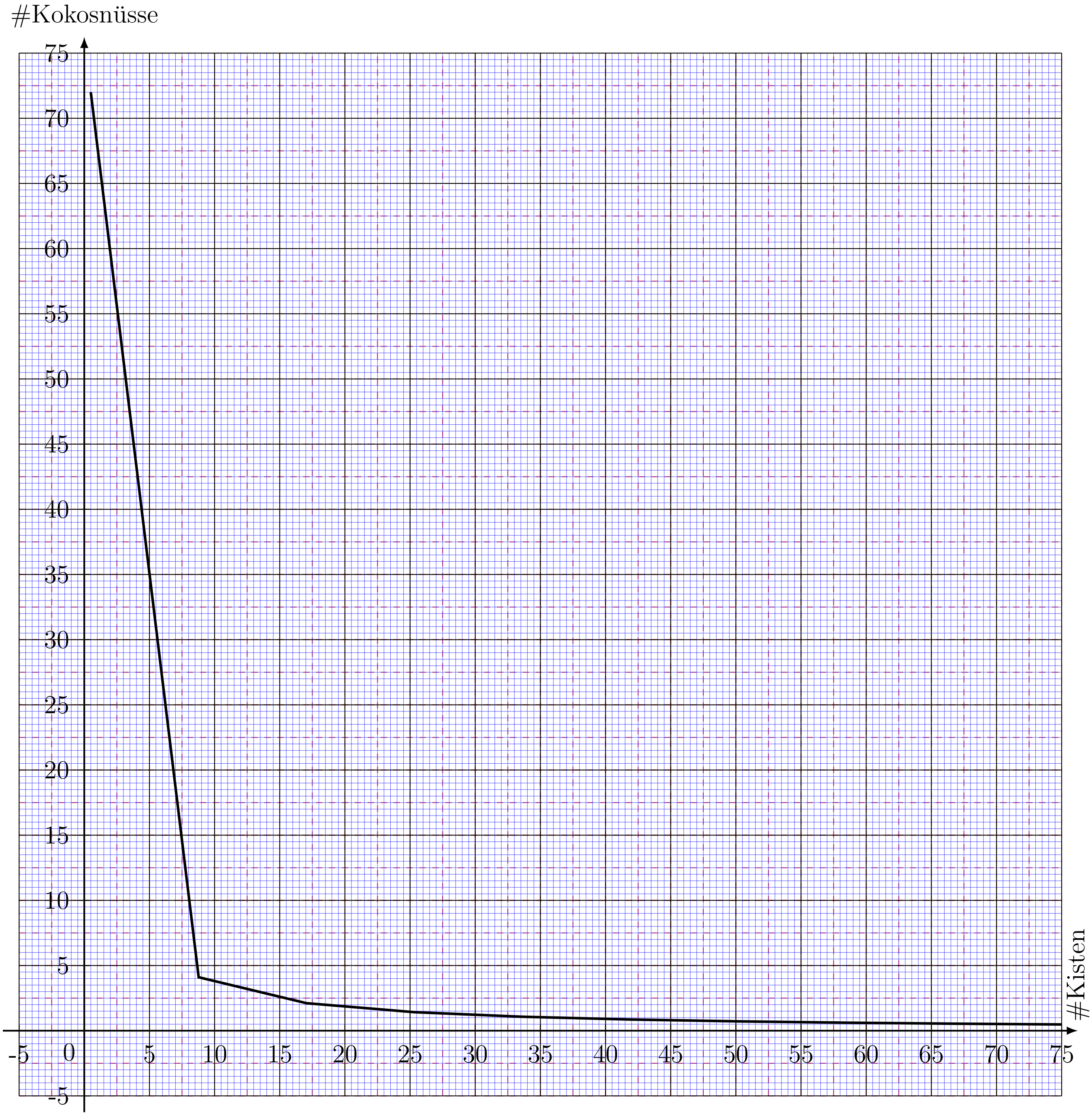
Ein Arbeiter bekommt an einem Tag $52,5$ €, somit bekommen die fünf Arbeiter nach fünf Tagen $1312,5$ €.

Aufgabe 23: *Sechs Forstarbeiter bepflanzen ein Waldstück mit* 48 *Bäumen in* $2,4$ *Stunden. Berechne wie lange acht Forstarbeiter für* 96 *Bäume benötigen.*

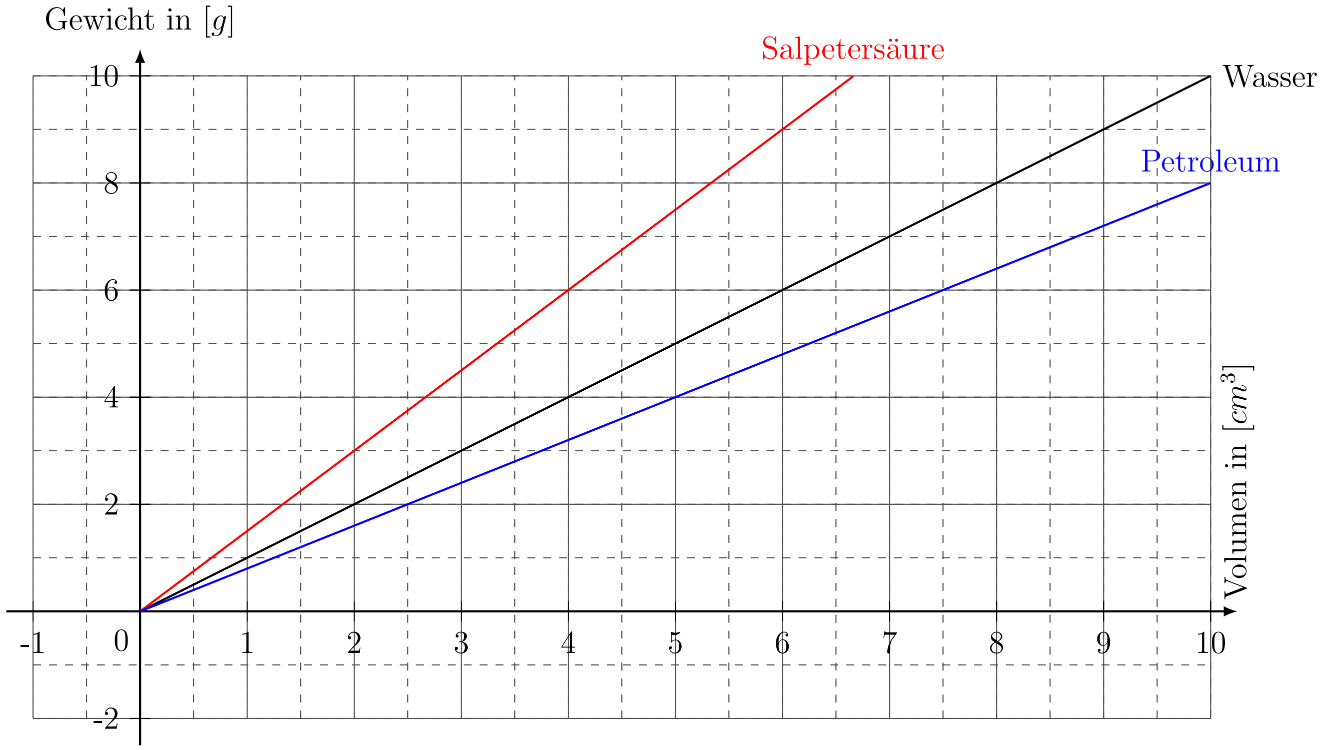
Ein Arbeiter schafft 8 Bäume in $2,4h$, somit schafft dieser $3,\bar{3}$ Bäume pro Stunde. Acht Forstarbeiter schaffen $26,\bar{6}$ Bäume pro Stunde und somit benötigen diese für 96 Bäume $3,6h$.

Aufgabe 24: *In sechs Kisten befinden sich jeweils* 12 *Kokosnüsse. Berechne anhand der Wertetabelle wie viele Kokosnüsse in die angegebene Anzahl von Kisten gepackt werden müssten, wenn alle sechs Kisten neu verpackt werden müssen. Trage die Wertepaare in der Koordinatensystem ein und verbinde die Punkte sinnvoll (ohne Lineal).*

1	2	3	4	6	8	12	24	36	72
72	36	24	18	12	9	6	3	2	1



Aufgabe 25: *Bearbeite alle Teilaufgaben.*



$a)$ Wie viel Gramm wiegen $4cm^3$ Wasser, Petroleum beziehungsweise Salpetersäure?

$4g; 3,6g; 6g$

$b)$ Wie viel Kubikzentimeter entsprechen $5g$ Wasser, Petroleum beziehungsweise Salpetersäure?

$5cm^3; 6,25cm^3; 3,\bar{3}cm^3$

$c)$ Wie viel Gramm wiegen $2,5cm^3$ Wasser, Petroleum beziehungsweise Salpetersäure?

$2,5g; 2g; 3,75g$

$d)$ Berechne wie viel Gramm $1cm^3$ Wasser, Petroleum beziehungsweise Salpetersäure wiegen.

$1g; 0,8g; 1,5g$

$e)$ Bestimme zu jedem gezeigten Graphen mindestens vier Punkte.

Wasser	$1g$	$2g$	$3g$	$4g$	$5g$
	$1cm^3$	$2cm^3$	$3cm^3$	$4cm^3$	$5cm^3$

$f)$ Dividiere bei den jeweiligen Wertepaaren den Variablenwert durch den Funktionswert und beschreibe die Auffälligkeiten.

Die Werte sind bei jeder Flüssigkeit immer gleich, es ist die Quotientengleichheit zu erkennen.

Petroleum	$1,5g$	$3g$	$4,5g$	$6g$	$7,5g$
	$1cm^3$	$2cm^3$	$3cm^3$	$4cm^3$	$5cm^3$

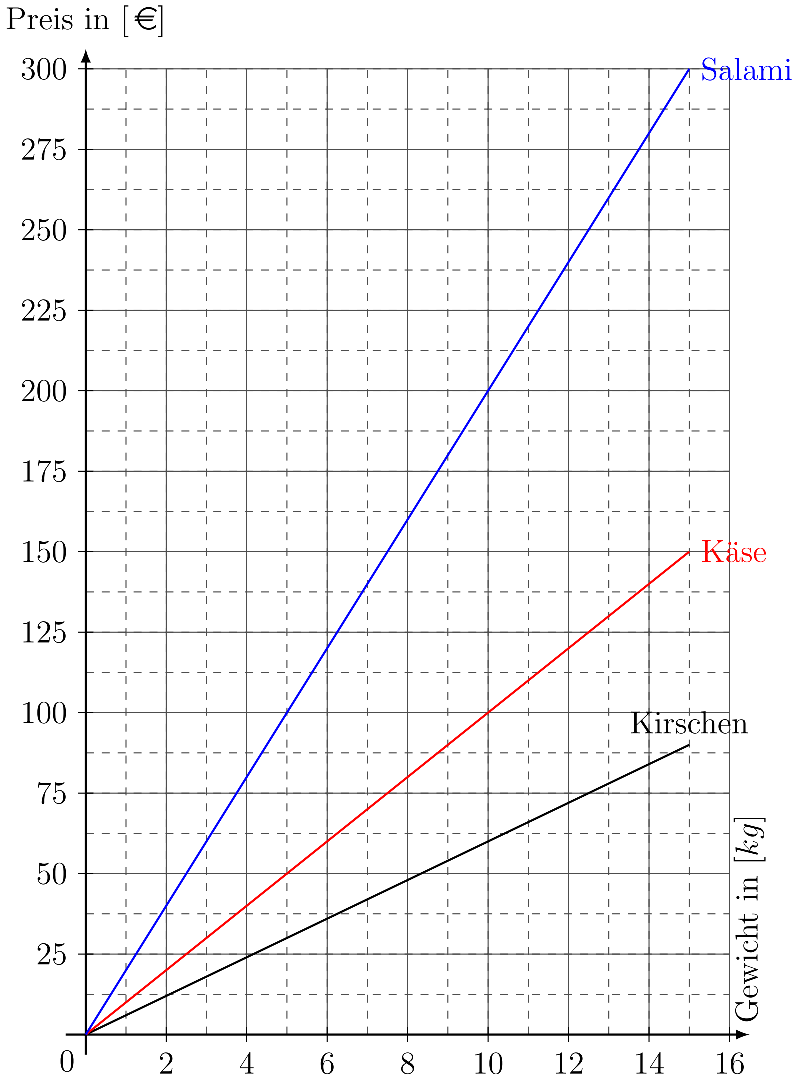
Salpetersäure	$0,8g$	$1,6g$	$2,4g$	$3,2g$	$4g$
	$1cm^3$	$2cm^3$	$3cm^3$	$4cm^3$	$5cm^3$

Aufgabe 26: *In den Tabellen wurde verschiedenen Gewichten von Lebensmitteln ein Preis proportional zugeordnet. Berechne mindestens zu jedem Lebensmittel* 4 *weitere Punkte und zeichne anschließend die Punkte in ein gemeinsames Koordinatensystem ein (bis* $15kg$*). Verbinde die zusammengehörigen Punkte, sodass eine Gerade als Graph der linearen Funktion entsteht.*

Kirschengewicht	$2kg$	$4kg$	$8kg$	$10kg$	$15kg$
Preis	12 €	24 €	48 €	60 €	90 €

Käsegewicht	$0,5kg$	$4kg$	$8kg$	$10kg$	$15kg$
Preis	5 €	40 €	80 €	100 €	150 €

Salamigewicht	$0,2kg$	$4kg$	$8kg$	$10kg$	$15kg$
Preis	4 €	80 €	160 €	200 €	300 €



Aufgabe 27: *Beantworte die nachfolgenden Fragen durch Ablesen der Graphen aus Aufgabe* 26.

$a)$ Wie viel Kilogramm Käse können von 70 € gekauft werden?

$7kg$

$b)$ Wie viel Kilogramm Salami könnten statt $5kg$ Käse gekauft werden?

50 €

$c)$ Wie viel würden $12kg$ Kirschen kosten?

72 €

$d)$ Wie viel Kilogramm Käse könnten statt $9kg$ Kirschen gekauft werden?

$5,4kg$

$e)$ Wie viel Kilogramm Kirschen können von 33 € gekauft werden?

$5,5kg$

$f)$ Wie viel würden $4,5kg$ Salami kosten?

90 €

$g)$ Wie viel Kilogramm Kirschen könnten statt $3kg$ Salami gekauft werden?

$10kg$

$h)$ Wie viel Kilogramm Käse können von 55 € gekauft werden?

$5,5kg$

Aufgabe 28: *Berechne den Preis von $12kg$ Kirschen, wenn $3kg$ Kirschen 9 € kosten.*

36 €

Aufgabe 29: *Eine Pumpe förderte in drei Stunden genau $219l$ Wasser. Berechne wie viel Liter Wasser nach 7 Stunden gefördert wurden.*

$511l$

Aufgabe 30: *Ein acht minütiges Telefongespräch ins Ausland kostete $6,40$ €. Berechne wie teuer ein $15min$ Gespräche wäre.*

12 €

Aufgabe 31: *Fülle die Tabellen vollständig aus. Benutze den Dreisatz für proportionale Zuordnungen.*

	a) A	B	
	40	480	
$:40$	1	12	$:40$
$\cdot 75$	75	900	$\cdot 75$

	b) P	R	
	25	625	
$:25$	1	25	$:25$
$\cdot 84$	84	2160	$\cdot 84$

	c) P	R	
	24	1632	
$:24$	1	68	$:24$
$\cdot 73$	73	4964	$\cdot 73$

	d) A	B	
	64	160	
$:64$	1	2,5	$:64$
$\cdot 33$	33	82,5	$\cdot 33$

	e) P	R	
	0,5	140	
$\cdot 2$	1	280	$\cdot 2$
$\cdot 2,3$	2,3	644	$\cdot 2,3$

	f) P	R	
	15	3870	
$:15$	1	258	$:15$
$\cdot 4,4$	4,4	1135,2	$\cdot 4,4$

Aufgabe 32: *Berechne den Preis von* 20 *Äpfeln, wenn* 6 *Äpfel* 2 € *kosten.*

$6,\bar{6}$ €

Aufgabe 33: *Berechne wie viel Liter Benzin ein Auto im Durchschnitt auf einer Strecke von* $750km$ *verbraucht, wenn dieses Auto einen durchschnittlichen Verbrauch von* $5,5l$ *Benzin pro* $100km$ *hat.*

$41,25$l

Aufgabe 34: *Eine Pumpe fördert in zwei Stunden genau* $147l$ *Wasser. Berechne wie viel Wasser nach* 17 *Stunden gefördert wurden.*

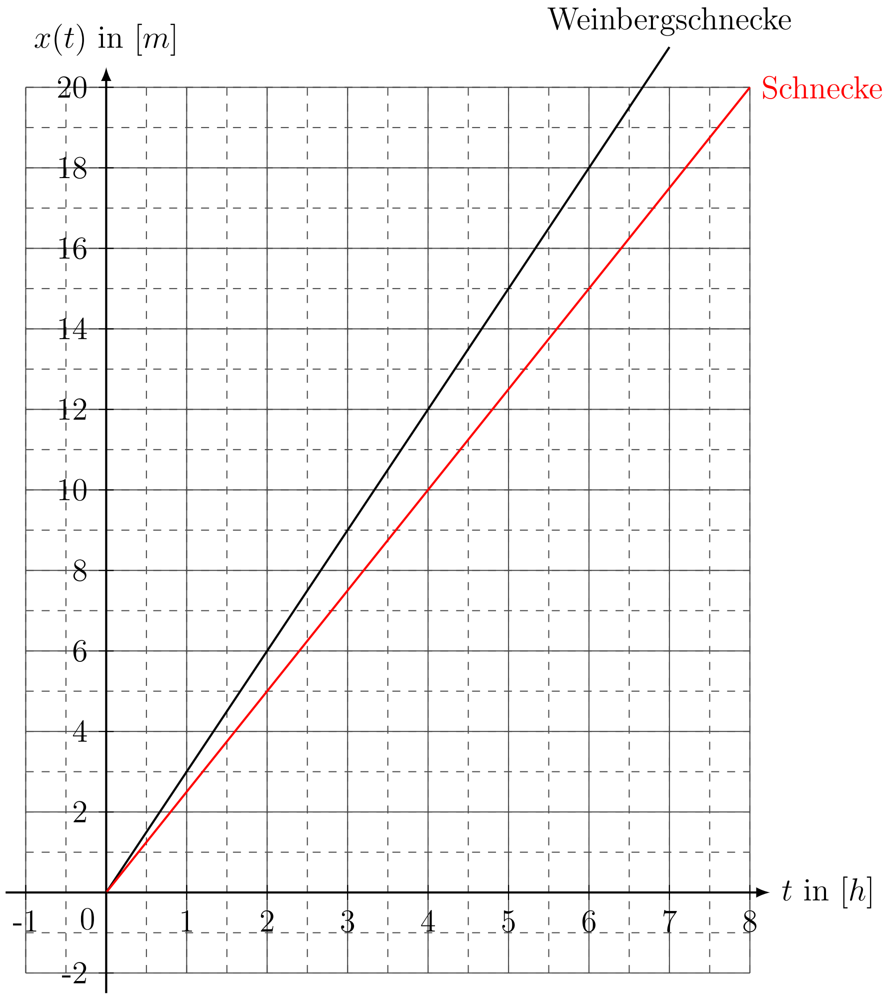
$1249,5$l

Aufgabe 35: *Eine Weinbeinschnecke legt in einer Stunde eine Strecke von* $3m$ *zurück. Berechne wie viel Strecke die Schnecke nach der, in der Tabelle gegeben, Zeit zurückgelegt hat und trage* *dies in die Tabelle ein. Zeichne die Wertepaare in das gegebene Koordinatensystem unter der Aufgabe* 36 *ein.*

t	$0,5h$	$1h$	$1,5h$	$2h$	$3h$	$6,5h$	$8h$
$x(t)$	$1,5m$	$3m$	$4,5m$	$6m$	$9m$	$13,5m$	$24m$

Aufgabe 36: *Eine andere Schnecke legt in drei Stunde eine Strecke von* $7,5m$ *zurück. Berechne wie viel Strecke die Schnecke nach der, in der Tabelle gegeben, Zeit zurückgelegt hat und trage dies in die Tabelle ein. Zeichne die Wertepaare in das gegebene Koordinatensystem ein.*

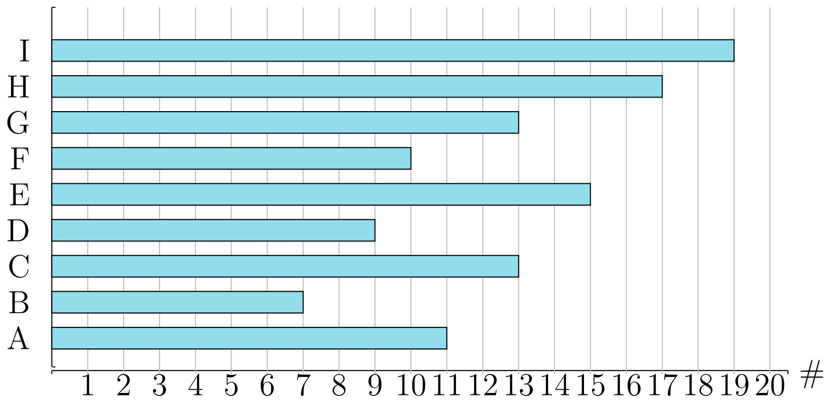
t	$0,5h$	$1h$	$1,5h$	$2h$	$3h$	$6h$	$7h$
$x(t)$	$1,25m$	$2,5m$	$3,75m$	$5m$	$7,5m$	$15m$	$17,5m$

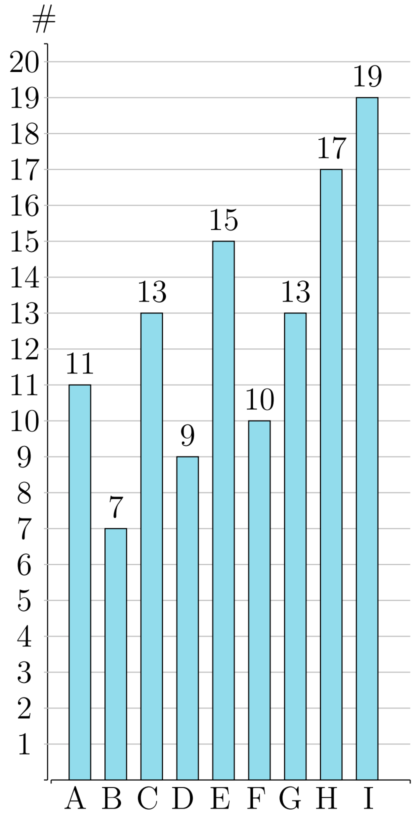


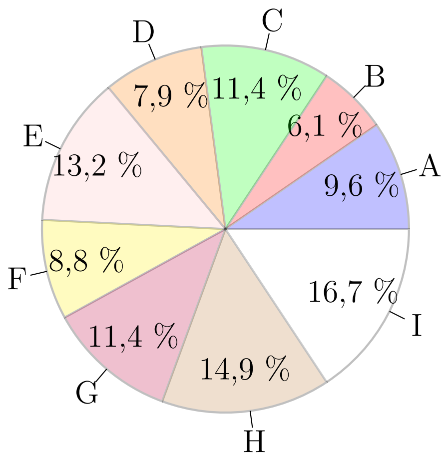
Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.15.1).

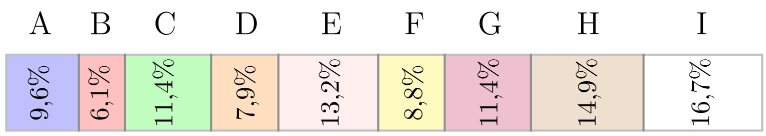
18.10.54 Lösungen zu Diagrammen

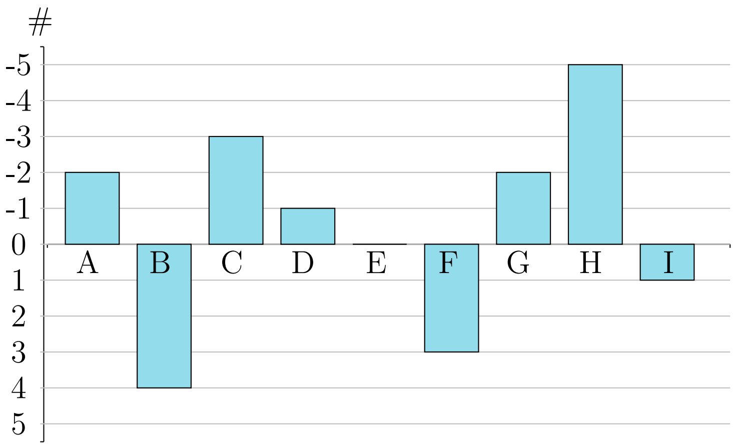
Aufgabe 1:



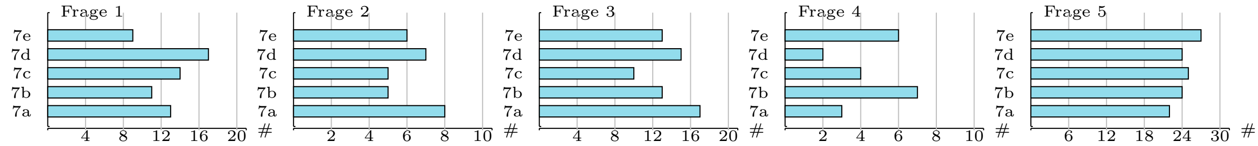


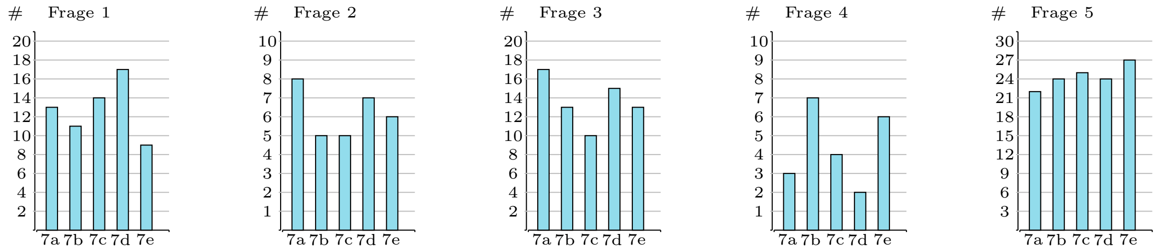


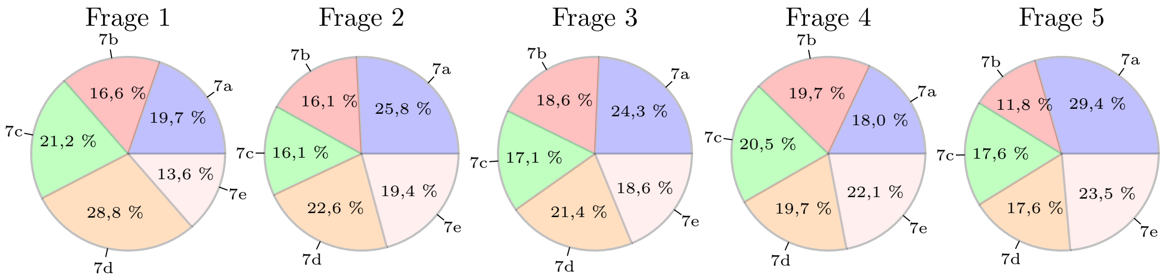


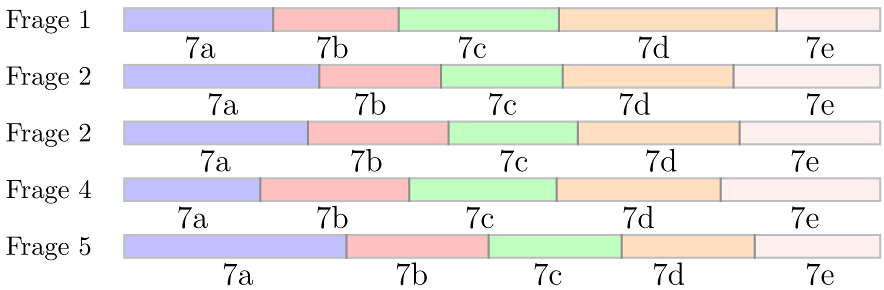


Aufgabe 2:


Frage 1
7e
7d
7c
7b
7a
4 8 12 16 20 #
Frage 2
7e
7d
7c
7b
7a
2 4 6 8 10 #
Frage 3
7e
7d
7c
7b
7a
4 8 12 16 20 #
Frage 4
7e
7d
7c
7b
7a
2 4 6 8 10 #
Frage 5
7e
7d
7c
7b
7a
6 12 18 24 30 #


Frage 1
20 18 16 14 12 10 8 6 4 2
7a 7b 7c 7d 7e
Frage 2
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
7a 7b 7c 7d 7e
Frage 3
20 18 16 14 12 10 8 6 4 2
7a 7b 7c 7d 7e
Frage 4
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
7a 7b 7c 7d 7e
Frage 5
30 27 24 21 18 15 12 9 6 3
7a 7b 7c 7d 7e

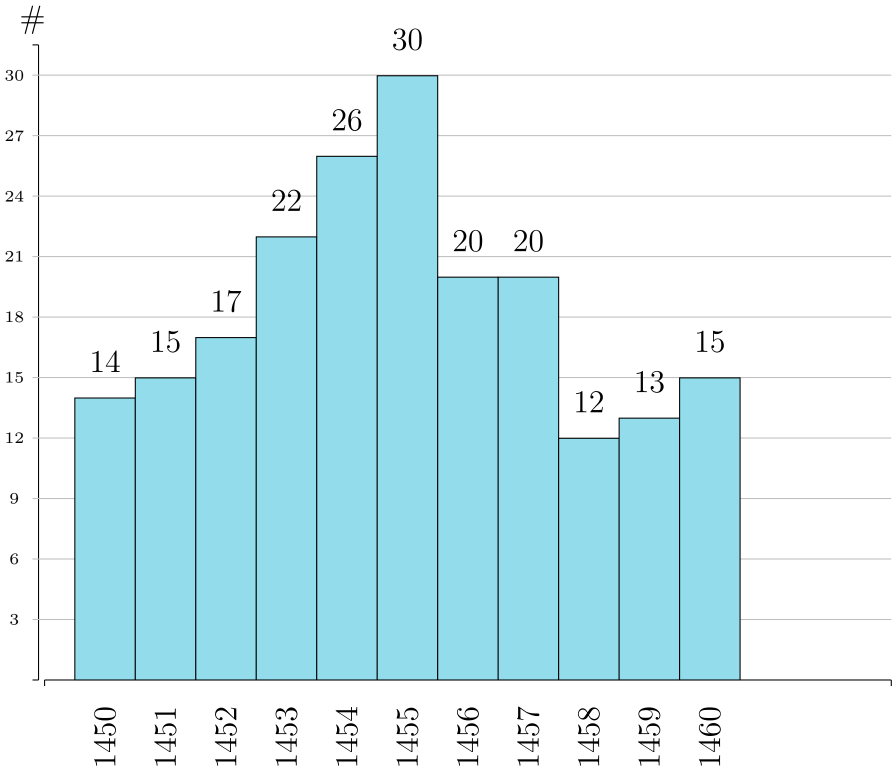

Frage 1
7b
16,6 %
7a
19,7 %
7c
21,2 %
13,6 %
7e
28,8 %
7d
Frage 2
7b
16,1 %
7a
25,8 %
7c
16,1 %
19,4 %
22,6 %
7e
7d
Frage 3
7b
18,6 %
7a
24,3 %
7c
17,1 %
18,6 %
21,4 %
7e
7d
Frage 4
7b
19,7 %
7a
18,0 %
7c
20,5 %
22,1 %
19,7 %
7e
7d
Frage 5
7b
7a
11,8 %
29,4 %
7c
17,6 %
23,5 %
17,6 %
7e
7d


Frage 1
7a 7b 7c 7d 7e
Frage 2
7a 7b 7c 7d 7e
Frage 2
7a 7b 7c 7d 7e
Frage 4
7a 7b 7c 7d 7e
Frage 5
7a 7b 7c 7d 7e

Aufgabe 3:

a)

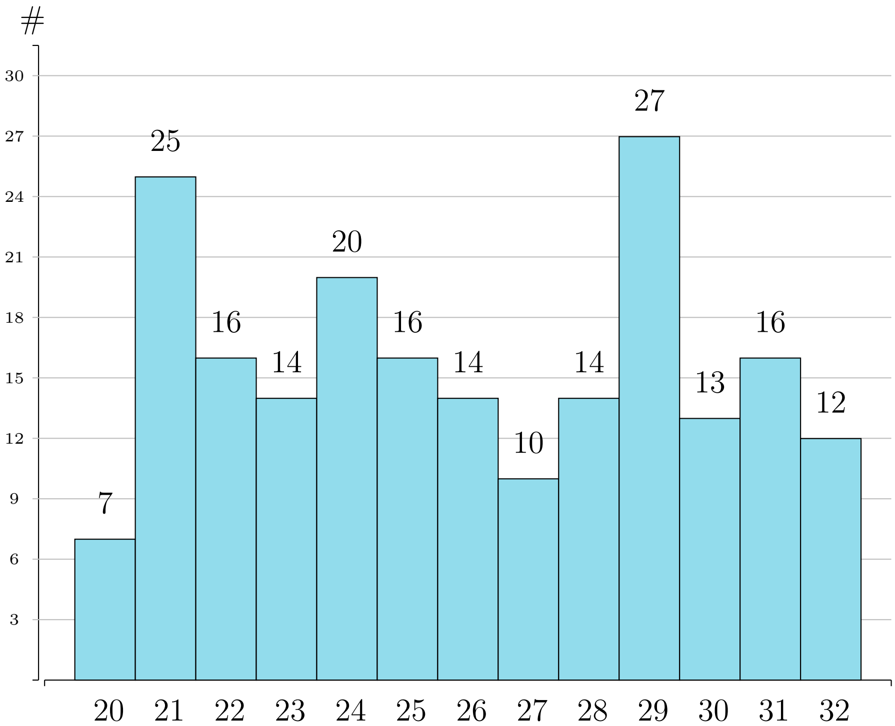
1450	14 mal
1451	15 mal
1452	17 mal
1453	22 mal
1454	26 mal
1455	30 mal
1456	20 mal
1457	20 mal
1458	12 mal
1459	13 mal
1450	15 mal



Der Minimalwert ist 1450, der Maximalwert beträgt 1460 und die Spannweite beträgt 10.

b)

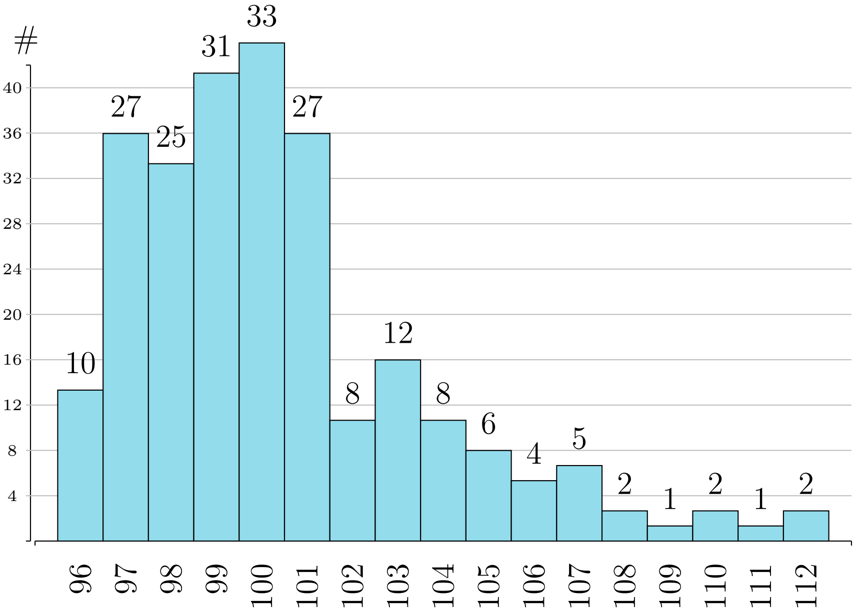
20	7 mal
21	25 mal
22	16 mal
23	14 mal
24	20 mal
25	16 mal
26	14 mal
27	10 mal
28	14 mal
29	27 mal
30	13 mal
31	16 mal
32	12 mal



Der Minimalwert ist 20, der Maximalwert beträgt 32 und die Spannweite beträgt 12.

c)

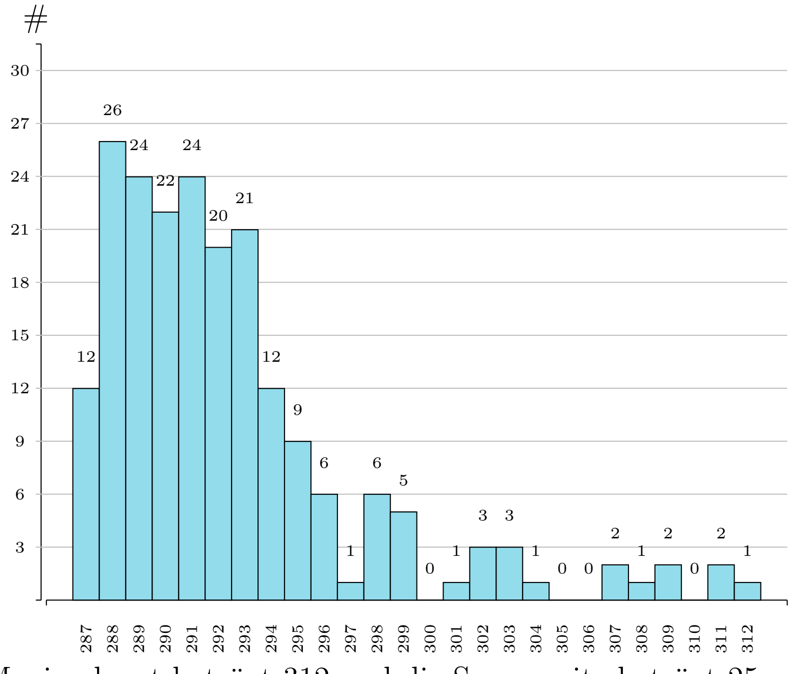
96	10 mal
97	27 mal
98	25 mal
99	31 mal
100	33 mal
101	27 mal
102	8 mal
103	12 mal
104	8 mal
105	6 mal
106	4 mal
107	5 mal
108	2 mal
109	1 mal
110	2 mal
111	1 mal
112	2 mal



Der Minimalwert ist 96, der Maximalwert beträgt 112 und die Spannweite beträgt 16.

d)

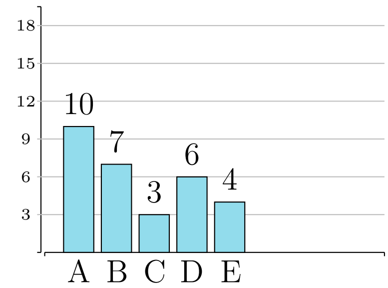
287	12 mal	300	0 mal
288	26 mal	301	1 mal
289	24 mal	302	3 mal
290	22 mal	303	3 mal
291	24 mal	304	1 mal
292	20 mal	305	0 mal
293	21 mal	306	0 mal
294	12 mal	307	2 mal
295	9 mal	308	1 mal
296	6 mal	309	2 mal
297	1 mal	310	0 mal
298	6 mal	311	2 mal
299	5 mal	312	1 mal



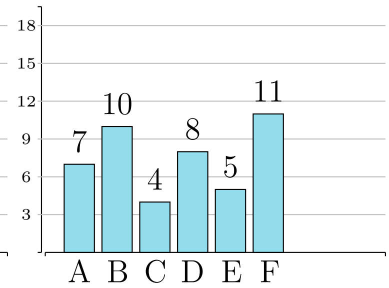
Der Minimalwert ist 287, der Maximalwert beträgt 312 und die Spannweite beträgt 25.

Aufgabe 4:

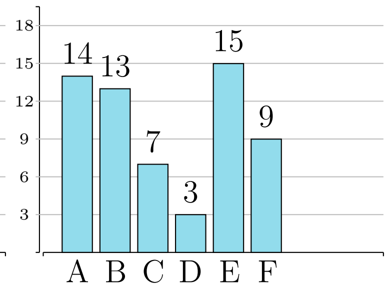
a)



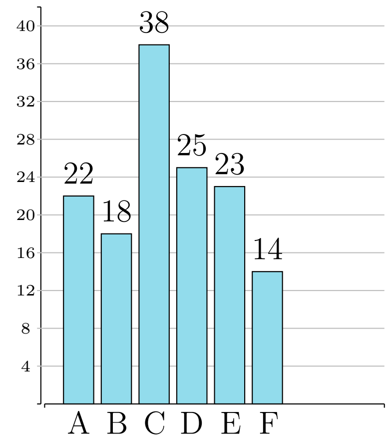
b)



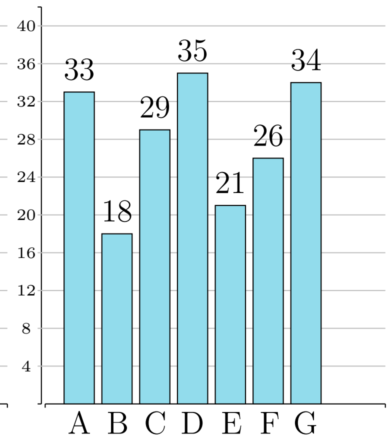
c)



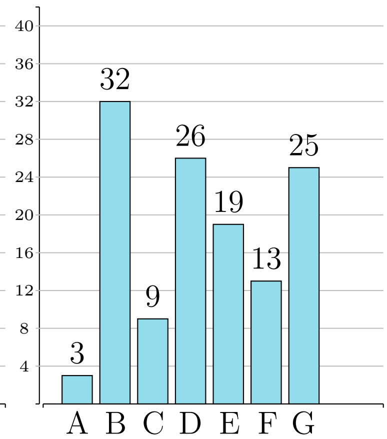
d)



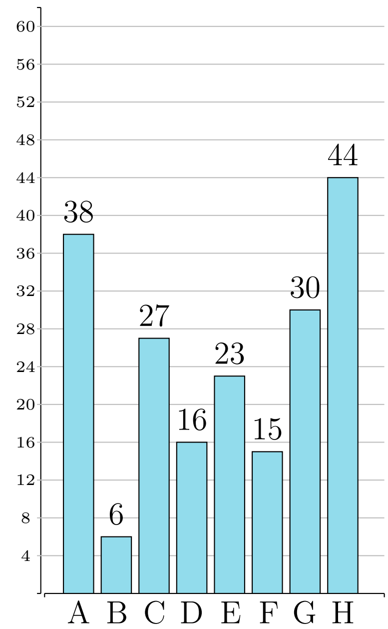
e)



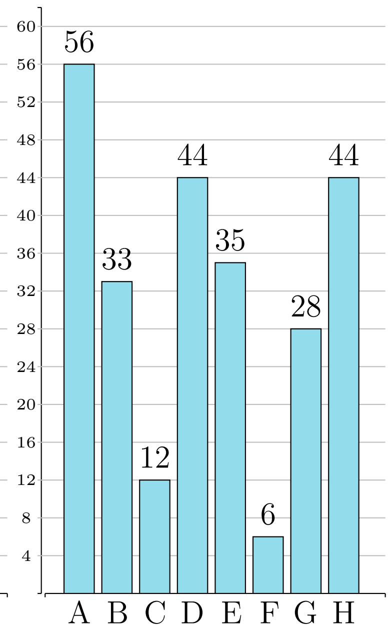
f)



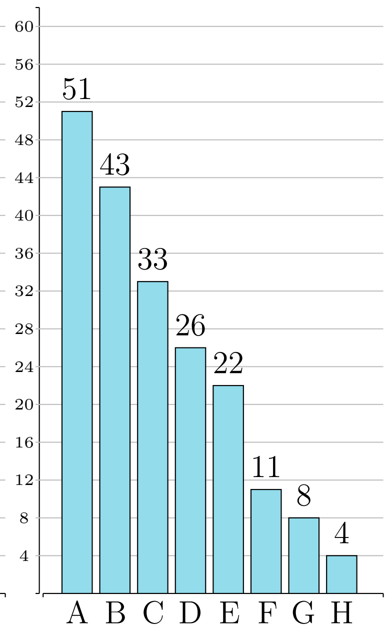
g)



h)

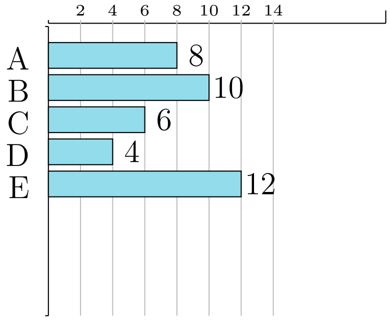


i)

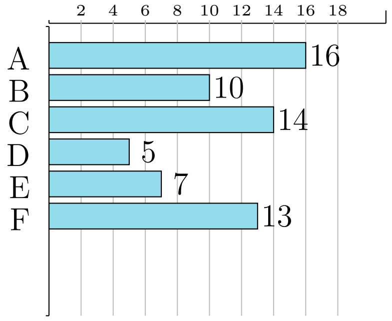


Aufgabe 5:

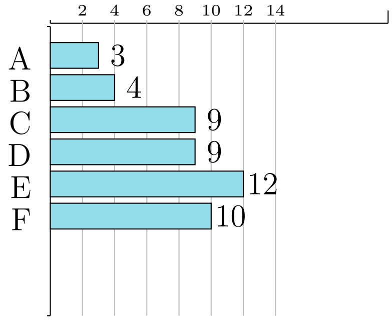
a) #



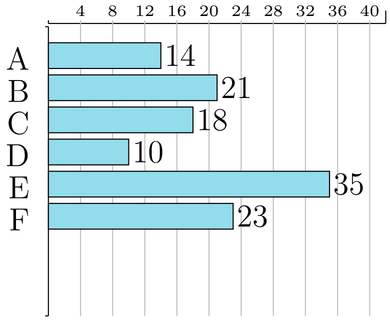
b) #



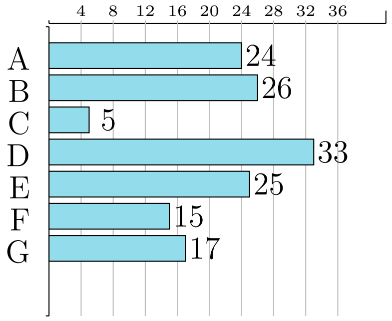
c) #



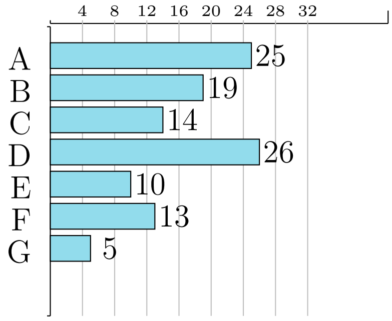
d) #



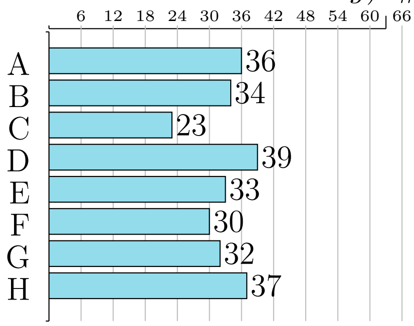
e) #



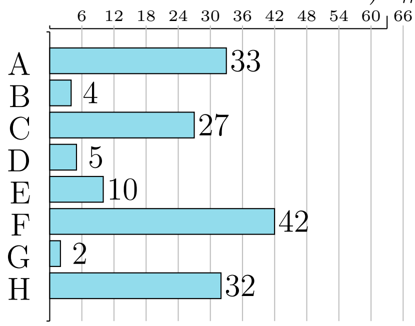
f) #



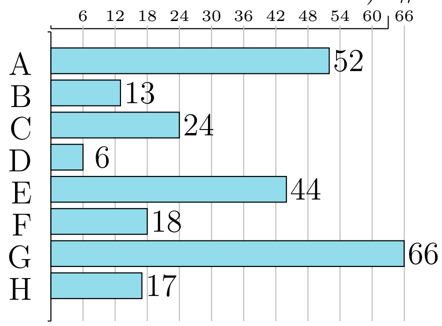
g) #



h) #



i) #



Aufgabe 6:

a) max: E , min: C ,

A	B	C	D	E	F	G	H	I
7	6	2	5	9	3	3	5	8

b) max: I , min: B und G ,

A	B	C	D	E	F	G	H	I
9	6	9	18	24	21	6	12	27

c) max: E , min: I ,

A	B	C	D	E	F	G	H	I
36	48	36	18	54	24	30	24	6

d) max: F , min: D ,

A	B	C	D	E	F	G	H
8	10	6	4	12	18	8	18

e) max: D , min: E ,

A	B	C	D	E	F	G	H
18	12	15	24	6	12	21	18

f) max: C , min: A ,

A	B	C	D	E	F	G	H
30	40	90	50	40	50	80	70

g) max: E , min: H ,

A	B	C	D	E	F	G	H	I
14	17	13	15	19	13	7	5	11

$h)$ max: B , min: F ,

A	B	C	D	E	F	G	H	I
14	36	33	25	21	7	18	22	34

$i)$ max: E , min: H ,

A	B	C	D	E	F	G	H	I
15	17	22	18	29	26	11	8	13

$j)$ max: B , min: D ,

A	B	C	D	E	F	G	H
12	17	9	3	16	11	5	12

$k)$ max: H , min: B ,

A	B	C	D	E	F	G	H
18	12	22	34	16	25	21	35

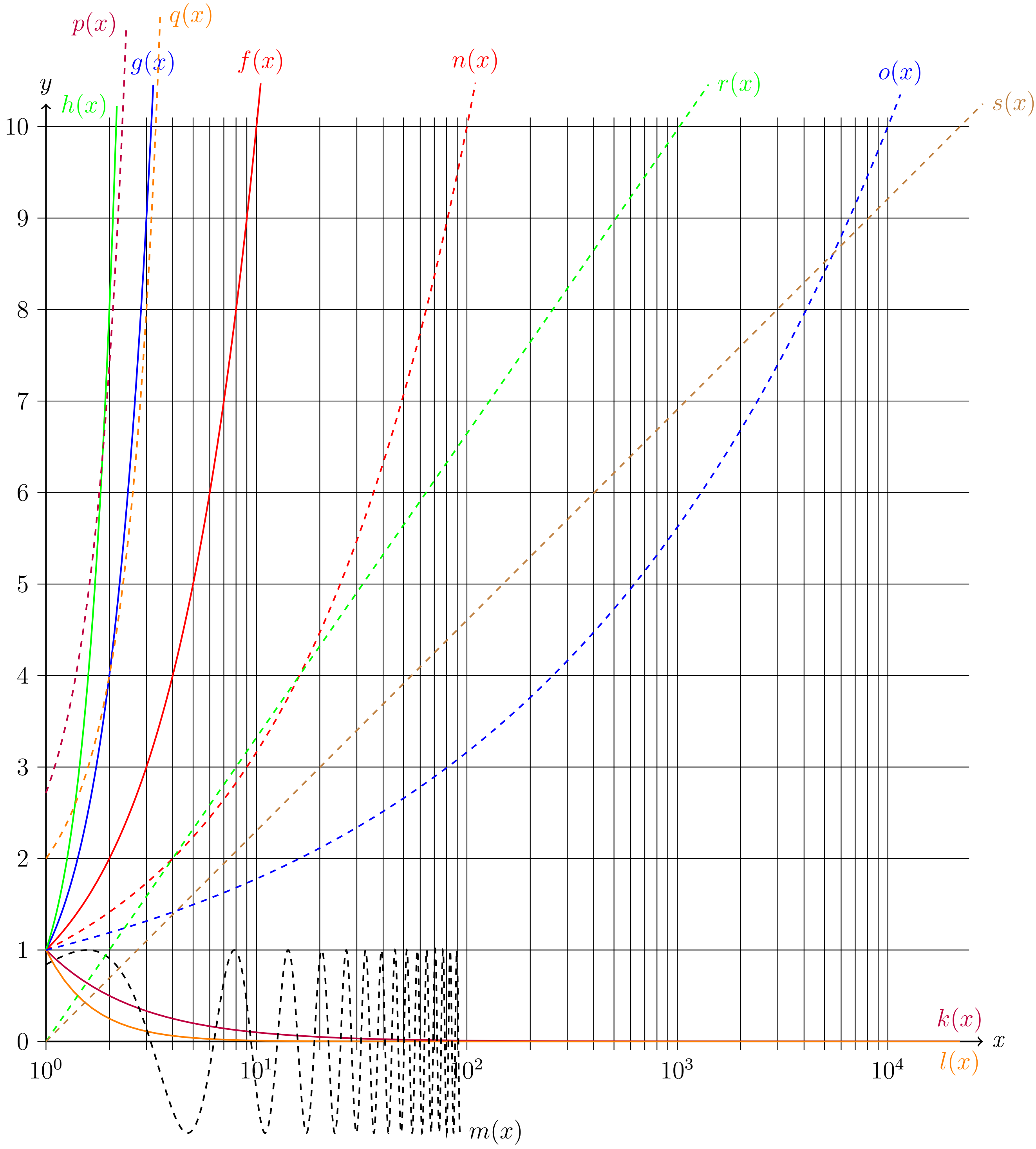
$l)$ max: C , min: E ,

A	B	C	D	E	F	G	H
7	11	25	22	4	9	14	23

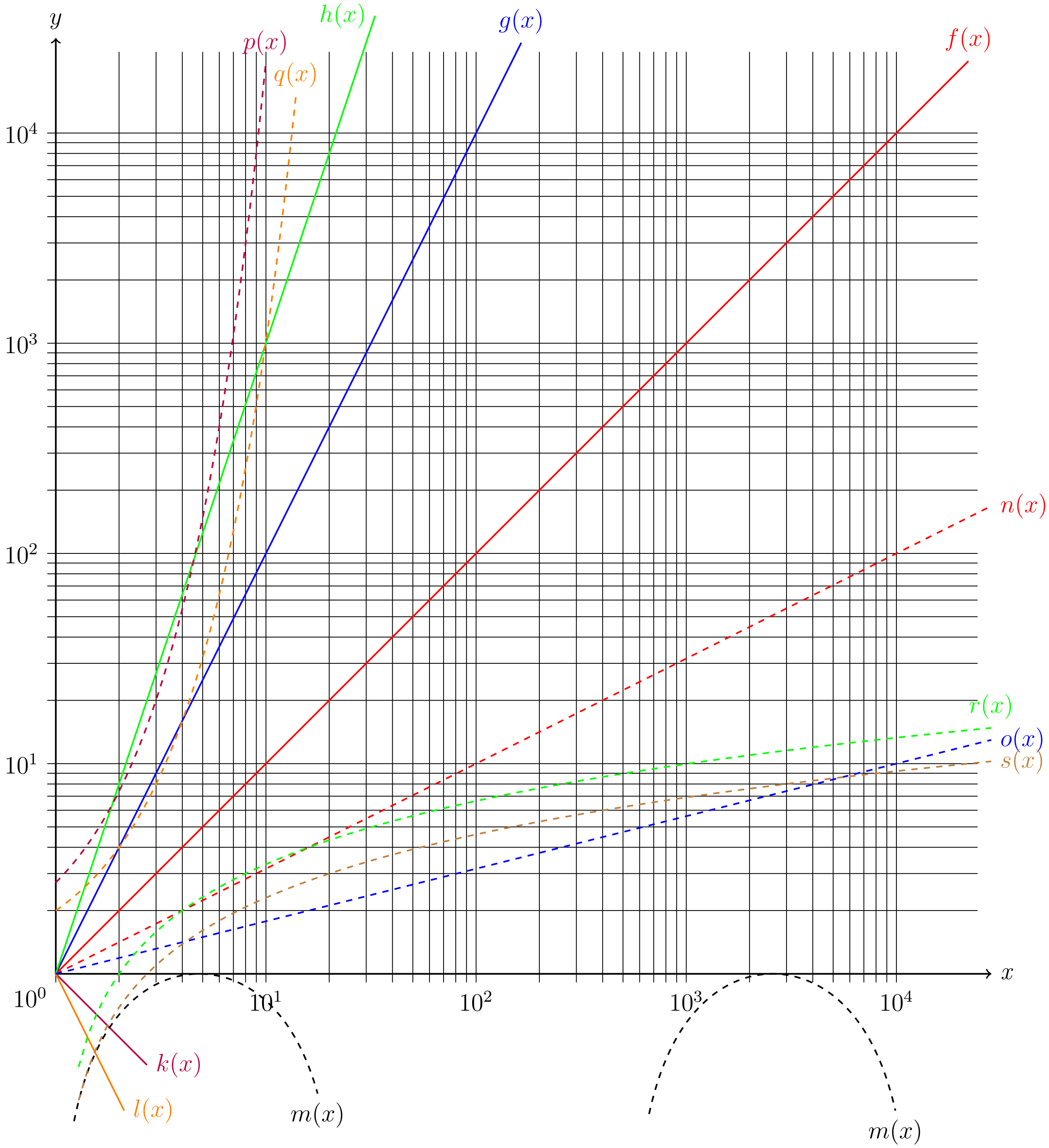
Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.16.1).

18.10.55 Lösungen zu den gemischten Funktionenaufgaben

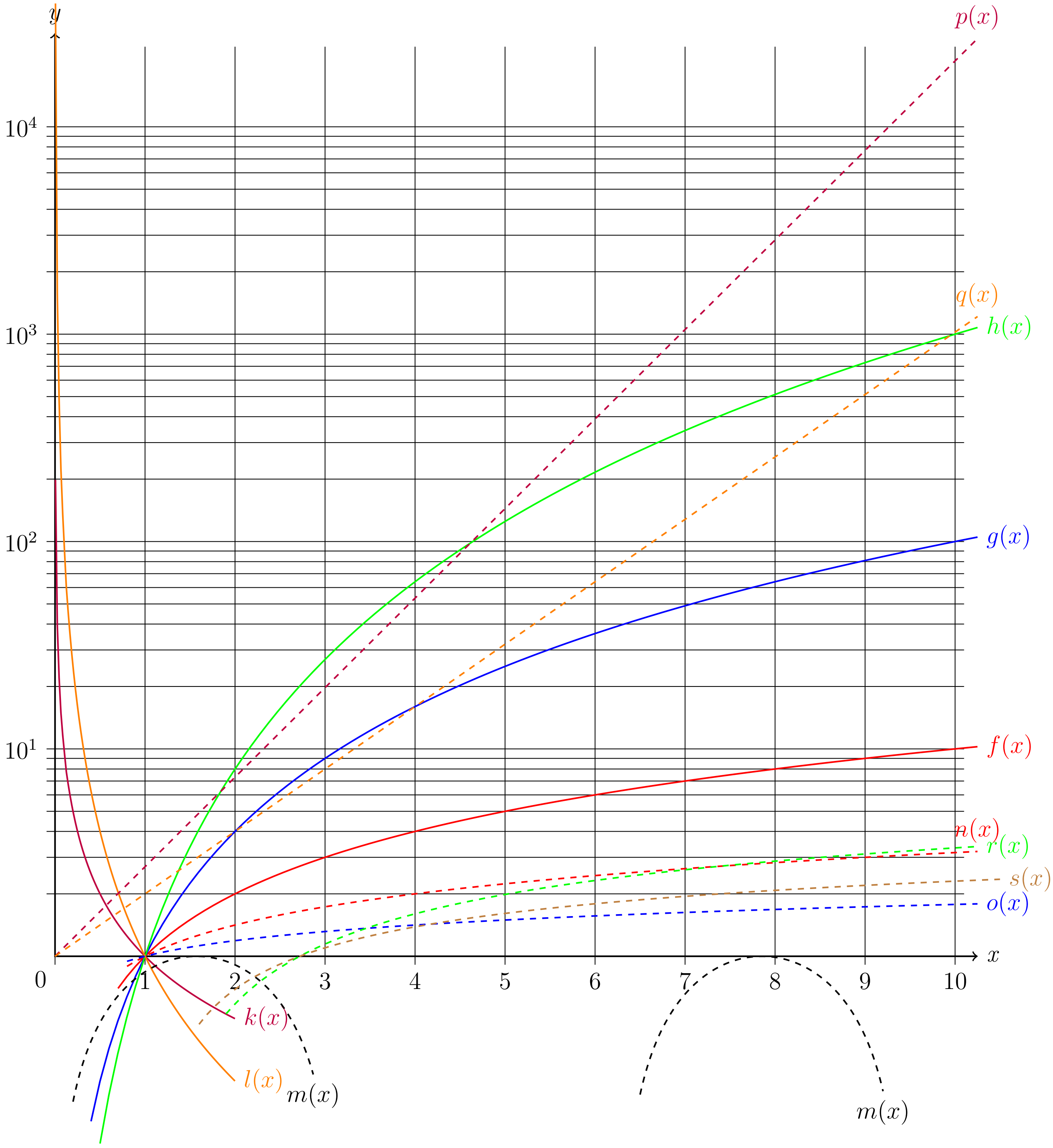
Aufgabe 1:

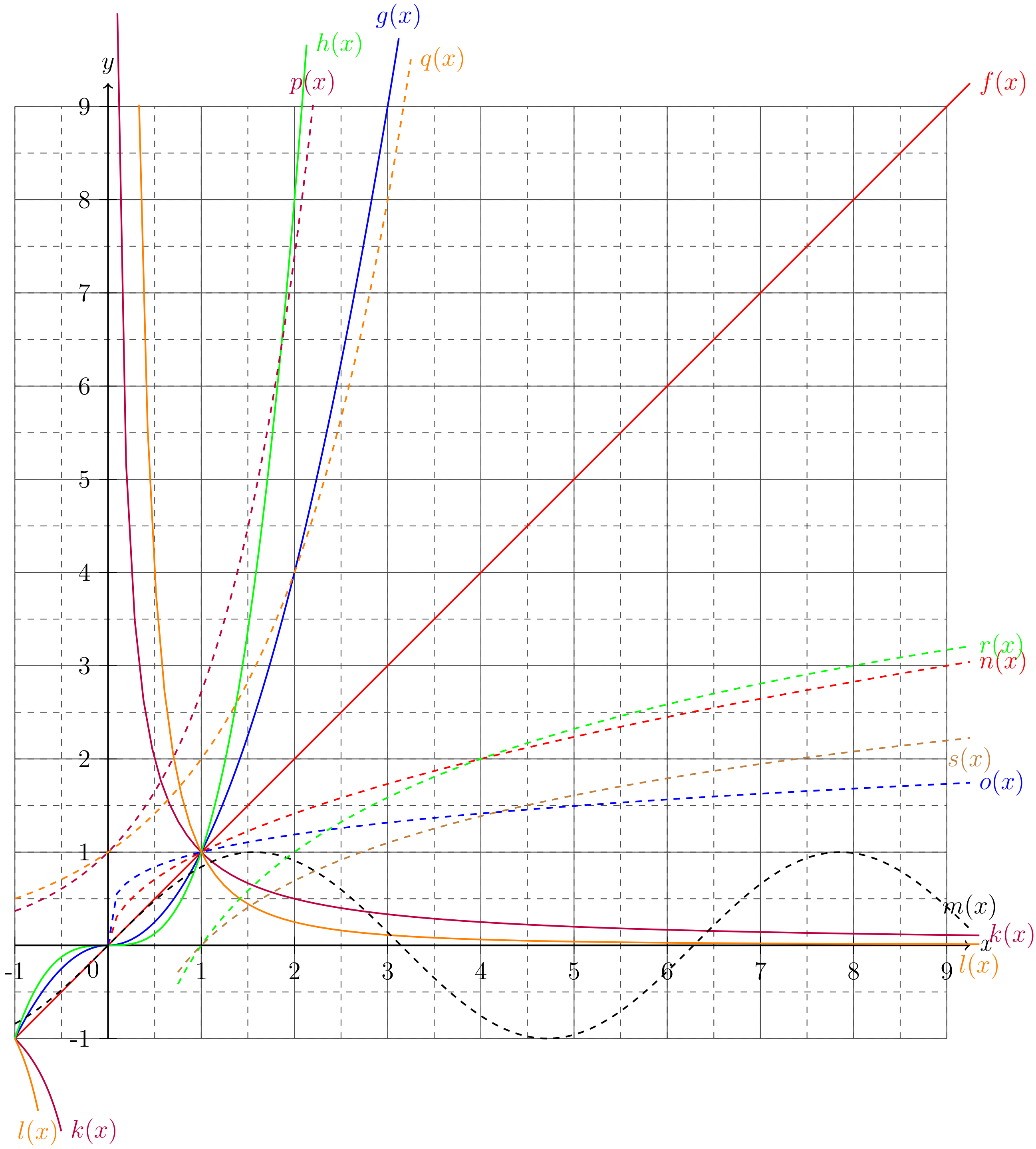


$p(x)$
$q(x)$
$g(x)$
$f(x)$
$n(x)$
$r(x)$
$o(x)$
$s(x)$
$h(x)$
y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
$k(x)$
x
$l(x)$
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
$m(x)$



y
x
10^0
10^1
10^2
10^3
10^4
$p(x)$
$q(x)$
$h(x)$
$g(x)$
$f(x)$
$n(x)$
$r(x)$
$o(x)$
$s(x)$
$k(x)$
$l(x)$
$m(x)$
$m(x)$


y
x
10^4
10^3
10^2
10^1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$p(x)$
$q(x)$
$h(x)$
$g(x)$
$f(x)$
$n(x)$
$r(x)$
$s(x)$
$o(x)$
$k(x)$
$l(x)$
$m(x)$
$m(x)$



y
x
$f(x)$
$g(x)$
$h(x)$
$k(x)$
$l(x)$
$m(x)$
$n(x)$
$o(x)$
$p(x)$
$q(x)$
$r(x)$
$s(x)$
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Aufgabe 2: a)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 5	≈ 2	≈ 2	≈ 3	≈ 6	≈ 10	≈ 13	≈ 17
Niederschlag	≈ 70	≈ 72	≈ 68	≈ 64	≈ 50	≈ 40	≈ 30	≈ 22
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 21	≈ 24	≈ 26	≈ 28	≈ 30	≈ 31	≈ 30	≈ 29
Niederschlag	≈ 16	≈ 12	≈ 8	≈ 6	≈ 5	≈ 8	≈ 10	≈ 13
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 27	≈ 24	≈ 21	≈ 17	≈ 13	≈ 9	≈ 6	≈ 4
Niederschlag	≈ 17	≈ 23	≈ 30	≈ 35	≈ 42	≈ 50	≈ 55	≈ 62

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: AApr ; Temperatur: $13°C$; Niederschlag: $30\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MOkt ; Temperatur: $16°C$; Niederschlag: $36\frac{mm}{m^3}$

b)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 18	≈ 14	≈ 14	≈ 15	≈ 15	≈ 14	≈ 11	≈ 7
Niederschlag	≈ 50	≈ 22	≈ 14	≈ 20	≈ 28	≈ 40	≈ 55	≈ 63
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 1	≈ -5	≈ -10	≈ -15	≈ -18	≈ -20	≈ -21	≈ -19
Niederschlag	≈ 70	≈ 72	≈ 68	≈ 62	≈ 52	≈ 42	≈ 38	≈ 30
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ -16	≈ -12	≈ -7	≈ -2	≈ 2	≈ 6	≈ 7	≈ 10
Niederschlag	≈ 30	≈ 34	≈ 40	≈ 50	≈ 60	≈ 66	≈ 62	≈ 48

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MMrz ; Temperatur: $14°C$; Niederschlag: $40\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MDez ; Temperatur: $11°C$; Niederschlag: $32\frac{mm}{m^3}$

c)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 11	≈ 9	≈ 9	≈ 10	≈ 11	≈ 12	≈ 14	≈ 16
Niederschlag	≈ 62	≈ 75	≈ 72	≈ 62	≈ 50	≈ 45	≈ 42	≈ 45
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 18	≈ 20	≈ 22	≈ 24	≈ 25	≈ 26	≈ 27	≈ 27
Niederschlag	≈ 50	≈ 58	≈ 62	≈ 68	≈ 70	≈ 70	≈ 68	≈ 65
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 26	≈ 24	≈ 21	≈ 18	≈ 14	≈ 11	≈ 8	≈ 9
Niederschlag	≈ 55	≈ 52	≈ 45	≈ 42	≈ 42	≈ 44	≈ 46	≈ 46

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MJul ; Temperatur: $26°C$; Niederschlag: $68\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MOkt ; Temperatur: $16°C$; Niederschlag: $40\frac{mm}{m^3}$

d)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 12	≈ 11	≈ 10	≈ 10	≈ 10	≈ 12	≈ 15	≈ 18
Niederschlag	≈ 120	≈ 170	≈ 180	$\approx$	≈ 170	≈ 160	≈ 140	≈ 125
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 22	≈ 23	≈ 27	≈ 29	≈ 30	≈ 30	≈ 28	≈ 26
Niederschlag	≈ 120	≈ 125	≈ 136	≈ 150	≈ 160	≈ 170	≈ 166	≈ 156
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 24	≈ 21	≈ 18	≈ 15	≈ 13	≈ 12	≈ 11	≈ 10
Niederschlag	≈ 144	≈ 126	≈ 115	≈ 100	≈ 92	≈ 95	≈ 100	≈ 116

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MMai ; Temperatur: $24°C$; Niederschlag: $136\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MJul ; Temperatur: $30°C$; Niederschlag: $160\frac{mm}{m^3}$

e)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ -3	≈ -12	≈ -14	≈ -13	≈ -11	≈ -8	≈ -4	≈ 0
Niederschlag	≈ 44	≈ 41	≈ 40	≈ 40	≈ 41	≈ 40	≈ 38	≈ 33
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 3	≈ 6	≈ 9	≈ 11	≈ 12	≈ 13	≈ 13	≈ 12
Niederschlag	≈ 30	≈ 23	≈ 18	≈ 14	≈ 11	≈ 12	≈ 15	≈ 20
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 10	≈ 8	≈ 5	≈ 1	≈ -3	≈ -6	≈ -9	≈ -10
Niederschlag	≈ 27	≈ 35	≈ 45	≈ 55	≈ 60	≈ 62	≈ 60	≈ 50

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MMai ; Temperatur: $6°C$; Niederschlag: $22\frac{mm}{m^3}$
Zeitpunkt: MSep ; Temperatur: $8°C$; Niederschlag: $30\frac{mm}{m^3}$

f)

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Temperatur	≈ 38	≈ 35	≈ 33	≈ 31	≈ 29	≈ 27	≈ 25	≈ 23
Niederschlag	≈ 112	≈ 120	≈ 130	≈ 124	≈ 120	≈ 114	≈ 104	≈ 94
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Temperatur	≈ 21	≈ 19	≈ 18	$\approx$	≈ 17	≈ 17	≈ 17	≈ 18
Niederschlag	≈ 90	≈ 82	≈ 80	≈ 80	≈ 82	≈ 83	≈ 90	≈ 95
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Temperatur	≈ 19	≈ 21	≈ 23	≈ 26	≈ 28	≈ 30	≈ 31	≈ 32
Niederschlag	≈ 100	≈ 106	≈ 112	≈ 120	≈ 124	≈ 130	≈ 132	≈ 136

Schnittpunkte:
Zeitpunkt: MJan ; Temperatur: $35°C$; Niederschlag: $122\frac{mm}{m^3}$

Aufgabe 3:

Zeitpunkt	Jan	Feb	Mrz	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug
Temperatur	–	≈ -11	≈ -9	≈ -4	≈ 2	≈ 8	≈ 12	≈ 13
Niederschlag	–	≈ 38	≈ 43	≈ 40	≈ 24	≈ 18	≈ 14	≈ 17
∅ Temperatur	–	≈ -11	≈ -1	≈ 5	$\approx 6,5$	≈ 6	≈ 4	$\approx 2,5$
∅ Niederschlag	–	–	–	–	≈ 36	≈ 31	≈ 24	≈ 18
Zeitpunkt	Sep	Okt	Nov	Dez	Jan	Feb	Mrz	Apr
Temperatur	≈ 10	≈ 4	≈ -3	≈ -8	≈ -7	≈ -5	≈ -6	≈ -1
Niederschlag	≈ 20	≈ 28	≈ 44	≈ 59	≈ 56	≈ 35	≈ 30	≈ 43
∅ Temperatur	≈ 1	≈ 0	≈ 0	$\approx 0,5$	$\approx 1,5$	≈ 3	$\approx 4,5$	$\approx 6,5$
∅ Niederschlag	≈ 52	≈ 26	≈ 37	≈ 47	≈ 48	≈ 45	≈ 41	≈ 40
Zeitpunkt	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
Temperatur	≈ 8	≈ 18	≈ 24	≈ 23	≈ 18	≈ 13	≈ 8	≈ 4
Niederschlag	≈ 55	≈ 38	≈ 14	≈ 11	≈ 42	≈ 72	≈ 66	≈ 45
∅ Temperatur	≈ 8	≈ 9	≈ 10	≈ 11	≈ 11	≈ 11	≈ 11	≈ 11
∅ Niederschlag	≈ 45	≈ 47	≈ 40	≈ 30	≈ 26	≈ 34	≈ 47	≈ 56
Zeitpunkt	Jan	Feb	Mrz	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug
Temperatur	≈ 2	≈ 3	≈ 6	≈ 14	≈ 21	≈ 26	≈ 29	≈ 30
Niederschlag	≈ 53	≈ 66	≈ 52	≈ 32	≈ 16	≈ 11	≈ 7	≈ 6
∅ Temperatur	≈ 11	$\approx 11,5$	$\approx 12,5$	≈ 14	≈ 17	≈ 20	≈ 23	≈ 25
∅ Niederschlag	≈ 59	≈ 58	≈ 54	≈ 50	≈ 42	≈ 28	≈ 16	≈ 10
Zeitpunkt	Sep	Okt	Nov	Dez				
Temperatur	≈ 26	≈ 20	≈ 13	≈ 6				
Niederschlag	≈ 20	≈ 30	≈ 40	≈ 56				
∅ Temperatur	≈ 27	≈ 25	≈ 20	≈ 7				
∅ Niederschlag	≈ 12	≈ 16	≈ 24	≈ 36				

Aufgabe 4:

Aufgabe 5:

$a)$ $\approx 850m$; $\approx 1050m$; $\approx 600m$; $\approx 500m$; $\approx 800m$; $\approx 1200m$; $\approx 700m$

$b)$ $\approx 8,25km$

$c)$ $\approx 2km$

Aufgabe 7:

$a)$ lineares

$b)$ $m = 0,3$

Zeitpunkt	AJan	MJan	AFeb	MFeb	AMrz	MMrz	AApr	MApr
Aktienkurs	≈ 20	≈ 26	≈ 36	≈ 42	≈ 50	≈ 60	≈ 48	≈ 70
Zeitpunkt	AMai	MMai	AJun	MJun	AJul	MJul	AAug	MAug
Aktienkurs	≈ 75	≈ 60	≈ 80	≈ 93	≈ 50	≈ 80	≈ 94	≈ 95
Zeitpunkt	ASep	MSep	AOkt	MOkt	ANov	MNov	ADez	MDez
Aktienkurs	≈ 115	≈ 125	≈ 85	≈ 100	≈ 115	≈ 112	≈ 123	≈ 125

c) $f(x) = 0,3x + 0,2$

d) $f(18) = 6,2$

Aufgabe 8:

a) exponentielles

b) $f(2014) = 25,6$

c) $f(x) = 0,1 \cdot 2^x$

d) $x = \text{lb}10 = \log_2 10 \approx 3,32193$

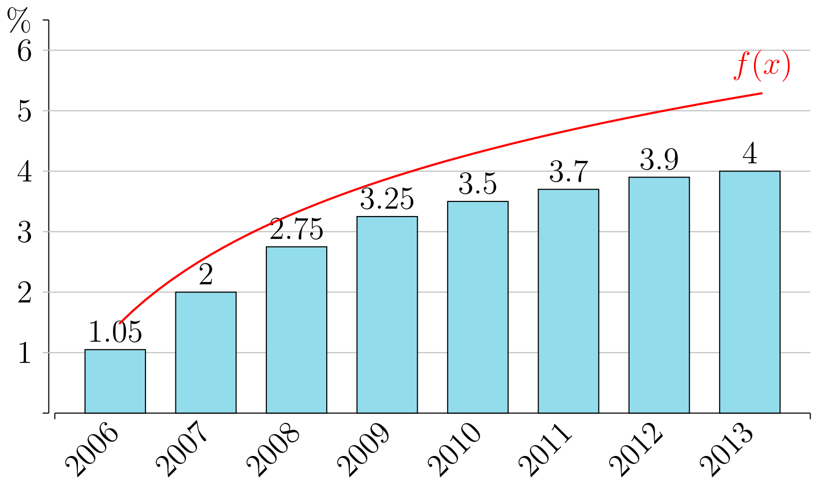
d) $x = \text{lb}500 = \log_2 500 \approx 8,96578$

Aufgabe 9:

a) logarithmisches

b) von 2006 zu 2007

c)



Aufgabe 10:

a) exponentielle Funktion

b)

x	-4	-2	1	2	4
$f(x)$	$0,25$	$0,5$	0	2	4

c) $f(x) = \sqrt{2}^x$

d)

x	8	$1,5$	$\approx 6,64$	$\approx 3,17$	-8	$\approx -6,64$	-1	$\approx -33,22$
$f(x)$	16	$\approx 1,68$	10	3	$0,0625$	$0,1$	$\approx 0,707$	10^{-5}

Aufgabe 11:

Da e^x niemals gleich Null sein kann, kann man durch e^x bedenkenlos dividieren. Beispiel: Da $e^{-200} = \frac{1}{e^{200}} \approx 1,3839 \cdot 10^{-87}$ ist, kann somit nur eine beliebig kleine Zahl erreicht werden.

Aufgabe 12:

Behauptung	wahr	falsch
$f(x) = mx + b$ ist eine Funktion erster Ordnung.	x	
Eine Konstante ist keine Funktion.		x
Eine Hyperbel ist für alle Werte definiert.		x
Eine Tangente schneidet eine Funktion an einem Punkt.		x
Eine Funktion 5. Ordnung hat bis zu 4 Extremstellen.	x	
Die Exponentialfunktion e^x hat ihren Graphen nur im 1. und 2. Quadranten.	x	
Zur Wurzelfunktion existiert keine Umkehrfunktion.		x
Die Hyperbel $\frac{1}{x}$ hat ihren Graphen nur im 1. und 3. Quadranten.	x	
Der positive Abszissen- und negative Ordinatenbereich ist der 4. Quadrant.	x	
$f(x) = -3x^6 + 2x^2 - 9$ ist eine Funktion zweiter Ordnung.		x

Aufgabe 13:

a) A: $60km$; B: $70km$; C: $50km$; D: $75km$; E: $110km$

b) A: $2h$: $5-7h$; B: $1h$: $6-7h$; C: $3h$: $1-4h$; D: $0h$; E: $3,5h$: $2,5-6h$

c) B fuhr $2h$ später los.

d) $30km$ e) $40km$ f) $25km$ g) $30km$

h) D fährt im Vergleich zu A, B und C in die entgegengesetzte Richtung.

i) E wechselt die Fahrtrichtung.

j) A: $15\frac{km}{h}$; B: $15\frac{km}{h}$; C: $30\frac{km}{h}$; D: $10\frac{km}{h}$; E: $22\frac{km}{h}$

k) ED nach $\approx \frac{1}{3}h$ E überholt D. EC nach $\approx 2,25h$ E begegnet entgegenkommenden C. AB nach $\approx 3,\bar{3}h$ B überholt A. CD nach $\approx 4,25h$ C begegnet entgegenkommenden D. BD nach $\approx 4,75h$ B begegnet entgegenkommenden D. DE nach $6h$ D fährt an (in Gegenrichtung startenden) E vorbei. AD nach $7h$ D fährt an (in Gegenrichtung startenden) A vorbei. EB nach $\approx 7,5h$ E überholt B. EC nach $\approx 8,4h$ E überholt C.

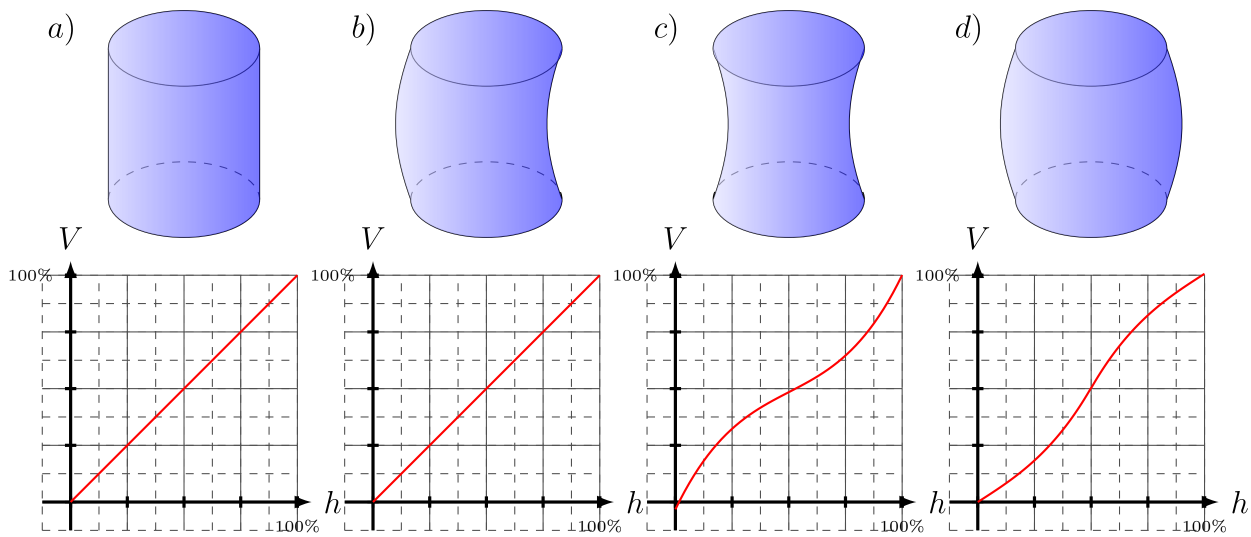
Aufgabe 14: *Es sind zwei Punkte in einem Koordinatensystem gegeben. Bestimme die Strecke zwischen den beiden Punkten.*

a) $\approx 4,472$	*b)* $= 5$	*c)* $\approx 9,220$	*d)* $\approx 9,434$
e) $\approx 10,756$	*f)* $\approx 11,264$	*g)* $\approx 7,651$	*h)* $\approx 0,934$
i) $\approx 6,361$	*j)* $\approx 1,391$	*k)* $\approx 5,941$	*l)* $\approx 6,322$

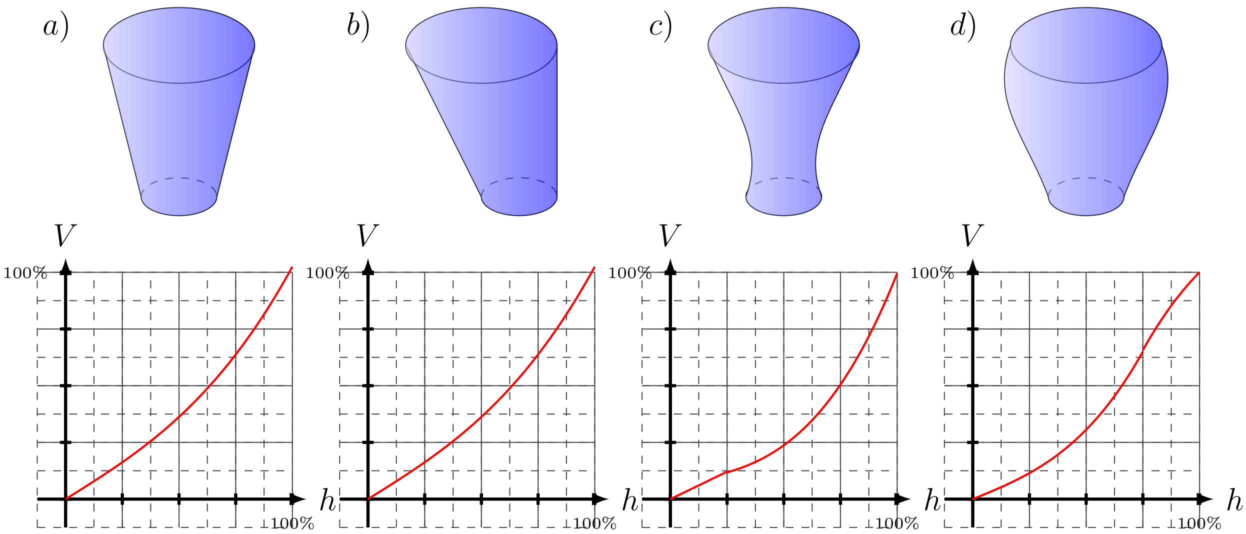
Aufgabe 15:

Eindeutig: *a) c) e) f) g) i) m) n) o) p) q) r) t)* Keine Funktion, da nicht eindeutig: *b) d) h) j) k) l) s)*

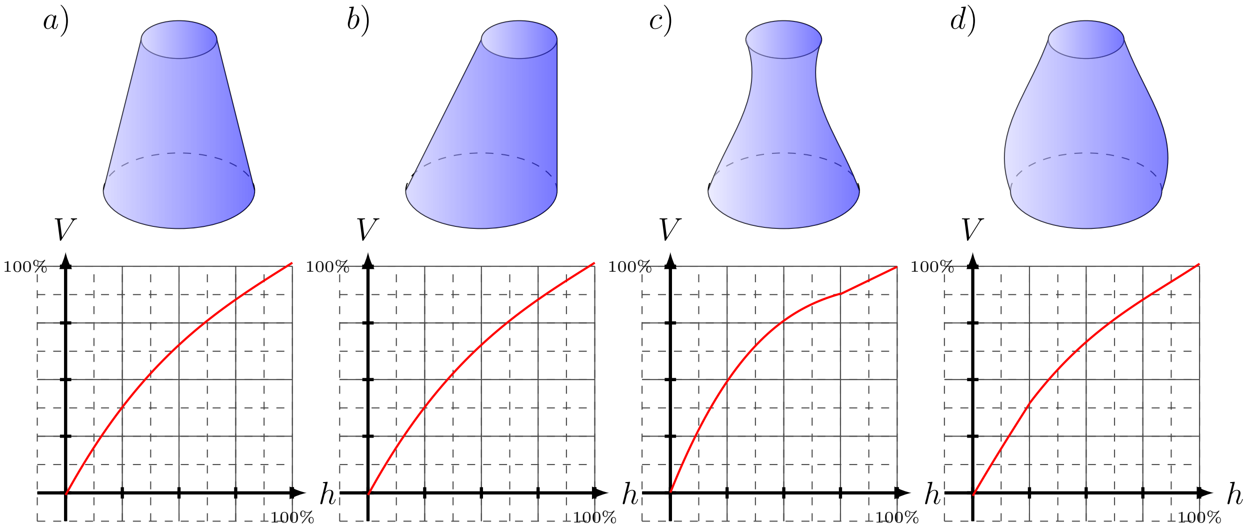
Aufgabe 16:



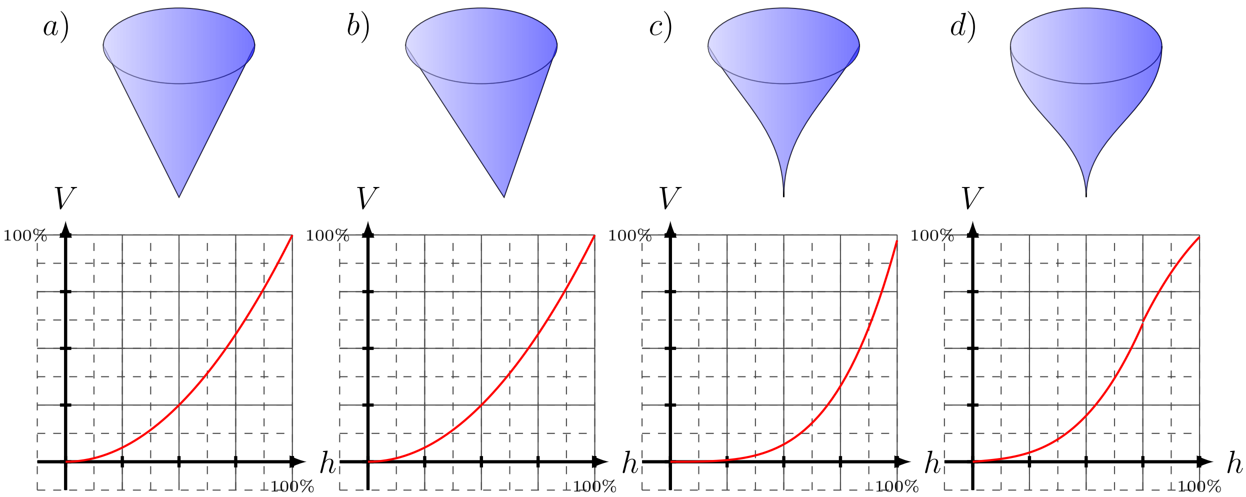
Aufgabe 17:



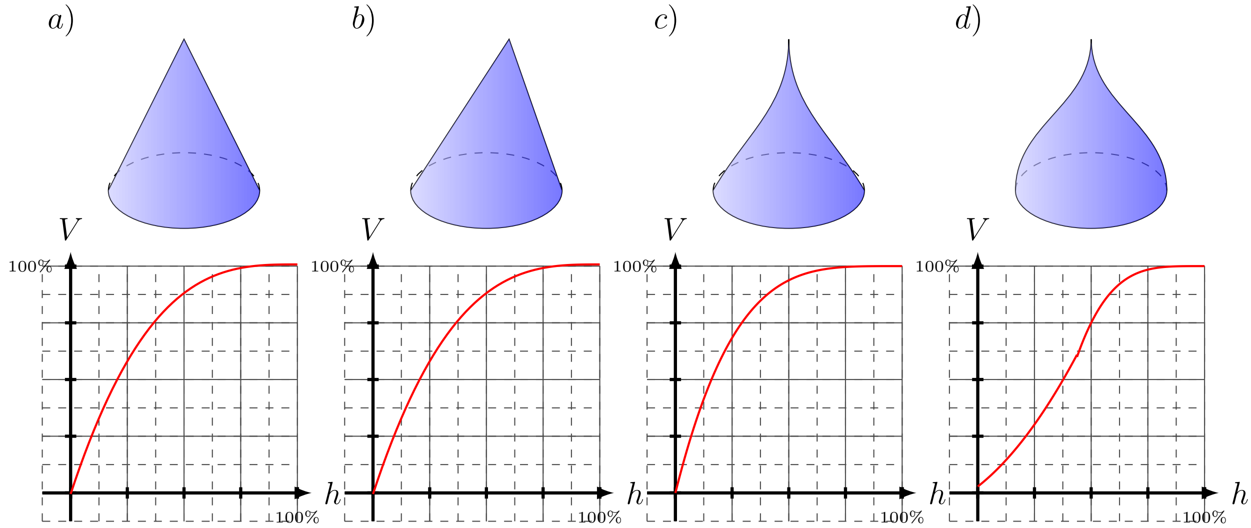
Aufgabe 18:



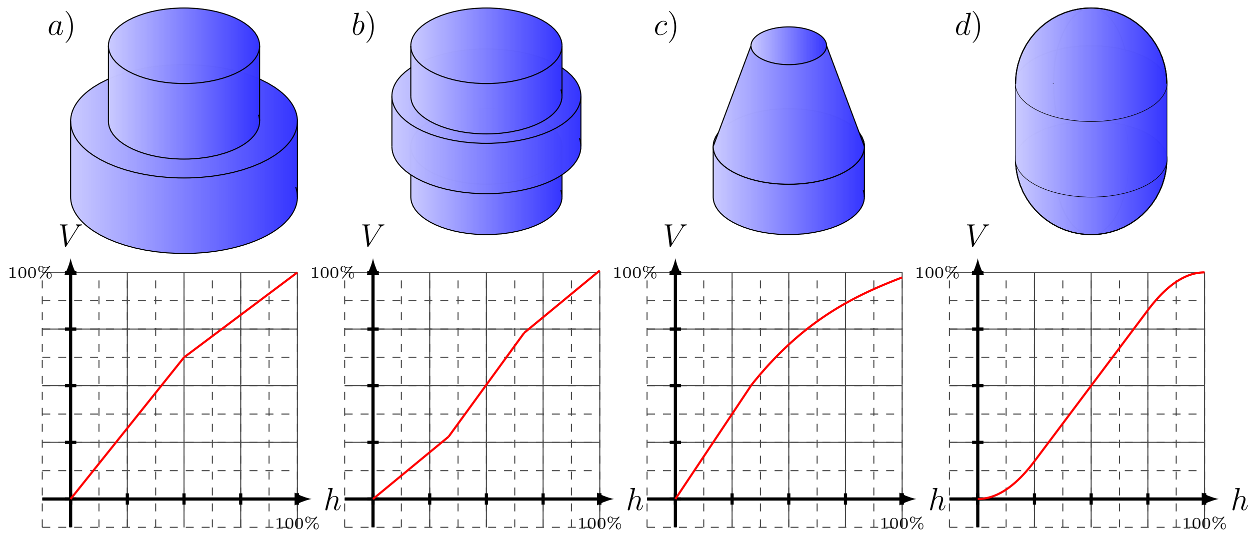
Aufgabe 19:



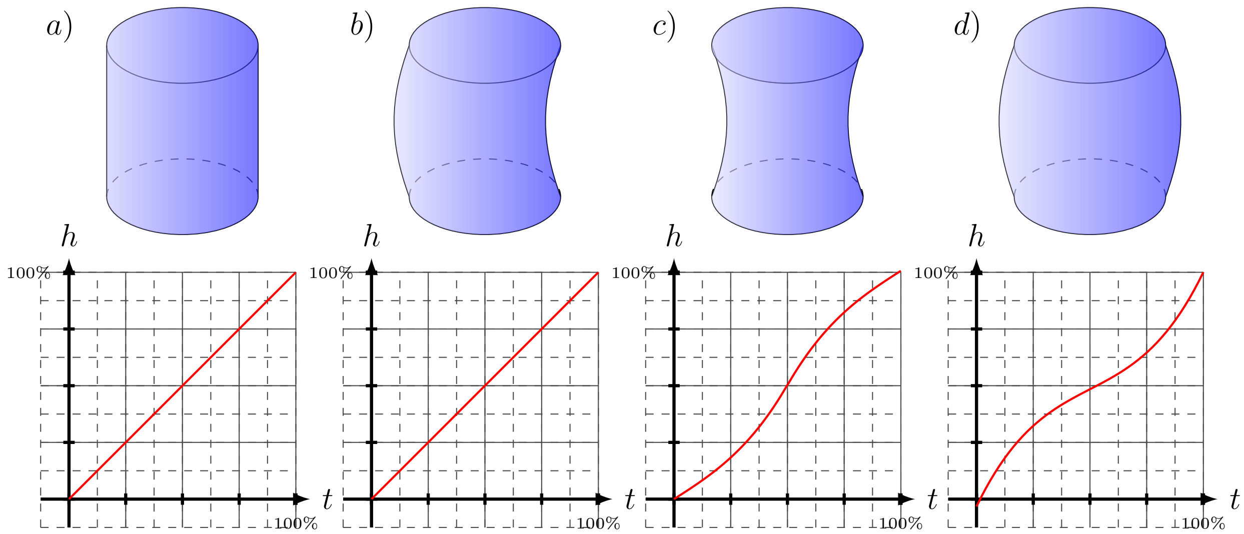
Aufgabe 20:



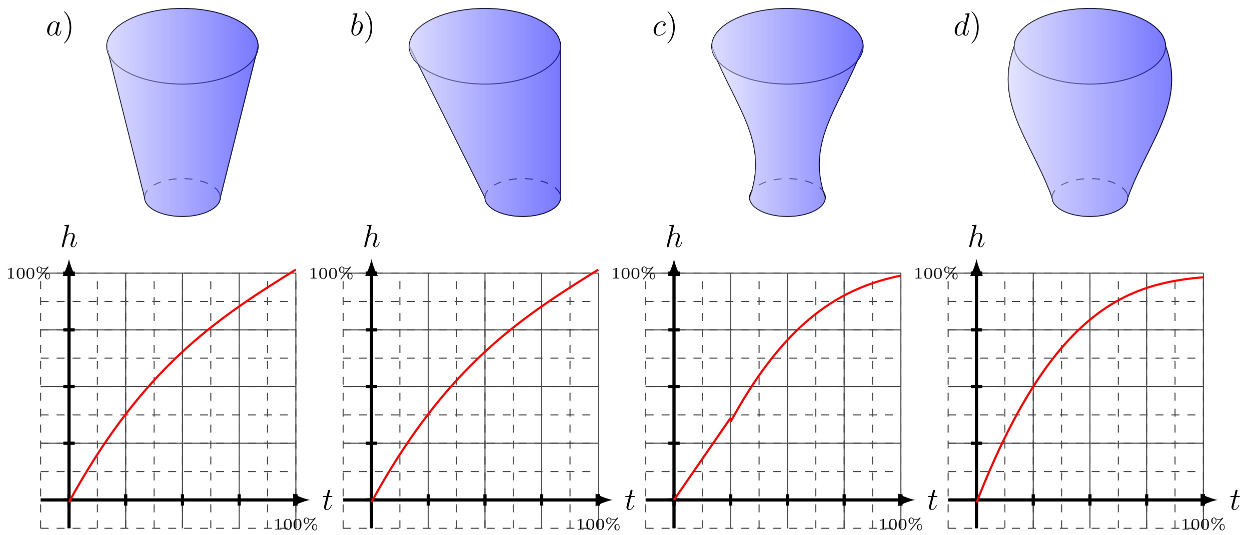
Aufgabe 21:



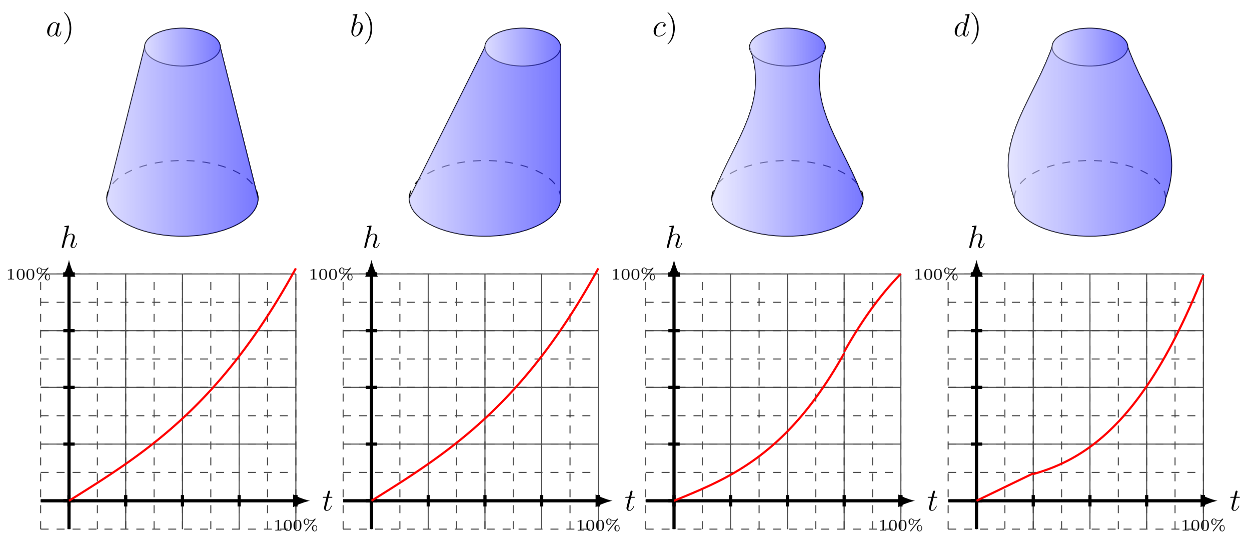
Aufgabe 22:



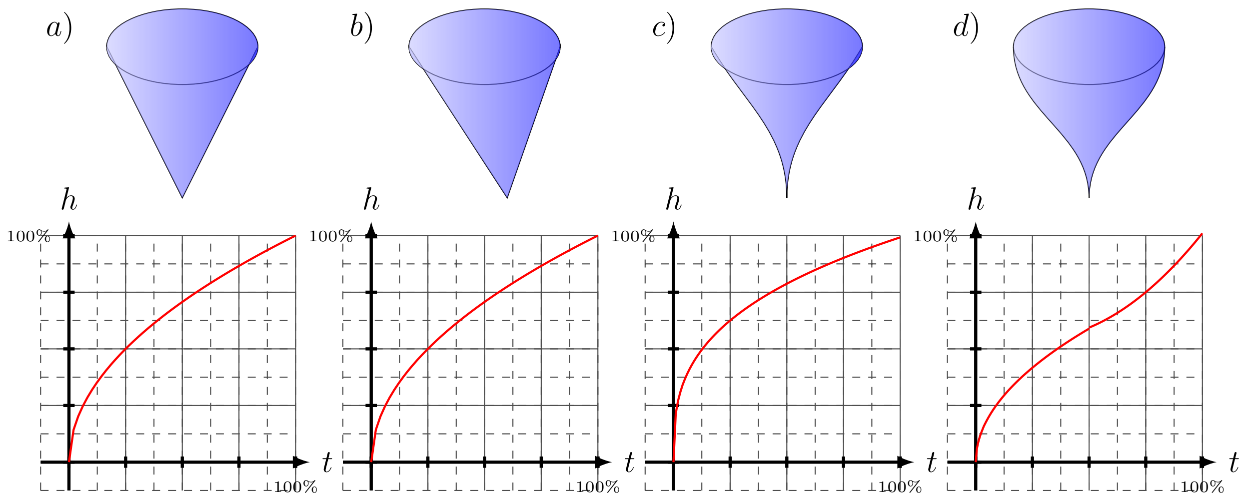
Aufgabe 23:



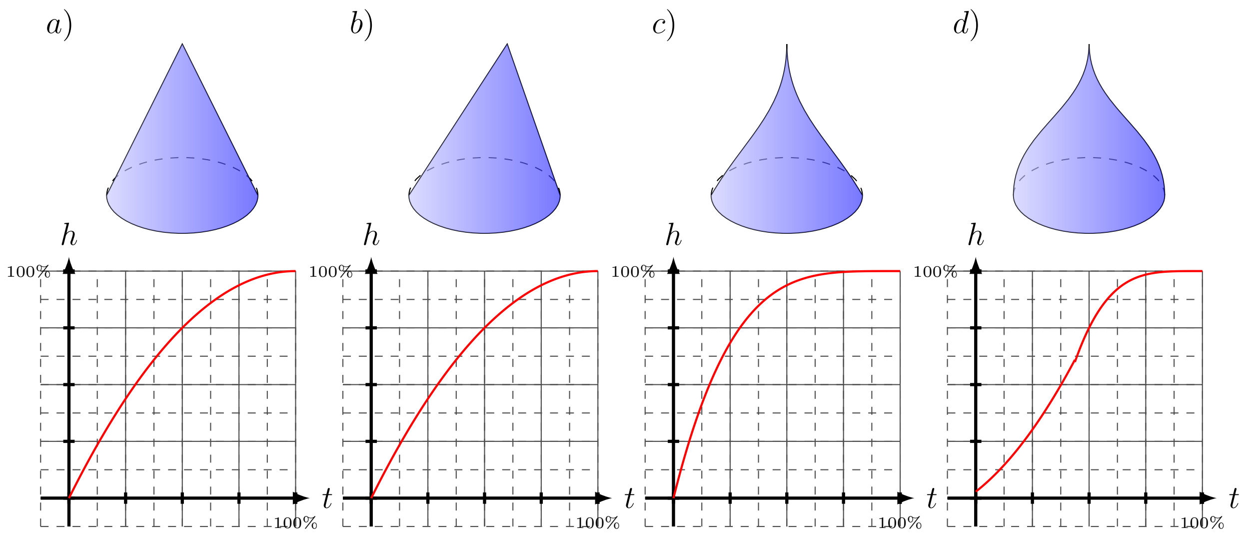
Aufgabe 24:



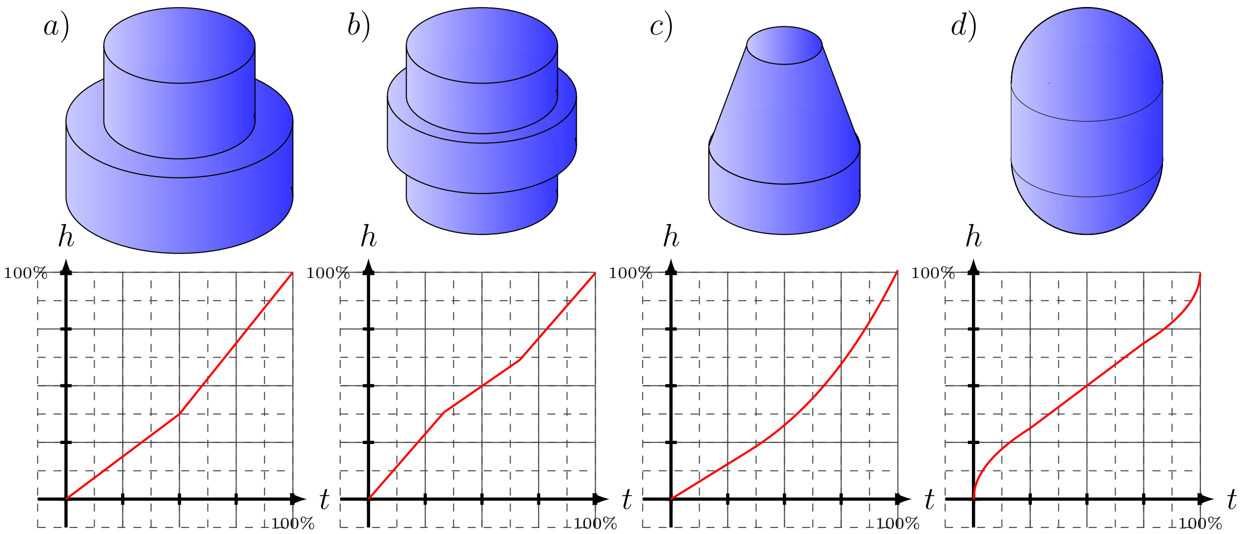
Aufgabe 25:



Aufgabe 26:



Aufgabe 27:



Aufgabe 28: *Vergleiche jeweils die Lösungen von Aufgabenteil a) und b) der Aufgaben 16 bis 27. Beschreibe die Auffälligkeit.*

Die beiden Graphen sind jeweils identisch, da die jeweilige Querschnittsfläche gleichgroß ist.

Aufgabe 29: *Vergleiche jeweils die Lösungen der Aufgaben 16 bis 22 mit den Lösungen der Aufgaben 23 bis 27. Beschreibe die Auffälligkeit.*

Eine große Querschnittsfläche lässt das Volumen pro Höhe schnell ansteigen, allerdings ist bei konstanter Befüllgeschwindigkeit der Füllhöhenzuwachs um so kleiner.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (6.17).

18.10.56 Lösungen zu Beweisverfahren

Aufgabe 4: *Beweise durch vollständige Induktion.*

$$a)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Induktionsanfang:
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n=1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} &= \frac{1}{(3\cdot 1-2)(3\cdot 1+1)} \\
&= \frac{1}{4} \\
&= \frac{n}{3n+1} \\
&= \frac{1}{3\cdot 1+1} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Induktionsschritt:
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} &= \frac{1}{(3(n+1)-2)(3(n+1)+1)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\
&= \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\
\text{Induktionsschluss} \quad &= \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\
&= \frac{1}{(3n+1)(3n+4)} + \frac{n}{3n+1} \\
&= \frac{n(3n+4)+1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{3n^2+4n+1}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{(n+1)(3n+1)}{(3n+1)(3n+4)} \\
&= \frac{n+1}{3n+4} \\
&= \frac{n+1}{3n+3+1} \\
&= \frac{n+1}{3(n+1)+1} \qquad \square
\end{aligned}$$

$$b)\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Induktionsanfang:
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n=0} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} &= \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1 \\
&= (a+b)^0 = 1
\end{aligned}$$

Induktionsschluss:

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1}\\
&=(a+b)(a+b)^n\\
&=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\\
&=a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}+b\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k} \quad \text{Verschiebe Summengrenzen in der ersten Summe}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k} \quad \text{Gliedere Summenterme aus}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}+\binom{n}{0}a^0b^{n+1-0}-\binom{n}{n+1}a^{n+1}b^{n+1-(n+1)}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}+b^{n+1}-0 \quad \text{klammere aus}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^kb^{n+1-k}+b^{n+1}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}+b^{n+1} \quad \text{multipliziere } b^{n+1} \text{ Term mit 1}\\
&=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k}+\binom{n+1}{0}a^0b^{n+1} \quad \text{Führe Summanden zusammen}\\
&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n+1-k} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (7.0.1).

18.10.57 Lösungen zum Differentiationsoperator

Aufgabe 1:

a) $\frac{d}{dx}x^4 = 4x^3$

b) $\frac{d}{dx}3x^2 = 6x$

c) $\frac{d}{dx}6 = 0$

d) $\frac{d}{dx}2x^3 = 6x^2$

e) $\frac{d}{dx}(x+1) = 1$

f) $\frac{d}{dx}x + 1 = 2$

g) $\frac{d}{dx}x^4 + 2x^2 = 4x^3 + 2x^2$

h) $\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^2\right) = 3x^2 + 2x$

i) $\frac{d}{dx}5\left(x^2 + x\right) = 10x + 5$

j) $\frac{d}{dx}x^2 + x^7 = 2x + x^7$

k) $\frac{d}{dx}5x^3 + 8x^9 = 15x^2 + 8x^9$

l) $\frac{d}{dx}\left(x^3 + 77\right) + x^9 = 3x^2 + x^9$

Aufgabe 2:

a) $f'(x) = 6x^5$

b) $f'(x) = 55x^{54}$

c) $f'(x) = 14x^6$

d) $f'(x) = 6x^{11}$

e) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

f) $f'(x) = -x^{-2}$

g) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

h) $f'(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$

i) $f'(x) = 1$

j) $f'(x) = 2x + 6x^5$

k) $f'(x) = 0$

l) $f'(x) = 3\pi x^2$

m) $f'(x) = 4ex^3$

n) $f'(x) = -\frac{8}{x^3}$

o) $f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

p) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$

q) $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$

r) $f'(x) = 8x^{-9}$

s) $f'(x) = -\frac{5}{6}x^{-\frac{11}{6}}$

t) $f'(x) = 0$

u) $f'(x) = 15x^2 - 18x^5 + 2x$

v) $f'(x) = 32x^3 - 6x + 5$

w) $f'(x) = 18x^5 + 9x^{-4} + 6x^2$

x) $f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

y) $f'(x) = 3x^2 - 4x + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

z) $f'(x) = (3n-2)x^{3n-3}$

Aufgabe 3:

$$\begin{aligned}
a)\ \frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = \frac{d}{dx}\left[1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}\left(x^6\right)\right] \\
&= \frac{d}{dx}1+\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}\frac{1}{2!}x^2+\frac{d}{dx}\frac{1}{3!}x^3+\frac{d}{dx}\frac{1}{4!}x^4+\frac{d}{dx}\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}\left(x^6\right) \\
&= 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\mathcal{O}\left(x^6\right) \\
&= \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n = e^x \\
b)\ \frac{d}{dx}e^{ax} &= ae^{ax} \\
c)\ \frac{d}{dx}\sin x &= \cos x \\
d)\ \frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x \\
e)\ \frac{d}{dx}\sin ax &= a\cos ax \\
f)\ \frac{d}{dx}\cos ax &= -a\sin ax
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

$a)\ f'(x) = e^x$ $\quad$ $b)\ f'(x) = -e^{-x}$

$c)\ f'(x) = 4e^{4x}$ $\quad$ $d)\ f'(x) = -\frac{3}{2}e^{-3x}$

$e)\ f'(x) = \cos x$ $\quad$ $f)\ f'(x) = -\cos x$

$g)\ f'(x) = -\sin x$ $\quad$ $h)\ f'(x) = \sin x$

$i)\ f'(x) = 4\cos 4x$ $\quad$ $j)\ f'(x) = -3\cos 3x$

$k)\ f'(x) = -5\sin 5x$ $\quad$ $l)\ f'(x) = 2\sin 2x$

Aufgabe 6:

a) $f'(x) = 7x^6$; $f''(x) = 42x^5$; $f'''(x) = 210x^4$

b) $f'(x) = 10x^4$; $f''(x) = 40x^3$; $f'''(x) = 120x^2$

c) $f'(x) = 9x^2 - 8x + 6$; $f''(x) = 18x - 8$; $f'''(x) = 18$

d) $f'(x) = 8x^3 + 2x$; $f''(x) = 24x^2 + 2$; $f'''(x) = 48x$

e) $f'(x) = x^5 - x^7 + 4x$; $f''(x) = 5x^4 - 7x^6 + 4$; $f'''(x) = 20x^3 - 42x^5$

f) $f'(x) = \frac{20}{7}x^3 - \frac{6}{5}x$; $f''(x) = \frac{60}{7}x^2 - \frac{6}{5}$; $f'''(x) = \frac{120}{7}x$

g) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$; $f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$

h) $f'(x) = -x^{-2}$; $f''(x) = 2x^{-3}$; $f'''(x) = -6x^{-4}$

i) $f'(x) = \frac{11}{3}x^{\frac{8}{3}}$; $f''(x) = \frac{88}{9}x^{\frac{5}{3}}$; $f'''(x) = \frac{440}{27}x^{\frac{2}{3}}$

j) $f'(x) = -\frac{4}{5}x^{-\frac{9}{5}}$; $f''(x) = \frac{36}{25}x^{-\frac{14}{5}}$; $f'''(x) = -\frac{504}{125}x^{-\frac{19}{5}}$

k) $f'(x) = -2e^{-2x}$; $f''(x) = 4e^{-2x}$; $f'''(x) = -8e^{-2x}$

l) $f'(x) = 3\cos(3x)$; $f''(x) = -9\sin(3x)$; $f'''(x) = -27\cos(3x)$

Aufgabe 7:

a) $f'(x) = 4x^3$

b) $f'(x) = 15x^4$

c) $f'(x) = 1$

d) $f'(x) = 12x^5$

e) $f'(x) = 17 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

f) $f'(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

g) $f'(x) = -2x^{-3}$

h) $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

i) $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 15x^4$

j) $f'(x) = 2x + 2$

k) $f'(x) = 340x^9 + 20x^4 + 3$

l) $f'(x) = 10x + 36x^2$

m) $f'(x) = 42x^6 + 5x^4$

n) $f'(x) = 8x^3 + 2$

o) $f'(x) = e^x$

p) $f'(x) = 4e^{4x}$

q) $f'(x) = 7e^{7x}$

r) $f'(x) = -5e^{-5x}$

s) $f'(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}$

t) $f'(x) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}x}$

u) $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

v) $f'(x) = -\frac{3}{7}e^{-\frac{3}{7}x}$

Aufgabe 8:

$a)\ 6x$	$b)\ 120x^4$	$c)\ 0$	$d)\ 36x^2 - 12x$
$e)\ 8$	$f)\ 42x - 6$	$g)\ \dfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$	$h)\ -6x^{-4}$
$i)\ e^x$	$j)\ -\dfrac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x} =$	$l)\ 720x^{-7}$	$k)\ \dfrac{10}{27}x^{-\frac{7}{3}}$

Aufgabe 9:

$a)\ 3a^2 + b^3$	$b)\ 6x^2y$
$c)\ 0$	$d)\ 0$
$e)\ 4x + 5z^4$	$f)\ 1$

Aufgabe 10:

$a)\ f'(x) = 18x^2 - 6x \ ,\ f''(x) = 36x - 6 \ ,\ f'''(x) = 36$

$b)\ f'(x) = 4 - 20x^3 \ ,\ f''(x) = 60x^2 \ ,\ f'''(x) = 120x$

$c)\ f'(x) = x^2 - \dfrac{10}{3}x^3 \ ,\ f''(x) = 2x - 10x^2 \ ,\ f'''(x) = 2 - 20x$

$d)\ f'(x) = \dfrac{5}{7} - 6x - 4x^2 \ ,\ f''(x) = -6 - 8x \ ,\ f'''(x) = -8$

$e)\ f'(x) = -4x^4 + x^{-2} \ ,\ f''(x) = -16x^3 - 2x^{-3} \ ,\ f'''(x) = -48x^2 + 6x^{-4}$

$f)\ f'(x) = -\dfrac{1}{3}x^{-3} - \dfrac{3}{4}x^{-2} \ ,\ f''(x) = x^{-4} + \dfrac{3}{2}x^{-3} \ ,\ f'''(x) = -4x^{-5} - \dfrac{9}{2}x^{-4}$

$g)\ f'(x) = 6x - 2x^{-\frac{1}{2}} \ ,\ f''(x) = 6 + x^{-\frac{3}{2}} \ ,\ f'''(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

$h)\ f'(x) = \dfrac{9}{4}x^{\frac{5}{4}} - \dfrac{39}{5}x^{\frac{8}{5}} \ ,\ f''(x) = \dfrac{45}{16}x^{\frac{1}{4}} - \dfrac{312}{25}x^{\frac{3}{5}} \ ,\ f'''(x) = \dfrac{45}{64}x^{-\frac{3}{4}} - \dfrac{936}{125}x^{-\frac{2}{5}}$

$i)\ f'(x) = \dfrac{2}{8}x^{\frac{8}{3}} - \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{4}} \ ,\ f''(x) = \dfrac{2}{3}x^{\frac{5}{3}} + \dfrac{15}{16}x^{-\frac{9}{4}} \ ,\ f'''(x) = \dfrac{10}{9}x^{\frac{2}{3}} - \dfrac{135}{64}x^{-\frac{13}{4}}$

$j)\ f'(x) = x^{-\frac{2}{3}} - \dfrac{1}{5}x^5 \ ,\ f''(x) = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} - x^4 \ ,\ f'''(x) = -\dfrac{10}{9}x^{-\frac{8}{3}} - 4x^3$

$l)\ f'(x) = \dfrac{15}{24}x^{-\frac{9}{24}} \ ,\ f''(x) = -\dfrac{135}{576}x^{-\frac{33}{24}} \ ,\ f'''(x) = \dfrac{4455}{13824}x^{-\frac{57}{24}}$

$k)\ f'(x) = \dfrac{41}{8}x^{\frac{33}{8}} \ ,\ f''(x) = \dfrac{1353}{64}x^{\frac{25}{8}} \ ,\ f'''(x) = \dfrac{33825}{512}x^{\frac{17}{8}}$

$m)\ f'(x) = 2x - 4 \ ,\ f''(x) = 2 \ ,\ f'''(x) = 0$

$n)\ f'(x) = \dfrac{9}{2}x^{\frac{7}{2}} + 18x^2 + 18x^{\frac{1}{2}} \ ,\ f''(x) = \dfrac{63}{4}x^{\frac{5}{2}} + 36x + 9x^{-\frac{1}{2}} \ ,\ f'''(x) = \dfrac{315}{8}x^{\frac{3}{2}} + 36 - \dfrac{9}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

Aufgabe 11:

a) $f'(x) = -\dfrac{12}{x^5}$ b) $f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{4}}$ c) $f'(x) = 2x^{-\frac{6}{7}}$

d) $f'(x) = \dfrac{6}{x^4}$ e) $f'(x) = 5\sqrt[3]{x^2}$ f) $f'(x) = \dfrac{21}{9}x^{-\frac{2}{9}}$

g) $f'(x) = -\dfrac{13}{x^7}$ h) $f'(x) = -\dfrac{10}{7x^6}$ i) $f'(x) = 8x^4$

j) $f'(x) = 2$ k) $f'(x) = \dfrac{27}{2}\sqrt[4]{16x^5}$ l) $f'(x) = \dfrac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}}$

m) $f'(x) = 27x^2 + 5$ n) $f'(x) = \dfrac{4}{x^3} + x^{-\frac{2}{3}}$ o) $f'(x) = -\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^6}}$

p) $f'(x) = 6x^5 - 4x^{-\frac{1}{3}}$ q) $f'(x) = -\dfrac{3}{5}\sqrt[5]{\dfrac{4}{7x^8}}$ r) $f'(x) = \dfrac{21}{2}\sqrt{\dfrac{5}{6}}^{3} x^{\frac{19}{2}} + \chi$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.1.1).

18.10.58 Lösungen zu den Ableitungsregeln

Aufgabe 1:

a) $f'(x) = 6\,(2x+3)^2$ b) $f'(x) = 6x^2\left(x^3+2\right)$

c) $f'(x) = 2x^3\left(x^4 - \dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ d) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\,(8x+3)\left(4x^2+3x\right)^{-\frac{1}{2}}$

e) $f'(x) = 6xe^{3x^2}$ f) $f'(x) = \left(\dfrac{3}{2}x^2 - 4\right)e^{\frac{1}{2}x^3-4x+6}$

g) $f'(x) = 5\cos(5x)$ h) $f'(x) = 2x^2\sin(-2x^3)$

i) $f'(x) = \dfrac{-12x}{(3x^2-5)^3}$ j) $f'(x) = \left(\dfrac{6}{7}x^4 - \dfrac{9}{5}x^2 + \dfrac{6}{5}\right)e^{\frac{2}{7}x^5-x^3+2x}$

k) $f'(x) = \dfrac{-4x^3+6}{3\left(x^4-6x+3\right)^{\frac{4}{3}}}$ l) $f'(x) = \left(6x^2-8x+8\right)\cos\left(x^3-2x^2+4x+9\right)$

m) $f'(x) = 3xe^{\frac{3x^2+1}{2}}$ n) $f'(x) = \dfrac{3\cos\left(3\sqrt{2x+6}\right)}{\sqrt{2x+6}}$

o) $f'(x) = -\,(5x+3)\left(5x^2+6x\right)^{-\frac{3}{2}}$ p) $f'(x) = -9\sin(3x)\,(\cos(3x))^{-4}$

Aufgabe 2:

a) $f'(x) = (1+x)e^x$

b) $f'(x) = (x^3+3x^2)e^x$

c) $f'(x) = (4x+10x^2)e^{5x}$

d) $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$

e) $f'(x) = 4x^3\sin(5x) + 5x^4\cos(5x)$

f) $f'(x) = \frac{2,34}{2}x^{1,34}\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}x^{2,34}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

g) $f'(x) = \frac{x^2+3}{x^2}$

h) $f'(x) = \frac{7\sqrt[5]{3}}{5x^{\frac{3}{10}}}$

i) $f'(x) = \left(-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4x^3}\right)e^{-4x}$

j) $f'(x) = \left(-2x^3+3x^2-8x+14\right)e^{-2x}$

k) $f'(x) = 2xe^{-x}\cos(2x) + (1-x)e^{-x}\sin(2x)$

l) $f'(x) = (2\cos(2x)+\sin(2x)+x+1)\,e^x$

m) $f'(x) = -\frac{3}{4}e^{-3x}\sin\left(\frac{3x}{4}\right) - 3e^{-3x}\cos\left(\frac{3x}{4}\right)$

n) $f'(x) = a\cos(ax)\cos(bx) - b\sin(ax)\sin(bx)$

o) $f'(x) = (-2\cos(6x)\cos(\pi x) - 6\sin(6x)\cos(\pi x) - \pi\sin(6x)\cos(\pi x))\,e^{-2x}$

p) $f'(x) = (d\sin(ax)\cos(bx) + b\sin(ax)\sin(bx) - a\cos(ax)\cos(bx))\,e^{dx}$

Aufgabe 3:

a) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

b) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{x\ln a}$

c) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

e) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

f) $\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Aufgabe 4:

a) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	b) $f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 5}{(2x-1)^2}$
c) $f'(x) = \ln x$	d) $f'(x) = \ln^2 x$
e) $f'(x) = \sin ax \cos ax$	f) $f'(x) = xe^{ax}$

Aufgabe 5:

$a)$ $f'(x) = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$, $f''(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{4} - x + \frac{1}{2}\right)e^{-x}$,

$f'''(x) = \frac{3}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + 3x - 3\right)e^{-x}$

$b)$ $f'(x) = \frac{x^2}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$,

$f''(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + \left(2 - \frac{x^2}{4}\right)\sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$,

$f'''(x) = \left(3 - \frac{x^2}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{2}x + 1\right) - \frac{3}{2}x\sin\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

$c)$ $f'(x) = -4xe^{-2x^2+4}$, $f''(x) = \left(16x^2 - 4\right)e^{-2x^2+4}$,

$f'''(x) = -16x\left(4x^2 - 3\right)e^{-2x^2+4}$

$d)$ $f'(x) = \frac{x}{(x^2+3)^{\frac{1}{2}}}$, $f''(x) = \frac{3}{2\,(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}$, $f'''(x) = \frac{-9x}{2\,(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}$

$e)$ $f'(x) = 3\sqrt{2x+5} + \frac{3x}{\sqrt{2x+5}}$, $f''(x) = \frac{9x+30}{(2x+5)^{\frac{3}{2}}}$,

$f'''(x) = \frac{9}{(2x+5)^{\frac{3}{2}}} - \frac{27x+90}{(2x+5)^{\frac{5}{2}}}$

$f)$ $f'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4x}\right)e^{-\frac{3}{4}x}$, $f''(x) = \frac{9x^2+24x+32}{16x^3}e^{-\frac{3}{4}x}$,

$f'''(x) = \frac{-3\left(9x^3+36x^2+96x+128\right)}{64x^4}e^{-\frac{3}{4}x}$

$g)$ $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$, $f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$, $f'''(x) = \frac{-12}{(x+1)^4}$

$h)$ $f'(x) = \frac{8\sqrt[3]{2}x}{15\,(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$, $f''(x) = \frac{-8\sqrt[3]{2}(x^2-6)}{45\,(x^2+2)^{\frac{5}{3}}}$,

$f'''(x) = \frac{32\sqrt[3]{2}x(x^2-18)}{135\,(x^2+2)^{\frac{8}{3}}}$

$i)$ $f'(x) = 3x^2\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) - \frac{\pi}{3}x^3\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$,

$f''(x) = \left(6x - \frac{\pi^2x^3}{9}\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) - 2\pi x^2\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$,

$f'''(x) = \left(6x - \pi^2x^2\right)\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + \frac{\pi x}{27}\left(\pi^2x^2 - 162\right)\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$

$j)$ $f'(x) = 2\cos^2(x) - 1 - e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x} - 4\sin(x)\cos(x)$, $f'''(x) = 4 - 8\cos^2(x) - e^{-x}$

$l)$ $f'(x) = \frac{\ln(x)}{2} + \frac{1}{2}$, $f''(x) = \frac{1}{2x}$, $f'''(x) = -\frac{1}{2x^2}$

$k)$ $f'(x) = \ln(x) + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x}$, $f'''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.2.1).

18.10.59 Lösungen zur Taylorentwicklung

Aufgabe 1:

$$a)\ \ \mathcal{T}_f(x;0) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \mathcal{O}(x^8)$$
$$b)\ \ \mathcal{T}_f(x;0) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 + \mathcal{O}(x^9)$$
$$c)\ \ \mathcal{T}_f(x;0) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$$
$$d)\ \ \mathcal{T}_f(x;0) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \mathcal{O}(x^5)$$

Aufgabe 2:

$$a)\ \ \mathcal{T}_f(x;2) = 36x^2 - 116x + 91 + \mathcal{O}(x^3)$$
$$b)\ \ \mathcal{T}_f(x;1) = -40x^3 + 92x^2 - 75x + 20 + \mathcal{O}(x^4)$$
$$c)\ \ \mathcal{T}_f(x;5) = \frac{29201}{40}x^2 - \frac{20853}{4}x + \frac{81985}{8} + \mathcal{O}(x^3)$$
$$d)\ \ \mathcal{T}_f(x;3) = \frac{14167}{20}x^4 - \frac{25515}{4}x^3 + \frac{68888}{3}x^2 - \frac{76545}{2}x + \frac{98415}{4} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$e)\ \ \mathcal{T}_f\,(x;-1) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{9}{2} + \mathcal{O}(x^3)$$
$$f)\ \ \mathcal{T}_f\,(x;4) = \frac{23}{21296}x^4 - \frac{2063}{95832}x^3 + \frac{3577}{5324}x^2 - \frac{6509}{7986}x + \frac{20395}{11979} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$g)\ \ \mathcal{T}_f\,(x;-2) = -\frac{3416}{6075}x^3 - \frac{2624}{675}x^2 - \frac{16624}{2025}x - \frac{46108}{6075} + \mathcal{O}(x^4)$$
$$h)\ \ \mathcal{T}_f\,(x;3) = -\frac{2346}{625}x^3 + \frac{23469}{625}x^2 - \frac{79872}{625}x + \frac{94362}{625} + \mathcal{O}(x^4)$$

Aufgabe 1: *Entwickle bis zur angegebenen Ordnung und um den angegeben Punkt.*

$a)\ f(x) = x^7 - 3x \qquad \text{bis } \mathcal{O}(x^3) \qquad \text{um } a = 0$

$$\mathcal{T}_f(x;0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)$$

$$f^{(0)}(x) = x^7 - 3x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = 7x^6 - 3 \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = -3$$

$$f^{(2)}(x) = 42x^5 \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_f(x;0) &= \frac{0}{1}(x-0)^0 + \frac{-3}{1}(x-0)^1 + \frac{0}{2}(x-0)^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ &= -3x + \mathcal{O}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

$b)\ f(x) = \frac{1}{2}e^{4x} \qquad \text{bis } \mathcal{O}(x^4) \qquad \text{um } a = 0$

$$\mathcal{T}_f(x;0) = \frac{f^{(0)}(0)}{0!}(x-0)^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}(x-0)^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}(x-0)^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right)$$

$$f^{(0)}(x) = \frac{1}{2}e^{4x} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(1)}(x) = 2e^{4x} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 2$$

$$f^{(2)}(x) = 8e^{4x} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 8$$

$$f^{(3)}(x) = 32e^{4x} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = 32$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_f(x;0) &= \frac{0,5}{1}(x-0)^0 + \frac{2}{1}(x-0)^1 + \frac{8}{2}(x-0)^2 + \frac{32}{6}(x-0)^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right) \\ &= \frac{1}{2} + 2x + 4x^2 + \frac{18}{3}x^3 + \mathcal{O}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

$c)\ f(x) = x^4 - 4x^2 - 2 \qquad \text{bis } \mathcal{O}(x^2) \qquad \text{um } a = 2$

$$\mathcal{T}_f(x;2) = \frac{f^{(0)}(2)}{0!}(x-2)^0 + \frac{f^{(1)}(2)}{1!}(x-2)^1 + \mathcal{O}\left(x^2\right)$$

$$f^{(0)}(x) = x^4 - 4x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(2) = -2$$

$$f^{(1)}(x) = 4x^3 - 8x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(2) = 16$$

$$f^{(2)}(x) = 12x^2 - 8 \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(2) = 40$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_f(x;0) &= \frac{-2}{1}(x-2)^0 + \frac{16}{1}(x-2)^1 + \frac{40}{2}(x-2)^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ &= -2 + 16(x-2) + 20(x^2 - 4x + 4) + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ &= -2 + 16x - 32 + 20x^2 - 80x + 80 + \mathcal{O}\left(x^3\right) \\ &= 46 - 64x + 20x^2 + \mathcal{O}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

$d)$ $f(x)=\sqrt{x}$ bis $\mathcal{O}(x^4)$ um $a=1$

$$\mathcal{T}_f(x;1)=\frac{f^{(0)}(1)}{0!}(x-0)^1+\frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1)^1+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3+\mathcal{O}\left(x^4\right)$$

$$f^{(0)}(x)=x^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f^{(0)}(1)=1$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f^{(1)}(1)=\frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad f^{(2)}(1)=-\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad\Rightarrow\quad f^{(3)}(1)=\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_f(x;0)&=\frac{1}{0!}(x-1)^0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!}(x-1)^1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{3!}(x-1)^3+\mathcal{O}\left(x^4\right)\\&=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x^2-2x+1)+\frac{1}{16}(x^3-3x^2+3x-1)+\mathcal{O}\left(x^4\right)\\&=\frac{5}{16}+\frac{15}{16}x-\frac{5}{16}x^2+\frac{1}{16}x^3+\mathcal{O}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

$e)$ $f(x)=\ln(x)$ bis $\mathcal{O}(x^3)$ um $a=1$

$$\mathcal{T}_f(x;1)=\frac{f^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0+\frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1)^1+\frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2+\mathcal{O}\left(x^3\right)$$

$$f^{(0)}(x)=\ln(x) \quad\Rightarrow\quad f^{(0)}(1)=0$$

$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad f^{(1)}(1)=1$$

$$f^{(2)}(x)=-\frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad f^{(2)}(1)=-1$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_f(x;1)&=\frac{0}{0!}(x-1)^0+\frac{1}{1!}(x-1)^1-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\mathcal{O}\left(x^3\right)\\&=x-1-\frac{1}{2}x^2+1x-\frac{1}{2}+\mathcal{O}\left(x^3\right)\\&=-\frac{3}{2}+2x-\frac{1}{2}x^2+\mathcal{O}\left(x^3\right)\end{aligned}$$

$f)$ $f(x)=\tan(\cos(x))$ bis $\mathcal{O}(x^2)$ um $a=-\frac{\pi}{2}$

$$\mathcal{T}_f\left(x;-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{f^{(0)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{0!}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^0+\frac{f^{(1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{1!}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^1+\mathcal{O}\left(x^2\right)$$

$$f^{(0)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\tan(\cos(x)) \quad\Rightarrow\quad f^{(0)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$f^{(1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sin(x)}{[\cos(\cos(x))]^2} \quad\Rightarrow\quad f^{(1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_f\left(x;-\frac{\pi}{2}\right)&=\frac{0}{0!}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^0+\frac{1}{1!}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)^1+\mathcal{O}\left(x^2\right)\\&=x+\frac{\pi}{2}+\mathcal{O}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.3.1).

18.10.60 Lösungen zu Tangentengleichungen

Aufgabe 1:

a) $f'(x_1) = 36$	$f'(x_2) = 9$	$f'(x_3) = 73,1025$
b) $f'(x_1) = -12$	$f'(x_2) = 2$	$f'(x_3) = -12,8$
c) $f'(x_1) = 4$	$f'(x_2) = -\dfrac{18}{125}$	$f'(x_3) = -\dfrac{629}{54}$
d) $f'(x_1) \approx 0,0395$	$f'(x_2) \approx 2,525$	$f'(x_3) \approx -3062,65$
e) $f'(x_1) \approx 1,801$	$f'(x_2) \approx 9,212$	$f'(x_3) \approx -2,358$
f) $f'(x_1) \approx -588,186$	$f'(x_2) \approx 8,882$	$f'(x_3) \approx -42,873$
g) $f'(x_1) \approx -0,341$	$f'(x_2) = -\dfrac{5}{8}$	$f'(x_3) \approx 0,843$
h) $f'(x_1) \approx 0,788$	$f'(x_2) \approx 0,856$	$f'(x_3) \approx -11,293$
i) $f'(x_1) \approx 0,403$	$f'(x_2) \approx 63,775$	$f'(x_3) \approx -57,373$

Aufgabe 2:

a) $f'(x_1) \approx 0,119$	$f'(x_2) \approx 0,949$	$f'(x_3) \approx 0,098$
b) $f'(x_1) \approx -1,602$	$f'(x_2) \approx 0,458$	$f'(x_3) \approx -0,091$
c) $f'(x_1) = \dfrac{1}{2}$	$f'(x_2) \approx 0,577$	$f'(x_3) \approx 0,488$
d) $f'(x_1) = -18,75$	$f'(x_2) = -\dfrac{108}{25}$	$f'(x_3) = -\dfrac{192}{49}$
e) $f'(x_1) \approx 1,220$	$f'(x_2) \approx 0,832$	$f'(x_3) \approx -2,742$
f) $f'(x_1) \approx 10,138$	$f'(x_2) \approx 5,785$	$f'(x_3) \approx -5,984$
g) $f'(x_1) \approx -2,455$	$f'(x_2) \approx -12,988$	$f'(x_3) \approx -2,192$
h) $f'(x_1) \approx -5,185$	$f'(x_2) \approx -34,854$	$f'(x_3) \approx -0,749$
i) $f'(x_1) \approx 5,550$	$f'(x_2) \approx 23,200$	$f'(x_3) \approx -0,170$
j) $f'(x_1) \approx 1,490$	$f'(x_2) \approx 2,111$	$f'(x_3) \approx 6,204$

Aufgabe 3:

$a)\ \ t\,(x_1) = 14x + 8\ ;$ $t\,(x_2) = -2x$

$b)\ \ t\,(x_1) = -20x32\ ;$ $t\,(x_2) = 90x + 212$

$c)\ \ t\,(x_1) = -3,46x + 0,892\ ;$ $t\,(x_2) = -\dfrac{10}{3}x + \dfrac{23}{27}$

$d)\ \ t\,(x_1) = -40x - 49\ ;$ $t\,(x_2) = -0,4464x + 3,15034$

$e)\ \ t\,(x_1) = -\dfrac{1576}{343}x + \dfrac{152}{2401}\ ;$ $t\,(x_2) = \dfrac{1132}{125}x + \dfrac{4256}{625}$

$f)\ \ t\,(x_1) = 0,775x - 5,8625\ ;$ $t\,(x_2) = -0,56132x - 4,05939$

$g)\ \ t\,(x_1) = -0,5076x - 0,66096\ ;$ $t\,(x_2) = 9,17449x - 11,8742$

$h)\ \ t\,(x_1) = -13,4502x + 13,8523\ ;$ $t\,(x_2) = -30,025x - 48,2725$

$i)\ \ t\,(x_1) = 0,376086x + 0,040962\ ;$ $t\,(x_2) = 0,202965x - 0,066347$

$j)\ \ t\,(x_1) = -0,902435x - 0,402806\ ;$ $t\,(x_2) = 2,24454x - 1,34835$

$k)\ \ t\,(x_1) = 4,79639x + 4,5516\ ;$ $t\,(x_2) = 98,1602x + 211,589$

$l)\ \ t\,(x_1) = 0,339422x + 1,41539\ ;$ $t\,(x_2) = 0,242536x + 1,51585$

$m)\ \ t\,(x_1) = -36,523x + 27,027\ ;$ $t\,(x_2) = -7,2x + 12$

$n)\ \ t\,(x_1) = -24,365x - 6,09125\ ;$ $t\,(x_2) = -0,57301x + 0,931141$

$o)\ \ t\,(x_1) = 3,63359x - 4,47419\ ;$ $t\,(x_2) = 3,5699x - 4,30935$

$p)\ \ t\,(x_1) = 0,658114x - 0,73723\ ;$ $t\,(x_2) = 0,575962x + 0,63453$

$q)\ \ t\,(x_1) = 0,531048x - 0,287887\ ;$ $t\,(x_2) = 0,379773x - 0,102332$

$r)\ \ t\,(x_1) = 0,085155x + 7,37486\ ;$ $t\,(x_2) = -2,45123x + 6,59074$

$s)\ \ t\,(x_1) = 5,2644x - 5,76293\ ;$ $t\,(x_2) = 1,54249x + 0,645198$

$t)\ \ t\,(x_1) = -1,1192x + 0,352\ ;$ $t\,(x_2) = 0,039978x + 0,660952$

$u)\ \ t\,(x_1) = 0,676885x - 1,15122\ ;$ $t\,(x_2) = 0,699806x - 1,38445$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.4.1).

18.10.61 Lösungen zur Integration

Aufgabe 1:

a) $\frac{x^4}{4} + c$ *b)* $\frac{4}{7}x^7 + c$ *c)* $\frac{3}{2}x^2 - 3x + c$

d) $9x + c$ *e)* $\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + 5x + c$ *f)* $x^4 + \frac{1}{2}x^2 + c$

g) $\frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}} + c$ *h)* $\frac{11}{6}x^6 - \frac{3}{2}x^4 + c$ *i)* $\frac{1}{3}x^{10} - \frac{1}{3}x^9 + \frac{5}{7}x^7 + c$

j) $\frac{12}{25}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 3x + c$ *k)* $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + c$ *l)* $-\frac{1}{x} + c$

Aufgabe 2:

a) $\frac{16256}{7}$ *b)* $\frac{860}{3}$ *c)* -8 *d)* $\frac{25}{2}$

e) 672 *f)* $\frac{27}{2}$ *g)* $\approx 1,76686$ *h)* $\frac{58249}{375}$

i) $-\frac{83}{32}$ *j)* $-\frac{9200}{81}$ *k)* $\approx 1,57848$ *l)* $\frac{2}{3}$

Aufgabe 3:

a) $\frac{16256}{7}$ *b)* $\frac{860}{3}$ *c)* $20,\overline{703}$ *d)* $\frac{65}{2}$

e) 672 *f)* $17,1\bar{6}$ *g)* $\approx 1,89844$ *h)* $175,336$

i) $2,59375$ *j)* $\approx 121,925$ *k)* $\approx 1,57848$ *l)* $\frac{2}{3}$

Aufgabe 4: In Aufgabe 2 wird der Flächeninhalt zwischen Abszisse und Funktion berechnet, wobei nicht beachtet wird, dass der Flächeninhalt unterhalb der Abszisse einen negativen Wert hat. In Aufgabe 3 wird dieses beachtet, indem die „negativen“ Flächen durch den Betrag über die Abzisse gehoben wird.

Aufgabe 5:

$a)\;\; x_{x_1} = 1 \;\wedge\; x_{x_2} = 2 \;\Rightarrow\; A = \dfrac{1}{6}$

$b)\;\; x_{x_1} = -\dfrac{3}{2} \;\wedge\; x_{x_2} = \dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; A = \dfrac{2}{3}$

$c)\;\; x_{x_1} = \dfrac{-3-\sqrt{57}}{6} \;\wedge\; x_{x_2} = \dfrac{-3+\sqrt{57}}{6} \;\Rightarrow\; A \approx 1,29859$

$d)\;\; x_{x_1} = 0 \;\wedge\; x_{x_2} = 1 \;\Rightarrow\; A = \dfrac{1}{3}$

$e)\;\; x_{x_1} = -3-\sqrt{17} \;\wedge\; x_{x_2} = -3+\sqrt{17} \;\Rightarrow\; A \approx 142,934$

$f)\;\; x_{x_1} \approx 1,72465 \;\wedge\; x_{x_2} \approx 4,84446 \;\Rightarrow\; A \approx 2,64709$

Aufgabe 6:

$a)\;\; \dfrac{1}{e}$ $\qquad b)\;\; 1$ $\qquad c)\;\; \dfrac{1}{2}$

$d)\;\; 2$ $\qquad e)\;\; n-1$ $\qquad f)\;\; \dfrac{n-1}{2}$

Aufgabe 7:

$a)\;\; A \approx 17,931$ $\qquad b)\;\; A \approx 9,520$ $\qquad c)\;\; A \approx 772,837$

$d)\;\; A \approx 7,710$ $\qquad e)\;\; A \approx 287,733$ $\qquad f)\;\; A \approx 63,901$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.5.1).

18.10.62 Lösungen zu den Integrationsregeln

Aufgabe 1:

a) $(x-1)e^{x}$

b) $\dfrac{4x-1}{8}e^{4x}$

c) $\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)e^{2x}$

d) $\left(-x^3-3x^2-6x-6\right)e^{-x}$

e) $\sin(x)-x\cos(x)$

f) $\dfrac{\cos(2x)}{4}+\dfrac{x\sin(2x)}{2}$

g) $3x\cos(x-1)-3\sin(x-1)$

h) $\dfrac{2x\cos(3x-4)}{9}+\left(\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2}{27}\right)\sin(3x-4)$

i) $(48x-2x^3)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)+12(x^2-8)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

j) $\dfrac{4\cdot 2^{x}\left(\ln^2(2)x^2-2\ln(2)x+2\right)}{\ln^3(2)}$

k) $-\dfrac{3}{4}e^{-x}\left(x^2+2x+2\right)$

l) $\dfrac{-\cos^2(x)}{2}$

Aufgabe 2:

a) e^{x^2}

b) $e^{\frac{1}{4}x^4}$

c) $\dfrac{3}{4}e^{4x^4}$

d) $e^{\sqrt{x^3}}$

e) $\sin\left(x^4\right)$

f) $\dfrac{-\cos\left(2x^2\right)}{4}$

g) $\dfrac{2}{3}\left(\tan(x)\right)^{\frac{3}{2}}$

h) $-\cos(\ln(x))$

i) $e^{x^3-2x^2+7x-11}$

j) $\dfrac{7}{3}e^{x^3+4}$

k) $-\dfrac{1}{2}e^{\cos(2x)}$

l) $\dfrac{4}{3}e^{\sin(2x^3+4)}$

Aufgabe 3:

a) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}\cos(4x+1)$

b) $-6(x+2)e^{-\frac{1}{2}x} + 2\ln|x|$

c) $\frac{1}{2}\sin\left(e^{3x^2+2x}\right)$

d) $4\ln|x| + x^2$

e) $(x^2 - x + 2)e^x$

f) $25(x-5)e^{\frac{x}{5}}$

g) $e^{\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}}$

h) $\frac{2}{3}\left(3e^x + \left(2x^2+2\right)^{\frac{3}{2}}\right)$

i) $\frac{-x\cos(3x)}{9} + \frac{\sin(3x)}{27} + \frac{\cos(2x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{2}$

j) $\frac{6x-11}{9}e^{3x-2}$

k) $-\frac{1}{3}\cos(3x+2)$

l) $-\frac{1}{6}e^{\cos\left(\tan\left(3x^2+5\right)\right)}$

Aufgabe 4:

a) $\approx 0,628$ *b)* $\approx -2,173$ *c)* $\approx 1,000$ *d)* $\approx 1,314$

e) $\approx 2,710$ *f)* $\approx 5,483$ *g)* $\approx 1,293$ *h)* $\approx 2,357$

Aufgabe 5:

a) $\approx -17,199$ *b)* $\approx 0,207$ *c)* $\approx -3,264$ *d)* $\approx -31,197$

Aufgabe 6:

a) $\approx 30,928$ *b)* $\approx 28,418$ *c)* $\approx 0,199$ *d)* $\approx 0,333$ *e)* $\approx 3,545$ *f)* $\approx 0,033$

Aufgabe 7: *Bestimme den eingeschlossenen Flächeninhalt zwischen den Funktionen.* (Benötigt Abschnitt „Näherungsverfahren“!)

a) $A \approx 6,069$ *b)* $A \approx 71,278$ *c)* $A \approx 1,202$ *d)* $A \approx 0,445$

Aufgabe 8:

$a)\ \ f(x) = \frac{1}{3}x + 1 \ \text{ in: } \ [2;9] \qquad \Rightarrow \ \ f(\xi) = \frac{17}{6}LE$

$b)\ \ f(x) = x^2 - x + 1 \ \text{ in: } \ [0;3] \qquad \Rightarrow \ \ f(\xi) = \frac{5}{2}LE$

$c)\ \ f(x) = \sqrt{x+3} \ \text{ in: } \ [-2;8] \qquad \Rightarrow \ \ f(\xi) \approx 2,3655LE$

$d)\ \ f(x) = xe^x \ \text{ in: } \ [-3;0] \qquad \Rightarrow \ \ f(\xi) \approx 0,26695LE$

Aufgabe 9:

$a)\ \ f(x) = x^2 \ \wedge \ h(x) = x \ \text{ in: } \ [1;4] \quad \text{mit: } k(x) = f(x) - h(x) \ \Rightarrow \ k(\xi) = \frac{9}{2}LE$

$b)\ \ f(x) = -2(x-1)^2 - 1 \ \wedge \ h(x) = 2x^2 - 4x + 2 \ \text{ in: } \ [-1;3] \quad \text{mit: } k(x) = f(x) - h(x) \ \Rightarrow \ k(\xi) = \frac{15}{1}$

$c)\ \ f(x) = \sin(x) \ \wedge \ h(x) = \cos(2x) + 2 \ \text{ in: } \ \left[\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right] \quad \text{mit: } k(x) = f(x) - h(x) \ \Rightarrow \ k(\xi) = 2LE$

$d)\ \ f(x) = e^x \ \wedge \ h(x) = \ln(x) \ \text{ in: } \ \left[\frac{1}{2}; 2\right] \quad \text{mit: } k(x) = f(x) - h(x) \ \Rightarrow \ k(\xi) \approx 3,6716LE$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.6.1).

18.10.63 Lösungen zu partieller und totaler Differentiation

Aufgabe 1:

$a)\ \ = 4x^3 - 6x$	$b)\ \ = 2x^5$
$c)\ \ = e^x$	$d)\ \ = b(x)c(x)x^{c(x)-1}$
$e)\ \ = e^x - 2x + a(x)$	$f)\ \ = 1$
$g)\ \ = abx^{b-1} - cdx^{d-1}$	$h)\ \ = 0$

Aufgabe 2:

$$a) \quad = (a(x)x^2 + 2x)e^{a(x)x} \qquad b) \quad = \frac{\sqrt{2}t(x)\cos(\sqrt{2xt(x)})}{2\sqrt{xt(x)}}$$

$$c) \quad = \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{3x} \qquad d) \quad = -\frac{3x + 2f(x) + 9}{(x-3)^3}$$

$$e) \quad = \frac{a\cos(ax)\cos(a(x)x) + a(x)\sin(ax)\sin(a(x)x)}{\cos^2(a(x)x)} \qquad f) \quad = (d(x)\ln(x) + d(x))x^{d(x)x}$$

$$g) \quad = (a\cos(a(x))\cos(ax) + 2\cos(a(x))x\sin(ax))\, e^{x^2} \qquad h) \quad = \tan\left(\ln(d(x))\right) x^2$$

Aufgabe 3:

$$a) \quad = (a(x)a'(x)x^2 + 2x)e^{a(x)x}$$

$$b) \quad = \frac{1}{2\sqrt{2xt(x)}}\cos\left(\sqrt{2xt(x)}\right)(2t(x) + 2xt'(x))$$

$$c) \quad = \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{3x}$$

$$d) \quad = \frac{f'(x)x - f(x) - 3f'(x) - 3x - 9}{(x-3)^3}$$

$$e) \quad = \frac{a\cos(ax)\cos(a(x)x) + a(x)a'(x)\sin(ax)\sin(a(x)x)}{\cos^2(a(x)x)}$$

$$f) \quad = (d'(x)x\ln(x)d(x)\ln(x) + d(x))\, x^{d(x)x}$$

$$g) \quad = (a\cos(a(x))\cos(ax) + 2\cos(a(x))x\sin(ax) - a(x)a'(x)\sin(ax)\sin(a(x)))\, e^{x^2}$$

$$h) \quad = \tan\left(\ln(d(x))\right) x^2 + \frac{x^3 d'(x)}{3\cos^2\left(\ln(d(x))\right) d(x)}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.7.1).

18.10.64 Lösungen zur Kurvendiskussion

Aufgabe 1:

$a)\ \ E_{Min}(2|-9)$

$b)\ \ E_{Min}\left(\frac{3}{4}\middle|\frac{55}{8}\right)$

$c)\ \ E_{Min}\left(-\frac{1}{3}\middle|-\frac{4}{3}\right)$

$d)\ \ E_{Min}\left(-\frac{9}{10}\middle|\frac{841}{1700}\right)$

$e)\ \ E_{Max}\left(-1|\,0\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(\frac{1}{3}\middle|-\frac{-32}{27}\right)$

$f)\ \ E_{Min}\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\middle|\frac{-10\sqrt{15}}{9}-10\right)\ \wedge\ E_{Max}\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\middle|\frac{10\sqrt{15}}{9}-10\right)$

$g)\ \ E_{Max}\left(-\frac{7}{3}\middle|\frac{343}{108}\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(0|\,0\right)$

$h)\ \ E_{Max}\left(\frac{-1-\sqrt{649}}{12}\middle|13,5082\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(\frac{-1+\sqrt{649}}{12}\middle|-12,0066\right)$

$i)\ \ E_{Min}\left(0|-1\right)$

$j)\ \ E_{Max}\left(-2|\,4e^{-2}\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(0|\,0\right)$

$k)\ \ E_{Min}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\middle|-5,39928\right)\ \wedge\ E_{Max}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\middle|-1,86002\right)$

$l)\ \ E_{Min}\left(-\frac{4}{3}\middle|-3,0805\right)$

$m)\ \ E_{Max}\left(-8|\,132e^{-2}\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(\frac{1}{2}\middle|-4e^{\frac{1}{8}}\right)$

$n)\ \ E_{Max}\left(-3,95981|\,4,97324\cdot 10^{19}\right)\ \wedge\ E_{Min}\left(-0,040193|\,1,98998\right)$

Aufgabe 2:

$a)\ W_1\left(\frac{4}{3}\middle|\frac{52}{27}\right)$

$b)\ W_1\left(-2,851\,|-98,555\right)\ ,\ W_2\left(0,351\,|-0,507\right)$

$c)\ S\left(0\,|0\right)$

$d)\ W_1\left(\frac{\sqrt{10}}{6}\middle|-\frac{847}{108}\right)\ ,\ W_2\left(-\frac{\sqrt{10}}{6}\middle|-\frac{847}{108}\right)$

$e)\ W_1\left(0\middle|-\frac{11}{3}\right)$

$f)\ W_1\left(-\frac{20}{7}\middle|-\frac{18040}{343}\right)\ ,\ W_2\left(0\,|0\right)$

$g)\ W_1\left(\frac{28}{297}\,|-0,099\right)$

$h)\ W_1\left(0,727\,|1,397\right)\ ,\ S\left(0\middle|\frac{17}{9}\right)$

$i)\ W_1\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{118}{27}\right)$

$j)\ W_1\left(0\,|0\right)\ ,\ W_2\left(-3\sqrt{2}\middle|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ ,\ W_3\left(3\sqrt{2}\middle|\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

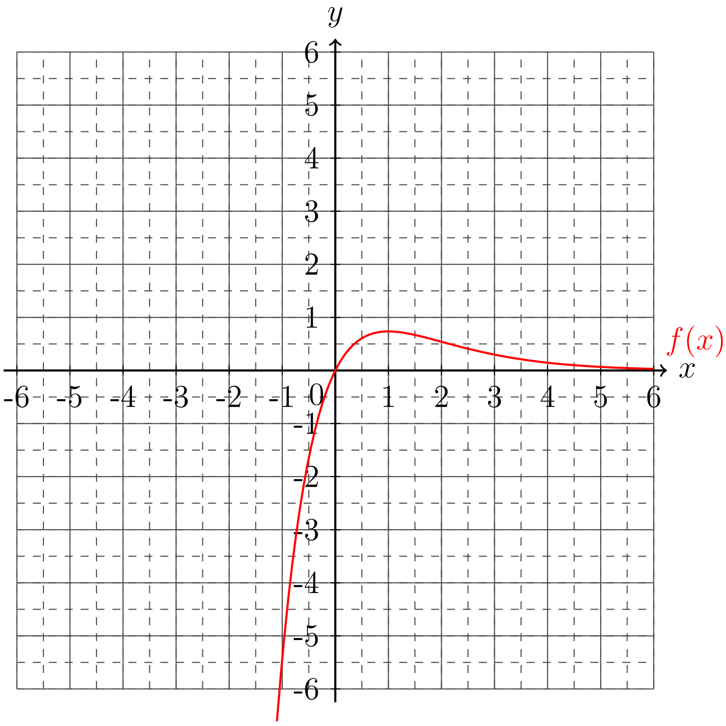
$l)\ W_1\left(1\,|e^{-2}\right)$

$k)\ W_1\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\middle|e^{\sqrt{2}-\frac{5}{4}}\right)\ ,\ W_2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\middle|e^{-\frac{1}{4}}\right)$

Aufgabe 3:

$a)$

$$f(x) = 2xe^{-x} \quad\Rightarrow\quad N(0|0)$$
$$f'(x) = (1-x)2e^{-x} \quad\Rightarrow\quad x_E = 1$$
$$f''(x) = (x-2)2e^{-x} \quad\Rightarrow\quad x_W = 2$$
$$f'''(x) = (3-x)2e^{-x}$$
$$f''(x_E) = -2e^{-1} < 0 \quad\Rightarrow\quad E_{Max}\left(1\middle|\frac{2}{e}\right)$$
$$f'''(x_W) = 4e^{-2} \neq 0 \quad\Rightarrow\quad W\left(2\,|4e^{-2}\right)$$
$$F(x) = -2(1+x)e^{-x} + c$$
$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{W} = \left\{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \leq \frac{2}{e}\right\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\ ;\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in\ ]-\infty, 1[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f'(x) < 0 \forall x \in\ ]1, \infty[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f(x) \in\ ]-\infty, 2[\quad \text{konkav}$$
$$f(x) \in\ ]2, \infty[\quad \text{konvex}$$



b)

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$$

$$\Rightarrow \quad N_1(0|0), N_2(2|0), N_3(3|0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6$$

$$\Rightarrow \quad x_{E_{1,2}} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$f''(x) = 6x - 10 \quad \Rightarrow \quad x_W = \frac{5}{3}$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f''(x_{E_1}) \approx 5,2915 > 0$$

$$\Rightarrow \quad E_{Min}\,(2,549\,|{-0},631\,)$$

$$f''(x_{E_2}) \approx -5,2915 < 0$$

$$\Rightarrow \quad E_{Max}\,(0,785\,|2,113\,)$$

$$f'''(x_W) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad W\left(\frac{5}{3}\middle|\frac{20}{27}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + c$$

$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;\; ; \;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

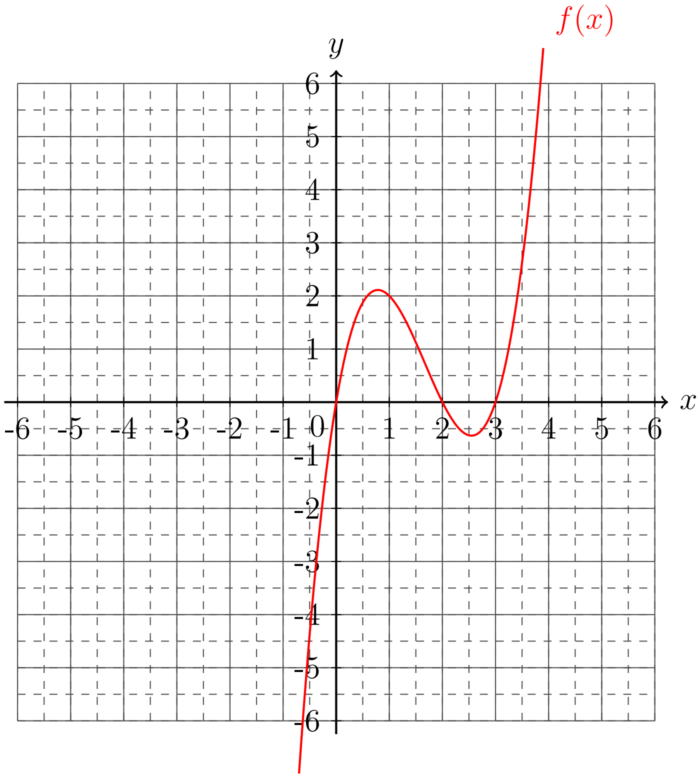
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, 0,785\,[\quad \text{s. m. st.}$$

$$f'(x) < 0 \forall x \in \,]\,0,785, 2,549\,[\quad \text{s. m. f.}$$

$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]\,2,549, \infty\,[\quad \text{s. m. st.}$$

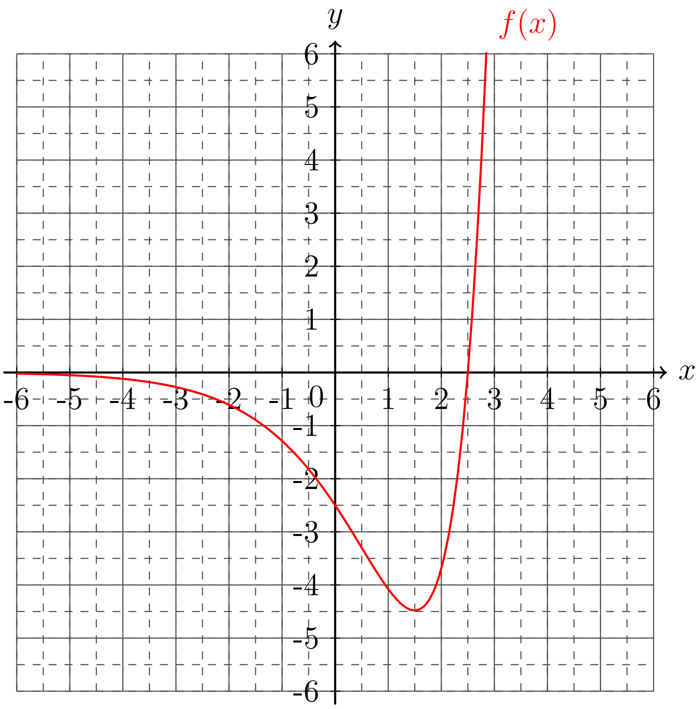
$$f(x) \in \,]-\infty, 1,667\,[\quad \text{konkav}$$

$$f(x) \in \,]\,1,667, \infty\,[\quad \text{konvex}$$



c)

$$f(x) = \frac{x^2 - 6,25}{x + 2,5} e^x \;\Rightarrow\; N(4|0)$$
$$f'(x) = (x - 1,5)e^x \;\Rightarrow\; x_E = 1,5$$
$$f''(x) = (x - 0,5)e^x \;\Rightarrow\; x_W = 0,5$$
$$f'''(x) = (x + 0,5)e^x$$
$$f''(x_{E_1}) = e^{1,5} > 0 \;\Rightarrow\; E_{Min}\left(1,5\,\middle|-e^{1,5}\right)$$
$$f'''(x_W) = e^{0,5} \neq 0 \;\Rightarrow\; W\left(0,5\,\middle|-2e^{0,5}\right)$$
$$F(x) = (x - 3,5)e^x + c$$
$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2,5\}\}$$
$$\mathbb{W} = \left\{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq -e^{1,5}\right\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\searrow 2,5} f(x) = \lim_{x\nearrow 2,5} f(x) = 5e^{2,5}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, 1,5\,[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]\,1,5, \infty\,[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f(x) \in \,]-\infty, 0,5\,[\quad \text{konvex}$$
$$f(x) \in \,]\,0,5, \infty\,[\quad \text{konkav}$$



d)

$$f(x) = x + 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \quad N_1(-1,618|0); N_1(0,618|0)$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{keine Extremstellen}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad \text{keine Wendestellen}$$

$$f'''(x) = \frac{6}{x^4}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \ln(x) + c$$

$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

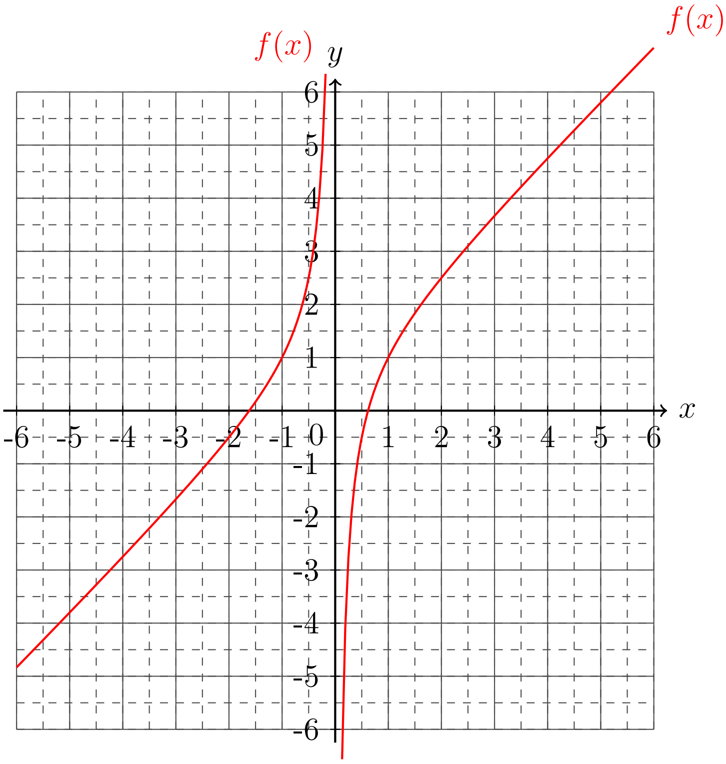
$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = -\infty \;;\; \lim_{x\nearrow 0} f(x) = \infty$$

$$A(x) = x + 1 \;\; \forall x \to \pm\infty$$

Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei 0



$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, 0\,[\quad \text{s. m. st.}$$

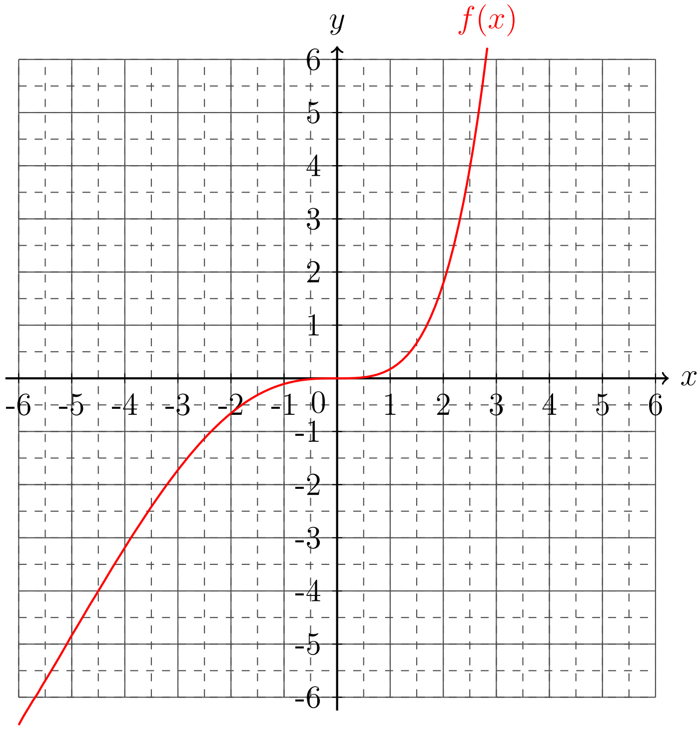
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]\,0, \infty\,[\quad \text{s. m. st.}$$

$$f(x) \in \,]-\infty, 0\,[\quad \text{konvex}$$

$$f(x) \in \,]\,0, \infty\,[\quad \text{konkav}$$

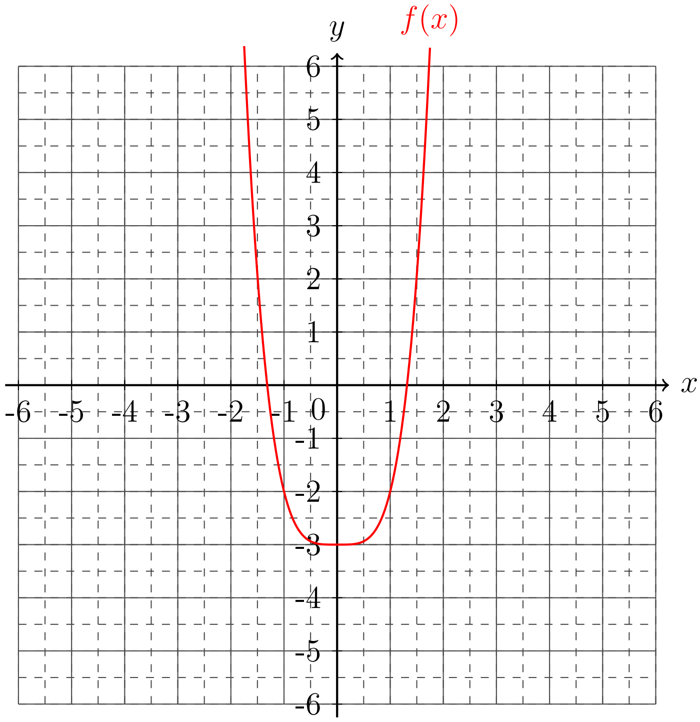
e)

$$f(x) = x^3 e^{\frac{1}{4}x-2} \;\Rightarrow\; N(0|0)$$
$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{4} + 3x^2\right) e^{\frac{1}{4}x-2}$$
$$\Rightarrow \quad x_E = 0$$
$$f''(x) = \frac{x}{16}\left(x^2 + 24x + 96\right) e^{\frac{1}{4}x-2}$$
$$\Rightarrow \quad x_W = 0$$
$$f'''(x) = \frac{1}{64}\left(x^3 + 36x^2 + 288x + 384\right) e^{\frac{1}{4}x-2}$$
$$f'''(0) = 6e^{-2} \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad \text{Sattelpunkt: } S(0|0)$$
$$F(x) = 4(x^3 - 12x^2 + 96x - 384)e^{\frac{1}{4}x-2} + c$$
$$f(x) \neq f(-x) \qquad f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, \infty[\quad \text{m. st.}$$
$$f(x) \in \,]-\infty, 0[\quad \text{konkav}$$
$$f(x) \in \,]0, \infty[\quad \text{konvex}$$



$f)$

$$f(x) = x^4 - 3$$
$$\Rightarrow \; N_1(\sqrt[4]{3}|0); N_2(\sqrt[4]{3}|0)$$
$$f'(x) = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad x_E = 0$$
$$f''(x) = 12x^2 \quad \Rightarrow \quad x_W = 0$$
$$f'''(x) = 24x$$
$$f'''(0) = 0$$
$$\Rightarrow \; \text{Substitutionstest: } z := x^2$$
$$f(z) = z^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad E_{Min}(0|-3)$$
$$F(x) = 4(x^3 - 12x^2 + 96x - 384)e^{\frac{1}{4}x-2} + c$$
$$f(x) = f(-x) \; \Rightarrow \; \text{Achsensymmetrie}$$
$$f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq -3\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;\; ; \;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, 0\,[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]\,0, \infty\,[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f(x) \in \,]-\infty, \infty\,[\quad \text{konvex}$$

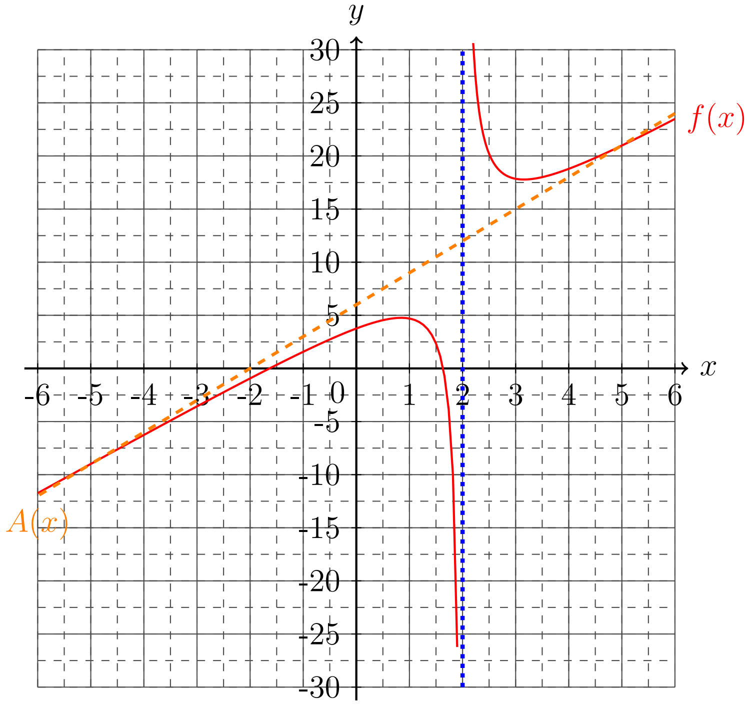


g)

$$f(x) = \frac{3x^2-8}{x-2}$$
$$\Rightarrow\ N_1 = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\middle|0\right); N_2 = \left(\frac{-2\sqrt{6}}{3}\middle|0\right)$$
$$f'(x) = \frac{3x^2-12x+8}{(x-2)^2}$$
$$\Rightarrow\ E_{max} = \left(2+\frac{2}{\sqrt{3}}\middle|\frac{4}{11}\left(5\sqrt{3}-3\right)\right)$$
$$\wedge\ E_{min} = \left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\middle|12-4\sqrt{3}\right)$$
$$f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3} \quad \Rightarrow \quad \text{keine Wendestelle}$$
$$f'''(x) = \frac{-24}{(x-2)^4}$$
$$F(x) = 4\ln|x-2| + \frac{3x^2}{2} + 6x + c$$
$$f(x) \neq f(-x)$$
$$f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\}$$

Polstelle mit Vorzeichenwechsel bei 2

$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ ; \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\nearrow 2} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x\searrow 2} f(x) = \infty$$
$$A(x) = 3x+6$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in\ ]-\infty, E_{max}[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f'(x) < 0 \forall x \in\ ]E_{max}, 2[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f'(x) < 0 \forall x \in\ ]2, E_{min}[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in\ ]E_{max}, \infty[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f(x) \in\ ]-\infty, 2[\quad \text{konvex}$$
$$f(x) \in\ ]2, \infty[\quad \text{konkav}$$

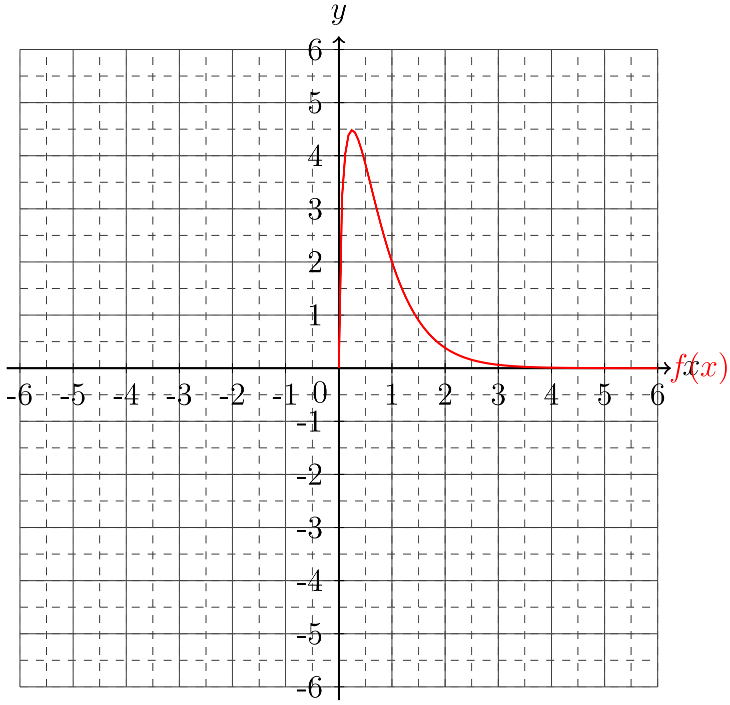


h)

$$f(x) = 2\sqrt{x}e^{-2x+2}$$
$$\Rightarrow \ N_1 = (0|0)$$
$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 4\sqrt{x}\right)e^{-2x+2} \quad \Rightarrow \quad x_E = \frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow \ E_{Max} = \left(\frac{1}{4}\middle| e^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$f''(x) = \frac{16x^2 - 8x - 1}{2x^{\frac{3}{2}}}e^{-2x+2}$$
$$\Rightarrow \ x_{W_{1,2}} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{4}$$
$$f'''(x) = \frac{-64x^3 + 48x^2 + 12x + 3}{4x^{\frac{5}{2}}}e^{-2x+2}$$
$$\Rightarrow \ W_1 = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}\middle| \approx 3,4335\right)$$
$$\wedge \ W_2 \text{ ist nicht definiert}$$
$$F(x) = 2e^2 \int \sqrt{x}e^{-2x}dx$$

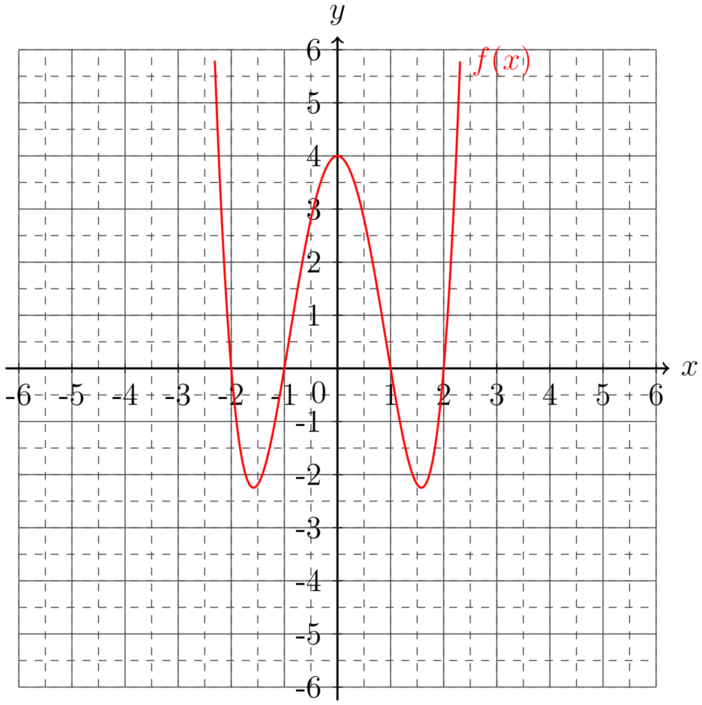
hier nicht bestimmbar

$$f(x) \neq f(-x)$$
$$f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}|0 \geq 0\}$$
$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}|f(x) \geq 0\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, x_E\,[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f'(x) < 0 \forall x \in \,]\,x_E, \infty\,[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f(x) \in \,]\,0, x_W\,[\quad \text{konkav}$$
$$f(x) \in \,]\,x_W, \infty\,[\quad \text{konvex}$$



i)

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$
$$\Rightarrow \ N_1 = (-2|0) \ , \ = N_2(-1|0) \ ,$$
$$N_3 = (1|0) \ , \ N_4 = (2|0)$$
$$f'(x) = 4x^3 - 10x \quad \Rightarrow \quad x_{E_{2,3}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \ ,$$
$$x_{E_1} = 0$$
$$\Rightarrow \quad E_{Max_1} = (0|\,4) \ ,$$
$$E_{Min_2} = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\middle| -\frac{9}{4}\right) \ ,$$
$$E_{Min_3} = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\middle| -\frac{9}{4}\right)$$
$$f''(x) = 12x^2 - 10$$
$$\Rightarrow \quad x_{W_{1,2}} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$$
$$f'''(x) = 24x$$
$$\Rightarrow \quad W_1 = \left(-\frac{\sqrt{30}}{6}\middle| \frac{19}{36}\right)$$
$$\wedge \quad W_2 = \left(\frac{\sqrt{30}}{6}\middle| \frac{19}{36}\right)$$
$$F(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x + c$$
$$f(x) = f(-x) \ \Rightarrow \ \text{Achsensymmetrie}$$
$$f(x) \neq -f(-x)$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{W} = \left\{f(x) \in \mathbb{R}|f(x) \geq -\frac{9}{4}\right\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ \ ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$$
$$f'(x) < 0 \forall x \in \,]-\infty, x_{E_2}\,[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]\,x_{E_2}, x_{E_1}\,[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f'(x) < 0 \forall x \in \,]\,x_{E_1}, x_{E_3}\,[\quad \text{s. m. f.}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]\,x_{E_3}, \infty\,[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f(x) \in \,]-\infty, x_{W_1}\,[\quad \text{konvex}$$
$$f(x) \in \,]\,x_{W_1}, x_{W_2}\,[\quad \text{konkav}$$
$$f(x) \in \,]\,x_{W_2}, \infty\,[\quad \text{konvex}$$



j)

$$f(x) = 0,3x^3 - 4x$$

$$\Rightarrow\ N_1 = \left(-\frac{2\sqrt{30}}{3}\middle|\, 0\right)\ ,$$

$$N_2 = (0|\, 0)\ ,\ N_3 = \left(\frac{2\sqrt{30}}{3}\middle|\, 0\right)$$

$$f'(x) = 0,9x^2 - 4 \quad\Rightarrow\quad x_{E_{1,2}} = \pm\frac{2\sqrt{10}}{3}$$

$$\Rightarrow\quad E_{Max,1} = \left(-\frac{2\sqrt{10}}{3}\middle|\, \frac{16\sqrt{10}}{9}\right)$$

$$\Rightarrow\quad E_{Min,2} = \left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\middle|\, -\frac{16\sqrt{10}}{9}\right)$$

$$f''(x) = 1,8x$$

$$\Rightarrow\quad x_W = 0$$

$$f'''(x) = 1,8$$

$$\Rightarrow\quad W_1\,(0|\,0)$$

$$F(x) = \frac{3}{40}x^4 - 2x^2 + c$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(x) = -f(-x) \ \Rightarrow\ \text{Punktsymmetrie}$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ ; \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

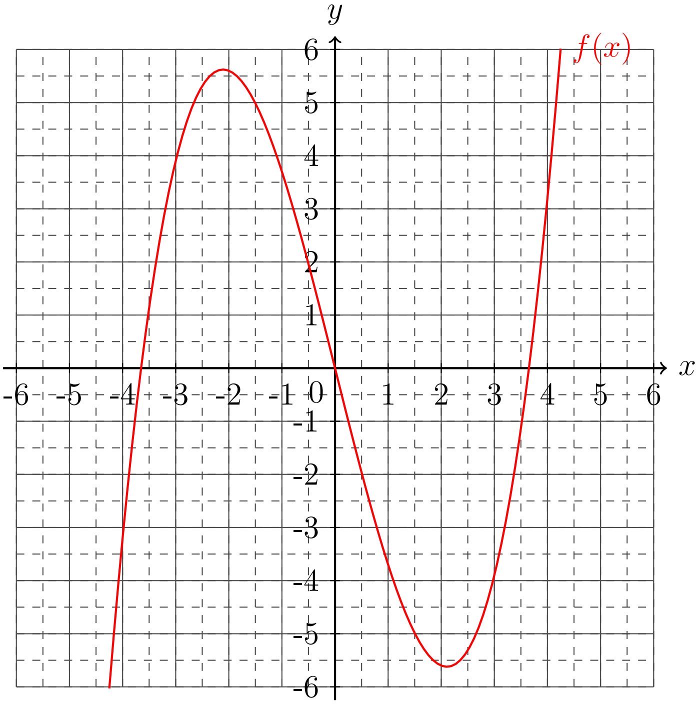
$$f'(x) > 0 \forall x \in\,]-\infty, x_{E_1}[\quad \text{s. m. st.}$$

$$f'(x) < 0 \forall x \in\,]x_{E_1}, x_{E_2}[\quad \text{s. m. f.}$$

$$f'(x) > 0 \forall x \in\,]x_{E_2}, \infty[\quad \text{s. m. st.}$$

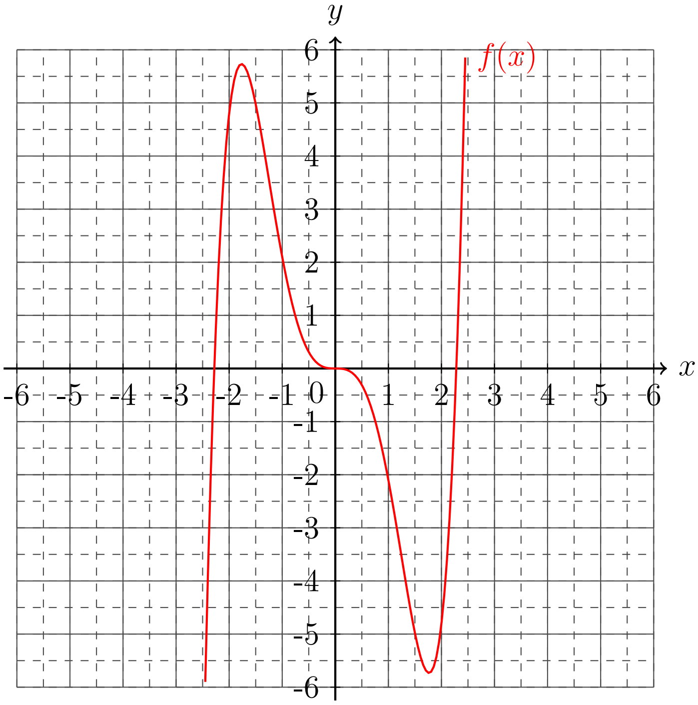
$$f(x) \in\,]0, x_W[\quad \text{konkav}$$

$$f(x) \in\,]x_W, \infty[\quad \text{konvex}$$



k)

$$f(x) = 0,5x^5 - 2,6x^3$$
$$\Rightarrow \; N_1 = \left(-\frac{\sqrt{130}}{5}\middle|\, 0\right)$$
$$N_2 = (0|\,0) \;\;,\;\; N_3 = \left(\frac{\sqrt{130}}{5}\middle|\, 0\right)$$
$$f'(x) = \frac{5x^4}{2} - \frac{39x^2}{5}$$
$$\Rightarrow \; x_{E_{1,3}} = \pm\frac{\sqrt{78}}{5} \;\wedge\; x_{E_2} = 0$$
$$\Rightarrow \; E_{Max}\left(-\frac{\sqrt{78}}{5}\middle|\, \frac{2028\sqrt{78}}{3125}\right)$$
$$\Rightarrow \; S_{x_{E_2}}\,(0|\,0) \;\; \text{Sattelpunkt}$$
$$\Rightarrow \; E_{Min}\left(\frac{\sqrt{78}}{5}\middle|\, -\frac{2028\sqrt{78}}{3125}\right)$$
$$f''(x) = 10x^3 - \frac{78x}{5}$$
$$\Rightarrow \; x_{W_{1,3}} = \pm\frac{\sqrt{39}}{5} \;,\; x_{W_2} = 0$$
$$f'''(x) = 30x^2 - \frac{78}{5} \;\;\Rightarrow\;\; W_2 = (0|\,0)$$
$$\wedge\; W_1 = \left(-\frac{\sqrt{39}}{5}\middle|\, \frac{3549\sqrt{78}}{6250}\right)$$
$$\wedge\; W_3 = \left(\frac{\sqrt{39}}{5}\middle|\, -\frac{3549\sqrt{78}}{6250}\right)$$
$$F(x) = \frac{x^6}{12} - \frac{13x^4}{20} + c$$
$$f(x) \neq f(-x)$$
$$f(x) = -f(-x) \;\;\Rightarrow\;\; \text{Punktsymmetrie}$$
$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} | 0 \geq 0\}$$
$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq 0\}$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \;;\; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]-\infty, x_{E_1}[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f'(x) < 0 \forall x \in \,]x_{E_1}, x_{E_3}[\quad \text{m. f.}$$
$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]x_{E_3}, \infty[\quad \text{s. m. st.}$$
$$f(x) \in \,]-\infty, x_{W_1}[\quad \text{konkav}$$
$$f(x) \in \,]x_{W_1}, x_{W_2}[\quad \text{konvex}$$
$$f(x) \in \,]x_{W_2}, x_{W_3}[\quad \text{konkav}$$
$$f(x) \in \,]x_{W_3}, \infty[\quad \text{konvex}$$



l)

$$f(x) = \frac{x^3 - 0,5x^2 - 7,5x + 9}{-1,5 + x} = x^2 + x - 6$$

$$\Rightarrow \ N_1 = (-3|0) \ , \ N_2 = (2|0)$$

$$f'(x) = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad x_E = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad E_{Min} = \left(-\frac{1}{2}\middle|\right)$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + c$$

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(x) \neq -f(-x)$$

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\}$$

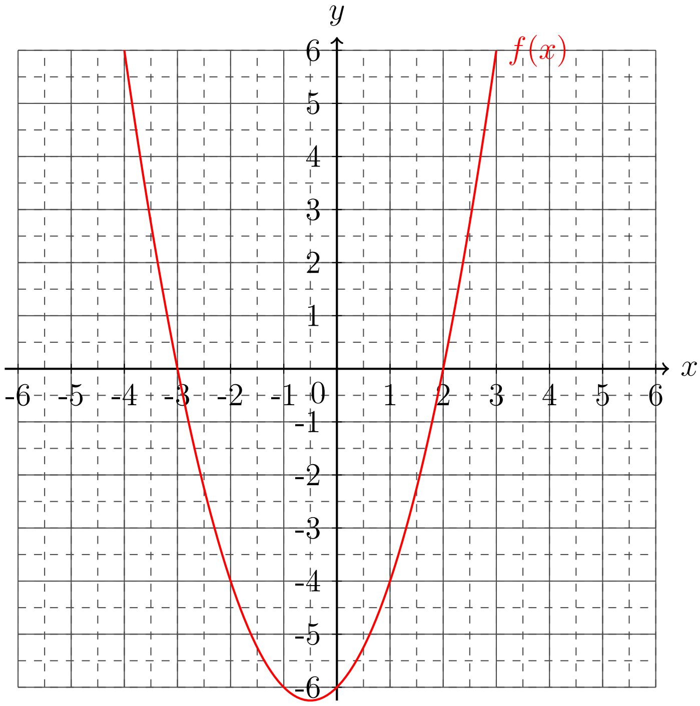
$$\mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty$$

$$f'(x) < 0 \forall x \in \,]-\infty, x_E\,[\quad \text{s. m. f.}$$

$$f'(x) > 0 \forall x \in \,]\,x_E, \infty\,[\quad \text{s. m. st.}$$

$$f(x) \in \,]-\infty, \infty\,[\quad \text{konvex}$$



Aufgabe 4:

a) $f(x) = 4x^2 - 8 \;\Rightarrow\; f'(x) = 8x \;\Rightarrow\; f''(x) = 8 \;\Rightarrow\; f'''(x) = 0$

$\Rightarrow\; x_{N_{1,2}} = \pm\sqrt{2}$; Min $(0\,|{-8})$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$; $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie

b) $f(x) = x^3 - 5x \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 5 \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x \;\Rightarrow\; f'''(x) = 6$

$\Rightarrow\; x_{N_{1,2,3}} = \left\{\pm\sqrt{5}; 0\right\}$; Min $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,|{-4,303}\right) \wedge$ Max $\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\,|4,303\right)$; $W\,(0\,|0)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ Punktsymmetrie

c) $f(x) = x^2 + 2x - 5 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x + 2 \;\Rightarrow\; f''(x) = 2 \;\Rightarrow\; f'''(x) = 0$

$\Rightarrow\; x_{N_{1,2}} = -1 \pm \sqrt{6}$; Min $(-1\,|{-6})$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

d) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x \;\Rightarrow\; f'(x) = -3x^2 + 4x + 3 \;\Rightarrow\; f''(x) = -6x + 4 \;\Rightarrow\; f'''(x) = -6$

$\Rightarrow\; x_{N_{1,2,3}} = \{-1; 3; 0\}$; Min $(-0,535\,|{-0,879}) \wedge$ Max $(1,869\,|6,065)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x^3 - 8x \;\Rightarrow\; f''(x) = 6x^2 - 8 \;\Rightarrow\; f'''(x) = 12x$

$\Rightarrow\; x_{N_{1,2,3}} = \left\{\pm\sqrt{8}; 0\right\}$; Min$_{1,2}$ $(\pm 2\,|{-8}) \wedge$ Max $(0\,|0)$; $W_{1,2}\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}\,\middle|\,-\frac{40}{9}\right)$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$; $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie

f) $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 - 2x^2 + 3x \;\Rightarrow\; f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 4x + 3 \;\Rightarrow\; f''(x) = -3x - 4 \;\Rightarrow\; f'''(x) = -3$

$\Rightarrow\; x_{N_{1,2,3}} = \{-3,737; 1,070; 0\}$; Min $(-3,277\,|{-4,915}) \wedge$ Max $(0,610\,|0,915)$

; $W\left(-\frac{4}{3}\,\middle|\,-\frac{52}{9}\right)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$

g) $f(x) = \frac{2}{7}x^6 + \frac{4}{9}x^5 - \frac{1}{5}x^4 \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{12}{7}x^5 + \frac{20}{9}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \;\Rightarrow\; f''(x) = \frac{60}{7}x^4 + \frac{80}{9}x^3 - \frac{12}{5}x^2$

$\Rightarrow\; f'''(x) = \frac{240}{7}x^3 + \frac{240}{9}x^2 - \frac{24}{5}x \;\Rightarrow\; x_{N_{1,2,3}} = \{-1,920; 0,365; 0\}$; Min$_1$ $(-1,590\,|{-1,178})$

$\wedge$ Min$_2$ $(0,294\,|{-0,0003}) \wedge$ Max $(0\,|0)$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$

$W_1\,(-1,259\,|{-0,771}) \wedge W_2\,(0\,|0) \wedge W_3\,(0,222\,|{-0,0002})$

$\Rightarrow\; x_{N_{1,2}} = \pm 2$; Min$_1$ $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\,\middle|\,-\frac{25}{4}\right) \wedge$ Min$_2$ $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\,\middle|\,-\frac{25}{4}\right) \wedge$ Max $(0\,|{-4})$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$; $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie ; $W_{1,2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,-\frac{21}{4}\right)$

$i)$ $f(x) = -3x^4 + 4x^2 + 5 \ \Rightarrow \ f'(x) = -12x^3 + 8x \ \Rightarrow \ f''(x) = -36x^2 + 8 \ \Rightarrow \ f'''(x) = -72x$

$\Rightarrow \ x_{N_{1,2}} \approx \pm 1,456 \ ; \ \text{Max}_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}\,\middle|\,\frac{19}{3}\right) \ \wedge \ \text{Min}\,(0\,|5\,) \ ; \ W_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\,\middle|\,\frac{155}{27}\right)$

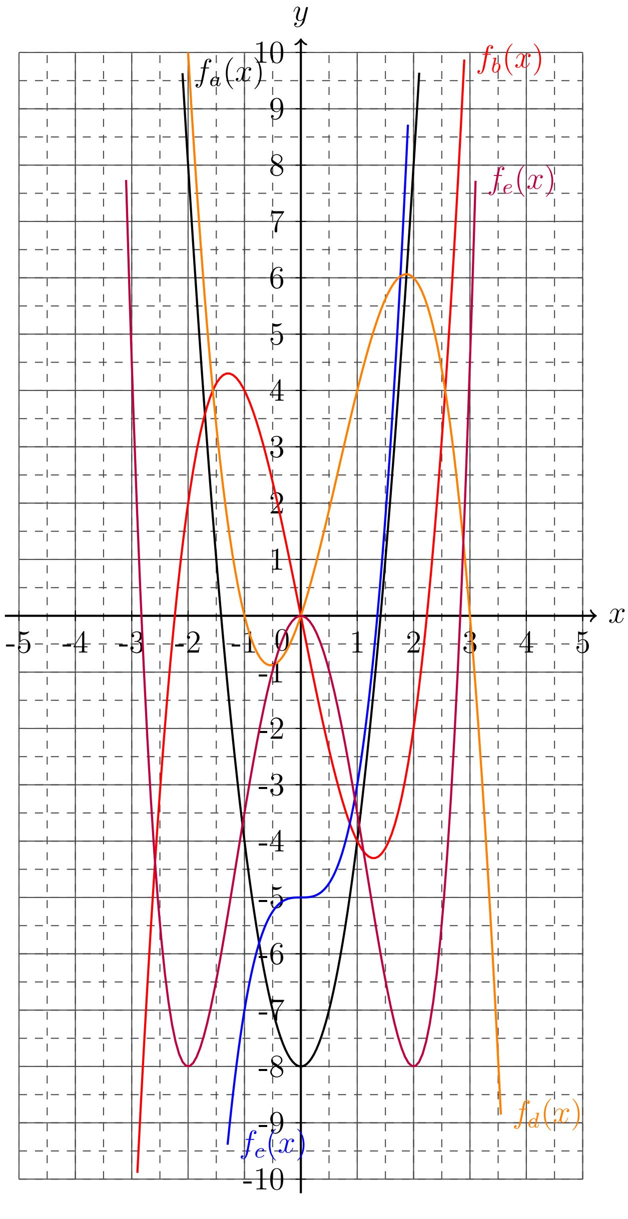
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty \ ; \ f(x) = f(-x) \Rightarrow \text{Achsensymmetrie}$

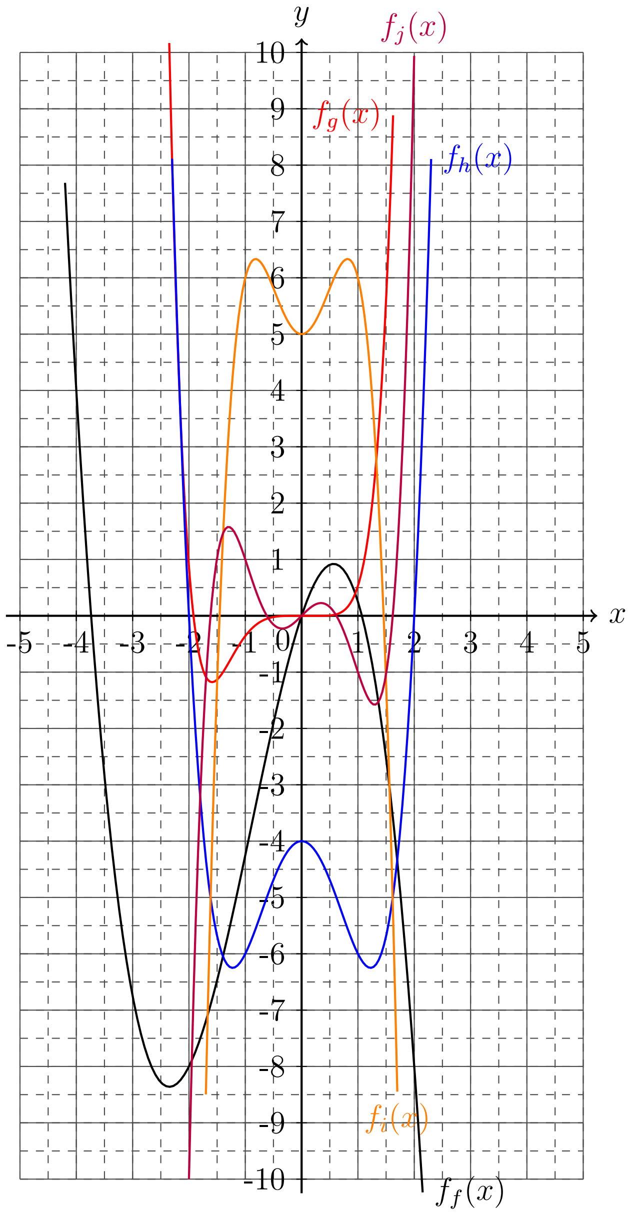
$j)$ $f(x) = x^5 - 3x^3 + x \ \Rightarrow \ f'(x) = 5x^4 - 9x^2 + 1 \ \Rightarrow \ f''(x) = 20x^3 - 18x \ \Rightarrow \ f'''(x) = 60x^2 - 18$

$\Rightarrow \ x_{N_{1,2,3,4}} = \{-1,618; -0,618; 0; 0,618\} \ ; \ \text{Min}_1\,(-0,345\,|-0,227\,) \ \wedge \ \text{Min}_2\,(1,297\,|-1,578\,)$

$\wedge \ \text{Max}_1\,(-1,297\,|1,578\,) \ \wedge \ \text{Max}_2\,(0,345\,|0,227\,) \ ; \ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$f(x) = -f(-x) \Rightarrow \text{Punktsymmetrie} \ ; \ W_1\,(0\,|0\,) \ \wedge \ W_{2,3}\left(\pm\frac{3}{\sqrt{10}}\,|\mp 0,844\right)$





Aufgabe 5:

Weite: $x = 31,737$; Höhe: $f(x_E) = 13,268$

Aufgabe 6: *Führe eine Polynomdivision bei den gegebenen Termen durch.*

$$
\begin{array}{l}
a)\ (x^5 - 2x^4 - 25x^3 + 64x^2 + 46x - 120) : (x-4) = x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 4x + 30 \\
\quad -(x^5 - 4x^4) \\
\hline
\qquad 2x^4 - 25x^3 \\
\qquad -(2x^4 - 8x^3) \\
\hline
\qquad\quad -17x^3 + 64x^2 \\
\qquad\quad -(-17x^3 + 68x^2) \\
\hline
\qquad\qquad -4x^2 + 46x \\
\qquad\qquad -(-4x^2 + 16x) \\
\hline
\qquad\qquad\quad 30x - 120 \\
\qquad\qquad\quad -(30x - 120) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

b) $(x^5 \quad -2x^4 \quad -25x^3 \quad +64x^2 \quad +46x \quad -120) : (x+5) = x^4 - 7x^3 + 10x^2 + 14x - 24$

$$\begin{array}{llllll}
-(x^5 & +5x^4) & & & & \\
\hline
 & -7x^4 & -25x^3 & & & \\
 & -(-7x^4 & -35x^3) & & & \\
\hline
 & & 10x^3 & +64x^2 & & \\
 & & -(10x^3 & +50x^2) & & \\
\hline
 & & & -14x^2 & +46x & \\
 & & & -(\;14x^2 & +70x) & \\
\hline
 & & & & -24x & -120 \\
 & & & & -(-24x & -120) \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}$$

c) $(x^5 \quad -2x^4 \quad -25x^3 \quad +64x^2 +46x \quad -120) : (x^2-2) = x^3 - 2x^2 - 23x + 60$

$$\begin{array}{llllll}
-(x^5 & -2x^3) & & & & \\
\hline
 & -2x^4 & -23x^3 & & & \\
 & -(-2x^4 & & +4x^2) & & \\
\hline
 & & -23x^3 & +60x^2 & & \\
 & & -(-23x^3 & & +46x) & \\
\hline
 & & & 60x^2 & & -120 \\
 & & & -(\;60x^2 & & -120) \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

d) $(x^5 - 2x^4 \quad -25x^3 \quad +64x^2 \quad +46x \quad -120) : (x-2) = x^4 - 25x^2 + 14x + 74 + \dfrac{28}{x-2}$

$$\begin{array}{l}
-(x^5 - 2x^4) \\
\hline
\qquad -25x^3 \quad +64x^2 \\
\qquad -(-25x^3 \quad +50x^2) \\
\hline
\qquad\qquad 14x^2 \quad +7x \\
\qquad\qquad -(\ 14x^2 \quad -28x) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 74x \quad -120 \\
\qquad\qquad\qquad -(74x \ -148) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 28
\end{array}$$

e) $(x^5 \quad -2x^4 \quad -25x^3 \quad +64x^2 \quad +46x \quad -120) : (x+4) = x^4 - 6x^3 - x^2 + 68x - 226 + \dfrac{728}{x+4}$

$$\begin{array}{l}
-(x^5 \quad +4x^4) \\
\hline
\qquad -6x^4 \quad -25x^3 \\
\qquad -(-6x^4 \quad -24x^3) \\
\hline
\qquad\qquad -x^3 \quad +64x^2 \\
\qquad\qquad -(-x^3 \quad -4x^2) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 68x^2 \quad +46x \\
\qquad\qquad\qquad -(\ 68x^3 \quad +272x) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad -226x \quad -120 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -(-226x \ -904) \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 728
\end{array}$$

$$f)\ \begin{array}{llllll} (x^5 & -2x^4 & -25x^3 & +64x^2 & +46x & -120) : (x^2+x+1) = x^3-3x^2-23x+90-\dfrac{21x+210}{x^2+x+1} \\ -(x^5 & +x^4 & +x^3) & & & \\ \hline & -3x^4 & -26x^3 & +64x^2 & & \\ & -(-3x^4 & -3x^3 & -3x^2) & & \\ \hline & & -23x^3 & +67x^2 & +46x & \\ & & -(-23x^3 & -23x^2 & -23x) & \\ \hline & & & 90x^2 & +69x & -120 \\ & & & -(\ 90x^2 & +90x & +90) \\ \hline & & & & -21x & -210 \end{array}$$

Aufgabe 7: *Untersuche die Funktion nach Polstellen und gib deren Art an.*

$a)\ f(x) = \dfrac{3}{x-4}$

$x-4=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_P = 4 \quad\Rightarrow\quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}\}$

$\lim\limits_{x \nearrow 4} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \searrow 4} f(x) = \infty \quad\Rightarrow\quad$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel

$b)\ f(x) = \dfrac{3x}{x^2-2}$

$x^2-2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x_{1,2} = \pm\sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad \mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}\right\}$

$\lim\limits_{x \nearrow -\sqrt{2}} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \searrow -\sqrt{2}} f(x) = -\infty \quad\Rightarrow\quad$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel

$\lim\limits_{x \nearrow \sqrt{2}} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \searrow \sqrt{2}} f(x) = \infty \quad\Rightarrow\quad$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel

$c)\ f(x) = \dfrac{2x^2 - 18}{x+3}$

$$x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_P = -3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}\}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x+3} = \frac{2(x^2 - 9)}{x+3} = \frac{2(x-3)(x+3)}{x+3} = 2(x-3)$$

$\lim\limits_{x \nearrow -3} f(x) = -12$

$\lim\limits_{x \searrow -3} f(x) = -12 \quad \Rightarrow \quad$ hebbare Definitionslücke

$d)\ f(x) = \dfrac{3x^3 + 2x^2 + x - 4}{x^2} = 3x + 2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x^2}$

$$x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_P = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad$ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

$e)\ f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{e^x}{(x-2)^2}$

$$x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_P = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\}$$

$\lim\limits_{x \nearrow 2} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \searrow 2} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad$ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

$f)\ f(x) = \dfrac{x^3 - 13x + 12}{x+4} = x^2 - 4x + 3$

$$x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_P = -4 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}\}$$

$\lim\limits_{x \nearrow -4} f(x) = 35$

$\lim\limits_{x \searrow -4} f(x) = 35 \quad \Rightarrow \quad$ hebbare Definitionslücke

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.12.2).

18.10.65 Lösungen zu Funktionsscharen

Aufgabe 1:

a) $f_k(x) \stackrel{!}{=} 0 = 3x^2 - \frac{2}{k}x^3$

$\Rightarrow \quad x_{N_1} = 0 \;\wedge\; x_{N_2} = \frac{3k}{2}$

b) $f_k'(x) \stackrel{!}{=} 0 = 6x - \frac{6}{k}x^2$

$\Rightarrow \quad E_{max}\left(k \left| k^2\right.\right) \;\wedge\; E_{min}\left(0\,|\,0\right)$

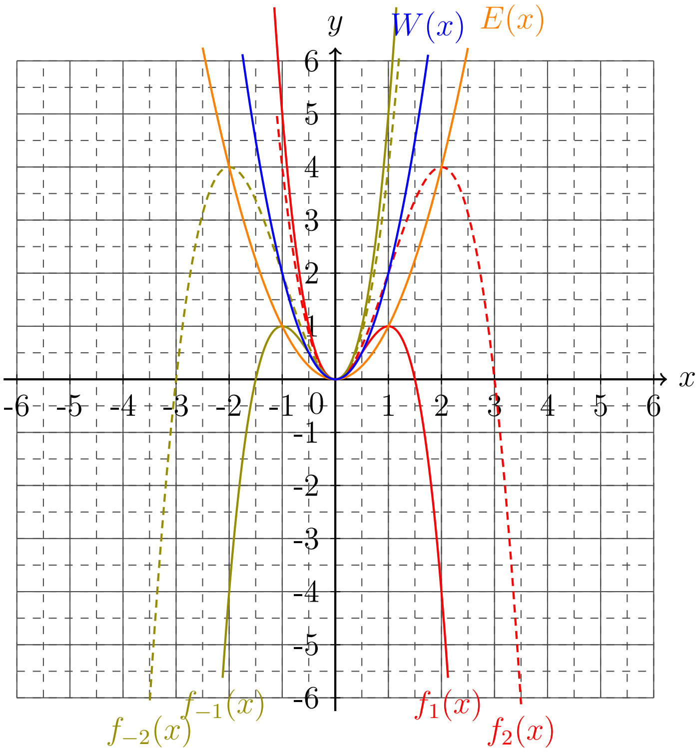
$f_k''(x) \stackrel{!}{=} 0 = 6 - \frac{12}{k}x$

$\Rightarrow \quad W\left(\frac{k}{2}\left|\frac{k^2}{2}\right.\right)$

c) $x = k \;\Rightarrow\; E(x) = x^2$,

$k = 2x \;\Rightarrow\; W(x) = 2x^2$

d) $f_{k_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{k_2}(x) \;\Rightarrow\; G(0|0)$



Aufgabe 2:

a) $f_k(x) \stackrel{!}{=} 0 = x^4 - kx + 2$

$\Rightarrow \quad x_{N_{1,2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{k^2-8}+k\right)}$

$\wedge \; x_{N_{3,4}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-2\left(\sqrt{k^2-8}+k\right)}$

b) $f_k'(x) \stackrel{!}{=} 0 = 4x^3 - 2kx$

$\Rightarrow \quad E_{min}\left(\pm\sqrt{\frac{k}{2}}\left|2-\frac{k^2}{4}\right.\right) \;\wedge\; E_{max}\left(0\,|2\right)$

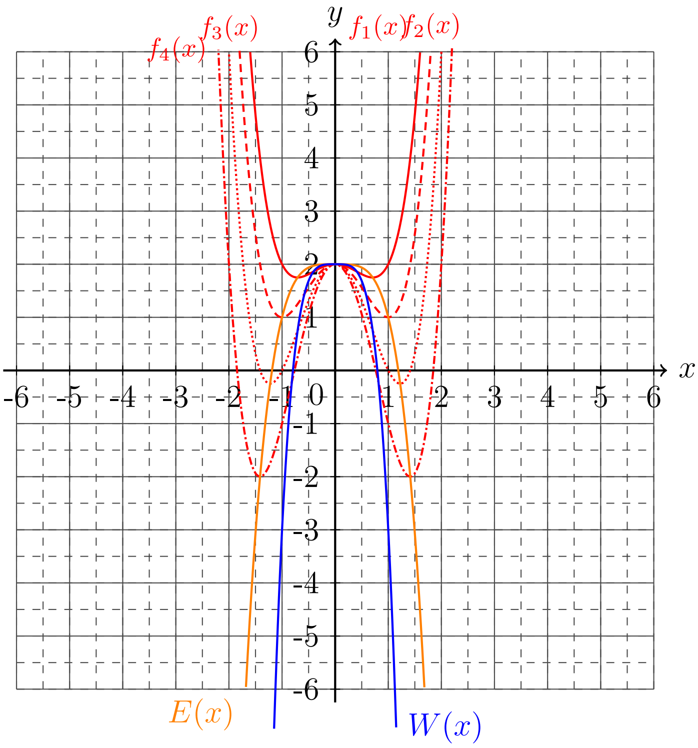
$f_k''(x) \stackrel{!}{=} 0 = 12x^2 - 2k$

$\Rightarrow \quad W_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{k}{6}}\left|2-\frac{5k^2}{36}\right.\right)$

c) $x = \pm\sqrt{\frac{k}{2}} \;\Rightarrow\; E(x) = 2 - x^4$,

$x = \pm\sqrt{\frac{k}{6}} \;\Rightarrow\; W(x) = 2 - 5x^4$

d) $f_{k_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{k_2}(x) \;\Rightarrow\; G(0|2)$



$$e)\ \text{NS: } 0 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\sqrt{k^2-8}+k\right)} \ \Rightarrow\ k = \pm\sqrt{\frac{32}{5}} \ \Rightarrow \begin{cases} |k| > \sqrt{\frac{32}{5}} & : \ 0 \text{ NS} \\ k = \pm\sqrt{\frac{32}{5}} & : \ 2 \text{ NS} \\ |k| < \sqrt{\frac{32}{5}} & : \ 0 \text{ NS} \end{cases}$$

$$\text{ES: } 0 \stackrel{!}{=} \pm\sqrt{\frac{k}{2}} \ \Rightarrow \begin{cases} k \le 0 & : \ 1 \text{ ES} \\ k > 0 & : \ 3 \text{ ES} \end{cases}$$

$$\text{WS: } 0 \stackrel{!}{=} \pm\sqrt{\frac{k}{6}} \ \Rightarrow \begin{cases} k \le 0 & : \ 0 \text{ WS} \\ k > 0 & : \ 2 \text{ WS} \end{cases}$$

Aufgabe 3:

$$a)\ f_k(x) \stackrel{!}{=} 0 = 1,8 - \frac{9,81x^2}{v^2} + x$$

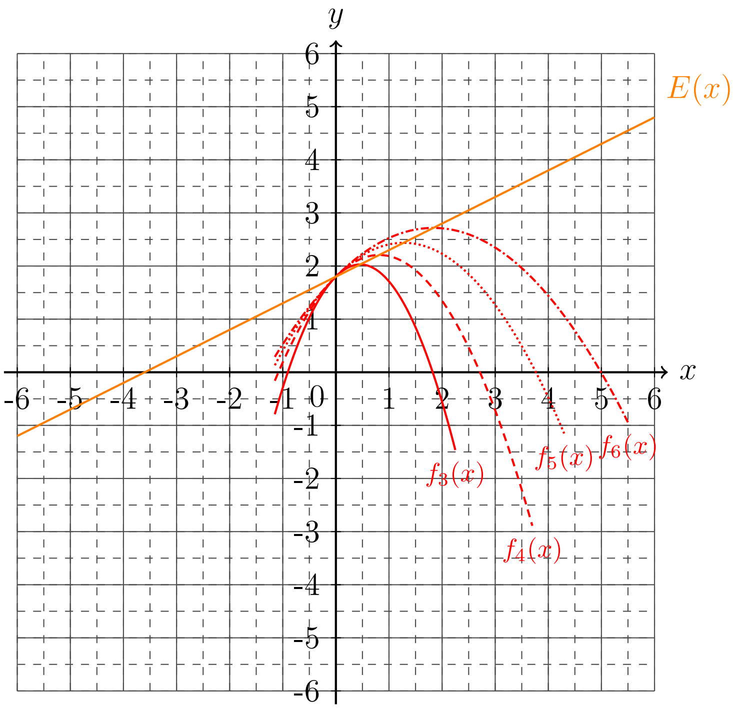
$$\Rightarrow\ x_{N_{1,2}} = \frac{50v^2}{981} \pm \frac{2v^2}{981}\sqrt{5\left(125v^2+8829\right)}$$

$$b)\ f_k'(x) \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{2\cdot 9,81x}{v^2} + 1$$

$$\Rightarrow\ E_{max}\left(\frac{50v^2}{981}\middle|\frac{25v^2}{981}+\frac{9}{5}\right)$$

$$c)\ x = \frac{50v^2}{981} \ \Rightarrow\ E(x) = \frac{x}{2}+\frac{9}{5}\ ,$$

$$d)\ f_{v_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{v_2}(x) \ \Rightarrow\ G(0|1,8)$$



Aufgabe 4:

$a)\ \ x \in \mathbb{R}^+\ ,\ a \neq 0$

$b)\ \ f_k(x) \stackrel{!}{=} 0 = \dfrac{\ln^2(x)}{ax}$

$\Rightarrow\ \ x_{N_1} = 1$

$c)\ \ f_k'(x) \stackrel{!}{=} 0 = \dfrac{2\ln(x) - \ln^2(x)}{ax^2}$

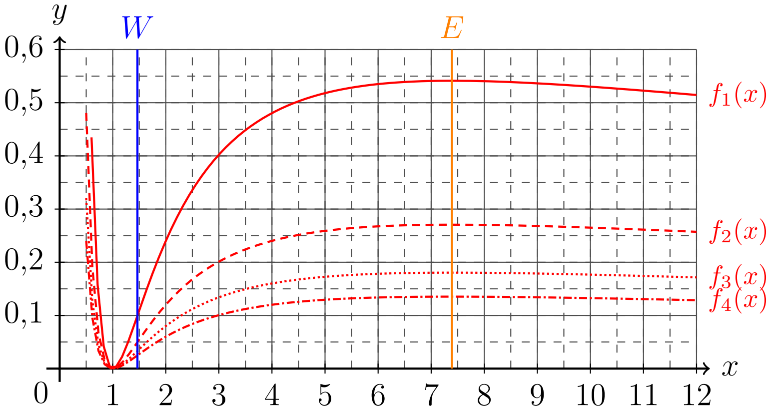
$\Rightarrow\ \ E_{min}\,(1\,|0\,)$

$\wedge\ E_{max}\left(e^2 \middle| \dfrac{4}{ae^2}\right)$

$f_k''(x) \stackrel{!}{=} 0 = \dfrac{2\ln^2(x) - 6\ln(x) + 2}{ax^3}$

$\Rightarrow\ \ W_1\left(e^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} \middle| \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2a} e^{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)$

$\wedge\ W_2\left(e^{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}} \middle| \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2a} e^{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)$



$d)$ Da die Wende- und Extremstellen nicht vom freien Parameter abhängen, existiert keine Ortskurve, da diese nicht eindeutig wäre.

$e)\ \ f_{a_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{a_2}(x)\ \Rightarrow\ G(1|0)$

Aufgabe 5:

a) $f_d(x) \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{1}{d^2}x^3 + \frac{1}{d}x^2$

$\Rightarrow \quad x_{N_1} = 0 \ \wedge \ x_{N_2} = d$

b) $f_d'(x) \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{3}{d^2}x^2 + \frac{2}{d}x$

$\Rightarrow \quad E_{max}\left(\frac{2d}{3}\,\middle|\,\frac{4d}{27}\right) \ \wedge \ E_{min}\,(0\,|0\,)$

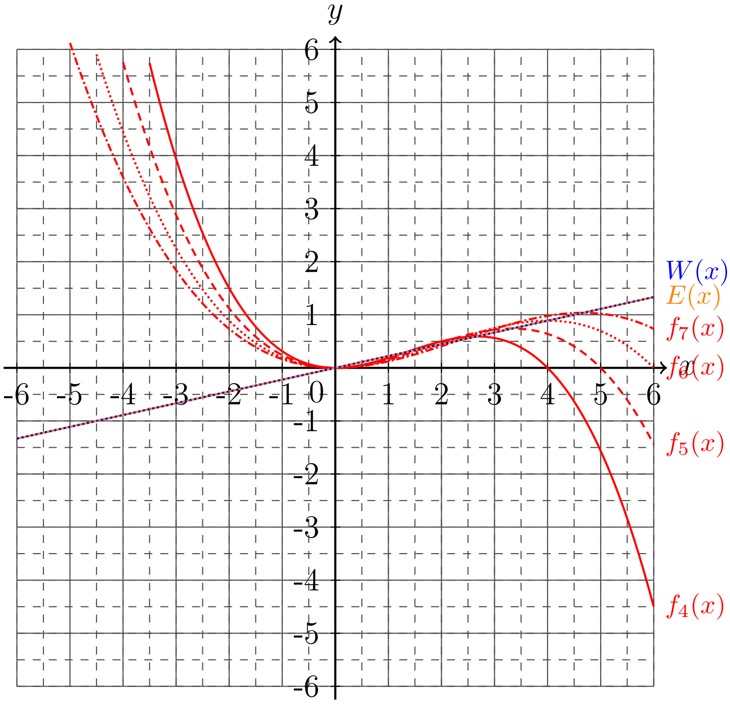
$f_d''(x) \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{6}{d^2}x + \frac{2}{d}$

$\Rightarrow \quad W\left(\frac{d}{3}\,\middle|\,\frac{2d}{27}\right)$

c) $x = \frac{2d}{3} \ \Rightarrow \ E(x) = \frac{1}{9}x$,

$x = \frac{d}{3} \ \Rightarrow \ W(x) = \frac{2}{9}x$

d) $f_{d_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{d_2}(x) \ \Rightarrow \ G(0|0)$



Aufgabe 6:

a) $f_a(x) \stackrel{!}{=} 0 = ax^2 + (5-2a)x + (a-5)$

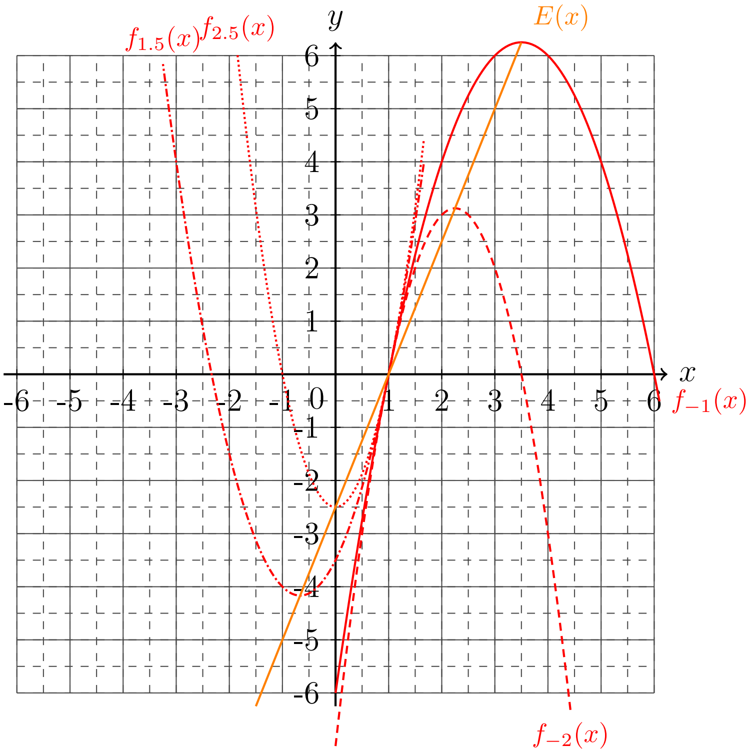
$\Rightarrow \quad x_{N_1} = \frac{a-5}{a} \ \wedge \ x_{N_2} = 1$

b) $f_a'(x) \stackrel{!}{=} 0 = 2ax + (5-2a)$

$\Rightarrow \quad E\left(\frac{2a-5}{2a}\,\middle|\,-\frac{25}{4d}\right)$

c) $x = \frac{2a-5}{2a} \ \Rightarrow \ E(x) = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$

d) $f_{a_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{a_2}(x) \ \Rightarrow \ G(1|0)$



Aufgabe 7:

$a)\ \ f_t(x) \stackrel{!}{=} 0 = txe^{t-tx}$

$\Rightarrow \quad x_N = 0$

$b)\ \ f_t'(x) \stackrel{!}{=} 0 = (t - t^2x)e^{t-tx}$

$\Rightarrow \quad E_{max}\left(\frac{1}{t}\,\middle|\,e^{t-1}\right) \ \wedge\ E_{min}\,(0\,|0\,)$

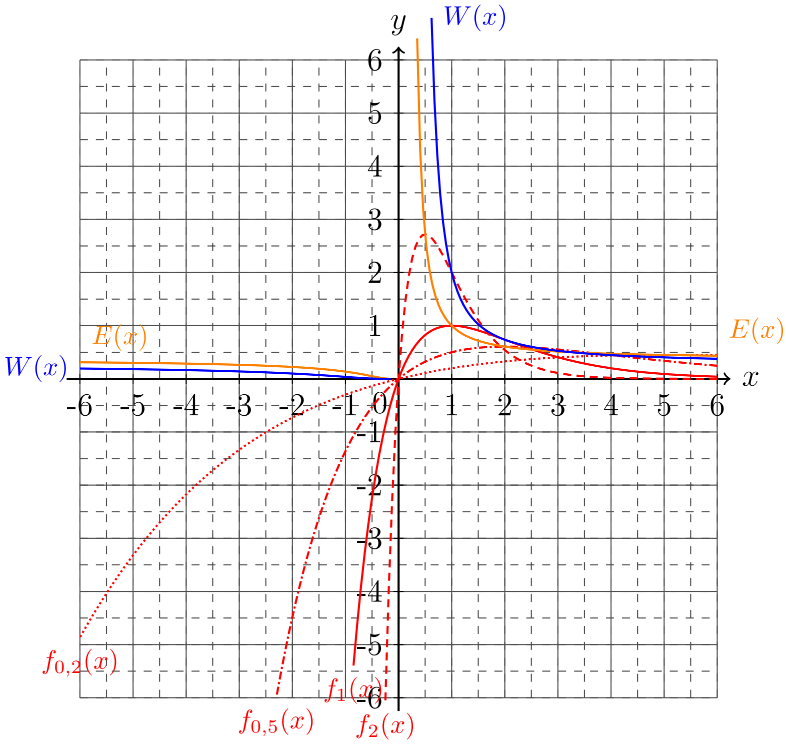
$f_t''(x) \stackrel{!}{=} 0 = (tx - 2)t^2e^{t-tx}$

$\Rightarrow \quad W_1\left(\frac{2}{t}\,\middle|\,2e^{t-2}\right) \ \wedge\ W_2\,(0\,|0\,)$

$c)\ \ x = \frac{1}{t} \ \Rightarrow\ E(x) = e^{\frac{1}{x}-1} \quad ,$

$x = \frac{2}{t} \ \Rightarrow\ W(x) = 2e^{\frac{2}{x}-2}$

$d)\ \ f_{t_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{t_2}(x) \ \Rightarrow\ G(0|0)$



Aufgabe 8: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_a(x) = 2x^2 - 6x + a$.

$a)$ Bestimme die Nullstellen.

$$
\begin{aligned}
f_a(x) \stackrel{!}{=} 0 &= 2x^2 - 6x + a \qquad |:2 \\
0 &= x^2 - 3x + \frac{a}{2} \qquad |pq \\
x_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{a}{2}}
\end{aligned}
$$

$b)$ Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Nullstellen.

Wenn der Radikand 0 wird, existiert nur eine Lösung dieser Gleichung. Wenn der Radikand negativ wird, ist die reelle Wurzelfunktion nicht definiert und somit existiert keine Lösung dieser

Gleichung.

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \stackrel{!}{=} \frac{9}{4} - \frac{a}{2} \quad \Big| + \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{9}{4} \quad |\cdot 2$$

$$a = \frac{9}{2}$$

Teste:$a > \frac{9}{2}$: $\frac{9}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ Wurzel für diesen Radikand nicht definiert.

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{keine Nullstelle: } , \forall a > \frac{9}{2} \\ \text{eine Nullstelle: } , \forall a = \frac{9}{2} \\ \text{zwei Nullstellen: } , \forall a < \frac{9}{2} \end{cases}$$

$c)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.

$$f_a'(x) = 4x - 6 \stackrel{!}{=} 0 \quad |+6$$

$$4x = 6 \quad |: 4$$

$$x_E = \frac{3}{2}$$

$$f_a''(x_E) = 4 > 0 \Rightarrow Min$$

$$f(x_E) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + a = a - \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad Min\left(\frac{3}{2}\middle| a - \frac{9}{2}\right)$$

Eine Polynomfunktion zweiter Ordnung kann keine Wendepunkte besitzen.

$d)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.

$$f_{a_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{a_2}(x) \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 6x + a_1 = 2x^2 - 6x + a_2 \quad \big| -2x^2 + 6x$$

$$a_1 = a_2 \quad \Rightarrow \quad \nexists \text{ gemeinsame Punkte}$$

Aufgabe 9: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_a(x) = 2x^2 + ax - 4$.

$a)$ Bestimme die Nullstellen.

$$f_a(x) \stackrel{!}{=} 0 = 2x^2 + ax - 4 \quad |: 2$$

$$0 = x^2 + \frac{a}{2}x - 2 \quad |pq$$

$$x_{1,2} = -\frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} + 2}$$

$b)$ Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Nullstellen.

Der Radikand kann nicht 0 werden, da der Parameter a quadriert wird und alle Terme addiert werden, somit existieren für jeden Parameterwert von a immer zwei Nullstellen.

$c)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.

$$
\begin{aligned}
f_a'(x) = 4x + a &\stackrel{!}{=} 0 \quad |-a \\
4x &= -a \quad |:4 \\
x_E &= -\frac{a}{4} \\
f_a''(x_E) &= 4 > 0 \;\Rightarrow\; Min \\
f(x_E) &= 2\left(-\frac{a}{4}\right)^2 + a\left(-\frac{a}{4}\right) - 4 = \frac{a^2}{8} - \frac{a^2}{4} - 4 = -\frac{a^2}{8} - 4 \\
Min&\left(-\frac{a}{4}\middle|-\frac{a^2}{8} - 4\right)
\end{aligned}
$$

Eine Polynomfunktion zweiter Ordnung kann keine Wendepunkte besitzen.

$d)$ Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe $c)$.

$$
\begin{aligned}
x - \frac{a}{4} \quad &\Rightarrow \quad -4x = a \\
E &= -\frac{a^2}{8} - 4 \\
E(x) &= -\frac{(-4x)^2}{8} - 4 \\
E(x) &= -2x^2 - 4
\end{aligned}
$$

$e)$ Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Extrem- und Wendepunkte aus der Teilaufgabe $c)$.

Da in der Gleichung $x_E = -\frac{a}{4}$ keine Einschränkung der Definitionsmenge für a zu erkennen ist, existiert für jeden Wert von a eine Extremstelle.

$f)$ Bestimme die gemeinsamen Punkte.

$$f_{a_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{a_2}(x) \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + a_1x - 4 = 2x^2 + a_2x - 4 \quad \Big| -2x^2 + 4$$
$$a_1x = a_2x \quad \big| -a_2x$$
$$a_1x - a_2x = 0$$
$$(a_1 - a_2)x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_G = 0$$
$$f_a(x_G) = 2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 - 4 = -4 \quad \Rightarrow \quad G\,(0|-4)$$

Aufgabe 10: *Löse alle Teilaufgaben für die gegebene Funktionsschar* $f_a(x) = ax^2 - 6x - 4$.

$a)$ Bestimme die Nullstellen.

$$f_a(x) \stackrel{!}{=} 0 = ax^2 - 6x - 4 = \begin{cases} 0 = -6x - 4 \quad |+6x \quad , \forall a = 0 \\ 0 = ax^2 - 6x - 4 \quad |: a \quad , \forall a \neq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6x = -4 \quad |: 6 \quad , \forall a = 0 \\ 0 = x^2 - \frac{6}{a}x - \frac{4}{a} \quad |pq \quad , \forall a \neq 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \quad , \forall a = 0 \\ x_{2,3} = \frac{3}{a} \pm \sqrt{\frac{9}{a^2} + \frac{4}{a}} \quad , \forall a \neq 0 \end{cases}$$

$b)$ Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Nullstellen.

Es wird der zweite Fall ($a \neq 0$) genauer betrachtet:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{9}{a^2} + \frac{4}{a} \quad \Big| -\frac{4}{a}$$
$$-\frac{4}{a} = \frac{9}{a^2} \quad \big|^{-1}$$
$$-\frac{a}{4} = \frac{a^2}{9} \quad \Big| \cdot \frac{9}{a}$$
$$-\frac{9}{4} = a$$

Teste:$a > -\dfrac{9}{4}$: $\dfrac{9}{(-1)^2} + \dfrac{4}{(-1)} = 9 - 4 = 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{keine Nullstelle: } , \forall a < -\frac{9}{4} \ \wedge \ a \neq 0 \\ \text{eine Nullstelle: } , \forall a = 0 \\ \text{eine Nullstelle: } , \forall a = -\frac{9}{4} \\ \text{zwei Nullstellen: } , \forall a > -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$c)$ Bestimme die Extrem- und Wendepunkte.

$$f_a'(x) \stackrel{!}{=} 0 = 2ax - 6 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 0 = -6 \;\Rightarrow\; \text{falsche Aussage} & , \forall a = 0 \\ 0 = 2ax - 6 \quad |+6 & , \forall a \neq 0 \end{cases}$$

$$6 = 2ax \quad |:(2a) \quad , \forall a \neq 0$$

$$\frac{3}{a} = x_E \quad , \forall a \neq 0$$

$$f_a''(x) = 2a \;\Rightarrow\; \begin{cases} Min & , \forall a > 0 \\ Max & , \forall a < 0 \end{cases}$$

$$f_a(x_E) = a\left(\frac{3}{a}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{a} - 4 = -\frac{9}{a} - 4$$

$$E\left(\frac{3}{a}\middle| -\frac{9}{a} - 4\right)$$

Eine Polynomfunktion zweiter Ordnung kann keine Wendepunkte besitzen.

d) Bestimme Ortskurven für gefundene Punkte aus der Teilaufgabe *c*).

$$x\frac{3}{a} \;\Rightarrow\; \frac{3}{x} = a \;, \forall x \neq 0$$

$$E = -\frac{9}{a} - 4 = -9 : a - 4 \;, \forall x \neq 0$$

$$E(x) = -9 : \frac{3}{x} - 4 \;, \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \; E(x) = -3x - 4$$

e) Bestimme Grenzen für den Parameter a für die Anzahl der Extrem- und Wendepunkte aus der Teilaufgabe *c*).

$$\begin{cases} \text{keine Extremstelle} & , \forall a = 0 \\ \text{eine Extremstelle} & , \forall a \neq 0 \end{cases}$$

f) Bestimme die gemeinsamen Punkte.

$$f_{a_1}(x) \stackrel{!}{=} f_{a_2}(x) \quad \Rightarrow \quad a_1x^2 - 6x - 4 = a_2x^2 - 6x - 4 \quad |+6x+4$$

$$a_1x^2 = a_2x^2 \quad \left|-a_2x^2\right.$$

$$a_1x^2 - a_2x^2 = 0$$

$$(a_1 - a_2)x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_G = 0$$

$$f_a(x_G) = a \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 4 = -4 \quad \Rightarrow \quad G\,(0|-4)$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.13.1).

18.10.66 Lösungen zu Funktionsrekonstruktionen

Aufgabe 1:

$$f(x) = -\frac{8}{3}x^2 + \frac{22}{3}x + 2$$

Aufgabe 2:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$$

Aufgabe 3:

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{8}x^2 - \frac{15}{8}x + \frac{7}{8}$$

Aufgabe 4:

$$f(x) = -\frac{8}{15}x^3 - \frac{22}{15}x^2 + \frac{4}{5}x - \frac{6}{5}$$

Aufgabe 5:

a) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}+2}{2}x^2 + \left(\sqrt{3}+2\right)x$

b) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}+2}{4}x^2 + \left(\sqrt{3}+2\right)x$

c) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}+2}{3}x^2 + \left(\sqrt{3}+2\right)x \quad \Rightarrow \quad f(2) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3}+2\right) \approx 2,488m$

d) $f_w(x) = -\frac{\sqrt{3}+2}{w}x^2 + \left(\sqrt{3}+2\right)x$

Aufgabe 6:

$a)\ f(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 - 2x^2 - 5x + 6\right)$ $\qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{8}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{35}{2}x\right)$

$c)\ f(x) = \frac{1}{20}\left(x^4 + 2x^3 - 21x^2 - 22x + 40\right)$ $\qquad d)\ f(x) = -\frac{1}{27}\left(x^4 - x^3 - \frac{93}{4}x^2 + \frac{99}{4}x + 81\right)$

Aufgabe 7:

$$f(x) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x$$

Aufgabe 8:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{21}{4}$$

Aufgabe 9:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$$

Aufgabe 10:

$$f(x) = -\frac{3}{11}x^3 + \frac{9}{11}x^2 + \frac{16}{11}x$$

Aufgabe 11:

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x + 4$$

Aufgabe 12:

$$f(x) = \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{32}{9}$$

Aufgabe 13:

$$f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

Aufgabe 14:

$$f(x) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{14}{5}x + 4$$

Aufgabe 15:

$$f(x) = \frac{5}{16}x^3 - \frac{15}{4}x$$

Aufgabe 16:

$$f(x) = \frac{1}{135}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 6$$

Aufgabe 17:

$$f(x) = -\frac{3}{311}x^3 + \frac{18}{311}x^2 + \frac{108}{311}x + \frac{528}{311}$$

Aufgabe 18:

$$f_a(x) = ax^2 + (1-3a)x + 2$$
$$f_b(x) = \frac{1-b}{3}x^2 + bx + 2$$

Aufgabe 19:

$$
\begin{aligned}
f_a(x) &= ax^2 - (4-6a)x + 6 + 5a \\
f_b(x) &= -\frac{b+4}{6}x^2 + bx + \frac{8}{3} - \frac{5}{6}b \\
f_c(x) &= \frac{c-6}{5}x^2 + \left(\frac{16}{5} - \frac{6}{5}c\right)x + c
\end{aligned}
$$

Aufgabe 20:

$$f_a(x) = ax^3 + \frac{3+10a}{2}x^2 + \left(4a - \frac{1}{2}\right)x + 3$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.14.1).

18.10.67 Lösungen zu Funktionsrekonstruktionen

Aufgabe 1: $x = \frac{c}{2}$ und $y = \frac{h}{2}$ mit der Zielfunktion $A(x) = hx - \frac{h}{c}x^2$

Aufgabe 2: Seiten $a = b = 2x = 2y = \frac{2r}{\sqrt{2}}$ mit der Zielfunktion $A(x) = 4x\sqrt{r^2 - x^2}$

Aufgabe 3: $x = 2y = \frac{2r}{\sqrt{2}}$ mit der Zielfunktion $A(x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$

Aufgabe 4: $c = \sqrt{3}r$ und $h_c = \frac{3}{2}r$ Gleichseitiges Dreieck

Aufgabe 5: $x = 2y = \frac{1}{2}s$

Aufgabe 6: $x = y = \sqrt{A}$

Aufgabe 7: $a = b = h = \sqrt{\frac{O}{6}}$

Aufgabe 8: $a = b = h = \sqrt{\frac{O}{6}}$

Aufgabe 9: $a = b = h = \sqrt[3]{V}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.15.1).

18.10.68 Lösungen zu den Rotationskörpern

Aufgabe 1:

$a)\ V = 8,1\pi$ $\quad b)\ V = 8,1\pi$ $\quad c)\ V \approx 39,508$ $\quad d)\ V = 120\pi$

$e)\ V = 656,1\pi$ $\quad f)\ V \approx 25,007$ $\quad g)\ V = \frac{729}{35}\pi$ $\quad h)\ V = \frac{4212}{35}\pi$

Aufgabe 2:

$a)\ V_y = \frac{9999}{2500}\pi$ $\quad b)\ V_y = \frac{485}{324}\pi$ $\quad c)\ V_y = \frac{8499}{160}\pi$ $\quad c$

$e)\ V_y \approx 5,301$ $\quad f)\ V_y \approx 1,080$ $\quad g)\ V_y = 4\pi$ $\quad h$

Aufgabe 4: $V = \pi$

Aufgabe 5:

$a)\ x_G \approx 3,368$ $\quad b)\ x_G \approx 1,889$ $\quad c)\ x_G \approx 3,568$

Aufgabe 6:

$$x_G \approx 2,7343$$

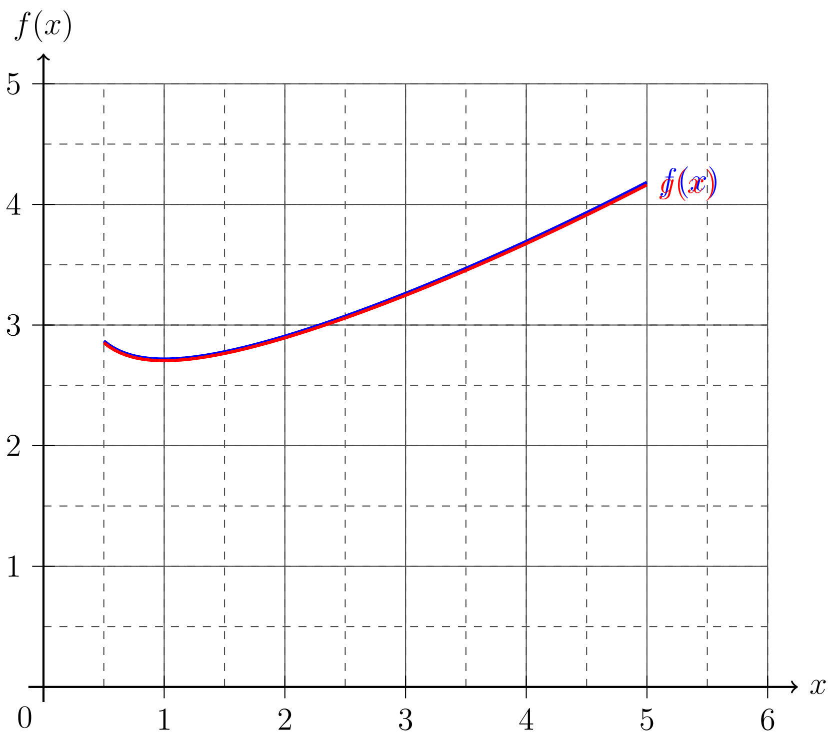
Aufgabe 7:

$x_N = 2$; $x_E = 3$; $d = 6$; $h \approx 15,82243$

$A_u \approx 9,8667$; $A_o \approx 29,0843$; $A_G \approx 29,0843$

$V_u \approx 75,3972$; $V_G \approx 353,809$; $369,26\%$ Zuwachs

Aufgabe 8:



$b)$ $V_I \approx 91,298 dm^3$

$c)$ $d \approx 1,356 mm$

$d)$ $m \approx 2,795 kg$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.16.1).

18.10.69 Lösungen zu den gemischten Differentiations- und Integrationsaufgaben

Aufgabe 1:

$$f(x) = -3x^2 + 6x$$

Aufgabe 2:

$$f(x) = \frac{32}{125}x^3 - \frac{96}{125}x^2 + \frac{96}{125}x + \frac{61}{250}$$

Aufgabe 3:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1$$

Aufgabe 5:

$a)\ \ f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ \wedge \ g(x) = -2x^2 + 20x - 42$

$b)\ \ x_{S_{1,2}} = \frac{39}{8} \pm \frac{\sqrt{161}}{8} \approx \begin{cases} 3,289 & ,\text{für } x_1 \\ 6,461 & ,\text{für } x_2 \end{cases}$

$c)\ \ A \approx 10,640$

Aufgabe 6:

$a)\ \ f(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{25}{4} \ \wedge \ g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 4$

$b)\ \ x_{S_{1,2}} = \frac{57}{19} \pm \frac{4\sqrt{57}}{19} \approx \begin{cases} 1,411 & ,\text{für } x_1 \\ 4,589 & ,\text{für } x_2 \end{cases}$

$c)\ \ A \approx 8,477$

Aufgabe 7:

$a)\ \ f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{10}{3} \ \wedge \ g(x) = -x^2 + 8x - 12$

$b)\ \ x_{S_{1,2}} = \frac{16}{5} \pm \frac{3\sqrt{14}}{5} \approx \begin{cases} 0,955 & ,\text{für } x_1 \\ 5,445 & ,\text{für } x_2 \end{cases}$

$c)\ \ A \approx 25,144$

Aufgabe 8:

$$a)\ \ f(x) = x^3 - 2x = -g(x)$$
$$b)\ \ x_{S_{1,2,3}} = \begin{cases} \pm\sqrt{2} & ,\text{für } x_{1,2} \\ 0 & ,\text{für } x_3 \end{cases}$$
$$c)\ \ A = 4$$

Aufgabe 9:

$$a)\ \ f(x) = \frac{7}{4}x^4 - \frac{27}{4}x^2 + 1 \ \wedge\ g(x) = x^2 - 2$$
$$b)\ \ x_{S_{1,2,3,4}} = \begin{cases} \pm 2 & ,\text{für } x_{1,2} \\ \pm\frac{\sqrt{27}}{7} & ,\text{für } x_{3,4} \end{cases}$$
$$c)\ \ A \approx 12,058$$

Aufgabe 10:

$$a)\ \ f(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{8}{3}x^2 + 2 = -g(x)$$
$$b)\ \ x_{S_{1,2,3,4}} = \begin{cases} \pm 1 & ,\text{für } x_{1,2} \\ \pm\sqrt{3} & ,\text{für } x_{3,4} \end{cases}$$
$$c)\ \ A \approx 6,261$$

Aufgabe 11:

$a)$ $f(x) = -7,6x^4 + 424,1x^2 + 17693$
$b)$ $f(5,282) \approx 23609,5$
$c)$ $1,403$
$d)$ $26759,8kW$
$e)$ $k(x)$, da das zweite Maximum niedriger sein muss als der erste!

Aufgabe 12:

$$\begin{aligned} a)\;\; f(x) &= 5x^3 - x^{\frac{2}{7}} + \frac{2}{x^7} \\ &= 5x^3 - x^{\frac{2}{7}} + 2x^{-7} \\ f'(x) &= 3 \cdot 5x^{3-1} - \frac{2}{7}x^{\frac{2}{7}-1} + (-7) \cdot 2x^{-7-1} \\ &= 15x^2 - \frac{2}{7}x^{-\frac{5}{7}} - \frac{14}{x^8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\;\; f(x) &= 5x^3 - x^{\frac{2}{7}} + \frac{2}{x^7} \\ f'(x) &= 6e^{3x} - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c)\;\; f(x) &= e^{-2x^3-3x+2} \;\Rightarrow\; g(x) = e^x \;\wedge\; h(x) = -2x^3 - 3x + 2 \\ &\Rightarrow\; g'(x) = e^x \;\wedge\; h'(x) = -6x^2 - 3 \\ f'(x) &= h'(x)g'(h(x)) = (-6x^2 - 3)e^{-2x^3-3x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d)\;\; f(x) &= 2x^3e^{-4x} \;\Rightarrow\; u(x) = e^{-4x} \;\wedge\; v(x) = 2x^3 \\ &\Rightarrow\; u'(x) = -4e^{-4x} \;\wedge\; v'(x) = 6x^2 \\ f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -4e^{-4x}2x^3 + 6x^2e^{-4x} \\ f'(x) &= \left(-8x^3 + 6x^2\right)e^{-4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e)\;\; f(x) &= \left(3x^4 + \sqrt{x}\right)^{-6} \;\Rightarrow\; g(x) = x^{-6} \;\wedge\; h(x) = 3x^4 + \sqrt{x} \\ &\Rightarrow\; g'(x) = -6x^{-7} \;\wedge\; h'(x) = 12x^3 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \\ f'(x) &= h'(x)g'(h(x)) = \left(12x^3 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)(-6)\left(3x^4 + \sqrt{x}\right)^{-7} \end{aligned}$$

$$f)\ \ f(x) = e^{-2x}\cos(3x) \ \Rightarrow\ u(x) = e^{-2x} \ \wedge\ v(x) = \cos(3x)$$
$$\Rightarrow\ u'(x) = -2e^{-2x} \ \wedge\ v'(x) = -3\sin(3x)$$
$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -2e^{-2x}\cos(3x) - 3\sin(3x)e^{-2x}$$
$$= (-2\cos(3x) - 3\sin(3x))\, e^{-2x}$$

$$g)\ \ f(x) = \frac{2}{3}x^4e^{-x}\sin(3x)$$
$$\Rightarrow\ u(x) = \frac{2}{3}x^4 \ \wedge\ v(x) = w(x)t(x) = e^{-x}\sin(3x) \ \wedge\ w(x) = e^{-x} \ \wedge\ t(x) = \sin(3x)$$
$$\Rightarrow\ u'(x) = \frac{8}{3}x^3 \ \wedge\ w'(x) = -e^{-x} \ \wedge\ t'(x) = 3\cos(3x)$$
$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = u'(x)w(x)t(x) + u(x)w'(x)t(x) + u(x)w(x)t(x)$$
$$= \frac{8}{3}x^3e^{-x}\sin(3x) + \frac{2}{3}x^4\left(e^{-x}\right)\sin(3x) + \frac{2}{3}x^4e^{-x}3\cos(3x)$$
$$= \frac{2}{3}\left[4x^3\sin(3x) - \frac{2}{3}x^4\sin(3x) + x^4 3\cos(3x)\right]e^{-x}$$

$$h)\ \ f(x) = \sin(4x^2+3x-1)e^{-3x^2+5x-9}$$
$$\Rightarrow\ u(x) = \sin(4x^2+3x-1) = g(h(x)) \ \wedge\ v(x) = e^{-3x^2+5x-9} = k(l(x))$$
$$\Rightarrow\ g(x) = \sin(x) \ \wedge\ h(x) = 4x^2+3x-1 \ \wedge\ k(x) = e^x \ \wedge\ l(x) = -3x^2+5x-9$$
$$\Rightarrow\ g'(x) = \cos(x) \ \wedge\ h'(x) = 8x+3 \ \wedge\ k'(x) = e^x \ \wedge\ l'(x) = -6x+5$$
$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = h'(x)g'(h(x))v(x) + u(x)l'(x)k'(l(x))$$
$$= (8x+3)\cos(4x^2+3x-1)e^{-3x^2+5x-9} + (-6x+5)\sin(4x^2+3x-1)e^{-3x^2+5x-9}$$
$$= \left[(8x+3)\cos(4x^2+3x-1) + (-6x+5)\sin(4x^2+3x-1)\right]e^{-3x^2+5x-9}$$

$$i)\ \ f(x) = \frac{1}{\left(\sin(e^{-3x})\right)^4}$$

$$\Rightarrow\ g(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4}\ \wedge\ h(x) = \sin(x) = h(l(x))\ \wedge\ l(x) = e^{-3x}$$

$$\Rightarrow\ g'(x) = -4x^{-5}\ \wedge\ h'(x) = \cos(x)\ \wedge\ l'(x) = -3e^{-3x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x)g'(h(x)) = l'(x)h'(l(x))g'(h(l(x))) \\ &= -3e^{-3x}\cos\left(e^{-3x}\right)\frac{-4}{\left(\sin(e^{-3x})\right)^5} \\ &= \frac{12e^{-3x}\cos\left(e^{-3x}\right)}{\left(\sin(e^{-3x})\right)^5} \end{aligned}$$

$$j)\ \ f(x) = \arctan(x) := g^{-1}(x)$$

$$g(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\frac{d}{dx}g^{-1}(x) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}$$

$$\Rightarrow\ g(x) = u(x)v(x) = u(x)k(h(x))\ \Rightarrow\ u(x) = \sin(x)\ \wedge\ v(x) = (\cos(x))^{-1}$$

$$\Rightarrow\ k(x) = \frac{1}{x}\ \wedge\ h(x) = \cos(x)$$

$$\Rightarrow\ u'(x) = \cos(x)\ \wedge\ k'(x) = -\frac{1}{x^2}\ \wedge\ h'(x) = -\sin(x)$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x) = h'(x)k'(h(x))u(x) + u'(x)v(x) \\ &= -\sin(x)\sin(x)\left(-\frac{1}{\cos(x)^2}\right) + \frac{\cos(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} + \frac{\cos(x)^2}{\cos(x)^2} \\ &= \frac{\sin(x)^2 + \cos(x)^2}{\cos(x)^2} \qquad \text{mit: } 1 = \sin(x)^2 + \cos(x)^2 \\ &= \frac{1}{\cos(x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{d}{dx}g^{-1}(x) &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos(\arctan(x))^2}\right)} \qquad \text{mit: } \frac{1}{\cos(x)^2} = \tan(x)^2 + 1 \\ &= \frac{1}{\tan(\arctan(x))^2 + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Aufgabe 13:

$$a) \;\; f(x) = ax^2 + bx + c \;\wedge\; f'(x) = 2ax + b$$

$$\left| \begin{array}{l} I. \;\; f(5) = 0 = 25a + 5b + c \\ II. \;\; f'(2) = 0 = 4a + b \;\Rightarrow b = -4a \\ III. \;\; f'(5) = 2 = 10a + b \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} II \text{in} I. \;\; 0 = 25a + 5(-4a) + c = 5a + c \;\Rightarrow\; c = -5a \\ II.\text{in} III. \;\; f'(5) = 2 = 10a + (-4a) = 6a \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{3} \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow\; b = -4a = -\frac{4}{3} \;\wedge\; c = -5a = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \qquad f'(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \qquad f''(x) = \frac{2}{3}$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \quad |\cdot 3$$

$$0 = x^2 - 4x - 5 \quad |+0 = +4 - 4$$

$$0 = x^2 - 4x + 4 - 4 - 5$$

$$0 = (x-2)^2 - 9 \quad |+9$$

$$9 = (x-2)^2 \quad |\sqrt{}$$

$$\pm 3 = x_{N_{1,2}} - 2 \quad |+2$$

$$x_{N_{1,2}} = 2 \pm 3 \;\Rightarrow\; x_{N_1} = -1 \;\wedge\; x_{N_2} = 5$$

$$\text{Extrempunkte: } f'(x) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \quad |\cdot 3$$

$$0 = 2x - 4 \quad |+4$$

$$4 = 2x \quad |: 2 \;\Rightarrow\; x_E = 2 \;\Rightarrow\; f''(x) = \frac{2}{3} > 0 \;\Rightarrow\; \text{Minimum}$$

$$f(x = x_E = 2) = \frac{1}{3} \cdot 2^2 - \frac{4}{3} \cdot 2 - \frac{5}{3} = -3 \;\Rightarrow\; \text{Min}\,(2|-3)$$

Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\} \;\wedge\; \mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq -3\}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Monotonie: $f(x)$ ist streng monoton fallend für $x < 2$

und streng monoton steigend für $x > 2$.

b) $f(x) = ax^2 + bx + c \ \wedge \ f'(x) = 2ax + b$

$$\left| \begin{array}{l} I. \ \ f(0) = 0 = 0a + 0b + c \ \Rightarrow \ c = 0 \\ II. \ \ f(8) = 0 = 64a + 8b + c \ \Rightarrow \ b = -8a \ \Rightarrow b = -4a \\ III. \ \ f'(3) = -\frac{1}{4} = 6a + b \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \ -\frac{1}{4} = 6a - 8a = -2a \ \Rightarrow \ a = \frac{1}{8} \ \Rightarrow \ b = -8a = -1$$

$$\Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{8}x^2 - x$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2 - x \qquad f'(x) = \frac{1}{4}x - 1 \qquad f''(x) = \frac{1}{4}$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{1}{8}x^2 - x = \left(\frac{1}{8}x - 1\right)x \quad \Rightarrow x_{N_1} = 0$$

$$0 = \frac{1}{8}x - 1 \quad |+1$$

$$1 = \frac{1}{8}x \quad |\cdot 8 \ \Rightarrow \ x_{N_2} = 8$$

$$\text{Extrempunkte: } f'(x) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{1}{4}x - 1 \quad |+1$$

$$1 = \frac{1}{4}x \quad |\cdot 4 \ \Rightarrow \ x_E = 4 \ \Rightarrow \ f''(x) = \frac{1}{4} > 0 \ \Rightarrow \ \text{Minimum}$$

$$f(x = x_E = 4) = \frac{1}{8} \cdot 4^2 - 4 = -2 \ \Rightarrow \ \text{Min}\,(4|-2)$$

Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\} \ \wedge \ \mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \geq -2\}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$

Monotonie: $f(x)$ ist streng monoton fallend für $x < 4$
und streng monoton steigend für $x > 4$.

c) $f(x) = ax^3 + cx \ \wedge \ f'(x) = 3ax^2 + x$

$$\left| \begin{array}{l} I. \ \ f(2) = 5 = 8a + 2c \\ II. \ \ f(2) = 0 = 12a + c \ \Rightarrow \ c = -12a \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \ 5 = 8a - 24a = -16a \ \Rightarrow \ a = -\frac{5}{16} \ \Rightarrow \ c = -12a = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow \ f(x) = -\frac{5}{16}x^3 + \frac{15}{4}x$$

$$f(x) = -\frac{5}{16}x^3 + \frac{15}{4}x \qquad f'(x) = -\frac{15}{16}x^2 + \frac{15}{4} \qquad f''(x) = -\frac{15}{8}x$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{5}{16}x^3 + \frac{15}{4}x = \left(-\frac{5}{16}x^2 + \frac{15}{4}\right)x \quad \Rightarrow x_{N_1} = 0$$

$$0 = -\frac{5}{16}x^2 + \frac{15}{4} \quad \Big| + \frac{5}{16}x^2$$

$$\frac{5}{16}x^2 = \frac{15}{4} \quad \Big| \cdot \frac{16}{5}$$

$$x^2 = \frac{15 \cdot 16}{4 \cdot 5} = 12 \quad \Big|\sqrt{\ } \;\Rightarrow\; x_{N_2} = 2\sqrt{3} \;\wedge\; x_{N_3} = -2\sqrt{3}$$

$$\text{Extrempunkte: } f'(x) \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{15}{16}x^2 + \frac{15}{4} \quad \Big| + \frac{15}{16}x^2$$

$$\frac{15}{16}x^2 = \frac{15}{4} \quad \Big| \cdot \frac{16}{15}$$

$$x^2 = \frac{15 \cdot 16}{4 \cdot 15} = 4 \quad \Big|\sqrt{\ } \;\Rightarrow\; x_{E_1} = 2 \;\Rightarrow\; x_{E_2} = -2$$

$$\Rightarrow\; f''(x_{E_1} = 2) = -\frac{15}{8} \cdot 2 = -\frac{15}{4} < 0 \;\Rightarrow\; \text{Maximum}$$

$$\Rightarrow\; f''(x_{E_2} = -2) = -\frac{15}{8} \cdot (-2) = \frac{15}{4} > 0 \;\Rightarrow\; \text{Minimum}$$

$$f(x_{E_1} = 2) = -\frac{5}{16} \cdot 2^3 + \frac{15}{4} \cdot 2 = 5 \;\Rightarrow\; \text{Max}\,(2|5)$$

$$f(x_{E_2} = -2) = -\frac{5}{16} \cdot (-2)^3 + \frac{15}{4} \cdot (-2) = -5 \;\Rightarrow\; \text{Min}\,(-2|-5)$$

Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\} \;\wedge\; \mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Monotonie: $f(x)$ ist streng monoton steigend für $x < -2$

und streng monoton fallend für $-2 < x < 2$.

und streng monoton steigend für $x > 2$.

d) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \wedge \ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \ \wedge \ f''(x) = 6ax + 2b$

$$\left| \begin{array}{l} I.\ \ f(-1) = 1 = -a + b - c + d \\ II.\ \ f'(3) = 0 = 27a + 6b + c \\ III.\ \ f''(-1) = 0 = -6a + 2b \ \Rightarrow \ b = 3a \\ IV.\ \ f(0) = 0 = 0a + 0b + 0c + d \ \Rightarrow \ d = 0 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} III.\text{in}I.\ \ 1 = -a + 3a - c \ \Rightarrow \ c = 2a - 1 \\ III.\text{in}II.\ \ 0 = 27a + 18a + c \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \ 0 = 27a + 18a + 2a - 1 \ \Rightarrow \ a = \frac{1}{47} \ \Rightarrow \ b = \frac{3}{47} \ \Rightarrow \ c = -\frac{45}{47}$$

$$\Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{47}x^3 + \frac{3}{47}x^2 - \frac{45}{47}x$$

$$f(x) = \frac{1}{47}x^3 + \frac{3}{47}x^2 - \frac{45}{47}x \qquad f'(x) = \frac{3}{47}x^2 + \frac{6}{47}x - \frac{45}{47}$$

$$f''(x) = \frac{6}{47}x + \frac{6}{47} \qquad f'''(x) = \frac{6}{47}$$

Nullstellen: $f(x) \stackrel{!}{=} 0 = \frac{1}{47}x^3 + \frac{3}{47}x^2 - \frac{45}{47}x = \left(\frac{1}{47}x^2 + \frac{3}{47}x - \frac{45}{47}\right)x \quad \Rightarrow x_{N_1} = 0$

$$0 = \frac{1}{47}x^2 + \frac{3}{47}x - \frac{45}{47} \quad |\cdot 47$$

$$0 = x^2 + 3x - 45 \quad \Big| +0 = +\frac{9}{4} - \frac{9}{4}$$

$$0 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 45 \Big| + \frac{189}{4}$$

$$\frac{189}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 \quad |\sqrt{\ }$$

$$\pm\frac{3\sqrt{21}}{2} = x_{N_{2,3}} + \frac{3}{2} \quad \Big| -\frac{3}{2} \ \Rightarrow \ x_{N_2} = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{21}}{2} \ \wedge \ x_{N_3} = -\frac{2}{3} - \frac{3\sqrt{21}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{Extrempunkte: } f'(x) \overset{!}{=} 0 &= \frac{3}{47}x^2 + \frac{6}{47}x - \frac{45}{47} \quad |\cdot 47 \\
0 &= 3x^2 + 6x - 45 \quad |: 3 \\
0 &= x^2 + 2x - 15 \quad |+0 = +1 - 1 \\
0 &= x^2 + 2x + 1 - 16 \quad |+16 \\
16 &= (x+1)^2 \quad \Big|\sqrt{\ } \\
\pm 4 &= x_{E_{1,2}} + 1 \quad |-1 \;\Rightarrow\; x_{E_1} = 3 \;\Rightarrow\; x_{E_2} = -5 \\
\Rightarrow\; f''(x_{E_1} = 3) &= \frac{6}{47} \cdot 3 + \frac{6}{47} > 0 \;\Rightarrow\; \text{Minimum} \\
\Rightarrow\; f''(x_{E_2} = -5) &= \frac{6}{47} \cdot (-5) + \frac{6}{47} < 0 \;\Rightarrow\; \text{Maximum} \\
f(x_{E_1} = 3) &= \frac{1}{47} \cdot 3^3 + \frac{3}{47} \cdot 3^2 - \frac{45}{47} \cdot 3 = -\frac{81}{47} \;\Rightarrow\; \text{Min}\left(3 \left| -\frac{81}{47}\right.\right) \\
f(x_{E_2} = -5) &= \frac{1}{47} \cdot (-5)^3 + \frac{3}{47} \cdot (-5)^2 - \frac{45}{47} \cdot (-5) = \frac{175}{47} \;\Rightarrow\; \text{Max}\left(-5 \left| \frac{175}{47}\right.\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Wendepunkte: } f''(x) \overset{!}{=} 0 &= \frac{6}{47}x + \frac{6}{47} \quad |\cdot 47 \\
0 &= 6x + 6 \quad |-6 \\
-6 &= 6x + 6 \quad |: 6 \;\Rightarrow\; x_W = -1 \\
\Rightarrow\; f'''(x_W = -1) &= \frac{6}{47} \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{Wendepunkt} \\
f(x_W = -1) &= \frac{1}{47} \cdot (-1)^3 + \frac{3}{47} \cdot (-1)^2 - \frac{45}{47} \cdot (-1) = 1 \;\Rightarrow\; W\,(-1\,|1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Definitions- und Wertebereich: } & \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\} \;\wedge\; \mathbb{W} = \{f(x) \in \mathbb{R}\} \\
\text{Verhalten im Unendlichen: } & \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \\
\text{Monotonie: } & f(x) \text{ ist streng monoton steigend für } x < -5 \\
& \text{und streng monoton fallend für } -5 < x < 3. \\
& \text{und streng monoton steigend für } x > 3.
\end{aligned}$$

e) $f(x) = ax^4 + cx^2 + e \ \wedge \ f'(x) = 4ax^3 + 2cx \ \wedge \ f''(x) = 12ax^2 + 2c$

$$\left| \begin{array}{l} I. \ \ f(-2) = 2 = 16a + 4c + e \\ II. \ \ f'(1) = \tfrac{1}{2} = 4a + 2c \\ III. \ \ f''(-2) = 0 = 48a + 2c \ \Rightarrow \ c = -24a \end{array} \right|$$

$\Rightarrow \ III.\text{in}II. \ \dfrac{1}{2} = 4a - 48a = -44a \qquad \Rightarrow \ \Rightarrow \ a = \dfrac{1}{88} \ \Rightarrow \ b =$

$\Rightarrow \ f(x) = -\dfrac{1}{88}x^4 + \dfrac{3}{11}x^2 + \dfrac{153}{88}$

$$f(x) = -\frac{1}{88}x^4 + \frac{3}{11}x^2 + \frac{153}{88} \qquad f'(x) = -\frac{1}{22}x^3 + \frac{6}{11}x$$

$$f''(x) = -\frac{3}{22}x^2 + \frac{6}{11} \qquad f'''(x) = -\frac{3}{11}x$$

$$\text{Nullstellen: } f(x) \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{1}{88}x^4 + \frac{3}{11}x^2 + \frac{153}{88} = -\frac{1}{88}z^2 + \frac{3}{11}z + \frac{153}{88} \qquad |\cdot(-88)$$

$$0 = z^2 - 24z - 153 \qquad |+0 = +144 - 144$$

$$0 = z^2 - 24z + 144 - 144 - 153 \qquad |+197$$

$$197 = (z-12)^2 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\pm 3\sqrt{33} = z_{1,2} - 12 \qquad |+12$$

$$12 \pm 3\sqrt{33} = x_{1,2}^2 \qquad |\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow \ x_{N_1} = \sqrt{12 + 3\sqrt{33}} \ \wedge \ x_{N_2} = -\sqrt{12 + 3\sqrt{33}}$$

Extrempunkte: $f'(x) \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{1}{22}x^3 + \frac{6}{11}x = \left(-\frac{1}{22}x^2 + \frac{6}{11}\right)x \;\Rightarrow\; x_{E_1} = 0$

$$0 = -\frac{1}{22}x^2 + \frac{6}{11} \qquad \left| + \frac{1}{22}x^2 \right.$$

$$\frac{1}{22}x^2 = \frac{6}{11} \qquad |\cdot 22$$

$$x^2 = 12 \qquad |\sqrt{} \;\Rightarrow\; x_{E_2} = 2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; x_{E_3} = -2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow\; f''(x_{E_1} = 0) = -\frac{3}{22}0^2 + \frac{6}{11} > 0 \;\Rightarrow\; \text{Minimum}$$

$$\Rightarrow\; f''(x_{E_2} = 2\sqrt{3}) = -\frac{3}{22} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \frac{6}{11} < 0 \;\Rightarrow\; \text{Maximum}$$

$$\Rightarrow\; f''(x_{E_3} = -2\sqrt{3}) = -\frac{3}{22} \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + \frac{6}{11} < 0 \;\Rightarrow\; \text{Maximum}$$

$$f(x_{E_1} = 0) = -\frac{1}{88} \cdot 0^4 + \frac{3}{11} \cdot 0^2 + \frac{153}{88} = \frac{153}{88} \;\Rightarrow\; \text{Min}\left(0 \left| \frac{153}{88}\right.\right)$$

$$f(x_{E_2} = 2\sqrt{3}) = -\frac{1}{88} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^4 + \frac{3}{11} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 + \frac{153}{88} = \frac{27}{8} \;\Rightarrow\; \text{Max}\left(2\sqrt{3} \left| \frac{27}{8}\right.\right)$$

$$f(x_{E_3} = -2\sqrt{3}) = -\frac{1}{88} \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^4 + \frac{3}{11} \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^2 + \frac{153}{88} = \frac{27}{8} \;\Rightarrow\; \text{Max}\left(-2\sqrt{3} \left| \frac{27}{8}\right.\right)$$

Wendepunkte: $f''(x) \stackrel{!}{=} 0 = -\frac{3}{22}x^2 + \frac{6}{11} \qquad \left| + \frac{3}{22}x^2 \right.$

$$\frac{3}{22}x^2 = \frac{6}{11} \qquad \left| \cdot \frac{22}{3} \right.$$

$$x^2 = \frac{6 \cdot 22}{11 \cdot 3} = 4 \qquad |\sqrt{} \;\Rightarrow\; x_{W_1} = 2 \;\wedge\; x_{W_2} = -2$$

$$\Rightarrow\; f'''(x_{W_1} = 2) = -\frac{3}{11} \cdot 2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{Wendepunkt}$$

$$\Rightarrow\; f'''(x_{W_2} = -2) = -\frac{3}{11} \cdot (-2) \neq 0 \;\Rightarrow\; \text{Wendepunkt}$$

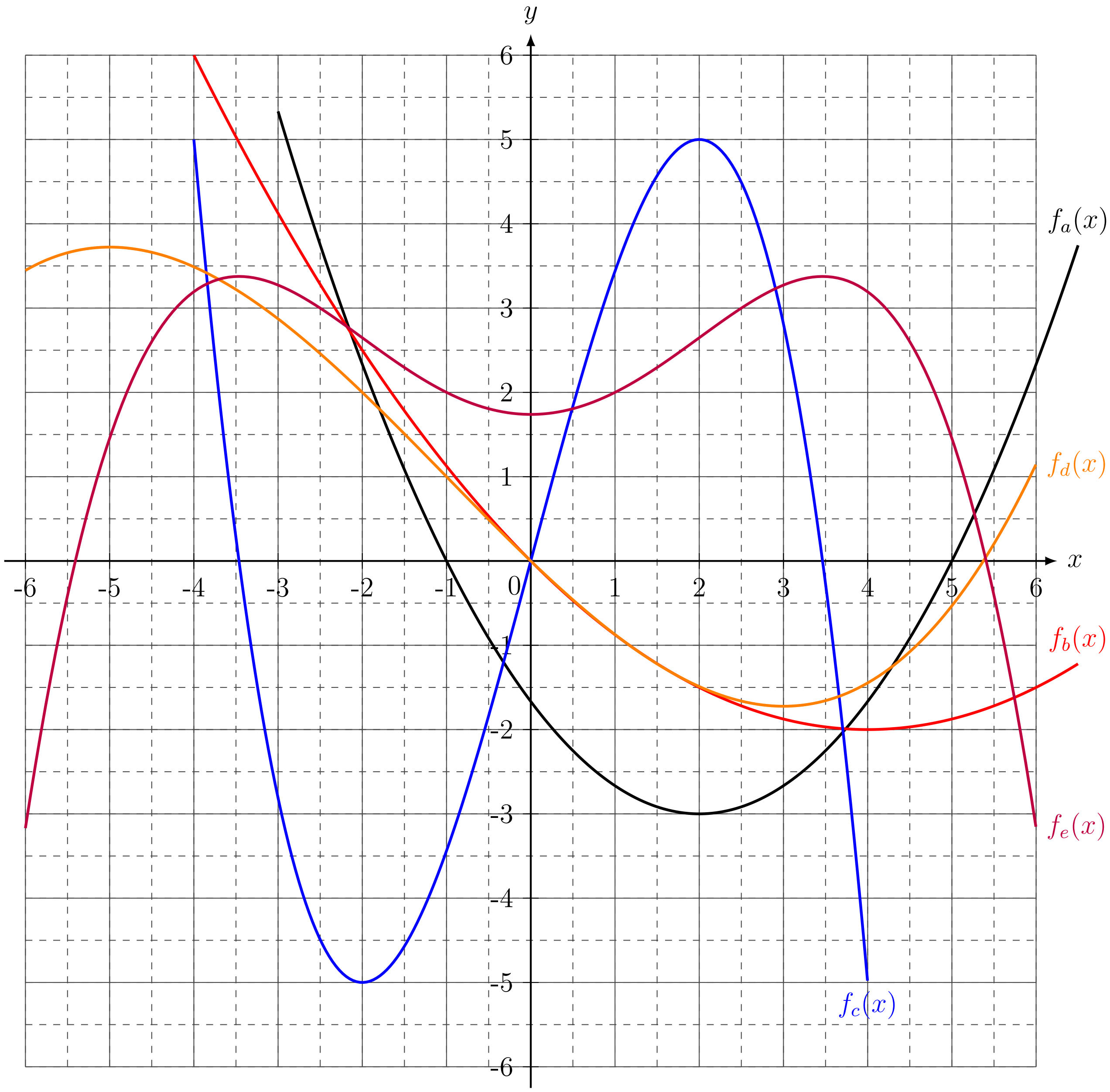
$$f(x_{W_1} = 2) = -\frac{1}{88} \cdot 2^4 + \frac{3}{11} \cdot 2^2 + \frac{153}{88} = \frac{233}{88} \;\Rightarrow\; W_1\left(2 \left| \frac{233}{88}\right.\right)$$

$$f(x_{W_2} = -2) = -\frac{1}{88} \cdot (-2)^4 + \frac{3}{11} \cdot (-2)^2 + \frac{153}{88} = \frac{233}{88} \;\Rightarrow\; W_2\left(-2 \left| \frac{233}{88}\right.\right)$$

Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}\} \ \wedge \ \mathbb{W} = \left\{ f(x) \in \mathbb{R} | f(x) \leq \frac{27}{8} \right\}$

Verhalten im Unendlichen: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$

Monotonie: $f(x)$ ist streng monoton steigend für $x < -2\sqrt{3}$
und streng monoton fallend für $-2\sqrt{3} < x < 0$
und streng monoton steigend für $0 < x < 2\sqrt{3}$
und streng monoton fallend für $x > 2\sqrt{3}$.



Aufgabe 14: *Gegeben sei die Funktion* $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - x$, *welche eine Tangente* $t_1(x)$ *an*

der Stelle $x = 1$ besitzt. Die Tangentengleichung für $t_1(x)$ wird wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} f(x=1) &= \frac{1}{2}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 - 1 = -\frac{5}{2} \\ f'(x) &= \frac{3}{2}x^2 - 4x - 1 \\ f'(x=1) &= \frac{3}{2}\cdot 1^2 - 4\cdot 1 - 1 = -\frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} &= -\frac{7}{2}\cdot 1 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 \\ t_1(x) &= -\frac{7}{2}x + 1 \end{aligned}$$

$a)$ Bestimme die Tangentengleichung für die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = -1$.

$$\begin{aligned} f(x=-1) &= \frac{1}{2}\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 - (-1) = -\frac{3}{2} \\ f'(x) &= \frac{3}{2}x^2 - 4x - 1 \\ f'(x=-1) &= \frac{3}{2}\cdot(-1)^2 - 4\cdot(-1) - 1 = \frac{9}{2} \\ -\frac{3}{2} &= \frac{9}{2}\cdot(-1) + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 3 \\ t_1(x) &= \frac{9}{2}x + 3 \end{aligned}$$

$b)$ Bestimme den Punkt an dem die Gerade $g(x) = -3x$ für die Funktion $f(x)$ eine Tangente darstellt.

$$\begin{aligned} f(x) \stackrel{!}{=} g(x) \quad \Rightarrow \quad -3x &= \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - x \quad |+3x \\ 0 &= \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2x \\ 0 &= \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\right)x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ 0 &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \quad |\cdot 2 \\ 0 &= x^2 - 4x + 4 \\ 0 &= (x-2)^2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \\ f(x=0) &= \frac{1}{2}\cdot 0^3 - 2\cdot 0^2 - 0 = 0 \\ f(x=2) &= \frac{1}{2}\cdot 2^3 - 2\cdot 2^2 - 2 = -3 \end{aligned}$$

Die Gerade $g(x)$ ist eine Tangente der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 2$.

$c)$ Begründe warum die Tangente $t_{\frac{4+\sqrt{22}}{3}}(x)$ die Steigung von 0 besitzen muss.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x - 1$$
$$f'\left(x = \frac{4+\sqrt{22}}{3}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{4+\sqrt{22}}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{4+\sqrt{22}}{3}\right) - 1 = 0$$
$$f''(x) = 3x - 4$$
$$f''\left(x = \frac{4+\sqrt{22}}{3}\right) = 3\left(\frac{4+\sqrt{22}}{3}\right) - 4 = \sqrt{22} > 0 \quad \Rightarrow \quad Minimum$$

Da die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 2 + \sqrt{6}$ ein Minimum besitzt, muss die Tangente an dieser Stelle die Steigung 0 besitzen.

$d)$ Bestimme die orthogonale Geradengleichung zur Wendetangente im Wendepunkt.

$$f''(x) \stackrel{!}{=} 0 = 3x - 4 \quad \Rightarrow \quad x_W = \frac{4}{3}$$
$$f\left(x = \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = -\frac{100}{27}$$
$$f'\left(x = \frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right) - 1 = -\frac{11}{3}$$
$$-\frac{100}{27} = -\frac{11}{3}\cdot\frac{4}{3} + b_W \quad \Rightarrow \quad b_W = \frac{32}{27}$$
$$t_W(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{32}{27}$$

Es gilt, dass zwei Geraden orthogonal zueinander sind, wenn das Produkt ihrer Steigungen sich zu -1 ergeben.

$$f''(x) \stackrel{!}{=} 0 = 3x - 4 \quad \Rightarrow \quad x_W = \frac{4}{3}$$
$$f\left(x = \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = -\frac{100}{27}$$
$$-\frac{100}{27} = \frac{3}{11}\cdot\frac{4}{3} + b_\perp \quad \Rightarrow \quad b_\perp = -\frac{1208}{297}$$
$$g_\perp(x) = \frac{3}{11}x - \frac{1208}{297}$$

$e)$ Bestimme den Schnittpunkt sowie den Schnittwinkel der Tangente aus dem Beispiel $t_1(x)$

mit der Wendetangente.

$$t_W(x) \overset{!}{=} t_1(x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{11}{3}x + \frac{32}{27} = -\frac{7}{2}x + 1 \quad |-1$$
$$-\frac{11}{3}x + \frac{5}{27} = -\frac{7}{2}x \quad \Big| + \frac{11}{3}x$$
$$\frac{5}{27} = \frac{1}{6}x \quad |\cdot 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{10}{9} = x_\times$$
$$f\left(x = \frac{10}{9}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^2 - \frac{10}{9} = -\frac{2110}{729} \quad \Rightarrow \quad S\left(\frac{10}{9}\Big| -\frac{2110}{729}\right)$$

Durch das Steigungsdreieck ergibt sich: $\tan\alpha_1 = m_1$ und $\tan\alpha_W = m_W$. Wobei die Differenz der Winkel gleich dem Schnittwinkel ist $|\alpha_1 - \alpha_W| = \varphi$.

$$\tan(\varphi) = |\tan(|\alpha_1 - \alpha_W|)| \quad \text{mit: } \tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$
$$\tan(\varphi) = \left|\frac{\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_W)}{1 + \tan(\alpha_1)\tan(\alpha_W)}\right| \quad \text{mit: } \tan(\alpha_1) = m_1$$
$$\tan(\varphi) = \left|\frac{m_1 - m_W}{1 + m_1 m_W}\right|$$
$$\varphi = \arctan\left(\left|\frac{-\frac{7}{2} - \left(-\frac{11}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{11}{3}\right)}\right|\right) \approx 27{,}387°$$

Aufgabe 15:

a) abgeleitet ergibt c)
c) abgeleitet ergibt n)
n) abgeleitet ergibt p)
b) abgeleitet ergibt g)
g) 4 mal abgeleitet ergibt p)
d) abgeleitet ergibt i)
i) abgeleitet ergibt l)
e) abgeleitet ergibt r)
f) abgeleitet ergibt m)
m) 3 mal abgeleitet ergibt p)
h) abgeleitet ergibt t)
j) abgeleitet ergibt q)
k) abgeleitet ergibt s)
s) abgeleitet ergibt o)

Aufgabe 16: *Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 2$ für das Intervall $]\,\infty; -2]$ und $g(x) = -2$ für das Intervall $[2, \infty\,[$. Verbinde die Funktionen mit einer Funktion dritter Ordnung im Intervall $[-2, 2]$, sodass diese differenzierbar in einander übergehen.* (Achtung im Abitur wird die einfache Differenzierbarkeit auch „knickfrei“ genannt, was mathematisch nicht definiert ist.)

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x$$

Aufgabe 17: *Gegeben sei die Funktionsschar* $f_r(x) = \frac{3}{32}x^5 - rx^3$*. Berechne den Wert des Parameter des* r*, sodass die Funktion durch den Punkt* $P(2|-2)$ *verläuft. Bestimme die gemeinsamen Punkte der Funktionsschar und Ortskurve der Extrema.*

$$r = \frac{5}{8} \;\; ; \;\; G(0|0) \;\; ; \;\; r = \frac{x^2}{3} \; \Rightarrow \; E(x) = -\frac{x^5}{16}$$

Aufgabe 18: *Gegeben seien die Funktionen* $f_y(x) = \frac{1}{12}x^3 + yx$ *und* $g_t(x) = tx^2 - \frac{9}{2}x - \frac{9}{4}$*. Berechne den Wert des Parameter des* t *und* y*, sodass die Funktionen im Punkt* $P(-3|4,5)$ *zweifach differenzierbar in einander sind.*

$$y = -\frac{9}{4} \;\; \wedge \;\; t = -\frac{9}{2}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (8.19).

18.10.70 Lösungen zu den Grundlagen der Stochastik

Aufgabe 1:

$a)\ r : \frac{7}{22} \;;\; b : \frac{15}{22}$ $b)\ r : \frac{5}{17} \;;\; b : \frac{12}{17}$ $c)\ r : \frac{4}{29} \;;\; b : \frac{25}{29}$ $d)\ r : \frac{7}{13} \;;\; b : \frac{6}{13}$

Aufgabe 2:

$$r : \frac{7}{32} \;\; ; \;\; b : \frac{9}{32} \;\; ; \;\; g : \frac{16}{32}$$

Aufgabe 3:

$$\frac{41}{250}$$

Aufgabe 4:

$a)$ $\bar{x} = 3,\bar{8} \quad \wedge \quad R = 4$
$b)$ $\bar{x} = 2,9\bar{3} \quad \wedge \quad R = 5$
$c)$ $\bar{x} = 8,5 \quad \wedge \quad R = 4$
$d)$ $\bar{x} = 4,\bar{8} \quad \wedge \quad R = 4$
$e)$ $\bar{x} = 10,1\bar{6} \quad \wedge \quad R = 9$
$f)$ $\bar{x} = 14,8\bar{3} \quad \wedge \quad R = 5$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.0.1).

18.10.71 Lösungen zur Kombinatorik

Aufgabe 1:

$a)$ $\{1,2,3\}$; $\{1,3,2\}$; $\{2,1,3\}$; $\{2,3,1\}$; $\{3,1,2\}$; $\{3,2,1\}$
$b)$ $\{R,R,B\}$; $\{R,B,R\}$; $\{B,R,R\}$
$c)$ $\{G,B,B,B\}$; $\{B,G,B,B\}$; $\{B,B,G,B\}$; $\{B,B,B,G\}$
$d)$ $\{R,R,B,B\}$; $\{R,B,R,B\}$; $\{B,R,B,R\}$; $\{B,B,R,R\}$; $\{R,B,B,R\}$; $\{B,R,R,B\}$
$e)$ $\{R,R,G,B\}$; $\{R,R,B,G\}$; $\{R,G,B,R\}$; $\{R,B,G,R\}$; $\{G,B,R,R\}$; $\{B,G,R,R\}$; $\{G,R,R,B\}$; $\{B,R,R,G\}$; $\{R,G,R,B\}$; $\{R,B,R,G\}$; $\{G,R,B,R\}$; $\{B,R,G,R\}$;
$f)$ $\{R,R,G,G,G\}$; $\{R,G,G,G,R\}$; $\{G,G,G,R,R\}$; $\{G,G,R,G,R\}$; $\{G,R,G,G,R\}$; $\{G,R,R,G,G\}$; $\{G,R,G,R,G\}$; $\{R,G,G,R,G\}$; $\{R,G,R,G,G\}$; $\{G,G,R,R,G\}$

Aufgabe 2:

$a)$ $4! = 24$ $\qquad$ $b)$ $6! = 720$
$c)$ $5! = 120$ $\qquad$ $d)$ $5! = 120$
$e)$ $6! = 720$ $\qquad$ $f)$ $10! = 3628800$

Aufgabe 3:

$a)$ $4! = 24$	$b)$ $6! = 720$
$c)$ $\dfrac{5!}{2!2!} = 30$	$d)$ $\dfrac{5!}{4!} = 5$
$e)$ $\dfrac{6!}{2!} = 360$	$f)$ $\dfrac{10!}{3!2!4!} = 6300$

Aufgabe 4:

$a)$ $n = 2 \quad \Rightarrow \quad 1$	$b)$ $n = 3 \quad \Rightarrow \quad 3$	$c)$ $n = 4 \quad \Rightarrow \quad 6$	$d)$ $n = 5 \quad \Rightarrow \quad 10$
$e)$ $n = 6 \quad \Rightarrow \quad 15$	$f)$ $n = 7 \quad \Rightarrow \quad 21$	$g)$ $n = 8 \quad \Rightarrow \quad 28$	$h)$ $n = 9 \quad \Rightarrow \quad 36$

Aufgabe 5:

$$T_n = \begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich um die Dreiecksnummern, die auch im Pascal'schen Dreieck gefunden werden können. Es handelt sich also immer um die Anzahl der Pfade mit zwei Treffern.

Aufgabe 6:

$a)$ $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$
$b)$ $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$
$c)$ $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$
$d)$ $2 \cdot 6 \cdot 3 = 36$
$e)$ $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 144$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.1.1).

18.10.72 Lösungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1:

a) 21 *b)* 45 *c)* Ziehung mit Zurücklegen

d) $\frac{21}{45} \cdot \frac{21}{45}$ *e)* $\frac{24}{45} \cdot \frac{21}{45}$ *f)* $2\left(\frac{21}{45} \cdot \frac{24}{45}\right)$

g) $\left(\frac{24}{45}\right)^3$ *h)* $\frac{21}{45}$ *i)* $1 - \left(\frac{21}{45}\right)^2$

j) $1 = 100\%$

Aufgabe 2:

a) 88 *b)* 144 *c)* Ziehung ohne Zurücklegen

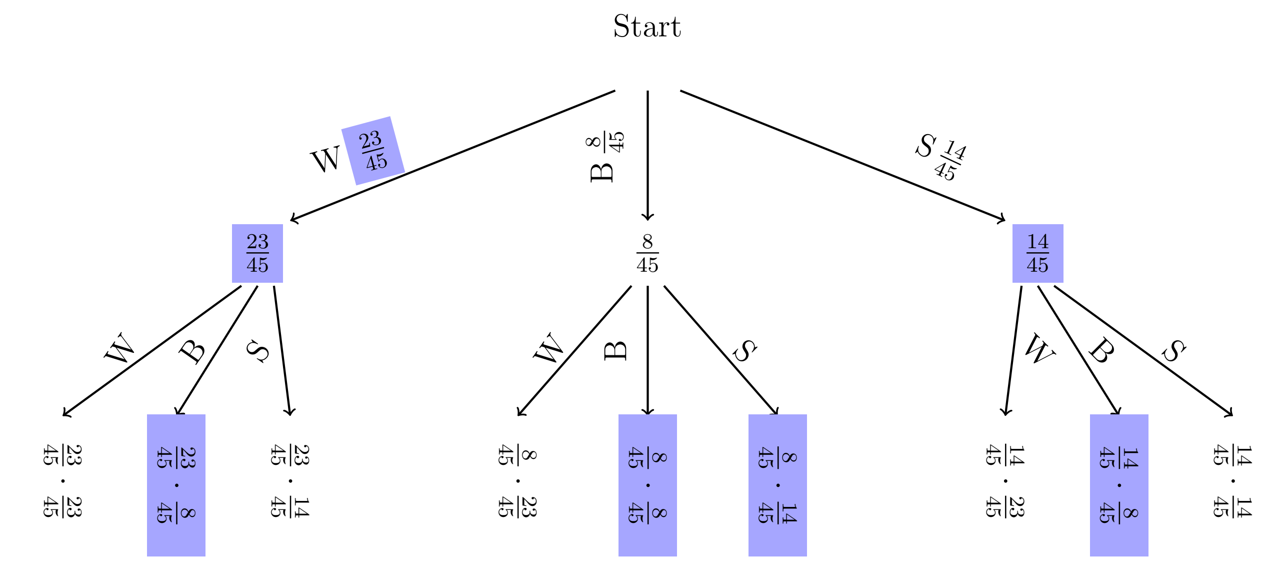
d) $\frac{56}{144} \cdot \frac{55}{143}$ *e)* $\frac{88}{144} \cdot \frac{56}{143}$ *f)* $2\left(\frac{88}{144} \cdot \frac{56}{143}\right)$

g) $\frac{88}{144} \cdot \frac{87}{143} \cdot \frac{86}{142}$ *i)* $1 - \frac{56 \cdot 55}{144 \cdot 143}$ *j)* 0%

h) WWS: $\frac{88 \cdot 87 \cdot 56}{144 \cdot 143 \cdot 142}$ WSS: $\frac{88 \cdot 56 \cdot 55}{144 \cdot 143 \cdot 142}$ SWS: $\frac{56 \cdot 87 \cdot 55}{144 \cdot 143 \cdot 142}$

SSS: $\frac{56 \cdot 55 \cdot 54}{144 \cdot 143 \cdot 142}$

Aufgabe 3:

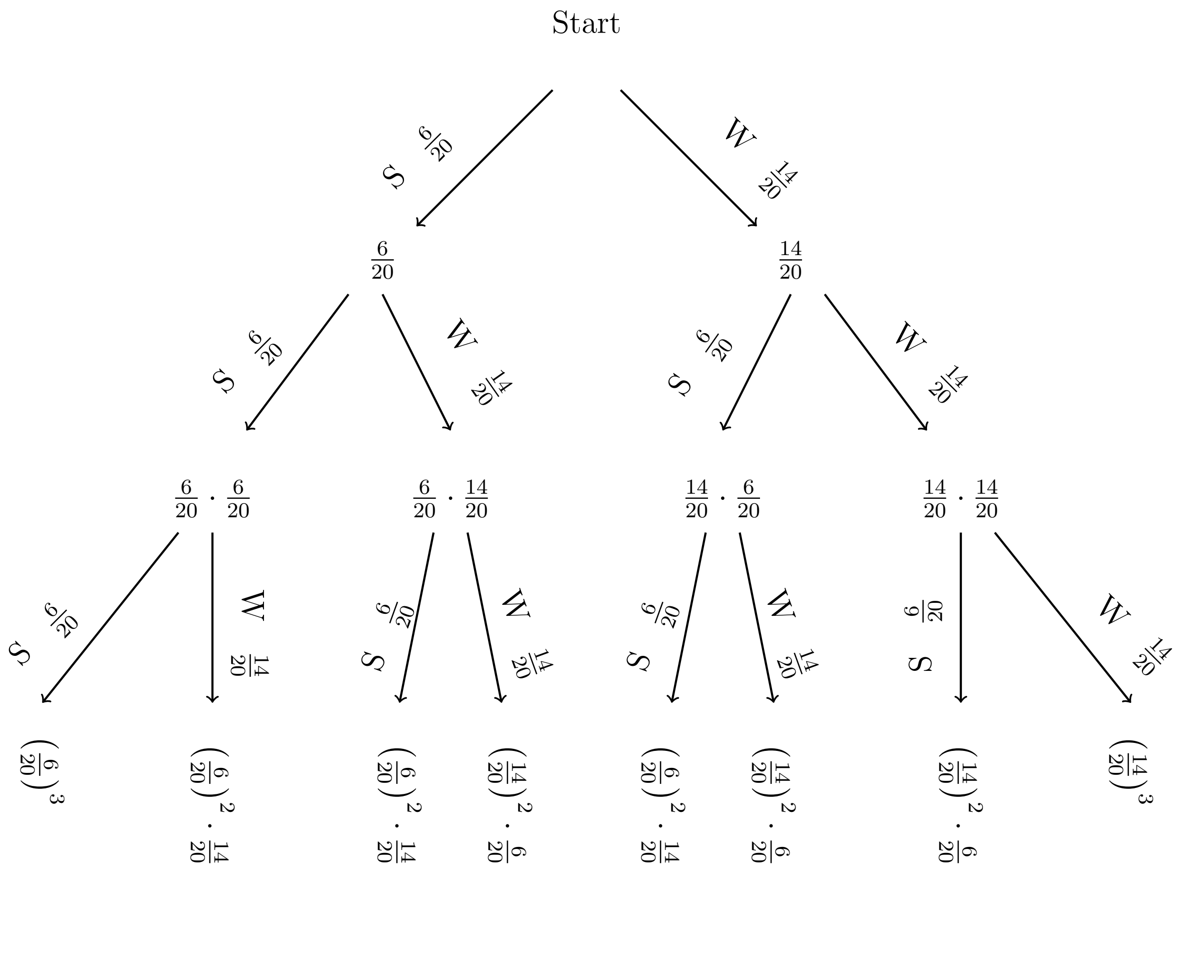


a) $\frac{8}{45}$ *b)* $\left(\frac{14}{45}\right)^2$ *c)* 3

d) 5 *e)* $\left(\frac{23}{45}\right)^2$ *f)* 1

g) $2\left(\frac{14}{45}\cdot\frac{23}{45}\right)$ *h)* $1-\left(\frac{23}{45}\right)^2$

Aufgabe 4:

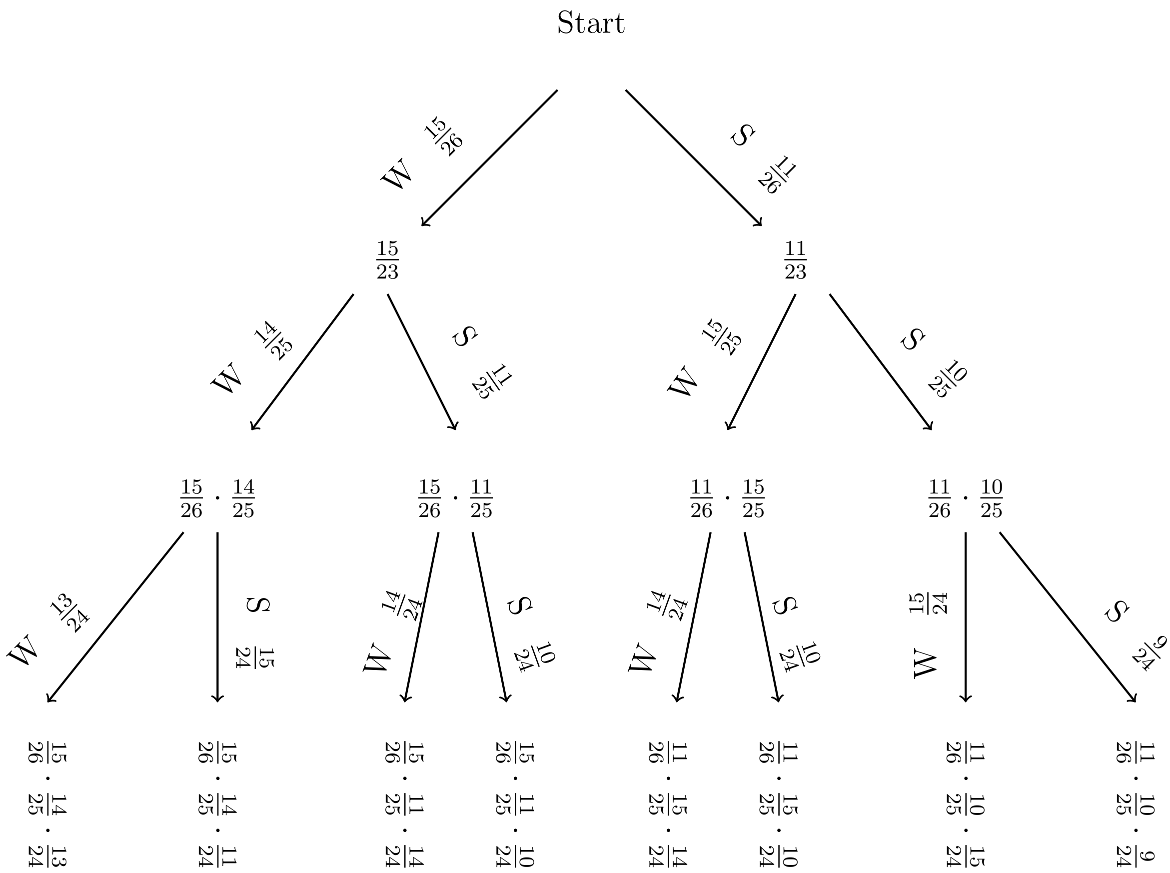


a) $\frac{14}{20}$ *b)* $\left(\frac{6}{20}\right)^3$ *c)* 3

d) 7 *e)* $\left(\frac{6}{20}\right)^3+3\left(\frac{6}{20}\right)^2\cdot\frac{14}{20}$ *f)* $1-\left(\frac{6}{20}\right)^3$

g) $\left(\frac{6}{20}\right)^3+3\left(\frac{6}{20}\right)^2\cdot\frac{14}{20}$ *h)* $1-\left(\frac{6}{20}\right)^3$

Aufgabe 5:



$a)$ $\dfrac{15}{26}$

$b)$ $\dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24}$

$c)$ 3

$d)$ 7

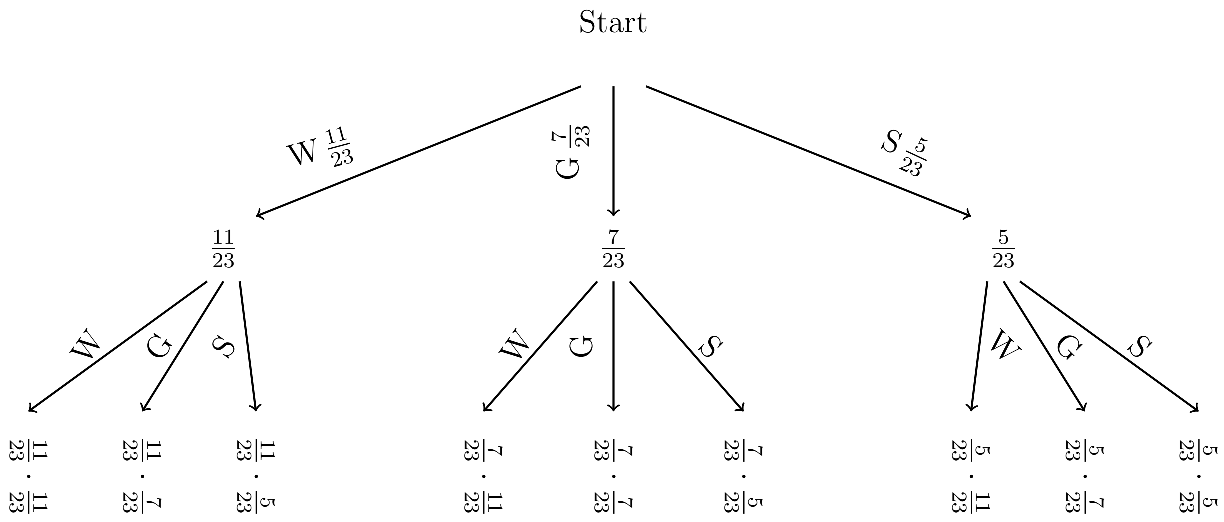
$e)$ $\dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24} + 3\left(\dfrac{11 \cdot 10 \cdot 15}{26 \cdot 25 \cdot 24}\right)$

$f)$ $1 - \dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24}$

$g)$ $\dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24} + 3\left(\dfrac{11 \cdot 10 \cdot 15}{26 \cdot 25 \cdot 24}\right)$

$h)$ $1 - \dfrac{11}{26} \cdot \dfrac{10}{25} \cdot \dfrac{9}{24}$

Aufgabe 6:



a) $\frac{7}{23}$

b) $\left(\frac{7}{23}\right)^3$

c) 1

d) 5

e) 3

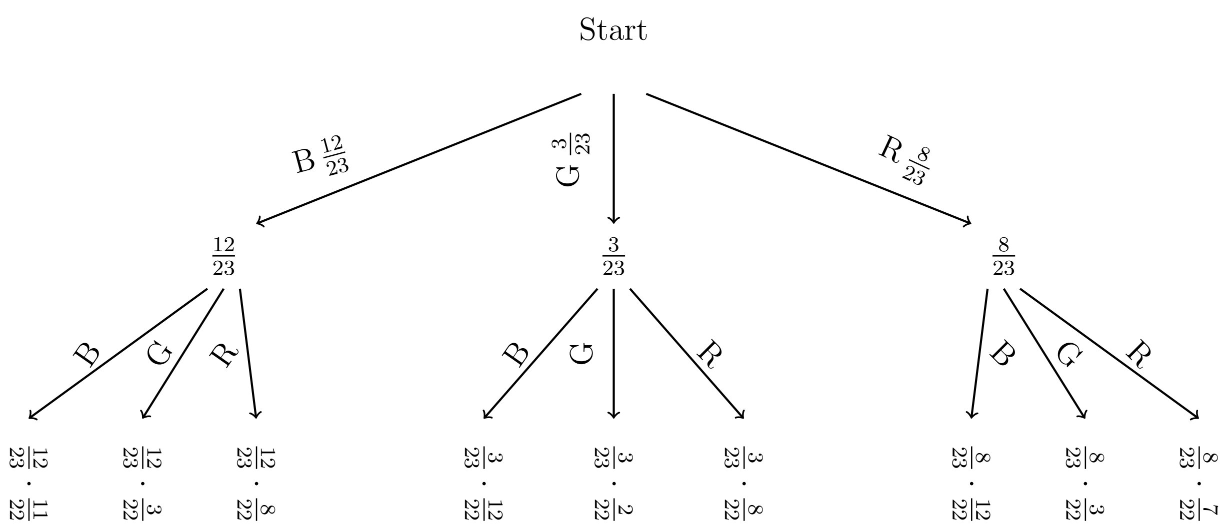
f) $3\left(\frac{11\cdot 7\cdot 5}{23^3}\right)$

g) $\frac{11\cdot 7\cdot 5}{23^3}$

h) $\frac{11\cdot 7\cdot 7}{23^3}$

i) $1-\left(\frac{5}{23}\right)^3$

Aufgabe 7:



a) $\frac{12}{23}$	*b)* $\frac{3 \cdot 2}{23 \cdot 22}$
c) 3	*d)* 9
e) $\frac{12 \cdot 11}{23 \cdot 22}$	*f)* $1 - \frac{8 \cdot 7}{23 \cdot 22}$
g) $1 - \frac{3 \cdot 2}{23 \cdot 22}$	*h)* $1 = 100\%$
i) $\frac{3 \cdot 12 \cdot 11}{23 \cdot 22 \cdot 21}$	*j)* $\frac{3 \cdot 12 \cdot 11}{23 \cdot 22 \cdot 21}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.2.1).

18.10.73 Lösungen zu bedingten Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 1: *Bei einem Arzt werden* 76% *gesetzlich versicherte Patienten behandelt. Insgesamt sind* 28% *der gesamten Patienten chronisch erkrankt, während* 20% *der privat versicherten Patienten chronisch krank sind. Berechne wie viel Prozent der gesetzlich versicherten chronisch erkrankt sind.*

$P(C \cap \bar{G}) = \frac{12}{250} \quad \Rightarrow \quad P(C \cap G) = \frac{14}{50} - \frac{12}{250} = \frac{29}{125} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{29}{95} = P(C|G) \approx 30{,}526\%$

Aufgabe 2: *Bei einem Festival stammen* 16% *der Besucher aus dem Ausland, von denen* 45% *mit dem Auto angereist sind, während insgesamt* 79% *der Festivalbesucher mit dem Auto anreisten. Berechne wie viel Prozent der Festivalbesucher, die nicht aus dem Ausland kamen, nicht mit dem Auto angereist sind.*

A steht für Ausland und C für Auto.

$P(A \cap C) = 16\% \cdot 45\% = \frac{9}{125} \quad \Rightarrow \quad P(C \cap \bar{A}) = \frac{79}{100} - \frac{9}{125} = \frac{359}{500} \quad \Rightarrow \quad \frac{P(C \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{359}{500} : \frac{84}{100} = P(C|\bar{A}) = \frac{359}{420} \quad \Rightarrow \quad P(C|A) = 1 - P(C|\bar{A}) = \frac{61}{420}$

Aufgabe 3: *In einer Gruppe aus* 45 *Menschen gaben* 22 *an ein Instrument zu spielen und* 34 *sich sportlich in einem Verein zu betätigen, wobei nur* 6 *beides verneinten. Berechne wie viel Prozent der Menschen sowohl ein Instrument spielen und im Sportverein sind.*

$P(S \cap I) = \frac{17}{45}$

Aufgabe 4: *In einer Urne befinden sich* 32 *rote und* 23 *blaue Kugeln. Wenn aus dieser Urne eine rote Kugel gezogen wurde, dann soll aus einer Urne mit* 11 *schwarzen und* 37 *weißen Kugeln gezogen werden, während beim Ziehen einer blauen Kugel aus einer Urne mit* 25 *schwarzen und* 16 *weißen Kugeln gezogen werden. Berechne die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen.*

$P(S) = \frac{32}{55} \cdot \frac{11}{48} + \frac{23}{55} \cdot \frac{25}{41} = \frac{2627}{6765} \approx 38,832\%$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.3.1).

18.10.74 Lösungen zu Kontingenztafeln

Aufgabe 1:

	B	$\overline{B}$	
A	$17,25\%$	$57,75\%$	75%
$\overline{A}$	$5,75\%$	$19,25\%$	25%
	23%	77%	100%

	B	$\overline{B}$	
A	$\approx 8182,296$	$\approx 18217,714$	33300
$\overline{A}$	$\approx 417,714$	$\approx 1282,296$	1700
	8600	26400	35000

	B	$\overline{B}$	
A	$\frac{3}{25}$	$\frac{29}{175}$	$\frac{2}{7}$
$\overline{A}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{29}{70}$	$\frac{5}{7}$
	$\frac{21}{50}$	$\frac{29}{50}$	1

	B	$\overline{B}$	
A	$\frac{17}{81}$	$\frac{19}{81}$	$\frac{4}{9}$
$\overline{A}$	$\frac{1037}{1620}$	$\frac{1156}{1620}$	$\frac{61}{45}$
	85%	95%	$1,8$

Aufgabe 2:

	fehlerhaft	$\overline{\text{fehlerhaft}}$	
korrekt	$\approx 1276,8043$	58714	$\approx 59990,8043$
$\overline{\text{korrekt}}$	$\approx 0,1957$	9	$\approx 9,1957$
	1277	58723	60000

$\frac{9}{58723} \approx 0,015\%$

Aufgabe 3:

	fehlerhaft	$\overline{\text{fehlerhaft}}$	
korrekt	$\approx 2,979\%$	$\approx 96,321\%$	$99,3\%$
$\overline{\text{korrekt}}$	$\approx 0,021\%$	$\approx 0,679\%$	$0,7\%$
	3%	97%	100%

$1 : 147,275$

Aufgabe 4:

	positiv	$\overline{\text{positiv}}$	
korrekt	7220	16530	23750
$\overline{\text{korrekt}}$	380	870	1250
	7600	17400	25000

	positiv	$\overline{\text{positiv}}$	
korrekt	$28,88\%$	$66,12\%$	95%
$\overline{\text{korrekt}}$	$1,52\%$	$3,48\%$	5%
	$30,4\%$	$69,6\%$	100%

$380 \cdot 0,05 = 19$

Aufgabe 5:

	R	$\overline{R}$	
Dafür	24%	63%	87%
$\overline{\text{Dafür}}$	6%	7%	13%
	30%	70%	100%

Aufgabe 6:

	F	$\overline{F}$	
G	3	16	19
$\overline{\text{G}}$	5	2	7
	8	18	26

Aufgabe 7:

	S	$\overline{S}$	
Z	129	18	147
$\overline{Z}$	303	2050	2353
	432	2068	2500

$0,72\%$

Aufgabe 8:

	A	$\overline{A}$	
B	$0,23$	$0,58$	$0,81$
$\overline{B}$	$0,11$	$0,08$	$0,19$
	$0,34$	$0,66$	1

	A	$\overline{A}$	
B	$0,21$	$0,21$	$0,42$
$\overline{B}$	$0,55$	$0,03$	$0,58$
	$0,76$	$0,24$	1

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{1}{12}$	$\frac{29}{84}$	$\frac{3}{7}$
$\overline{B}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{4}{7}$
	$\frac{29}{60}$	$\frac{31}{60}$	1

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{909}{11000}$	$0,719$	$\frac{7}{11}$
$\overline{B}$	$\frac{311}{2200}$	$0,057$	$\frac{4}{11}$
	$22,4\%$	$0,776$	1

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.4.1).

18.10.75 Lösungen zu Binomial-Verteilungen

Aufgabe 1:

$$P(k=5, n=12, p=0,35) = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} 0,35^5 \cdot 0,65^7 \approx 20,392\%$$

Aufgabe 2:

$$P(k \geq 7, n=10, p=0,3) = \sum_{k=7}^{10} \begin{pmatrix} 10 \\ k \end{pmatrix} 0,3^k \cdot 0,7^{10-k} \approx 0,9002\% + 0,1447\% + 0,0138 + 0,0006 \approx 1,059$$

Aufgabe 3:

$$P\left(k=1, n=8, p=\frac{1}{216}\right) \approx 3,585\% \;\; ; \;\; P\left(k=0, n=8, p=\frac{1}{216}\right) \approx 96,356\%$$

Aufgabe 4:

$$P\left(k=0, n, p=0,02\right) = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} 0,02^0 \cdot 0,98^{n-0} = 0,98^n$$

$$\Rightarrow \quad 1-0,98^n = 0,68 \quad \Rightarrow \quad \log_{0,98} 0,32 \approx 56,4$$

$$\Rightarrow \quad 1-0,98^n = 0,955 \quad \Rightarrow \quad \log_{0,98} 0,045 \approx 153,5$$

$$\Rightarrow \quad 1-0,98^n = 0,997 \quad \Rightarrow \quad \log_{0,98} 0,003 \approx 287,5$$

Aufgabe 5:

$$P(k \geq 10, n=20, p=0,25) = \sum_{k=10}^{20} \begin{pmatrix} 20 \\ k \end{pmatrix} 0,25^k \cdot 0,75^{10-k}$$

$$\approx 0,9922\% + 0,3007\% + 0,0752\% + 0,0154\% + 0,0026\% + 0,000343\% + 0,0$$

Aufgabe 6:

$$P = \frac{\binom{37}{3} \cdot \binom{17}{5}}{\binom{54}{10}} \approx 2,009\%$$

Aufgabe 7:

$$P(k=4) \approx 19,939\% \;\; ; \;\; P(k=0) \approx 1,687\%$$

Aufgabe 8:

$$P(n=8, k \geq 3, p=55\%) \approx 91,154\%$$

Aufgabe 9:

$$P(n=15, k \geq 5, p=0,2) \approx 16,423\%$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.5.1).

18.10.76 Lösungen zu hypergeometrischen Verteilungen

Aufgabe 1: Es werden zwei Darstellungen des Binomischen Lehrsatzes betrachtet und anschließend gleichgesetzt und verglichen:

$$
\begin{aligned}
I.\ (1+x)^{a+b} &= \sum_{k=0}^{a+b} \binom{a+b}{k} x^k \\
II.\ (1+x)^{a+b} &= (1+x)^a(1+x)^b \\
&= \left(\sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} x^i\right) \left(\sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j} x^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^{a+b} \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} x^i \binom{b}{k-i} x^{k-i}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{a+b} \left[\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} \binom{b}{k-i} x^k\right] \\
\Rightarrow \sum_{k=0}^{a+b} \underbrace{\binom{a+b}{k}} x^k &= \sum_{k=0}^{a+b} \left[\underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} \binom{b}{k-i}} x^k\right] \\
\binom{a+b}{k} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} \binom{b}{k-i} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2:

$$
H(2) = \frac{\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25-8 \\ 6-2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 25 \\ 6 \end{pmatrix}} \approx 37,628\%
$$

Aufgabe 3:

$$
H(k>7) = H(8) + H(9) = \frac{\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32-11 \\ 9-8 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 9 \end{pmatrix}} + \frac{\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32-11 \\ 9-9 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 32 \\ 9 \end{pmatrix}} \approx 0,0126\%
$$

Aufgabe 4:

$$H(k<3) = H(0)+H(1)+H(2)$$
$$= \frac{\binom{7}{0}\binom{23-7}{7-0}}{\binom{23}{7}} + \frac{\binom{7}{1}\binom{23-7}{7-1}}{\binom{23}{7}} + \frac{\binom{7}{2}\binom{23-7}{7-2}}{\binom{23}{7}} \approx 64{,}948\%$$

Aufgabe 5:

$$H(k<3) = H(0)+H(1)+H(2)$$
$$= \frac{\binom{63}{0}\binom{112-63}{6-0}}{\binom{112}{6}} + \frac{\binom{63}{1}\binom{112-63}{6-1}}{\binom{112}{6}} + \frac{\binom{63}{2}\binom{112-63}{6-2}}{\binom{112}{6}} \approx 5{,}739\%$$

Aufgabe 6:

$$H(k>0) = H(1)+H(2)+H(3)+H(4)$$
$$= \sum_{l=1}^{4} \frac{\binom{4}{l}\binom{60-4}{7-l}}{\binom{60}{7}} \approx 39{,}950\%$$

Aufgabe 7:

$$H(k>0) = H(1)+H(2)+H(3)+H(4)+H(5)+H(6)$$
$$= \sum_{l=1}^{6} \frac{\binom{6}{l}\binom{49-6}{6-l}}{\binom{49}{6}} \approx 56{,}404\%$$

Aufgabe 8:

$$H(k=4) = \frac{\binom{10}{4}\binom{32-10}{4-4}}{\binom{32}{4}} \approx 0,584\%$$

Aufgabe 9:

$$H(k=2) = \frac{\binom{12}{2}\binom{48-12}{2-2}}{\binom{48}{2}} \approx 5,851\%$$

Aufgabe 10:

2) $E(X) = 6\frac{8}{25} = 1,92$ $\qquad \sigma = \sqrt{6\frac{8}{25}\left(1-\frac{8}{25}\right)\frac{25-6}{25-1}} \approx 1,017$

3) $E(X) = 9\frac{11}{32} \approx 3,094$ $\qquad \sigma = \sqrt{9\frac{11}{32}\left(1-\frac{11}{32}\right)\frac{32-9}{32-1}} \approx 1,227$

4) $E(X) = 7\frac{7}{23} \approx 2,130$ $\qquad \sigma = \sqrt{7\frac{7}{23}\left(1-\frac{7}{23}\right)\frac{23-7}{23-1}} \approx 1,038$

5) $E(X) = 6\frac{63}{112} = 3,375$ $\qquad \sigma = \sqrt{6\frac{63}{112}\left(1-\frac{63}{112}\right)\frac{112-6}{112-1}} \approx 1,187$

6) $E(X) = 7\frac{4}{60} = 0,4\bar{6}$ $\qquad \sigma = \sqrt{7\frac{4}{60}\left(1-\frac{4}{60}\right)\frac{60-7}{60-1}} \approx 0,626$

7) $E(X) = 6\frac{6}{49} \approx 0,735$ $\qquad \sigma = \sqrt{6\frac{6}{49}\left(1-\frac{6}{49}\right)\frac{49-6}{49-1}} \approx 0,760$

8) $E(X) = 10\frac{4}{32} = 1,25$ $\qquad \sigma = \sqrt{10\frac{4}{32}\left(1-\frac{4}{32}\right)\frac{32-10}{32-1}} \approx 0,881$

9) $E(X) = 12\frac{2}{48} = 0,5$ $\qquad \sigma = \sqrt{12\frac{2}{48}\left(1-\frac{2}{48}\right)\frac{48-12}{48-1}} \approx 0,606$

Aufgabe 11: mit: $\binom{a}{b} = \frac{a}{b}\binom{a-1}{b-1}$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X=k) \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{M}{k} \cdot \binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k} \\
&= \frac{M}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-1-(k-1)} \\
&= \frac{M}{\frac{N}{n} \cdot \binom{N-1}{n-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{M-1}{i}\binom{N-M}{n-1-i} \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \cdot \binom{M-1+N-M}{n-1} \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{1}{\binom{N-1}{n-1}} \cdot \binom{N-1}{n-1} \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \quad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 12:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{\begin{pmatrix} M \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-M \\ n-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} - \left(n\frac{M}{N}\right)^2 \\
&= n(n-1) \cdot \frac{M(M-1)}{N(N-1)} + n \cdot \frac{M}{N} - \left(n \cdot \frac{M}{N}\right)^2 \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left[(n-1) \cdot \frac{M-1}{N-1} + 1 - n \cdot \frac{M}{N}\right] \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left[\frac{(n-1)\cdot(M-1)\cdot N + (N-1)N - n \cdot M \cdot (N-1)}{(N-1)N}\right] \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{nMN - nN - MN + N + N^2 - N - nMN + nM}{(N-1)N} \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{-nN - MN + N^2 + nM}{(N-1)N} \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N(N-M) + n(M-N)}{(N-1)N} \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{(N-n)(N-M)}{(N-1)N} \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1} \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1} \quad \square
\end{aligned}
$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.6.1).

18.10.77 Lösungen zu Gauß-Verteilungen

Aufgabe 1: *Eine Normalverteilung ist durch den Erwartungswert* $\mu = 56,7$ *und einer Standardabweichung* $\sigma = 5,3$ *definiert. Berechne den rechtsseitigen* α*-Fehler, wenn der Verwerfungsbereich bei* $61,8$ *beginnt.*

$$\Phi(X \leq a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$\Phi(X \leq 61,8) = \frac{1}{5,3\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{61,8} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-56,7}{5,3}\right)^2} dx$$

$$\text{mit: } z = \frac{x-56,7}{5,3} \Rightarrow dx = 5,3dz \Rightarrow z(a) = \frac{61,8-56,7}{5,3} = \frac{51}{53}$$

$$\Phi\left(X \leq \frac{51}{53}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{51}{53}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\Phi\left(X \leq \frac{51}{53}\right) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz}_{=0,5} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{51}{53}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz}_{\text{Tabelle oder Taschenrechner}}$$

$$\Phi\left(X \leq \frac{51}{53}\right) \approx 0,5 + 0,332042 = 83,2042\%$$

$$\alpha \approx 1 - 83,2042\% = 16,7958\%$$

Aufgabe 2: *Eine Normalverteilung ist durch den Erwartungswert* $\mu = 670$ *und einer Standardabweichung* $\sigma = 45$ *definiert. Bestimme die* 90%*-igen Konfidenzintervallsgrenzen.*

$$\Phi(-a \leq X \leq a) = 0,9 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$0,9 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$0,45 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

In der Tabelle wird der Wert von a abgeschätzt oder mit einem Taschenrechner berechnet: $a = 1,64485 \approx 1,64$, woraus sich das Intervall um den Erwartungswert μ ergibt: $[\mu - a\sigma; \mu + a\sigma] \approx [595,982; 744,018]$

Aufgabe 3: *Bestimme durch einen linksseitigen Test den Fehler erster Art einer Normalverteilung, die durch die Standardabweichung* $\sigma = 28$ *und dem Erwartungswert* $\mu = 145$ *beschrieben wird. Der Annahmebereich beginnt bei* 112.

$$\Phi(112 \leq X) = \frac{1}{28\sqrt{2\pi}} \int\limits_{112}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-145}{28}\right)^2} dx$$

$$\text{mit: } z = \frac{x-145}{28} \quad \Rightarrow \quad dx = 28dz \;\; z(112) = \frac{112-145}{28} = -\frac{33}{28}$$

$$\Phi\left(-\frac{33}{28} \leq X\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{33}{28}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \;\; \text{Tabelle oder Taschenrechner}$$

$$\approx 88,0716\%$$

$$\alpha \approx 1 - 88,0716\% = 11,9284\%$$

Aufgabe 4: *Zwei Normalverteilungen mit* $\mu_0 = 78$ *und* $\mu_1 = 84$ *sowie* $\sigma_0 = \sigma_1 = 5,7$ *werden betrachtet. Berechne den Fehler 1. und 2. Art für das Annahmeintervall* $[68,2; 93,4]$ *und gib an welche Hypothese wahrscheinlicher ist.*

$$\Phi_0(68,2 \leq X \leq 93,4) = \frac{1}{5,7\sqrt{2\pi}} \int\limits_{68,2}^{93,4} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-78}{5,7}\right)^2} dx$$

$$\text{mit: } z = \frac{x-78}{5,7} \quad \Rightarrow \quad dx = 5,7dz$$

$$\Rightarrow \quad z(68,2) = \frac{68,2-78}{5,7} = -\frac{98}{57} \;\wedge\; z(93,4) = \frac{93,4-78}{5,7} = \frac{154}{57}$$

$$\Phi_0\left(-\frac{98}{57} \leq X \leq \frac{154}{57}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{98}{57}}^{\frac{154}{57}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\Phi_0\left(-\frac{98}{57} \leq X \leq \frac{154}{57}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{98}{57}}^{0} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{154}{57}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \;\; \text{Tabelle oder Taschenrechner}$$

$$\approx 45,722\% + 49,655\% \approx 95,377\% \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 4,623\%$$

$$\Phi_1(68,2 \leq X \leq 93,4) = \frac{1}{5,7\sqrt{2\pi}} \int\limits_{68,2}^{93,4} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-84}{5,7}\right)^2} dx$$

$$\text{mit: } z = \frac{x-84}{5,7} \quad \Rightarrow \quad dx = 5,7dz$$

$$\Rightarrow \quad z(68,2) = \frac{68,2-84}{5,7} = -\frac{158}{57} \ \wedge \ z(93,4) = \frac{93,4-84}{5,7} = \frac{94}{57}$$

$$\Phi_1\left(-\frac{158}{57} \leq X \leq \frac{94}{57}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{158}{57}}^{\frac{94}{57}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\Phi_1\left(-\frac{158}{57} \leq X \leq \frac{94}{57}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{158}{57}}^{0} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{94}{57}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \ \text{Tabelle oder Taschenrechner}$$

$$\approx 49,721\% + 45,044\% \approx 94,765\% \approx \beta$$

Somit ist die Nullhypothese ist trotz des hohen β-Fehlers wahrscheinlicher.

Aufgabe 5: *Bestimme das* 85%*-ige Konfidenzintervall für eine hypergeometrische Verteilung, welche durch die Werte* $n = 175$, $N = 2500$ *und* $M = 1400$ *beschrieben wird.*

$$\mu = n\frac{M}{N} = 175\frac{1400}{2500} = 98$$

$$\sigma = \sqrt{n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}} \approx 6,334$$

$$\Phi(-a \leq X \leq a) = 0,85 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$0,85 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$0,425 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

In der Tabelle wird der Wert von a abgeschätzt oder mit einem Taschenrechner berechnet: $a = 1,4395314709393 \approx 1,44$, woraus sich das Intervall um den Erwartungswert μ ergibt: $[\mu - a\sigma; \mu + a\sigma] \approx [88,882; 107,118]$

Aufgabe 6: *Bestimme das* 60%*-ige Konfidenzintervall einer Binomialverteilung, welche durch* $p = 0,\bar{2}$ *und* $n = 750$ *beschrieben wird.*

$$\mu = np = 166,\bar{6}$$
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} \approx 11,3855 > 3 \text{ Laplace-Bedingung erfüllt}$$
$$\Phi(-a \leq X \leq a) = 0,60 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$
$$0,3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

In der Tabelle wird der Wert von a abgeschätzt oder mit einem Taschenrechner berechnet: $a = 0,841621 \approx 0,84$, woraus sich das Intervall um den Erwartungswert μ ergibt: $[\mu - a\sigma; \mu + a\sigma] \approx [157,084; 176,249]$

Aufgabe 7: *Eine Normalverteilung ist durch den Erwartungswert* $\mu = 4450$ *und einer Standardabweichung* $\sigma = 158$ *definiert. Bestimme die* 93%*-igen Konfidenzintervallsgrenzen* (93% *aller Ereignisse sollen in diesem Intervall liegen).*

$$\Phi(-a \leq X \leq a) = 0,93 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$
$$0,93 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$
$$0,465 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

In der Tabelle wird der Wert von a abgeschätzt oder mit einem Taschenrechner berechnet: $a = 1,81191 \approx 1,81$, woraus sich das Intervall um den Erwartungswert μ ergibt: $[\mu - a\sigma; \mu + a\sigma] \approx [4163,718; 4736,282]$

Aufgabe 8: *Zwei Normalverteilungen mit* $\mu_0 = 1644$ *und* $\mu_1 = 1765$ *sowie* $\sigma_0 = 136$ *und* $\sigma_1 = 141$ *werden betrachtet. Berechne den Fehler 1. und 2. Art für das Annahmeintervall* $[1582; 1844]$ *und gib an welche Hypothese wahrscheinlicher ist.*

$$\Phi_0(1582 \leq X \leq 1844) = \frac{1}{136\sqrt{2\pi}} \int\limits_{1582}^{1844} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1644}{136}\right)^2} dx$$

$$\text{mit: } z = \frac{x-1644}{136} \quad \Rightarrow \quad dx = 136dz$$

$$\Rightarrow \quad z(1582) = \frac{1582-1644}{136} = -\frac{31}{68} \;\wedge\; z(1844) = \frac{1844-1644}{136} = \frac{25}{17}$$

$$\Phi_0\left(-\frac{31}{68} \leq X \leq \frac{25}{17}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{31}{68}}^{\frac{25}{17}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\approx 60,506\% \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 39,494\%$$

$$\Phi_1(1582 \leq X \leq 1844) = \frac{1}{141\sqrt{2\pi}} \int\limits_{1582}^{1844} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1765}{141}\right)^2} dx$$

$$\text{mit: } z = \frac{x-1765}{141} \quad \Rightarrow \quad dx = 141dz$$

$$\Rightarrow \quad z(1582) = \frac{1582-1765}{141} = -\frac{61}{47} \;\wedge\; z(1844) = \frac{1844-1765}{141} = \frac{79}{141}$$

$$\Phi_1\left(-\frac{61}{47} \leq X \leq \frac{79}{141}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\frac{61}{47}}^{\frac{79}{141}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\approx 61,519\% \approx \beta$$

Somit ist die alternative Hypothese wahrscheinlicher, da der Fehler 2. Art größer als $1-\alpha$ ist.

Aufgabe 9: *Bei einem Test wurden* 380 *Treffer nach* 2000 *Versuchen erzielt. Bestimme ein* 95%*-iges Konfidenzintervall für Trefferwahrscheinlichkeit.*

$$p_0 = \frac{380}{2000} = 0,19$$

$$\sigma_0 = \sqrt{p_0 n(1-p_0)} \approx 17,5442$$

$$\Phi(-a \leq X \leq a) = 0,95 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$0,475 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{a} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

In der Tabelle wird der Wert von a abgeschätzt oder mit einem Taschenrechner berechnet: $a = 1,95996 \approx 1,96$, woraus sich das Intervall um den Erwartungswert $\mu_0 = 380$ ergibt:

$[\mu - a\sigma; \mu + a\sigma] \approx [345,614; 414,386]$. Hieraus ergibt sich das Konfidenzintervall für die Ereigniswahrscheinlichkeit p: $[p_{min}; p_{max}] = \left[\frac{\mu - a\sigma}{n}; \frac{\mu + a\sigma}{n}\right] \approx [17,281\%; 20,719\%]$.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.7.1).

18.10.78 Lösungen zu Verteilungen

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (9.8.1).

18.10.79 Lösungen zur Vektoraddition

Aufgabe 1:

$$a)\ \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad d)\ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f)\ \begin{pmatrix} 10 \\ -24 \\ -30 \end{pmatrix} \quad g)\ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 28 \end{pmatrix} \quad h)\ \begin{pmatrix} -57 \\ -12 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$i)\ \begin{pmatrix} 9,3 \\ -2,1 \\ -10,2 \end{pmatrix} \quad j)\ \begin{pmatrix} -1,95 \\ 2,05 \\ 3,3 \end{pmatrix} \quad k)\ \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad l)\ \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ 5 \\ -\frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

$a)\ (5\hat{e}_1 + 0\hat{e}_2 + 7\hat{e}_3)$ $\quad b)\ (7\hat{e}_1 - 8\hat{e}_2 - 5\hat{e}_3)$

$c)\ (-50\hat{e}_1 + 23\hat{e}_2 - 8\hat{e}_3)$ $\quad d)\ (-1\hat{e}_1 - 7\hat{e}_2 + 8\hat{e}_3)$

$e)\ (-13,9\hat{e}_1 + 21,8\hat{e}_2 - 3,4\hat{e}_3)$ $\quad f)\ (8,2\hat{e}_1 + 16,9\hat{e}_2 - 21,1\hat{e}_3)$

$$g)\ \left(\frac{40}{3}\hat{e}_1 + \frac{17}{2}\hat{e}_2 - \frac{109}{6}\hat{e}_3\right) \quad h)\ \left(-\frac{55}{14}\hat{e}_1 - \frac{205}{28}\hat{e}_2 - \frac{195}{28}\hat{e}_3\right)$$

$$i)\ \left(-\frac{11}{2}\hat{e}_1 - \frac{23}{5}\hat{e}_2 + \frac{19}{3}\hat{e}_3\right) \quad j)\ \left(\frac{19}{15}\hat{e}_1 - \frac{407}{90}\hat{e}_2 - \frac{17}{30}\hat{e}_3\right)$$

Aufgabe 3:

$a)\ \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ -24 \end{pmatrix}$

$d)\ \begin{pmatrix} 83 \\ -52 \\ 27 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 7,35 \\ -0,05 \\ -6,9 \end{pmatrix} \qquad f)\ \begin{pmatrix} -\frac{59}{24} \\ \frac{17}{4} \\ \frac{20}{9} \end{pmatrix}$

Aufgabe 4:

$a)\ \lambda = 1\ ;\ \mu = 2 \qquad b)\ \lambda = -3\ ;\ \mu = 4$

$c)\ \lambda = \frac{5}{4}\ ;\ \mu = -\frac{4}{3} \qquad d)\ \lambda = \frac{2}{5}\ ;\ \mu = \frac{1}{6}$

$e)\ \lambda = -\frac{6}{7}\ ;\ \mu = \frac{9}{11} \qquad f)\ \lambda = -\frac{5}{13}\ ;\ \mu = -\frac{11}{17}$

Aufgabe 5:

$a)\ \lambda = 2\ ;\ \mu = -1\ ;\ \kappa = -3 \qquad b)\ \lambda = 4\ ;\ \mu = 2\ ;\ \kappa = -7$

$c)\ \lambda = \frac{2}{3}\ ;\ \mu = \frac{1}{8}\ ;\ \kappa = \frac{3}{4} \qquad d)\ \lambda = -\frac{5}{6}\ ;\ \mu = \frac{7}{3}\ ;\ \kappa = -\frac{8}{5}$

$e)\ \lambda = -\frac{4}{7}\ ;\ \mu = -\frac{2}{9}\ ;\ \kappa = \frac{5}{2} \qquad f)\ \lambda = \frac{9}{13}\ ;\ \mu = \frac{7}{19}\ ;\ \kappa = -\frac{23}{29}$

Aufgabe 6:

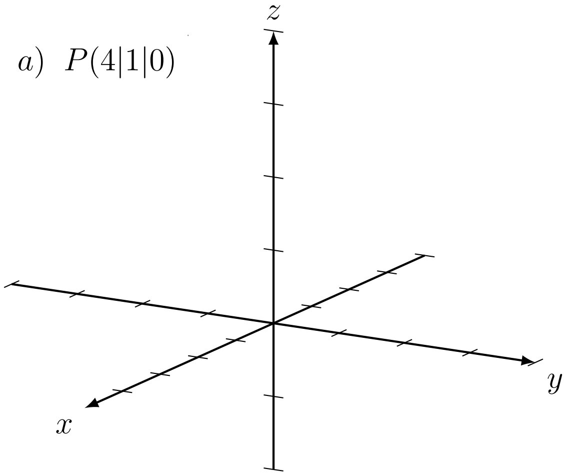
$a)\ \lambda = 1\ ;\ \ \mu = -1$	$b)\ \lambda = \frac{3}{2}\ ;\ \ \mu = -\frac{5}{2}$
$c)$ keine Linearkombination	$d)\ \lambda = -3\ ;\ \ \mu = -2$
$e)\ \lambda = \frac{3}{4}\ ;\ \ \mu = \frac{2}{5}$	$f)$ keine Linearkombination
$g)\ \lambda = \frac{3}{5}\ ;\ \ \mu = \frac{2}{7}$	$h)$ keine Linearkombination
$i)$ keine Linearkombination	$j)\ \lambda = \frac{11}{19}\ ;\ \ \mu = \frac{17}{13}$
$k)\ \lambda = -\frac{7}{6}\ ;\ \ \mu = \frac{7}{3}$	$l)$ keine Linearkombination
$m)$ keine Linearkombination	$n)\ \lambda = -\frac{9}{4}\ ;\ \ \mu = \frac{7}{8}$

Aufgabe 7: *Bestimme die Koordinaten des Punktes P.*

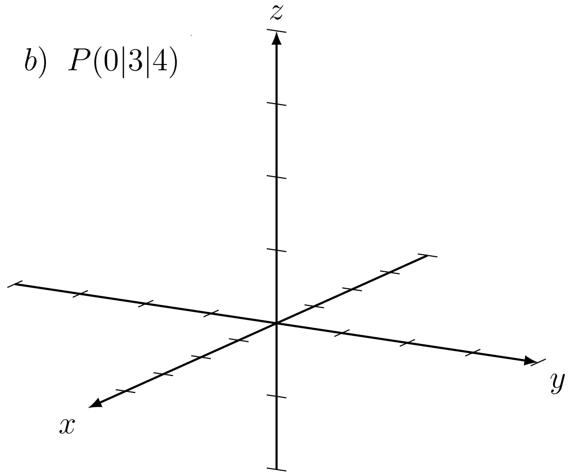
$a)\ P(0|3|2)$ $b)\ P(2|-2|1)$ $c)\ P(3|0|-2)$
$d)\ P(-3|-4|1)$ $e)\ P(-2|3|-1)$ $f)\ P(4|4|4)$

Aufgabe 8: *Zeichne den Vektor $\overrightarrow{OP}$ in die gegebenen Koordinatensysteme ein.*

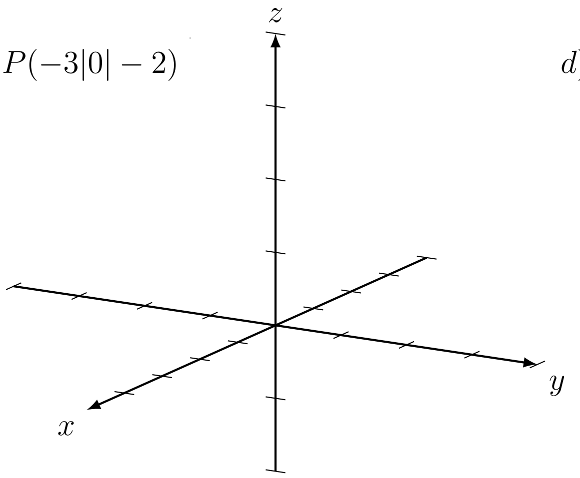
a) $P(4|1|0)$



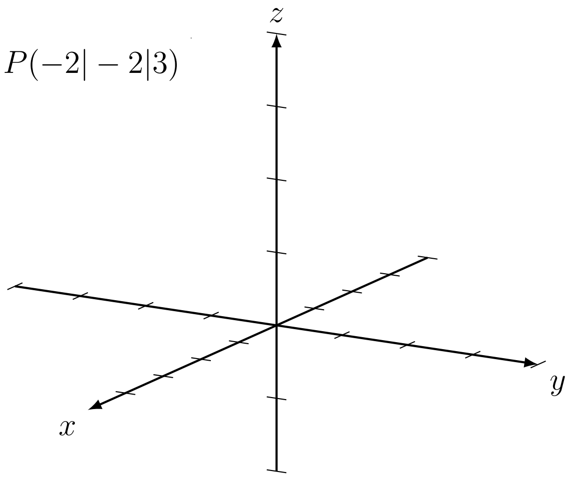
b) $P(0|3|4)$



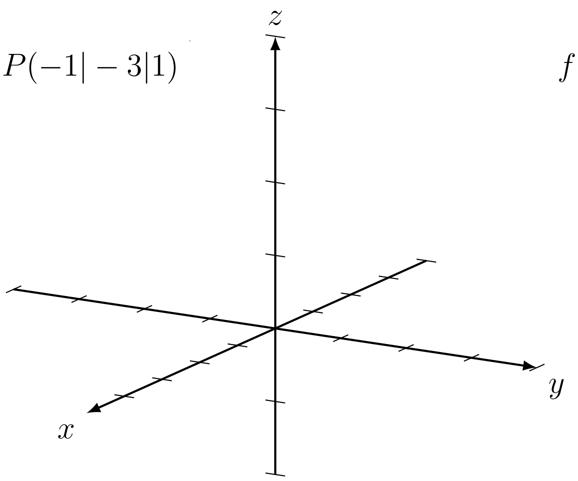
c) $P(-3|0|-2)$



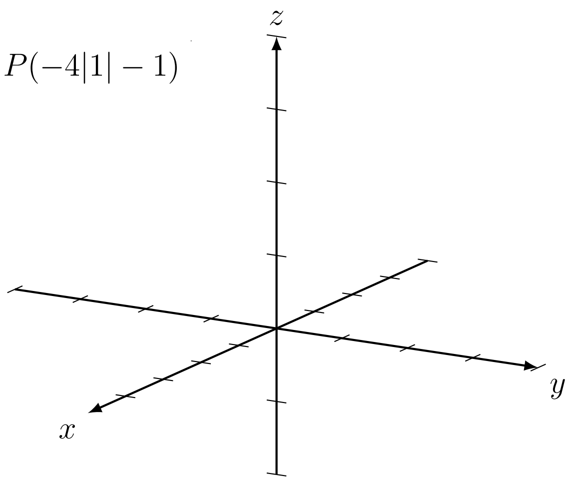
d) $P(-2|-2|3)$



e) $P(-1|-3|1)$



f) $P(-4|1|-1)$



Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.0.2).

18.10.80 Lösungen zur Vektornorm

Aufgabe 1:

$a) \quad = \sqrt{6}$ $\qquad b) \quad = \sqrt{29}$ $\qquad c) \quad = 5\sqrt{2}$ $\qquad d) \quad = \sqrt{10}$

$e) \quad = \sqrt{14}$ $\qquad f) \quad = \sqrt{5}$ $\qquad g) \quad = \sqrt{34}$ $\qquad h) \quad = \sqrt{109}$

$i) \quad = \sqrt{106}$ $\qquad j) \quad = 3\sqrt{6}$ $\qquad k) \quad = \sqrt{138}$ $\qquad l) \quad = 5\sqrt{5}$

$m) \quad = 3\sqrt{17}$ $\qquad n) \quad = \sqrt{285}$ $\qquad o) \quad = \sqrt{854}$ $\qquad p) \quad = \sqrt{14811}$

Aufgabe 2:

$$a) \quad = \frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b) \quad = \frac{1}{\sqrt{89}}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c) \quad = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad = \frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e) \quad = \frac{1}{7\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad f) \quad = \frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$g) \quad = \frac{1}{\sqrt{86}}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h) \quad = \frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad i) \quad = \frac{1}{\sqrt{106}}\begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$j) \quad = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad k) \quad = \frac{1}{\sqrt{357}}\begin{pmatrix} 2 \\ -17 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad l) \quad = \frac{1}{\sqrt{349}}\begin{pmatrix} -18 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$m) \quad = \frac{1}{\sqrt{77}}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad n) \quad = \frac{1}{\sqrt{146}}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad o) \quad = \frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$p) \quad = \frac{1}{33\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -37 \\ 7 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3:

$$a)\ = \frac{1}{\sqrt{41}}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \qquad b)\ = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} \qquad c)\ = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$d)\ = \frac{1}{\sqrt{34}}\begin{pmatrix}2\\-3\\4\\-2\\1\end{pmatrix} \qquad e)\ = \frac{1}{\sqrt{155}}\begin{pmatrix}-1\\7\\9\\2\\4\\2\end{pmatrix} \qquad f)\ = \frac{1}{\sqrt{71}}\begin{pmatrix}1\\2\\4\\-5\\6\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$g)\ = \frac{1}{2\sqrt{53}}\begin{pmatrix}6\\7\\1\\-3\\9\\-4\\2\\4\end{pmatrix} \qquad h)\ = \frac{1}{\sqrt{395}}\begin{pmatrix}2\\7\\9\\-4\\9\\-7\\5\\3\\9\end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:

$$a)\ = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \qquad b)\ = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \qquad c)\ = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\0\\0\\3\end{pmatrix} \qquad d)\ = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

Alle Vektoren haben die gleiche Länge und nur zwei Richtungseinträge. Folglich befinden sich alle Vektoren in einer jeweiligen Ebene (2D), auch wenn sie insgesamt in einem höher dimensionalen Raum vorzufinden sind.

Aufgabe 5:

$a) \quad = \frac{1}{\sqrt{59}} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad b) \quad = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad c) \quad = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$d) \quad = \frac{1}{\sqrt{259}} \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ $\quad e) \quad = \frac{1}{2\sqrt{66}} \begin{pmatrix} -2 \\ -16 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad f) \quad = \frac{1}{\sqrt{185}} \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

$g) \quad = \frac{1}{\sqrt{105}} \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\quad h) \quad = \frac{1}{\sqrt{18901}} \begin{pmatrix} -89 \\ 24 \\ 102 \end{pmatrix}$ $\quad i) \quad = \frac{1}{\sqrt{238}} \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$

$j) \quad = \frac{1}{\sqrt{62}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad k) \quad = \frac{1}{2\sqrt{86}} \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad l) \quad = \frac{1}{12\sqrt{111421}} \begin{pmatrix} -244 \\ -51 \\ 222 \end{pmatrix}$

$m) \quad = \frac{1}{126\sqrt{75001}} \begin{pmatrix} 432 \\ 184 \\ -282 \end{pmatrix}$ $\quad n) \quad = \frac{1}{40\sqrt{161978}} \begin{pmatrix} -131 \\ 111 \\ -364 \end{pmatrix}$ $\quad o) \quad = \frac{1}{36\sqrt{247451}} \begin{pmatrix} -483 \\ 79 \\ 89 \end{pmatrix}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.1.1).

18.10.81 Lösungen zum Skalarprodukt

Aufgabe 1:

$a) \quad = 20$	$b) \quad = 32$	$c) \quad = 31$
$d) \quad = 77$	$e) \quad = 46$	$f) \quad = -38$
$g) \quad = 19$	$h) \quad = 15$	$i) \quad = 145$
$j) \quad = -2$	$k) \quad = 26$	$l) \quad = 46$
$m) \quad = -43$	$n) \quad = 0$	$o) \quad = 106$
$p) \quad = -135$	$q) \quad = 82$	$r) \quad = 168$

Aufgabe 2:

$a)\quad -23\begin{pmatrix}4\\5\\-8\end{pmatrix}$ $b)\quad -13\begin{pmatrix}6\\3\\1\end{pmatrix}$

$c)\quad -34\begin{pmatrix}4\\9\\0\end{pmatrix}$ $d)\ 100\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$e)\ 53\begin{pmatrix}4\\2\\11\end{pmatrix}$ $f)\ 159\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

$g)\ 89\begin{pmatrix}7\\0\\-3\end{pmatrix}$ $h)\quad -8\begin{pmatrix}5\\-7\\-9\end{pmatrix}$

$i)\quad -22\begin{pmatrix}6\\8\\3\end{pmatrix}$ $j)\quad -35\begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

$a)\quad = -13$ $b)\quad = 64$ $c)\quad = 61$

$d)\quad = 9$ $e)\quad = -44$ $f)\quad = -97$

$g)\quad = -4\begin{pmatrix}2\\7\\5\end{pmatrix}$ $h)\quad = 2\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ $i)\quad = 48$

$j)\quad = 33$ $k)\quad = -65$ $l)\quad = 77\begin{pmatrix}-19\\9\\3\end{pmatrix}$

Aufgabe 4:

$a)\ \varphi \approx 79,06^\circ$ $b)\ \varphi \approx 147,92^\circ$ $c)\ \varphi \approx 36,18^\circ$ $d)\ \varphi \approx 8,99^\circ$

$e)\ \varphi \approx 166,13^\circ$ $f)\ \varphi \approx 130,76^\circ$ $g)\ \varphi \approx 64,71^\circ$ $h)\ \varphi \approx 71,87^\circ$

$i)\ \varphi \approx 46,92^\circ$ $j)\ \varphi \approx 68,16^\circ$ $k)\ \varphi \approx 116,47^\circ$ $l)\ \varphi \approx 130,41^\circ$

Aufgabe 5:

$a)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $b)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $c)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{53}}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

$d)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{85}}\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ $e)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $f)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$g)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{97}}\begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix}$ $h)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{290}}\begin{pmatrix} 13 \\ -11 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6:

$a)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{2054}}\begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ 43 \end{pmatrix}$ $c)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{1034}}\begin{pmatrix} 12 \\ 19 \\ -23 \end{pmatrix}$

$d)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{346}}\begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$ $e)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{6665}}\begin{pmatrix} 35 \\ -56 \\ 48 \end{pmatrix}$ $f)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{25565}}\begin{pmatrix} -5 \\ 24 \\ 158 \end{pmatrix}$

$g)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{865}}\begin{pmatrix} 24 \\ -8 \\ 15 \end{pmatrix}$ $h)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{12251}}\begin{pmatrix} 91 \\ 1 \\ -63 \end{pmatrix}$ $i)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{161}}\begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$j)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{2618}}\begin{pmatrix} 41 \\ -19 \\ 24 \end{pmatrix}$ $k)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{773}}\begin{pmatrix} 12 \\ 25 \\ -2 \end{pmatrix}$ $l)\ \vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{87693}}\begin{pmatrix} -77 \\ 280 \\ -58 \end{pmatrix}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.2.1).

18.10.82 Lösungen zu Matrizen

Aufgabe 1:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -5 & 7 & -4 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -4 \\ 5 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 \\ -9 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} -5 & 6 & 1 & -6 \\ -7 & 7 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & -4 & -2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & -5 & 3 \\ 3 & 8 & -5 & -6 & -5 \\ 5 & 2 & 3 & 8 & 2 \\ 6 & 9 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & -5 \\ -2 & 5 & -8 & 8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 \\ 8 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & 6 & -6 \\ 4 & 0 & 8 & -3 & 3 \\ 8 & -4 & -1 & 2 & 1 \\ -9 & 2 & 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -7 & -8 \\ 5 & 0 \\ -4 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

l) $\begin{pmatrix} 8 & 3 & 8 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 2 \\ -6 & 5 & -6 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 2 \\ -9 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & -5 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

$a)$ $\operatorname{tr}(A_a) = 4$	$b)$ $\operatorname{tr}(A_b) = -1$	$c)$ $\operatorname{tr}(A_c) = 9$
$d)$ $\operatorname{tr}(A_d) = 4$	$e)$ $\operatorname{tr}(A_e) = -3$	$f)$ $\operatorname{tr}(A_f) = 18$
$g)$ $\operatorname{tr}(A_g) = 9$	$h)$ $\operatorname{tr}(A_h) = 1$	$i)$ $\operatorname{tr}(A_i) = 8$
$j)$ $\operatorname{tr}(A_j) = 13$	$k)$ $\operatorname{tr}(A_k) = 7$	$l)$ $\operatorname{tr}(A_l) = 13$

Aufgabe 3:

$a)$ $\det(A_a) = 29$	$b)$ $\det(A_b) = -10$	$c)$ $\det(A_c) = 14$
$d)$ $\det(A_d) = -225$	$e)$ $\det(A_e) = -8$	$f)$ $\det(A_f) = -97$
$g)$ $\det(A_g) = 1281$	$h)$ $\det(A_h) = 635$	$i)$ $\det(A_i) = 2988$
$j)$ $\det(A_j) = -1448$	$k)$ $\det(A_k) = -2130$	$l)$ $\det(A_l) = -15888$

Aufgabe 4:

$$a) \quad = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} \qquad b) \quad = \begin{pmatrix} 83 & -2 \\ 34 & 26 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad = \begin{pmatrix} -2 & -31 \\ 16 & -22 \end{pmatrix} \qquad d) \quad = \begin{pmatrix} 57 & 2 \\ 38 & 27 \end{pmatrix}$$

$$e) \quad = \begin{pmatrix} 43 & 30 \\ 6 & -18 \end{pmatrix} \qquad f) \quad = \begin{pmatrix} 32 & -32 \end{pmatrix}$$

$$g) \quad = \begin{pmatrix} 70 \\ 54 \end{pmatrix} \qquad h) \quad = \begin{pmatrix} -14 & 56 \\ -16 & 64 \end{pmatrix}$$

$$i) \quad = \begin{pmatrix} -36 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad j) \quad = \begin{pmatrix} 43 & -48 & 47 & 67 \\ 23 & -30 & 41 & 38 \end{pmatrix}$$

$$k) \quad = \begin{pmatrix} 6 & -14 & -20 \\ 30 & -1 & 30 \\ 63 & -44 & 8 \end{pmatrix} \qquad l) \quad = \begin{pmatrix} 63 & 70 & 30 \\ 16 & 55 & -3 \\ 54 & 45 & 78 \end{pmatrix}$$

$$m) \quad = \begin{pmatrix} 34 & 54 & -32 \\ -1 & 18 & -50 \\ 19 & 28 & -58 \end{pmatrix} \qquad n) \quad = \begin{pmatrix} 43 & 36 & 78 \\ 40 & 56 & 70 \\ 37 & 18 & 47 \end{pmatrix}$$

$$o) \quad = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 30 & 42 \\ 17 & 26 \end{pmatrix} \qquad p) \quad = \begin{pmatrix} 81 & -46 & -26 \\ 50 & -43 & -34 \end{pmatrix}$$

$$q) \quad = \begin{pmatrix} 60 \\ 24 \\ 94 \end{pmatrix} \qquad r) \quad = \begin{pmatrix} -69 & -40 \\ -36 & -8 \end{pmatrix}$$

$$s) \quad = \begin{pmatrix} 8 \\ 54 \\ 107 \end{pmatrix} \qquad t) \quad = \begin{pmatrix} 24 & -8 & 24 & 4 \\ 12 & -4 & 12 & 2 \\ -30 & 10 & -30 & -5 \\ 12 & -4 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$u) \quad = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 41 \\ -37 \end{pmatrix} \qquad v) \quad = \begin{pmatrix} -45 & 95 \\ 27 & -36 \\ 15 & -56 \\ -20 & 22 \end{pmatrix}$$

$$w) \quad = \begin{pmatrix} -20 & 39 \\ 142 & 105 \\ 73 & 45 \\ 57 & -2 \end{pmatrix} \qquad x) \quad = \begin{pmatrix} 16 & 32 & -48 & -48 \\ -2 & 6 & 6 & -14 \\ -19 & -55 & 57 & 91 \\ 15 & 59 & -45 & -103 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

$a)\quad = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ $b)\quad = \frac{1}{61}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$

$c)\quad = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ $d)\quad = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$

$e)\quad = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ $f)\quad = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$

$g)\quad = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ $h)\quad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$

$i)\quad = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ $j)\quad = \frac{1}{393}\begin{pmatrix} 9 & -34 & -20 \\ 6 & 21 & -57 \\ 57 & 3 & 48 \end{pmatrix}$

$k)\quad = \frac{1}{228}\begin{pmatrix} 27 & -21 & -15 \\ 38 & -38 & 38 \\ -17 & 47 & 1 \end{pmatrix}$ $l)\quad = \frac{1}{264}\begin{pmatrix} -6 & 42 & -36 \\ -42 & 30 & 12 \\ 29 & -27 & 42 \end{pmatrix}$

$m)\quad = \frac{1}{282}\begin{pmatrix} 26 & -23 & 8 \\ -16 & 25 & -70 \\ 40 & 8 & 34 \end{pmatrix}$ $n)\quad = \frac{1}{93}\begin{pmatrix} 3 & -81 & 45 \\ -8 & -1 & 4 \\ 6 & 24 & -3 \end{pmatrix}$

$o)\quad = \frac{1}{117}\begin{pmatrix} 0 & 36 & 9 \\ 13 & -64 & -29 \\ 13 & -1 & 16 \end{pmatrix}$ $p)\quad = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 7 \\ 2 & -17 & 35 \\ -11 & 20 & -21 \end{pmatrix}$

$q)\quad = \frac{1}{217}\begin{pmatrix} -21 & 21 & -7 \\ 65 & 28 & 32 \\ -48 & -14 & -47 \end{pmatrix}$ $r)\quad = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 7 & 12 & 3 \\ -20 & -80 & 28 \\ -15 & -44 & 21 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6:

$a)\ \lambda_1 \approx -0,899 \ \wedge \lambda_2 \approx 8,899$	$b)\ \lambda_1 = 7 \ \wedge \lambda_2 = 3$
$c)\ \lambda_1 \approx -4,464 \ \wedge \lambda_2 \approx 2,464$	$d)\ \lambda_1 = 7 \ \wedge \lambda_2 = 3$
$e)\ \lambda_1 \approx -4,653 \ \wedge \lambda_2 \approx 3,653$	$f)\ \lambda_1 = 7 \ \wedge \lambda_2 = 2$
$g)\ \lambda_1 \approx -2,292 \ \wedge \lambda_2 \approx 8,292$	$h)\ \lambda_1 \approx -3,702 \ \wedge \lambda_2 \approx 2,702$
$i)\ \lambda_1 = 12 \ \wedge \lambda_2 = 1$	$j)\ \lambda_1 \approx 11,292 \ \wedge \lambda_2 \approx 0,708 \ \wedge \lambda_3 = 3$
$k)\ \lambda_1 \approx -11,798 \ \wedge \lambda_2 \approx 7,798 \ \wedge \lambda_3 = 2$	$l)\ \lambda_1 \approx 10,066 \ \wedge \lambda_2 \approx -5,066 \ \wedge \lambda_3 = -1$
$m)\ \lambda_1 \approx 14,603 \ \wedge \lambda_2 \approx 2,397 \ \wedge \lambda_3 = -1$	$n)\ \lambda_1 \approx 12,483 \ \wedge \lambda_2 \approx -2,483 \ \wedge \lambda_3 = 1$
$o)\ \lambda_1 \approx 5,066 \ \wedge \lambda_2 \approx -10,066 \ \wedge \lambda_3 = 5$	$p)\ \lambda_1 = -8 \ \wedge \lambda_2 = 9 \ \wedge \lambda_3 = 5$
$q)\ \lambda_1 \approx 3,746 \ \wedge \lambda_2 \approx -11,746 \ \wedge \lambda_3 = 3$	$r)\ \lambda_1 \approx 14,782 \ \wedge \lambda_2 \approx 1,218 \ \wedge \lambda_3 = 5$

Aufgabe 7: *Transponiere die Matrizen.*

$$a)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 9 \\ -1 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & 8 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & -5 & 3 \\ -3 & 1 & -4 & -2 & -7 \\ 5 & 2 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & -9 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8: *Bestimme die Spur der Matrizen.*

$$a)\ tr \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 4 + 7 = 11$$

$$b)\ tr \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 4 + 7 + (-3) = 8$$

$$c)\ tr \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & -9 \\ 0 & -4 & 3 & 2 \\ -5 & -2 & 8 & 1 \end{pmatrix} = 4 + 1 + 3 + 1 = 9$$

Aufgabe 9: *Bestimme die Determinanten der Matrizen.*

$$a)\ \ det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 6 = 14$$

$$b)\ \ det \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= 4 \cdot 7 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 \cdot 9 + 3 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 9 \cdot 7 - (-1) \cdot 0 \cdot (-3) - 4 \cdot 5 \cdot 0 = -138$$

Aufgabe 10: *Bestimme die Eigenwerte der Matrizen.*

$$a)\ \ 0 \stackrel{!}{=} det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 6 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

$$0 = (4-\lambda)(7-\lambda) - 2 \cdot 6$$

$$0 = 28 + \lambda^2 - 7\lambda + 4\lambda - 12$$

$$0 = \lambda^2 - 3\lambda + 14 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{47}}{2} i$$

$$b)\ \ 0 \stackrel{!}{=} det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & 3 \\ 0 & 7-\lambda & 5 \\ 9 & 0 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$0 = (4-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 \\ 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} - 0 \cdot det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} + 9 \cdot det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7-\lambda & 5 \end{pmatrix}$$

$$0 = (4-\lambda) \cdot det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 \\ 0 & -3-\lambda \end{pmatrix} + 9 \cdot det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7-\lambda & 5 \end{pmatrix}$$

$$0 = (4-\lambda)(7-\lambda)(-3-\lambda) + 9 \cdot (-1 \cdot 5 - (7-\lambda) \cdot 3)$$

$$0 = -\lambda^3 + 8\lambda^2 + 32\lambda - 318$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 \approx -6,035 \quad \wedge \quad \lambda_{2,3} \approx 7,017 \pm 1,858i$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.3.6).

18.10.83 Lösungen zum Kreuz- und Spatprodukt

Aufgabe 1: *Beweise die Graßmann-Identität über einen direkten Beweis.*

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 \end{pmatrix} + \vec{0} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 \\ a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 \\ a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 - a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 - a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 + a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 - a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_3b_1c_3 \\ a_2b_2c_2 + a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 \\ a_3b_3c_3 + a_1b_3c_1 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1 + a_1b_1c_1 \\ a_3b_3c_2 + a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 \\ a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3 + a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\,\vec{b} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\,\vec{c} \\
&= (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c} \qquad \square
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4:

$$a) \;=\; \begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad b) \;=\; \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad c) \;=\; \begin{pmatrix} -12 \\ -20 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$d) \;=\; \begin{pmatrix} 64 \\ 32 \\ -52 \end{pmatrix} \qquad e) \;=\; \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad f) \;=\; \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$g) \;=\; \begin{pmatrix} 26 \\ 36 \\ -69 \end{pmatrix} \qquad h) \;=\; \begin{pmatrix} 21 \\ 14 \\ -21 \end{pmatrix} \qquad i) \;=\; \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$j) \;=\; \begin{pmatrix} 28 \\ -8 \\ -16 \end{pmatrix} \qquad k) \;=\; \begin{pmatrix} -65 \\ -96 \\ -42 \end{pmatrix} \qquad l) \;=\; \begin{pmatrix} -105 \\ -132 \\ -226 \end{pmatrix}$$

$$m) \;=\; \begin{pmatrix} -51 \\ -54 \\ 22 \end{pmatrix} \qquad n) \;=\; \begin{pmatrix} 21 \\ 61 \\ 150 \end{pmatrix} \qquad o) \; \begin{pmatrix} -154 \\ -431 \\ 257 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5:

$$a) \;=\; \begin{pmatrix} 54 \\ -144 \\ -36 \end{pmatrix} \qquad b) \;=\; \begin{pmatrix} -80 \\ 681 \\ 126 \end{pmatrix} \qquad c) \;=\; \begin{pmatrix} -179 \\ 214 \\ 611 \end{pmatrix}$$

$$d) \;=\; \begin{pmatrix} -450 \\ 275 \\ 300 \end{pmatrix} \qquad e) \;=\; \begin{pmatrix} 1566 \\ -1563 \\ -1026 \end{pmatrix} \qquad f) \;=\; \begin{pmatrix} -2325 \\ 4230 \\ 3405 \end{pmatrix}$$

$$g) \;=\; \begin{pmatrix} -18490 \\ -28882 \\ -25332 \end{pmatrix} \qquad h) \;=\; \begin{pmatrix} 139448 \\ -315888 \\ -21800 \end{pmatrix} \qquad i) \;=\; \begin{pmatrix} 1149 \\ -2524 \\ 678 \end{pmatrix}$$

$$j) \;=\; \begin{pmatrix} 834 \\ -2361 \\ 1245 \end{pmatrix} \qquad k) \;=\; \begin{pmatrix} 1780 \\ 4225 \\ 215 \end{pmatrix} \qquad l) \;=\; \begin{pmatrix} -4662 \\ 5760 \\ -1926 \end{pmatrix}$$

$$m) \;=\; \begin{pmatrix} 267440 \\ -62898 \\ 246404 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6:

$a) \ = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}$ $b) \ = \begin{pmatrix} 34 \\ -60 \\ 18 \end{pmatrix}$ $c) \ = 14$ $d) \ = \begin{pmatrix} 35 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$

$e) \ = -3960$ $f) \ = \begin{pmatrix} -567 \\ -1281 \\ 1785 \end{pmatrix}$ $g) \ = 244$ $h) \ = 469$

$i) \ = 501$ $j) \ = 164$ $k) \ = \begin{pmatrix} 26 \\ -3 \\ -34 \end{pmatrix}$ $l) \ = -109$

Aufgabe 7:

$a) \ = \left(\vec{a} \times \lambda\vec{b}\right) \cdot \vec{d} + (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{d}$ $b) \ = \nu\mu\vec{d} \cdot \vec{a} - \vec{g} \cdot \mu\vec{a}$

$c) \ = \left(\vec{s}\left(\underbrace{\vec{t} \cdot \vec{s}}_{Skalar}\right)\right) \cdot \vec{s} = \lambda\vec{s} \cdot \vec{s} = 0$ $d) \ = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2 \sin\varphi$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.4.1).

18.10.84 Lösungen zu vektoriellen Geraden

Aufgabe 1:

$a) \ d = 3\sqrt{2}$ $b) \ d = \sqrt{42}$ $c) \ d = \sqrt{66}$

$d) \ d = \sqrt{266}$ $e) \ d = 7\sqrt{2}$ $f) \ d = \sqrt{10}$

$g) \ d = 4\sqrt{14}$ $h) \ d = 2\sqrt{5}$ $i) \ d = 3\sqrt{13}$

$j) \ d = 2\sqrt{10}$ $k) \ d = \sqrt{91}$ $l) \ d = 5\sqrt{5}$

$m) \ d = \sqrt{149}$ $n) \ d = \sqrt{227}$ $o) \ d = \sqrt{906}$

Aufgabe 2:

$a)\ \ d = \dfrac{\sqrt{905}}{5} \approx 6,017$ $b)\ \ d = \sqrt{69} \approx 8,307$

$c)\ \ d = \dfrac{5\sqrt{3003}}{33} \approx 8,303$ $d)\ \ d = \dfrac{2\sqrt{149389}}{61} \approx 12,672$

$e)\ \ d = \dfrac{5\sqrt{5453}}{41} \approx 9,005$ $f)\ \ d = \dfrac{\sqrt{727446}}{62} \approx 13,757$

$g)\ \ d = \dfrac{\sqrt{875422}}{139} \approx 6,731$ $h)\ \ d = \dfrac{5\sqrt{159877}}{149} \approx 13,418$

$i)\ \ d = \dfrac{\sqrt{511118}}{74} \approx 9,661$ $j)\ \ d = \dfrac{\sqrt{55282}}{18} \approx 13,062$

$k)\ \ d = \dfrac{5\sqrt{854}}{14} \approx 10,437$ $l)\ \ d = \dfrac{\sqrt{1243002}}{446} \approx 2,500$

Aufgabe 3:

$a)\ \ d = \dfrac{151\sqrt{429}}{429} \approx 7,290$ $b)\ \ d = \dfrac{16\sqrt{7545}}{503} \approx 9,463$

$c)\ \ d = \dfrac{72\sqrt{670}}{335} \approx 5,563$ $d)\ \ d = \dfrac{217\sqrt{330}}{330} \approx 11,945$

$e)\ \ d = \dfrac{335\sqrt{2413}}{2413} \approx 6,820$ $f)\ \ d = \dfrac{14\sqrt{2483}}{191} \approx 3,652$

$g)\ \ d = \dfrac{\sqrt{454}}{227} \approx 0,094$ $h)\ \ d = \dfrac{90\sqrt{3557}}{3557} \approx 1,509$

$i)\ \ d = \dfrac{22\sqrt{195}}{195} \approx 1,575$ $j)\ \ d = \dfrac{320\sqrt{154}}{231} \approx 17,191$

Aufgabe 4:

a) ja *b)* nein *c)* ja *d)* ja *e)* ja *f)* nein

Aufgabe 5:

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ *c)* nein

d) $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ *e)* nein *f)* $\begin{pmatrix} -13 \\ 22 \\ -25 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6: *Gegeben sei das Viereck definiert durch die Punkte $A(2|1|0)$, $B(10|3|8)$, $C(8|5|6)$ und $D(4|3|2)$. Gib zu allen möglichen Geraden eine Geradengleichung an. Bestimme welche dieser Geraden sich schneiden. Erläutere wie sich die Situation, was passieren würde, wenn sich bei einem der Punkte an einer Koordinate etwas verändern würde.*

$$g(A;B): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g(A;C): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g(A;D): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(B;C): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(B;D): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(C;D): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wird der Punkt D verändert, würde sich bei dieser Darstellung der Geraden lediglich der Richtungsvektor in der veränderten Koordinate verändern.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.5.1).

18.10.85 Lösungen zu vektoriellen Ebenen

Aufgabe 1:

$a)\ \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $b)\ \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ $c)\ \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} 37 \\ -31 \\ 41 \end{pmatrix}$

$d)\ \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$ $e)\ \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} 20 \\ 23 \\ -18 \end{pmatrix}$ $f)\ \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} 50 \\ 65 \\ 35 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2:

$a)\ d \approx 1,961$ $b)\ d \approx 2,914$ $c)\ d \approx 6,466$

$d)\ d \approx 7,603$ $e)\ d \approx 8,492$ $f)\ d \approx 4,617$

Aufgabe 3:

$a)\ d \approx 6,174$ $b)\ d \approx 0,186$ $c)\ d \approx 2,586$

$d)\ d \approx 4,477$ $e)\ d \approx 4,686$ $f)\ d \approx 3,321$

Aufgabe 4:

$a)\ d \approx 0,500$ $b)\ d \approx 0,855$ $c)\ d \approx 0,589$

$d)\ d \approx 6,342$ $e)\ d \approx 2,309$ $f)\ d \approx 5,373$

Aufgabe 5:

$a)\ d =\approx 0,490$ $b)\ d \approx 1,458$ $c)\ d \approx 1,659$

$d)\ d \approx 1,320$ $e)\ d \approx 8,826$ $f)\ d \approx 4,441$

Aufgabe 6:

$a)$ ja $b)$ ja $c)$ nein $d)$ nein $e)$ ja $f)$ ja

Aufgabe 7:

$a)\ \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ $b)\ \begin{pmatrix} -3 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}$ $c)\ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $d)\ \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$

$e)\ \begin{pmatrix} 57 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}$ $f)\ \begin{pmatrix} 9 \\ -29 \\ -80 \end{pmatrix}$ $g)\ \begin{pmatrix} 40 \\ 3 \\ -38 \end{pmatrix}$ $h)\ \begin{pmatrix} 35 \\ -23 \\ -8 \end{pmatrix}$

$i)\ \begin{pmatrix} -17 \\ 40 \\ -61 \end{pmatrix}$ $j)\ \begin{pmatrix} 32 \\ -1 \\ -131 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8: Eine mögliche Lösung.

$$a)\ E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$c)$ nein

$$d)\ E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$e)$ nein

$$f)\ E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Eine mögliche Lösung.

$$a)\ \ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$c)$ nein

$d)$ nein

$$e)\ \ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f)\ \ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10:

$a)\ \alpha \approx 31,851^\circ$ $\quad b)\ \alpha \approx 30,948^\circ$ $\quad c)\ \alpha \approx 57,390^\circ$

$d)\ \alpha \approx 10,367^\circ$ $\quad e)\ \alpha \approx 25,768^\circ$ $\quad f)\ \alpha \approx 65,463^\circ$

Aufgabe 11:

$$a)\ \ g:\ \vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 25 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \ g:\ \vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \ g:\ \vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad d)\ \ g:\ \vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12:

$$a)\ \ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{36}{7}\sqrt{14}-10 \\ \frac{60}{7}\sqrt{14}-29 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{36}{7}\sqrt{14}+41 \\ \frac{60}{7}\sqrt{14}+76 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 34-16\sqrt{2} \\ \frac{64}{5}\sqrt{2}-30 \\ 14-\frac{32}{5}\sqrt{2} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 11-16\sqrt{2} \\ \frac{64}{5}\sqrt{2}-6 \\ 7-\frac{32}{5}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$c)\ \ g:\ \vec{x} = \frac{1}{129}\begin{pmatrix} 65 \\ -889 \\ 1346 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 161 \\ -115 \\ -46 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{6(47\sqrt{41}+656)}{5863} \\ -\frac{282\sqrt{41}}{5863}+\frac{47}{143} \\ \frac{705\sqrt{41}}{5863}-\frac{189}{143} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \frac{282\sqrt{41}}{5863}-\frac{45}{13} \\ -\frac{2(141\sqrt{41}+4510)}{5863} \\ \frac{705\sqrt{41}}{5863}+\frac{89}{13} \end{pmatrix}$$

$$e)\ \ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{172\sqrt{133}}{12977}-\frac{4931}{683} \\ 3 \\ -\frac{1376\sqrt{133}}{90839}-\frac{4512}{683} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} \frac{172\sqrt{133}}{12977}-\frac{1543}{683} \\ -7 \\ -\frac{1376\sqrt{133}}{90839}-\frac{2237}{683} \end{pmatrix}$$

$$f)\ \ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{111}{11}\sqrt{22}-902 \\ \frac{185}{\sqrt{22}}+\frac{1519}{2} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{111}{11}\sqrt{22}-1211 \\ -\frac{5}{22}(37\sqrt{22}-4466) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13:

a) $\alpha \approx 58{,}906°$	*b)* $\alpha \approx 68{,}158°$	*c)* $\alpha \approx 62{,}165°$
d) $\alpha \approx 70{,}640°$	*e)* $\alpha \approx 69{,}780°$	*f)* $\alpha \approx 77{,}760°$

Aufgabe 14: *Gegeben sei das Fünfeck definiert durch die Punkte* $A(1|2|3)$, $B(5|8|11)$, $C(3|12|17)$, $D(-1|6|9)$ *und* $E(-2|1|2)$. *Überprüfe, ob es zu einer der Seiten eine parallel Diagonale gibt. Untersuche, ob die Punkte alle in einer Ebene liegen.*

$$g(A;B): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g(A;C): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$g(A;D): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g(A;E): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(B;C): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g(B;D): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g(B;E): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$g(C;D): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g(C;E): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 17 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$g(D;E): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Folgende Parallelitäten sind zu finden:
Seite zu Seite: $g(A;B)||g(C;D)$
Diagonale zu Seite: $g(A;C)||g(E;D)$
Diagonale zu Seite: $g(A;D)||g(B;C)$
Diagonale zu Diagonale: $g(A;E)||g(B;D)$

$$E(A;B;C): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2 \quad \wedge \quad \mu = 2$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2 \quad \wedge \quad \mu = 1$$

Da für die Gleichungssysteme jeweils eine Lösung existiert, liegen die Punkte alle auf einer Ebene.

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.6.1).

18.10.86 Lösungen zu Darstellungsformen

Aufgabe 1: (Es existieren mehrere Ebenengleichungen in einigen Darstellungen, sodass nicht alle Ergebnisse exakt übereinstimmen müssen, obwohl sie die selbe Ebene beschreiben.)

a) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$; $E:\vec{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{127}}\begin{pmatrix}10\\-5\\-2\end{pmatrix}=\frac{10}{\sqrt{127}}$

$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}10\\-5\\-2\end{pmatrix}=0$; $E:10x_1-5x_2-2x_3=\frac{10}{\sqrt{127}}$

$E:\frac{x_1}{\left(\frac{1}{\sqrt{127}}\right)}+\frac{x_2}{\left(\frac{-2}{\sqrt{127}}\right)}+\frac{x_3}{\left(\frac{-5}{\sqrt{127}}\right)}=1$.

b) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$; $E:\vec{x}\cdot\frac{1}{15\sqrt{3}}\begin{pmatrix}5\\-5\\-25\end{pmatrix}=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}5\\-5\\-25\end{pmatrix}=0$; $E:5x_1-5x_2-25x_3=\frac{1}{3\sqrt{3}}$

$E:\frac{x_1}{\left(\frac{1}{15\sqrt{3}}\right)}+\frac{x_2}{\left(\frac{-1}{15\sqrt{3}}\right)}+\frac{x_3}{\left(\frac{-1}{75\sqrt{3}}\right)}=1$.

c) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-2\\0\\-5\end{pmatrix}$; $E:\vec{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{141}}\begin{pmatrix}-20\\-10\\8\end{pmatrix}=\frac{10}{\sqrt{141}}$

$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-20\\-10\\8\end{pmatrix}=0$; $E:-20x_1-10x_2+8x_3=\frac{10}{\sqrt{141}}$

$E:\frac{x_1}{\left(\frac{-1}{2\sqrt{141}}\right)}+\frac{x_2}{\left(\frac{-1}{\sqrt{141}}\right)}+\frac{x_3}{\left(\frac{-5}{4\sqrt{141}}\right)}=1$.

d) $E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$; $E:\vec{x}\cdot\frac{1}{4\sqrt{34}}\begin{pmatrix}-4\\3\\-3\end{pmatrix}=\frac{3}{\sqrt{34}}$

$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-16\\12\\-12\end{pmatrix}=0$; $E:-16x_1+12x_2-12x_3=\frac{3}{\sqrt{34}}$

$E:\frac{x_1}{\left(\frac{-3}{16\sqrt{34}}\right)}+\frac{x_2}{\left(\frac{1}{4\sqrt{34}}\right)}+\frac{x_3}{\left(\frac{-1}{4\sqrt{34}}\right)}=1$.

$$e)\quad E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-5,5\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-5,5\\-3,5\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-5,5\\0\\3\end{pmatrix}\quad;\qquad E:\vec{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{12049}}\begin{pmatrix}42\\66\\-77\end{pmatrix}=\frac{231}{\sqrt{12049}}$$

$$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-5,5\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-10,5\\16,5\\-19,25\end{pmatrix}=0\quad;\qquad E:42x_1+66x_2-77x_3=\frac{231}{\sqrt{12049}}$$

$$E:\frac{x_1}{\left(\frac{231}{42\sqrt{12049}}\right)}+\frac{x_2}{\left(\frac{231}{66\sqrt{12049}}\right)}+\frac{x_3}{\left(\frac{-231}{77\sqrt{12049}}\right)}=1\quad.$$

$$f)\quad E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2,5\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2,5\\3,5\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2,5\\0\\-6\end{pmatrix}\quad;\qquad E:\vec{x}\cdot\frac{1}{109}\begin{pmatrix}84\\60\\-35\end{pmatrix}=\frac{210}{109}$$

$$E:\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}2,5\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}21\\15\\-8,75\end{pmatrix}=0\quad;\qquad E:84x_1+60x_2-35x_3=\frac{210}{109}$$

$$E:\frac{x_1}{\left(\frac{5}{218}\right)}+\frac{x_2}{\left(\frac{7}{218}\right)}+\frac{x_3}{\left(\frac{-6}{109}\right)}=1\quad.$$

Aufgabe 2:

$a)\ -\dfrac{3x_2}{35}+\dfrac{4x_3}{35}=1$ $\qquad b)\ \dfrac{x_1}{2}-\dfrac{3x_2}{4}+\dfrac{x_3}{4}=1$

$c)\ \dfrac{2x_1\sqrt{17}}{7}-\dfrac{2x_2\sqrt{17}}{7}+\dfrac{3x_3\sqrt{17}}{7}=1$ $\qquad d)\ x_2+x_3=1$

$e)\ -\dfrac{31x_1\sqrt{1974}}{17}-\dfrac{23x_2\sqrt{1974}}{17}+\dfrac{22x_3\sqrt{1974}}{17}=1$ $\qquad f)\ \dfrac{x_1}{\sqrt{14}}-\dfrac{2x_2}{\sqrt{14}}+\dfrac{3x_3}{\sqrt{14}}=1$

$g)\ \dfrac{x_1}{36}+\dfrac{x_3}{3}=1$ $\qquad h)\ -\dfrac{2x_1}{15}-\dfrac{x_2}{15}+\dfrac{2x_3}{15}=1$

Aufgabe 3:

$a)\ -12x_1+9x_2+3x_3=\dfrac{11}{\sqrt{26}}$ $\qquad b)\ 4x_1-3x_2-3x_3=\dfrac{1}{\sqrt{34}}$

$c)\ 2x_1-7x_2+5x_3=3\sqrt{78}$ $\qquad d)\ 5x_1-2x_2+3x_3=\dfrac{5}{\sqrt{38}}$

$e)\ -x_1+4x_2+5x_3=0$ $\qquad f)\ x_1+10x_3=5$

$g)\ 2x_1+3x_2-10x_3=8$ $\qquad h)\ x_1-4x_3=\dfrac{119\sqrt{17}}{2}$

Aufgabe 4:

a) $$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=0$$

b) $$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\7\end{pmatrix}=0$$

c) $$\left[\vec{x}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}35\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}=0$$

d) $$\left[\vec{x}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}=0$$

e) $$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}12\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\3\end{pmatrix}=0$$

f) $$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}0\\3\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\-4\end{pmatrix}=0$$

g) $$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\3\\-4\end{pmatrix}\right]\cdot 15\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}=0$$

h) $$\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\-8\end{pmatrix}=0$$

Aufgabe 5:

a) $$\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-2\end{pmatrix}=7$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{138}}\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}7\\5\\-8\end{pmatrix}=9$$

c) $$\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}-6\\-5\\13\end{pmatrix}=25$$

d) $$\frac{1}{\sqrt{38}}\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-5\end{pmatrix}=4$$

e) $$\frac{1}{\sqrt{141}}\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\\-10\end{pmatrix}=20$$

f) $$\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix}=27$$

g) $$\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}10\\19\\2\end{pmatrix}=51$$

h) $$\frac{1}{\sqrt{50}}\vec{x}\cdot\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}=7$$

Aufgabe 6:

$a)\ \vec{x} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$c)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad d)\ \vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad f)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 55 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$g)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad h)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.7.1).

18.10.87 Lösungen zur vektoriellen Geometrie

Aufgabe 1:

$a)\ A \approx 18,317FE$ $\quad b)\ A \approx 139,274FE$ $\quad c)\ A \approx 33,053FE$

$d)\ A \approx 53,540FE$ $\quad e)\ A \approx 142,524FE$ $\quad f)\ A \approx 22,638FE$

Aufgabe 2:

$a)\ A \approx 31,678FE$ $\quad b)\ A \approx 63,246FE$ $\quad c)\ A \approx 18,668FE$

$d)\ A \approx 15,083FE$ $\quad e)\ A \approx 81,555FE$ $\quad f)\ A \approx 34,825FE$

Aufgabe 3:

$a)$ $\measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 79,275^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)\approx 29,717^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)\approx 71,008^\circ$

$b)$ $\measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 88,189^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)\approx 38,680^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)\approx 53,131^\circ$

$c)$ $\measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 82,372^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)\approx 44,495^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)\approx 53,132^\circ$

$d)$ $\measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)= 90^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)\approx 40,758^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)\approx 49,242^\circ$

$e)$ $\measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 77,889^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)\approx 31,613^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)\approx 70,498^\circ$

$f)$ $\measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 77,846^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)\approx 45,268^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)\approx 56,886^\circ$

Aufgabe 4:

$a)$ $A\approx 13,416FE$ $b)$ $A\approx 10,677FE$ $c)$ $A\approx 21,726FE$

$d)$ $A\approx 248,004FE$ $e)$ $A\approx 277,676FE$ $f)$ $A\approx 858,953FE$

Aufgabe 5:

$a)$ $D(-3|-3|-1)$ $b)$ $D(4|2|4)$ $c)$ $D(6|2|3)$

$d)$ $D(10|17|-3)$ $e)$ $D(-3|-18|-9)$ $f)$ $D(44|-33|27)$

Aufgabe 6:

$a)$ $A\approx 27,459FE$ $b)$ $A\approx 22,583FE$ $c)$ $A\approx 97,683FE$

$d)$ $A\approx 172,108FE$ $e)$ $A\approx 115,030FE$ $f)$ $A\approx 211,825FE$

Aufgabe 7:

$a)$ $D(5|3|-2)$ $b)$ $D(2|6|-1)$ $c)$ $D(5|5|10)$

$d)$ $D(1|-13|17)$ $e)$ $D(-5|-15|2)$ $f)$ $D(14|-8|4)$

Aufgabe 8:

$a)\ \measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 98,288^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\right)\approx 81,712^\circ$

$b)\ \measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 75,121^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\right)\approx 104,879^\circ$

$c)\ \measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 118,483^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\right)\approx 61,517^\circ$

$d)\ \measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 143,193^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\right)\approx 36,807^\circ$

$e)\ \measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 131,002^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\right)\approx 48,998^\circ$

$f)\ \measuredangle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)\approx 74,185^\circ \quad \wedge \quad \measuredangle\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}\right)\approx 105,815^\circ$

Aufgabe 9:

$a)\ V=34VE$ $\quad b)\ V=119VE$ $\quad c)\ V=35VE$

$d)\ V=503VE$ $\quad e)\ V=214VE$ $\quad f)\ V=728VE$

Aufgabe 10:

$a)\ V\approx 39,648VE$ $\quad b)\ V\approx 101,368VE$ $\quad c)\ V\approx 72,318VE$

$d)\ V\approx 61,174VE$ $\quad e)\ V\approx 84,241VE$ $\quad f)\ V\approx 31,180VE$

Aufgabe 11:

$a)\ S(5,343|2,671|-2,211) \quad \vee \quad S(0,657|1,329|-3,789)$

$b)\ S(8,578|2,5|-6,655) \quad \vee \quad S(-8,578|1,5|8,655)$

$c)\ S(-0,962|7,077|-2,366) \quad \vee \quad S(2,962|-3,077|12,366)$

$d)\ S(6,384|3,233|-9,005) \quad \vee \quad S(3,616|-3,233|1,005)$

$e)\ S(-10,866|6,574|8,361) \quad \vee \quad S(16,866|-0,574|-0,361)$

$f)\ S(-13,363|-1,818|-10,545) \quad \vee \quad S(15,363|-16,182|24,545)$

Aufgabe 12:

$a)\ V = 32VE$ $b)\ V \approx 132,442VE$ $c)\ V \approx 204,790VE$

$d)\ V \approx 114,769VE$ $e)\ V \approx 74,265VE$ $f)\ V \approx 2,449VE$

Aufgabe 13:

$a)\ h = 4LE$ $b)\ h = 9LE$ $c)\ h = 5LE$

$d)\ h = 6LE$ $e)\ h = 7LE$ $f)\ h = 3LE$

Aufgabe 14:

$$a)\ \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 + r_2 \quad \wedge \quad \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| > r_1 - r_2$$
$$b)\ \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 + r_2 \quad \wedge \quad \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| > r_1 - r_2$$
$$c)\ \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| > r_1 + r_2$$
$$d)\ \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = r_1 + r_2$$
$$e)\ \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 + r_2 \quad \wedge \quad \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 - r_2$$
$$f)\ \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 + r_2 \quad \wedge \quad \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| > r_1 - r_2$$
$$g)\ \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| < r_1 + r_2 \quad \wedge \quad \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| > r_1 - r_2$$
$$h)\ \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| > r_1 + r_2$$

Aufgabe 15:

$a)\ V \approx 523,599VE$ $b)\ V \approx 3053,628VE$ $c)\ V \approx 6497,493VE$

$d)\ V \approx 293,604VE$ $e)\ V \approx 61,562VE$ $f)\ V \approx 587,671VE$

Aufgabe 16:

$a)\ \ d(O_K, E) \approx 7,456LE$ Keine Besonderheit

$b)\ \ d(O_K, E) \approx 6,117LE$ Keine Besonderheit

$c)\ \ d(O_K, E) \approx -2,586LE$ Die Ebene schneidet die Kugel, sodass ein Schnittkreis entsteht

$d)\ \ d(O_K, E) \approx 2,749LE$ Keine Besonderheit

$e)\ \ d(O_K, E) = 0LE$ E ist eine Tangentialebene von K

$f)\ \ d(O_K, E) \approx -0,638LE$ Die Ebene schneidet die Kugel, sodass ein Schnittkreis entsteht

Aufgabe 17:

$a)\ \ r = 5 \quad \Rightarrow \quad A = 25\pi$

$b)\ \ r = 7 \quad \Rightarrow \quad A = 49\pi$

$c)$ kein Kreis

$d)\ \ r = 9 \quad \Rightarrow \quad A = 81\pi$

$e)$ kein Kreis

$f)\ \ r = 12 \quad \Rightarrow \quad A = 144\pi$

Aufgabe 18:

$$a)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-4\\3\\-6\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$b)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\-3\\2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-3\\5\\4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}6\\0\\-7\end{pmatrix}$$

$$c)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\5\\4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-6\\4\\5\end{pmatrix}$$

$$d)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-7\\-5\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}9\\-3\\-6\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$e)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-5\\-11\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}$$

$$f)\ E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-7\\4\\2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}7\\-4\\2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 19: Ebenen haben mehrere Darstellungen, es müssen mindestens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen übereinstimmend auf der Ebene liegen.

a) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 40 \\ -74 \\ 13 \end{pmatrix}$

d) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} -25 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$

e) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -16 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

g) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

h) $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \kappa \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$

Aufgabe 20: *Bestimme, ob die Ebene E eine Tangentialebene zu der Kugel K ist. Bestimme gegebenenfalls den Berührpunkt P_0.*

a) keine Tangentialebene

b) $P_0(4|7|2)$

c) $P_0(-5|-10|-2)$

d) $P_0(8|-2|0)$

e) keine Tangentialebene

f) $P_0(0|0|-7)$

Aufgabe 21: *Bestimme eine Tangente t zu der Kugel K für den gegebenen Mittelpunkt M im* *gegebenen Punkt auf der Kugel* P_0.

Es wurde nur eine von unendlich vielen Lösungen angegeben. Der Richtungsvektor der Tangente muss orthogonal zum Vektor $\overrightarrow{MP_0}$ sein.

$a)\ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$c)\ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$ $\qquad d)\ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$e)\ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad f)\ g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.8.1).

18.10.88 Lösungen zu den gemischten Aufgaben zu Vektoren

Aufgabe 1:

$a)\ d \approx 0,366 \qquad b)\ d \approx 1,048$

Aufgabe 2:

$a)\ d = 0 \qquad b)\ d \approx 10,557$

Aufgabe 3:

$a)\ d \approx 6,194 \qquad b)\ d \approx 2,103$

Aufgabe 4:

$a)\ d \approx 4,949 \qquad b)\ d \approx 7,248$

Aufgabe 5:

$a)\ d \approx 3,223 \qquad b)\ d \approx 0,405$

Aufgabe 6:

$a)\ \alpha \approx 16,223^\circ \qquad b)\ \alpha \approx 17,782^\circ$

Aufgabe 7:

$a)\ \alpha \approx 41,762^\circ \qquad b)\ \alpha \approx 19,536^\circ$

Aufgabe 8:

$a)\ \alpha \approx 28,293^\circ \qquad b)\ \alpha \approx 51,052^\circ$

Aufgabe 9:

$a)\ \alpha \approx 19,850^\circ \qquad b)\ \alpha \approx 70,765^\circ$

Aufgabe 10:

$a)\ \alpha \approx 28,066^\circ \qquad b)\ \alpha \approx 11,335^\circ$

Aufgabe 11:

$a)\ \alpha \approx 66,164^\circ$ $b)\ \alpha \approx 60,295^\circ$ $c)\ \alpha \approx 30,085^\circ$
$d)\ \alpha \approx 48,171^\circ$ $e)\ \alpha \approx 46,500^\circ$

Aufgabe 12:

$a)\ \alpha \approx 4,948^\circ$ $b)\ \alpha \approx 47,063^\circ$ $c)\ \alpha \approx 2,879^\circ$
$d)\ \alpha \approx 33,938^\circ$ $e)\ \alpha \approx 24,846^\circ$

Aufgabe 13:

$a)\ \alpha \approx 7,452^\circ$ $b)\ \alpha \approx 39,232^\circ$ $c)\ \alpha \approx 79,717^\circ$
$d)\ \alpha \approx 2,893^\circ$ $e)\ \alpha \approx 35,277^\circ$

Aufgabe 14:

$a)\ \alpha \approx 84,902^\circ$ $b)\ \alpha \approx 76,838^\circ$ $c)\ \alpha \approx 19,149^\circ$
$d)\ \alpha \approx 72,249^\circ$ $e)\ \alpha \approx 55,566^\circ$

Aufgabe 15:

$a)\ \alpha \approx 13,784^\circ$ $b)\ \alpha \approx 36,716^\circ$ $c)\ \alpha \approx 61,987^\circ$
$d)\ \alpha \approx 69,797^\circ$ $e)\ \alpha \approx 8,307^\circ$

Aufgabe 16:

$$a)\ \begin{pmatrix} -\frac{215\sqrt{2414}}{329511} - \frac{2888}{273} \\ \frac{46}{273} - \frac{86\sqrt{2414}}{329511} \\ -\frac{86\sqrt{2414}}{329511} - \frac{227}{273} \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} -\frac{38\sqrt{161}}{15939} - \frac{269}{99} \\ -\frac{38\sqrt{161}}{1771} - \frac{148}{11} \\ \frac{38\sqrt{161}}{5313} + \frac{170}{33} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 17:

$$a)\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 46 \end{pmatrix} \qquad b)\ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 127 \\ -205 \\ -170 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18:

$$a)\ \begin{pmatrix} \frac{11}{2} - \frac{4\sqrt{34}}{17} \\ \frac{8\sqrt{34}}{17} - 8 \\ \frac{8\sqrt{34}}{17} - 6 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} \frac{91}{41} - \frac{196\sqrt{53}}{2173} \\ \frac{147\sqrt{53}}{2173} - \frac{58}{41} \\ \frac{196\sqrt{53}}{2173} + \frac{286}{41} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 19:

$$a)\ \begin{pmatrix} \frac{227}{55} - \frac{333\sqrt{29}}{1595} \\ -\frac{111\sqrt{29}}{1595} - \frac{16}{55} \\ \frac{57}{11} - \frac{37\sqrt{29}}{319} \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} -\frac{64\sqrt{38}}{57} - \frac{28}{3} \\ \frac{64\sqrt{38}}{57} + 5 \\ \frac{128\sqrt{38}}{57} + \frac{17}{3} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 20:

$$a)\ \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -\frac{22}{9} \\ \frac{22}{9} \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 5 \\ -\frac{871}{222} \\ -\frac{2419}{296} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 21:

Aufgabe 22:

Term	Vektor	Skalar	nicht definiert
$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$		x	
$\frac{\vec{r}}{\lvert\vec{r}\rvert^2} \times \vec{a}$	x		
$\vec{z} \times (\vec{x} \cdot \vec{y})$			x
$(\vec{z} \times \vec{a}) \cdot \left(\vec{s} \times \vec{h}\right)$		x	
$\frac{(\vec{a} \cdot \vec{c})}{\vec{d}}$			x
$\lambda\vec{z} - (\vec{s} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{z}$	x		
$\vec{v} \times (\mu\vec{u} - \lambda\vec{c})^2$			x
$\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$	x		
$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 - \vec{c} \cdot \vec{s}$		x	
$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$	x		
$\frac{a \times \vec{b}}{\lvert\vec{r}\rvert^3}$			x
$\left[\mu\left(\vec{a} - \vec{b}\right) \times \vec{c}\right] \cdot \vec{v}$		x	
$\lvert\vec{a} \times (\vec{z} \times \vec{v})\rvert$		x	

$$a)\ \ \mu = \frac{40-47\lambda}{27} \quad\Rightarrow\quad g:\ \vec{x} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}188\\-121\\-41\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{27}\begin{pmatrix}68\\-34\\-20\end{pmatrix}$$

$$b)\ \ \mu = \frac{-\lambda-85}{13} \quad\Rightarrow\quad g:\ \vec{x} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}340\\-170\\424\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{13}\begin{pmatrix}17\\11\\68\end{pmatrix}$$

$$c)\ \ \mu = \frac{-59\lambda-42}{20} \quad\Rightarrow\quad g:\ \vec{x} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}268\\124\\-37\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{10}\begin{pmatrix}168\\79\\47\end{pmatrix}$$

$$d)\ \ \mu = \frac{-36\lambda-107}{61} \quad\Rightarrow\quad g:\ \vec{x} = \frac{1}{61}\begin{pmatrix}1054\\627\\164\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{61}\begin{pmatrix}-374\\-69\\597\end{pmatrix}$$

$$e)\ \ \mu = \frac{-2163\lambda-11791}{4178} \quad\Rightarrow\quad g:\ \vec{x} = \frac{1}{4178}\begin{pmatrix}30452\\65825\\92379\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4178}\begin{pmatrix}-25364\\27675\\44239\end{pmatrix}$$

Aufgabe 23:

$$a)\ \ \mu = \frac{8-3\lambda}{8} \quad\Rightarrow\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-4\\-3\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{8}\begin{pmatrix}12\\46\\11\end{pmatrix}$$

$$b)\ \ \mu = \frac{103-23\lambda}{12} \quad\Rightarrow\quad \vec{x} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix}433\\-103\\0\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{24}\begin{pmatrix}-53\\-46\\24\end{pmatrix}$$

$$c)\ \ \mu = \frac{-\lambda-7}{15} \quad\Rightarrow\quad \vec{x} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}7\\0\\9\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{15}\begin{pmatrix}-1\\15\\-33\end{pmatrix}$$

$$d)\ \ \mu = \frac{42\lambda+2120}{107} \quad\Rightarrow\quad \vec{x} = \frac{1}{107}\begin{pmatrix}2120\\0\\-11232\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{107}\begin{pmatrix}42\\107\\-17\end{pmatrix}$$

$$e)\ \ \mu = \frac{-7(31\lambda-128)}{488} \quad\Rightarrow\quad \vec{x} = \frac{1}{183}\begin{pmatrix}336\\3080\\732\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{1464}\begin{pmatrix}-651\\3091\\1464\end{pmatrix}$$

Aufgabe 24:

$$a)\ \ \mu = \frac{-28\lambda - 33}{9} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -66 \\ -134 \\ -165 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{9}\begin{pmatrix} -138 \\ -119 \\ -75 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \ \mu = \frac{4\lambda + 76}{11} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} 152 \\ 0 \\ -523 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{22}\begin{pmatrix} 8 \\ 22 \\ -53 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \ \mu = \frac{3\lambda + 184}{17} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -707 \\ 184 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{17}\begin{pmatrix} 44 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \ \mu = \frac{896 - 89\lambda}{28} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix} 1344 \\ -1792 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{56}\begin{pmatrix} 37 \\ -178 \\ 56 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \ \mu = \frac{20200 - 65\lambda}{4936} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{4936}\begin{pmatrix} -27496 \\ -4040 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4936}\begin{pmatrix} 6041 \\ -65 \\ 4936 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 25:

$$a)\ \ \mu = -\lambda - \frac{98}{27} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 483 \\ -7 \\ -301 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{27}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ \ \mu = \frac{-31\lambda - 291}{27} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 291 \\ 171 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{27}\begin{pmatrix} -31 \\ -48 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \ \mu = \frac{-69 - 5\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 71 \\ 69 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \ \mu = \frac{-807 - 29\lambda}{5} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1031 \\ 807 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{5}\begin{pmatrix} -42 \\ -29 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$e)\ \ \mu = \frac{65\lambda - 100}{12} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -68 \\ 75 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{36}\begin{pmatrix} 166 \\ 195 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 26:

$a)\ \ \mu = \dfrac{5(117\lambda - 193)}{439} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \dfrac{1}{439}\begin{pmatrix} 3160 \\ -174 \\ 791 \end{pmatrix} + \dfrac{\lambda}{439}\begin{pmatrix} 732 \\ -147 \\ 1463 \end{pmatrix}$

$b)\ \ \mu = \dfrac{35\lambda + 27}{603} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \dfrac{1}{603}\begin{pmatrix} 27 \\ 2769 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{\lambda}{1809}\begin{pmatrix} 105 \\ 4046 \\ 1809 \end{pmatrix}$

$c)\ \ \mu = \dfrac{66\lambda + 321}{169} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \dfrac{1}{169}\begin{pmatrix} 107 \\ 0 \\ 42 \end{pmatrix} + \dfrac{\lambda}{169}\begin{pmatrix} 66 \\ 169 \\ 4 \end{pmatrix}$

$d)\ \ \mu = \dfrac{-1171\lambda - 7441}{712} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \dfrac{1}{712}\begin{pmatrix} -156 \\ 7441 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{\lambda}{712}\begin{pmatrix} -436 \\ -1171 \\ 712 \end{pmatrix}$

$e)\ \ \mu = \lambda - \dfrac{5}{7} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \dfrac{1}{63}\begin{pmatrix} -45 \\ 0 \\ 56 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 44 \end{pmatrix}$

Aufgabe 27: *Ein Parallelogramm wird am Punkt* $A(0|3|0)$ *durch die Vektoren* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *und* $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ *aufgespannt. Löse alle Teilaufgaben.*

$a)$ Gib eine Ebenengleichung in Koordinatenform an, in der das Parallelogramm liegt. $\Rightarrow$ $E: ax_1 + ax_2 - x_3 = 3a$

$b)$ Berechne die Werte für a, bei dem der Flächeninhalt des Parallelogramms $A = 2\,FE$ groß ist. $\Rightarrow \ a = \sqrt{\dfrac{3}{2}} \ \wedge \ a = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$c)$ Gib für $a = -1$ die Koordinaten des den fehlenden Eckpunkt D an. $\Rightarrow$ $D(0|4|-1)$

Aufgabe 28: *Gegeben sei die Ebene* $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -a \\ 2 \\ a \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. *Löse alle Teilaufgaben.*

$a)$ Gib eine Ebenengleichung in Koordinatenform der Ebene E an. $\Rightarrow$ $E: 8 = (a+6)x_1 + 4ax_2 + (a-2)x_3$

$b)$ Berechne die Werte von a, bei der die Ebene E parallel auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist. $\Rightarrow \quad a = -3$

$c)$ Berechne die Werte von a, bei der die Ebene E orthogonal zu $F: 3 = 2x_1 - x_2 - 5x_3$ ist. $\Rightarrow \quad a = \frac{22}{7}$

Aufgabe 29: *Berechne die Werte von t, bei der der Punkt $P(1|t|t^2)$ auf der Ebene $E: 4 = x_1 - 2x_2 + x_3$ liegt.* $\Rightarrow \quad t_1 = -1 \ \wedge \ t_2 = 3$

Aufgabe 30: *Berechne die Werte von t, bei der der Punkt $P(9-3t|-t^2|4t^3-8)$ auf der Ebene $E: 12 = 4x_1 - 18x_2 + 3x_3$ liegt.* $\Rightarrow \quad t_1 = -2 \ \wedge \ t_2 = 0 \ \wedge \ t_3 = \frac{1}{2}$

Aufgabe 31: *Berechne die Werte für a, sodass die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a^2 \\ -2a \\ 2 \end{pmatrix}$ orthogonal zu einander sind. Berechne den Schnittpunkt für diesen Wert von a.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ -2a \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$a^2 + 4a + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} (-2)^2 \\ -2 \cdot (-2) \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mu = -2 \quad \wedge \quad \lambda = 0$$

Aufgabe 32: *Berechne den Schnittpunkt der Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$. Zeige, dass der Schnittpunkt unabhängig von a ist.*

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mu = -1 \quad \wedge \quad \lambda = -\frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{a} \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \square$$

Aufgabe 33: *Berechne die Werte für a, sodass die Ebenen $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zu einander sind.*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = 6 - 2a \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -6a + 20 - 2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

Aufgabe 34: *Gegeben sei die Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P_a(-2|a|1-a)$.*

$a)$ Berechne den Lotfußpunkt bezüglich des Abstand zwischen der Ebene E und der Punkte P_a.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 16$$

$$E : 16 = 3x_1 + 8x_2 + 7x_3$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 1-a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$g \cap E : 16 = 3(-2 + \lambda 3) + 8(a + \lambda 8) + 7(1 - a + \lambda 7)$$

$$16 = 1 + a + 116\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a-15}{116}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x}_L = \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 1-a \end{pmatrix} + \frac{a-15}{116} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L_a \left(\frac{3a-277}{116} \middle| \frac{31a-30}{29} \middle| \frac{11-109a}{116} \right)$$

$b)$ Berechne den Abstand zwischen der Ebene E und der Punkte P_a.

$$|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 8^2 + 7^2} = \sqrt{122}$$

$$d(E, P) = \frac{|3 \cdot (-2) + 8 \cdot a + 7 \cdot (1-a) - 16|}{\sqrt{122}} = \frac{|a-15|}{\sqrt{122}}$$

$c)$ Berechne die Gerade der Lotfußpunkte auf der Ebene E bezüglich der Punkte P_a.

$$L_{a=0} \left(-\frac{277}{116} \middle| -\frac{30}{29} \middle| \frac{11}{116} \right) \quad \wedge \quad L_{a=1} \left(-\frac{274}{116} \middle| \frac{1}{29} \middle| -\frac{98}{116} \right)$$

$$h = \begin{pmatrix} -\frac{277}{116} \\ -\frac{30}{29} \\ \frac{11}{116} \end{pmatrix} + \lambda \left[\begin{pmatrix} -\frac{274}{116} \\ \frac{1}{29} \\ -\frac{98}{116} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{277}{116} \\ -\frac{30}{29} \\ \frac{11}{116} \end{pmatrix} \right]$$

$$h = \begin{pmatrix} -\frac{277}{116} \\ -\frac{30}{29} \\ \frac{11}{116} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{116} \\ \frac{31}{29} \\ -\frac{109}{116} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 35: *Gegeben sei* $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *und* $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Berechne die Werte von a, für die die Gerade g parallel zur Ebene E steht.*

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$0 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -a + 1 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (10.9).

18.10.89 Lösungen zu komplexen Zahlen

Aufgabe 1:

$a)\ \Re(z) = 1$	$\Im(z) = 2$	$b)\ \Re(z) = 3$	$\Im(z) = -8$
$c)\ \Re(z) = -4$	$\Im(z) = 1$	$d)\ \Re(z) = 0$	$\Im(z) = 7$
$e)\ \Re(z) = 6$	$\Im(z) = 0$	$f)\ \Re(z) = -7$	$\Im(z) = 5$
$g)\ \Re(z) = -\frac{4}{5}$	$\Im(z) = \frac{6}{7}$	$h)\ \Re(z) = -\frac{9}{4}$	$\Im(z) = -\frac{7}{3}$
$i)\ \Re(z) = \sqrt{2}$	$\Im(z) = \ln 6$	$j)\ \Re(z) = -e$	$\Im(z) = -\pi$

Aufgabe 2:

$a)\quad = 10 + 7i$	$b)\quad = 8 + 7i$	$c)\quad = 5 + 3i$
$d)\quad = 2 + 11i$	$e)\quad = 10,6 + 7,6i$	$f)\quad = 13,45 - 0,9i$
$g)\quad = 0,87 + 10,23i$	$h)\quad = 2,02 + 12,23i$	$i)\quad = \frac{47}{20} + \frac{27}{8}i$
$j)\quad = \frac{31}{12} - \frac{46}{21}i$	$k)\quad = \frac{42}{55} + \frac{13}{40}i$	$l)\quad = \frac{121}{35} - \frac{7}{12}i$
$m)\quad = \frac{103}{35} + \frac{233}{50}i$	$n)\quad = \frac{491}{50} + \frac{109}{60}i$	$o)\quad = \frac{77}{50} + \frac{27}{100}i$
$p)\quad = \frac{1163}{300} - \frac{491}{3000}i$	$q)\quad \approx 2,968 + 4,060i$	$r)\quad \approx 7,899 + 8,401i$
$s)\quad \approx 3,689 + 3,401i$	$t)\quad \approx 8,041 + 4,647i$	

Aufgabe 3:

$a)\quad = -2 + 3i$	$b)\quad = 6 - 3i$	$c)\quad = 1 + 13i$
$d)\quad = 20 - 5i$	$e)\quad = -5,8 + 3,8i$	$f)\quad = -0,65 + 1,5i$
$g)\quad = 2,21 + 1,63i$	$h)\quad = -1,94 - 7,52i$	$i)\quad = -\frac{17}{20} + \frac{13}{8}i$
$j)\quad = \frac{11}{12} - \frac{52}{21}i$	$k)\quad = -\frac{2}{55} + \frac{43}{40}i$	$l)\quad = -\frac{61}{35} + \frac{7}{4}i$
$m)\quad = \frac{4}{5} - \frac{297}{50}i$	$n)\quad = \frac{163}{50} - \frac{91}{60}i$	$o)\quad = -\frac{1}{25} - \frac{293}{100}i$
$p)\quad = \frac{763}{300} + \frac{509}{3000}i$	$q)\quad \approx 0,504 - 1,232i$	$r)\quad \approx -1,266 + 1,190i$
$s)\quad \approx -0,470 + 2,015i$	$t)\quad \approx -4,582 + 1,636i$	

Aufgabe 4:

$a)\quad = 14 + 38i$	$b)\quad = -3 + 37i$	$c)\quad = 46 + i$
$d)\quad = -123 + 61i$	$e)\quad = 8,85 + 51,3i$	$f)\quad = 45,48 - 5,565i$
$g)\quad = -26,5308 + 2,6489i$	$h)\quad = -23,1153 + 5,0478i$	$i)\quad = -\frac{79}{80} + \frac{149}{32}i$
$j)\quad = \frac{43}{24} - \frac{61}{36}i$	$k)\quad = \frac{359}{880} + \frac{79}{550}i$	$l)\quad = \frac{7331}{2520} + \frac{31}{60}i$
$m)\quad \approx 5,106 + 2,869i$	$n)\quad \approx 21,201 + 11,392i$	$o)\quad \approx 2,721 + 0,149i$
$p)\quad \approx 2,141 - 0,533i$	$q)\quad \approx 0,131 + 8,366i$	$r)\quad \approx -2,093 + 33,936i$
$s)\quad \approx 1,470 + 6,747i$	$t)\quad \approx 6,189 + 22,432i$	

Aufgabe 5:

a) $= \frac{17}{20} + \frac{11}{20}i$ *b)* $= \frac{17}{26} - \frac{33}{26}i$ *c)* $= -\frac{34}{29} + \frac{31}{29}i$

d) $= -\frac{15}{29} - \frac{23}{29}i$ *e)* $\approx 0,431 + 0,595i$ *f)* $\approx 0,875 + 0,192i$

g) $\approx 1,292 - 0,559i$ *h)* $\approx 0,230 + 0,042i$ *i)* $= \frac{5420}{5321} + \frac{5350}{5321}i$

j) $= \frac{3969}{2522} - \frac{3871}{2522}i$ *k)* $= -\frac{2060}{5291} + \frac{7328}{5291}i$ *l)* $\approx 0,191 + 0,310i$

m) $\approx -0,051 - 0,172i$ *n)* $\approx 1,603 - 0,769i$ *o)* $\approx -0,482 - 0,707i$

p) $\approx 4,531 + 1,137i$ *q)* $\approx 0,761 - 0,347i$ *r)* $\approx 0,956 + 0,295i$

s) $\approx 1,087 + 0,940i$ *t)* $\approx 0,372 + 0,409i$

Aufgabe 6:

a) $\overline{z} = 2 - 3i$ *b)* $\overline{z} = 6 + 9i$

c) $\overline{z} = -4 + i$ *d)* $\overline{z} = 8$

e) $\overline{z} = 3i$ *f)* $\overline{z} = -4 - 2i$

g) $\overline{z} = -\frac{5}{7} - \frac{9}{8}i$ *h)* $\overline{z} = -\frac{4}{3} + \frac{7}{9}i$

i) $\overline{z} = \sqrt{5} + i\ln 8$ *j)* $\overline{z} = e + \pi i$

Aufgabe 7: *Bestimme Betrag der komplexen Zahlen.*

a) $|z| \approx 8,0623$ *b)* $|z| \approx 2,8284$

c) $|z| \approx 7,2801$ *d)* $|z| \approx 7,0711$

e) $|z| \approx 8,5440$ *f)* $|z| \approx 8,6023$

g) $|z| \approx 0,6468$ *h)* $|z| \approx 1,0817$

i) $|z| \approx 2,8648$ *j)* $|z| \approx 4,1544$

Aufgabe 8:

$a)\ = 6+11i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=6\ ;\ \Im(z_E)=11\ ;\ \overline{z_E}=6-11i\ ;\ |z_E|\approx 12,53$

$b)\ = -7-5i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=-7\ ;\ \Im(z_E)=-5\ ;\ \overline{z_E}=-7+5i\ ;\ |z_E|\approx 8,602$

$c)\ = -45-25i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=-45\ ;\ \Im(z_E)=-25\ ;\ \overline{z_E}=-45+25i\ ;\ |z_E|\approx 51,478$

$d)\ = \frac{90}{221}-\frac{99}{221}i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=\frac{90}{221}\ ;\ \Im(z_E)=-\frac{99}{221}\ ;\ \overline{z_E}\approx\frac{90}{221}+\frac{99}{221}i\ ;\ |z_E|=0,605$

$e)\ = -1+3i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=-1\ ;\ \Im(z_E)=3\ ;\ \overline{z_E}=-1-3i\ ;\ |z_E|\approx 3,162$

$f)\ = -\frac{605}{41}-\frac{730}{41}i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=-\frac{605}{41}\ ;\ \Im(z_E)=-\frac{730}{41}\ ;\ \overline{z_E}=-\frac{605}{41}+\frac{730}{41}i\ ;\ |z_E|\approx 23,125$

$g)\ = -\frac{229}{41}-\frac{93}{41}i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=-\frac{229}{41}\ ;\ \Im(z_E)=-\frac{93}{41}\ ;\ \overline{z_E}=-\frac{229}{41}+\frac{93}{41}i\ ;\ |z_E|\approx 6,028$

$h)\ = 26-2i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=26\ ;\ \Im(z_E)=-2\ ;\ \overline{z_E}=26+2i\ ;\ |z_E|\approx 26,077$

$i)\ = -11+27i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=-11\ ;\ \Im(z_E)=27\ ;\ \overline{z_E}=-11-27i\ ;\ |z_E|\approx 29,155$

$j)\ = 69+75i \ \Rightarrow\ \Re(z_E)=69\ ;\ \Im(z_E)=75\ ;\ \overline{z_E}=69-75i\ ;\ |z_E|\approx 101,912$

Aufgabe 9: *Berechne den Wert des Terms, wenn* $z_1=4+2i$, $z_2=1-3i$, $z_3=-3+i$ *und* $z_4=-2-5i$ *gilt.*

$a)\ z_1+z_2+z_3=(4+2i)+(1-3i)+(-3+i)=2$

$$b)\ \begin{aligned}\bar z_4-z_3+z_1&=\overline{-2-5i}-(-3+i)+(4+2i)\\&=-2+5i+3-i+4+2i=5+6i\end{aligned}$$

$$c)\ \begin{aligned}z_2\cdot z_4&=(1-3i)\cdot(-2-5i)\\&=-2-5i+6i+15i^2\\&=-2-5i+6i-15\\&=-17+i\end{aligned}$$

$$d)\ \begin{aligned}z_4\cdot\bar z_1-z_3&=(-2-5i)\overline{(4+2i)}-(-3+i)\\&=(-2-5i)(4-2i)+3-i\\&=-8+4i-20i+10i^2+3-i\\&=-8+4i-20i-10+3-i\\&=-15-15i\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
e)\quad (z_1 - z_2) \cdot (\bar{z}_3 + z_4) &= [(4+2i) - (1-3i)] \left[\overline{(-3+i)} + (-2-5i)\right] \\
&= [4+2i-1+3i]\,[-3-i-2-5i] \\
&= [3+5i]\,[-5-6i] \\
&= -15-18i-25i-30i^2 \\
&= -15-18i-25i+30 \\
&= 15-33i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f)\quad \frac{z_3}{z_1} &= \frac{-3+i}{4+2i} \\
&= \frac{(-3+i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} \\
&= \frac{-12+6i+4i-2i^2}{16+4} \\
&= \frac{-10+10i}{20} \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g)\quad \frac{z_2 - z_1}{z_4} &= \frac{(1-3i)-(4+2i)}{-2-5i} \\
&= \frac{-3-5i}{-2-5i} \\
&= \frac{(-3-5i)(-2+5i)}{(-2-5i)(-2+5i)} \\
&= \frac{6-15i+10i-25i^2}{4+25} \\
&= \frac{6-15i+10i+25}{29} \\
&= \frac{31-5i}{29} \\
&= \frac{31}{29} - \frac{5}{29}i
\end{aligned}
$$

$$h)\ \ z_3 - \frac{z_1}{z_2} = (-3+i) - \left[\frac{(4+2i)}{(1-3i)}\right]$$
$$= -3+i - \left[\frac{(4+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}\right]$$
$$= -3+i - \left[\frac{4+2i+12i+6i^2}{1+9}\right]$$
$$= \frac{-30+10i}{10} - \left[\frac{4+14i-6}{10}\right]$$
$$= \frac{-30+10i}{10} + \frac{2-14i}{10}$$
$$= \frac{-30+10i+2-14i}{10}$$
$$= -\frac{14}{5} - \frac{2}{5}i$$

$$i)\ \ \Im(z_2 - z_4) = \Im\left[(1-3i) - (-2-5i)\right]$$
$$= \Im\left[1-3i+2+5i\right]$$
$$= \Im\left[3+2i\right] = 2$$

$$j)\ \ \Re(z_2 \cdot z_4) = \Re\left[(1-3i)\cdot(-2-5i)\right]$$
$$= \Re\left[-2-5i+6i+15i^2\right]$$
$$= \Re\left[-2-5i+6i-15\right]$$
$$= \Re\left[-17+i\right] = -17$$

$$k)\ \ \Im(z_2 - z_4) + \Re(z_3 - z_1)i = 2 + \Re\left[(-3+i) - (4+2i)\right]i$$
$$= 2 + \Re\left[-3+i-4+2i\right]i$$
$$= 2 + \Re\left[1+3i\right]i$$
$$= 2 + i$$

$$l)\ \ \Re\left(\frac{z_4}{z_3}\right) = \Re\left(\frac{(-2-5i)}{(-3+i)}\right)$$
$$= \Re\left(\frac{(-2-5i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}\right)$$
$$= \Re\left(\frac{6+2i+15i+5i^2}{9+1}\right)$$
$$= \Re\left(\frac{6+2i+15i-5}{10}\right)$$
$$= \Re\left(\frac{1+17i}{10}\right)$$
$$= \frac{1}{10}$$

$$
\begin{aligned}
m)\quad z_1 \cdot z_1 &= (4+2i)(4+2i)\\
&= 16+8i+8i+4i^2\\
&= 16+16i-4\\
&= 12+16i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n)\quad z_2 \cdot \bar{z}_2 &= (1-3i)\overline{(1-3i)}\\
&= (1-3i)(1+3i)\\
&= 1+9=10
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10: *Beweise die Gleichung über einen direkten Beweis für* $f(x) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

$$\int\limits_a^b \sqrt{1-(f'(x))^2}dx = f'(a) - f'(b)$$

$$
\begin{aligned}
\text{Ansatz: }\ f(x) &= \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\\
f'(x) &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\\
f''(x) &= -\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -F(x)\\
1 &= [f(x)]^2 + [f'(x)]^2\\
1 &= \left[\frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]^2\\
1 &= -\frac{1}{4}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^2\\
1 &= -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-2ix}\right)\\
1 &= -\frac{1}{4}\left(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}\right)\\
1 &= -\frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{4}\cdot 2 - \frac{1}{4}e^{-2ix} + \frac{1}{4}e^{2ix} + \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}e^{-2ix}\\
1 &= \frac{4}{4} \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b \sqrt{1-(f'(x))^2}dx &= \int\limits_a^b \sqrt{(f(x))^2}dx \\ &= \int\limits_a^b f(x)dx \\ &= [F(x)]_a^b \\ &= F(b)-F(a) \\ &= -f'(b)-(-f'(a)) \\ &= f'(a)-f'(b) \qquad \square\end{aligned}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (11.1.1).

18.10.90 Lösungen zu komplexen Matrizen

Aufgabe 1:

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (11.2.1).

18.10.91 Lösungen zu Differentialgleichungen 1. Ordnung

Aufgabe 1:

$a)\ x(t)=\sqrt{5}t+C$ $\qquad$ $b)\ r(z)=|x+1|+C$

$c)\ y(x)=\dfrac{C}{x}$ $\qquad$ $d)\ r(t)=Ce^{-\sin(t)}$

$e)\ N(t)=N_0e^{-\lambda t}$ $\qquad$ $f)\ y(x)=\sqrt{3x-x^3}$

$g)\ z(x)=-\dfrac{1}{\ln(x)+C}$ $\qquad$ $h)\ s(t)=Ce^{-\frac{t}{T}}$

$i)\ I(t)=Ce^{-\frac{R}{L}t}$ $\qquad$ $j)\ y(x)=Ce^{\arctan(x)}$

$k)\ x(t)=\dfrac{1}{k}\arccos(kt+C)$ $\qquad$ $l)\ y(x)=\left(-\dfrac{3}{2k}\cos(kx)+C\right)^2$

Aufgabe 2: *Bestimme die Funktionsgleichung für $y(x)$, die die Differentialgleichung erfüllt.(Es können auch komplexe Zahlen vorkommen.)*

$$\begin{aligned}
a)\ \ y' - g &= 0 \\
\frac{dy}{dx} - g &= 0 \quad |{+g} \\
\frac{dy}{dx} &= g \quad |{\cdot dx} \\
dy &= g dx \\
\int dy &= \int g dx \\
y(x) &= gx + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b)\ \ y'y - r &= 0 \quad |{+r} \\
y'y &= r \\
\frac{dy}{dx} y &= r \quad |{\cdot dx} \\
y dy &= r dx \\
\int y dy &= \int r dx \\
\frac{1}{2} y^2 &= rx + C \quad |{\cdot 2} \\
y^2 &= 2rx + C \\
y(x) &= \sqrt{2rx + C}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c)\ \ y' - yx &= 0 \quad |{+yx} \\
\frac{dy}{dx} &= yx \quad |{\cdot dx} \\
dy &= yx dx \quad |: y \\
\frac{1}{y} dy &= x dx \\
\int \frac{1}{y} dy &= \int x dx \\
\ln(y) &= \frac{1}{2} x^2 + C \\
y(x) &= e^{\frac{1}{2}x^2 + C} \\
y(x) &= e^{\frac{1}{2}x^2} \underbrace{e^C}_{=A} \\
y(x) &= A e^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}$$

$$d)\ \frac{y'}{y^2} - kt = 0 \quad |kt$$
$$\frac{1}{y^2}y' = kt$$
$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = kt \quad |\cdot dx$$
$$\frac{1}{y^2}dy = ktdx$$
$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int ktdx$$
$$-\frac{1}{y} = ktx + C \quad |\cdot(-1)$$
$$\frac{1}{y} = -ktx + C$$
$$y(x) = \frac{1}{-ktx + C}$$

$$e)\ y' + y'x^2 = 1$$
$$y'(1+x^2) = 1 \quad |: (1+x^2)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad |\cdot dx$$
$$dy = \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$\int dy = \int \frac{1}{1+x^2}dx$$
$$y(x) = \arctan(x) + C$$

$$f)\ y'' = z$$
$$\frac{dy'}{dx} = z \quad |\cdot dx$$
$$dy' = zdx$$
$$\int dy' = \int zdx$$
$$y' = zx + C_1$$
$$\frac{dy}{dx} = zx + C_1 \quad |\cdot dx$$
$$dy = (zx + C_1)\,dx$$
$$\int dy = \int (zx + C_1)\,dx$$
$$y(x) = \frac{1}{2}zx^2 + C_1x + C_2$$

$$
\begin{aligned}
g)\quad xy'' - r &= 0 \quad |+r\\
xy'' &= r \quad |: x\\
\frac{dy'}{dx} &= r\frac{1}{x} \quad |\cdot dx\\
dy' &= r\frac{1}{x}dx\\
\int dy' &= \int r\frac{1}{x}dx\\
y' &= r\ln(x) + C\\
\frac{dy}{dx} &= r\ln(x) + C_1 \quad |\cdot dx\\
dy &= [r\ln(x) + C_1]\,dx\\
\int dy &= \int [r\ln(x) + C_1]\,dx\\
\int dy &= \int r\ln(x)dx + \int C_1 dx\\
y(x) &= r(x\ln(x) - x) + C_1x + C_2\\
y(x) &= rx\ln(x) + x(C_1 - r) + C_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h)\quad \underbrace{y'-y}_{homogen} &= \underbrace{2rt}_{inhomogen} \\
\Rightarrow \quad y'-y &= 0 \quad |+y \\
y' &= y \quad |:y \\
\frac{1}{y}y' &= 1 \\
\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= 1 \quad |\cdot dx \\
\frac{1}{y}dy &= 1dx \\
\int \frac{1}{y}dy &= \int 1dx \\
ln(y) &= x+C \\
y_H(x) &= e^{x+C} \\
y_H(x) &= e^x e^C \\
y_H(x) &= Ae^x \\
\Rightarrow \quad y_{Ansatz,P} &= \underbrace{A(x)}_{u}\underbrace{e^x}_{v} \\
y'_{Ansatz,P} &= A'(x)e^x + A(x)e^x \\
\Rightarrow \quad \underbrace{[A'(x)e^x + A(x)e^x]}_{y'_{Ansatz,P}} - \underbrace{[A(x)e^x]}_{y_{Ansatz,P}} &= 2rt \\
A'(x)e^x &= 2rt \quad \Big|\cdot e^{-x} \\
A'(x) &= 2rte^{-x} \\
\frac{dA(x)}{dx} &= 2rte^{-x} \quad |\cdot dx \\
dA(x) &= 2rte^{-x}dx \\
\int dA(x) &= \int 2rte^{-x}dx \\
A(x) &= -2rte^{-x} + K \\
\Rightarrow \quad y_P(x) &= -2rte^{-x}e^x + Ke^x \\
y_P(x) &= -2rt + Ke^x \\
\Rightarrow \quad y(x) &= y_P(x) + y_H(x) \\
y(x) &= -2rt + Ke^x + Ae^x \\
y(x) &= -2rt + (K+A)\,e^x \\
y(x) &= -2rt + Be^x
\end{aligned}
$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (12.1.1).

18.10.92 Lösungen zu Differentialgleichungen 2. Ordnung

Aufgabe 1: *Bestimme die Funktionsgleichung aus der Differentialgleichung.*

$$\begin{aligned}
a)\ \ 0 &= y''(x) - my'(x) \quad \text{mit: } y'(x) = z(x) \ \wedge\ y''(x) = z'(x)\\
0 &= z'(x) - mz(x) \quad |{+mz(x)}\\
mz(x) &= z'(x) \quad \text{mit: } z'(x) = \frac{dz(x)}{dx}\\
mz(x) &= \frac{dz(x)}{dx} \quad |\cdot dx\\
mz(x)dx &= dz(x) \quad |: z(x)\\
mdx &= \frac{1}{z(x)}dz(x)\\
\Rightarrow \int mdx &= \int \frac{1}{z(x)}dz(x)\\
mx + C &= \ln\left[z(x)\right]\\
\Rightarrow\ e^{mx+C} &= z(x)\\
z(x) &= Ae^{mx}\\
y'(x) &= Ae^{mx}\\
\frac{dy(x)}{dx} &= Ae^{mx} \quad |\cdot dx\\
dy(x) &= Ae^{mx}dx\\
\Rightarrow \int dy(x) &= \int Ae^{mx}dx\\
y(x) &= \frac{A}{m}e^{mx} + K
\end{aligned}$$

$$b)\ \ y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0 \quad \text{Ansatz: } \begin{cases} y(x) = Ae^{\lambda x}\\ y'(x) = \lambda Ae^{\lambda x}\\ y''(x) = \lambda^2 Ae^{\lambda x}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^2 Ae^{\lambda x} - \lambda Ae^{\lambda x} + Ae^{\lambda x} &= 0 \quad \Big|: Ae^{\lambda x}\\
\lambda^2 - 2\lambda + 1 &= 0\\
(\lambda - 1) &= 0\\
\lambda &= 1\\
\Rightarrow\ \ y(x) &= Ae^{x}
\end{aligned}$$

$$c)\ \ f''(x)+2f'(x)+5f(x)=0 \quad \text{Ansatz:} \begin{cases} f(x)=Ae^{\lambda x} \\ f'(x)=\lambda Ae^{\lambda x} \\ f''(x)=\lambda^2 Ae^{\lambda x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 Ae^{\lambda x}+2\lambda Ae^{\lambda x}+5Ae^{\lambda x}&=0 \qquad \big|: Ae^{\lambda x} \\ \lambda^2+2\lambda+5&=0 \\ \Rightarrow\ \ \lambda_{1,2}&=-1\pm 2i \\ \Rightarrow\ \ y(x)&=A_1e^{(-1+2i)x}+A_2e^{(-1-2i)x} \end{aligned}$$

$$d)\ \ 4f''(x)=6f'(x)+f(x) \quad \text{Ansatz:} \begin{cases} f(x)=Ae^{\lambda x} \\ f'(x)=\lambda Ae^{\lambda x} \\ f''(x)=\lambda^2 Ae^{\lambda x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 Ae^{\lambda x}&=6\lambda Ae^{\lambda x}+Ae^{\lambda x} \qquad \big|: Ae^{\lambda x} \\ 4\lambda^2&=6\lambda+1 \qquad |-6\lambda-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\lambda^2-6\lambda-1&=0 \\ \Rightarrow\ \ \lambda_{1,2}&=\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{13}}{4} \\ \Rightarrow\ \ y(x)&=A_1e^{\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{13}}{4}\right)x}+A_2e^{\left(\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{13}}{4}\right)x} \end{aligned}$$

$$e)\ \ f''(x)=3f(x)-10f'(x) \quad \text{Ansatz:} \begin{cases} f(x)=Ae^{\lambda x} \\ f'(x)=\lambda Ae^{\lambda x} \\ f''(x)=\lambda^2 Ae^{\lambda x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 Ae^{\lambda x}&=3Ae^{\lambda x}-10\lambda Ae^{\lambda x} \qquad \big|: Ae^{\lambda x} \\ \lambda^2&=3-10\lambda \qquad |-3+10\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2+10\lambda-3&=0 \\ \Rightarrow\ \ \lambda_{1,2}&=-5\pm 2\sqrt{7} \\ \Rightarrow\ \ y(x)&=A_1e^{\left(-5+2\sqrt{7}\right)x}+A_2e^{\left(-5-2\sqrt{7}\right)x} \end{aligned}$$

$f)$ $f'''(x) + 2f''(x) + 5f'(x) = 0 \quad$ mit: $f'(x) = z(x) \;\wedge\; f''(x) = z'(x) \;\wedge\; f'''(x) = z''(x)$

$$z''(x) + 2z'(x) + 5z(x) = 0 \qquad \text{Ansatz: } \begin{cases} z(x) = Ae^{\lambda x} \\ z'(x) = \lambda Ae^{\lambda x} \\ z''(x) = \lambda^2 Ae^{\lambda x} \end{cases}$$

$$\lambda^2 Ae^{\lambda x} + 2\lambda Ae^{\lambda x} + 5Ae^{\lambda x} = 0 \qquad \Big|: Ae^{\lambda x}$$

$$\begin{aligned}
\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \quad & \lambda_{1,2} \\
\Rightarrow \quad z(x) &= A_1 e^{(-1+2i)x} + A_2 e^{(-1-2i)x} \\
f'(x) &= A_1 e^{(-1+2i)x} + A_2 e^{(-1-2i)x} \qquad \text{mit: } f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \\
\frac{df(x)}{dx} &= A_1 e^{(-1+2i)x} + A_2 e^{(-1-2i)x} \qquad |\cdot dx \\
df(x) &= \left[A_1 e^{(-1+2i)x} + A_2 e^{(-1-2i)x}\right] dx \\
\int df(x) &= \int \left[A_1 e^{(-1+2i)x} + A_2 e^{(-1-2i)x}\right] dx \\
f(x) &= \frac{A_1}{-1+2i} e^{(-1+2i)x} + \frac{A_2}{-1-2i} e^{(-1-2i)x} + C \\
f(x) &= \frac{A_1}{-1+2i} e^{(-1+2i)x} - \frac{A_2}{1+2i} e^{(-1-2i)x} + C
\end{aligned}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (12.2.1).

18.10.93 Lösungen zu inhomogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (12.3.1).

18.10.94 Lösungen zu Distributionen

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (12.4.1).

18.10.95 Lösungen zu Kurvenintegralen

Aufgabe 3:

$a)$ $O \approx 44,877$	$b)$ $O \approx 44,877$	$c)$ $O \approx 165,869$	$d)$ $O \approx 308,327$
$e)$ $O \approx 853,918$	$f)$ $O \approx 47,356$	$g)$ $O \approx 112,860$	$h)$ $O \approx 501,313$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (12.5.1).

18.10.96 Lösungen zu Ringintegralen

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (12.6.1).

18.10.97 Lösungen zur Fourier-Transformation

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (12.7.1).

18.10.98 Lösungen zu Faltungen

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (12.8.1).

18.10.99 Lösungen zu den Gemischte Aufgaben zur Analysis

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (12.9).

18.10.100 Lösungen zum Gradient

Aufgabe 1: *Bestimme den Gradienten der Funktionen.*

$$a)\;\; f(x,y,z) = 3x^3y - 5z + 3yz^2 \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{grad}(f(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\,(3x^3y - 5z + 3yz^2) \\ \frac{\partial}{\partial y}\,(3x^3y - 5z + 3yz^2) \\ \frac{\partial}{\partial z}\,(3x^3y - 5z + 3yz^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9x^2y \\ 3x^3 + 3z^2 \\ -5 + 6yz \end{pmatrix}$$

$$b)\;\; g(x,y,z) = z^y + e^{xz} \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{grad}(g(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\,(z^y + e^{xz}) \\ \frac{\partial}{\partial y}\,(z^y + e^{xz}) \\ \frac{\partial}{\partial z}\,(z^y + e^{xz}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ze^{xz} \\ z^y \ln(z) \\ yz^{y-1} + xe^{xz} \end{pmatrix}$$

$$c)\;\; h(x,y,z) = \ln(xy) - \cos(4x^3z) \;\;\Rightarrow\;\; \mathrm{grad}(h(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\,(\ln(xy) - \cos(4x^3z)) \\ \frac{\partial}{\partial y}\,(\ln(xy) - \cos(4x^3z)) \\ \frac{\partial}{\partial z}\,(\ln(xy) - \cos(4x^3z)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{x} + 12x^2z\sin(4x^3z) \\ \frac{1}{y} \\ -4x^3\sin(4x^3z) \end{pmatrix}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (13.2.1).

18.10.101 Lösungen zur Divergenz

Aufgabe 1: *Bestimme die Divergenz der Vektorfunktion.*

$$a)\ \vec{F} = \begin{pmatrix} 5yz \\ 3x + 5x^2y \\ z^3y + 6xz \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div}\left(\vec{F}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(5yz) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3x + 5x^2y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z^3y + 6xz\right)$$

$$= 0 + 5x^2 + 3z^2y + 6x$$

$$= 5x^2 + 3z^2y + 6x$$

$$b)\ \vec{G} = \begin{pmatrix} 2\sin(3x) \\ \cos(3y + z) \\ ie^{3iz^2x} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div}\left(\vec{G}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2\sin(3x)) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos(3y+z)) + \frac{\partial}{\partial z}\left(ie^{3iz^2x}\right)$$

$$= 6\cos(3x) - 3\sin(3y + z) + 6i^2zx$$

$$= 6\cos(3x) - 3\sin(3y + z) - 6zx$$

$$c)\ \vec{H} = \begin{pmatrix} xyz \\ z^2 - x^2 \\ \sqrt{5z} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div}\left(\vec{H}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}\left(z^2 - x^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sqrt{5z}\right)$$

$$= yz + 0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{z}}$$

$$= yz + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{z}}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (13.3.1).

18.10.102 Lösungen zur Rotation

Aufgabe 3: *Bestimme die Rotation der Vektorfunktion.*

$$a)\ \vec{F} = \begin{pmatrix} 5yz \\ 3x+5x^2y \\ z^3y+6xz \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\vec{F}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(z^3y+6xz\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(3x+5x^2y\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(5yz\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(z^3y+6xz\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(3x+5x^2y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(5yz\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z^3 \\ 5y-6z \\ 3+10x-5z \end{pmatrix}$$

$$b)\ \vec{G} = \begin{pmatrix} 2\sin(3x) \\ \cos(3y+z) \\ ie^{3iz^2x} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\vec{G}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(ie^{3iz^2x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\cos(3y+z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(2\sin(3x)\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(ie^{3iz^2x}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(3y+z)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2\sin(3x)\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0-(-\sin(3y+z)) \\ -3i^2z^2e^{3iz^2x} \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin(3y+z) \\ 3z^2e^{3iz^2x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c)\ \vec{H} = \begin{pmatrix} xyz \\ z^2-x^2 \\ \sqrt{5z} \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot}\left(\vec{H}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{5z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(z^2-x^2\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(xyz\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{5z}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(z^2-x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xyz\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2z \\ xy \\ -2x-xz \end{pmatrix}$$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (13.4.1).

18.10.103 Lösungen zu Koordinatenwechseln

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (13.5.1).

18.10.104 Lösungen zum Satz von Gauß

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (13.6.1).

18.10.105 Lösungen zum Satz von Stokes

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (13.7.1).

18.10.106 Lösungen zum Standardabweichungen

Aufgabe 1:

$a)\ \bar{x} = 14,9\ ;\ \sigma \approx 2,470\ ;\ u \approx 0,781$

$b)\ \bar{x} \approx 23,077\ ;\ \sigma \approx 2,499\ ;\ u \approx 0,693$

$c)\ \bar{x} = 44,5\ ;\ \sigma \approx 4,056\ ;\ u \approx 1,171$

$d)\ \bar{x} \approx 5,688\ ;\ \sigma \approx 2,330\ ;\ u \approx 0,583$

$e)\ \bar{x} \approx 133,389\ ;\ \sigma \approx 26,315\ ;\ u \approx 6,203$

$f)\ \bar{x} \approx 247,286\ ;\ \sigma \approx 35,165\ ;\ u \approx 13,291$

$g)\ \bar{x} \approx 15,931\ ;\ \sigma \approx 2,298\ ;\ u \approx 0,427$

$h)\ \bar{x} \approx 58,630\ ;\ \sigma \approx 5,678\ ;\ u \approx 1,093$

$i)\ \bar{x} = 649\ ;\ \sigma \approx 84,581\ ;\ u \approx 34,530$

$j)\ \bar{x} \approx 74,786\ ;\ \sigma \approx 1,228\ ;\ u \approx 0,232$

$k)\ \bar{x} \approx 54,429\ ;\ \sigma \approx 4,164\ ;\ u \approx 1,113$

$l)\ \bar{x} \approx 1013,048\ ;\ \sigma \approx 78,407\ ;\ u \approx 17,110$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (14.1.1).

18.10.107 Lösungen zur linearen Regression

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (14.2.1).

18.10.108 Lösungen zur Fehlerfortpflanzung

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (14.3.1).

18.10.109 Lösungen zum Newton Verfahren

Aufgabe 1:

$a)\ \ x_{N_1} = 1\ \ ;\ \ x_{N_2} = 2\ \ ;\ \ x_{N_3} = 3\ \ ;\ \ x_{N_4} = 4\ \ ;\ \ x_{N_5} = 5$

$b)\ \ x_{N_1} = 1\ \ ;\ \ x_{N_2} = -1$

$c)\ \ x_{N_1} = -8\ \ ;\ \ x_{N_2} = -5\ \ ;\ \ x_{N_3} = 3$

$d)\ \ x_{N_1} = 2\ \ ;\ \ x_{N_2} = 3\ \ ;\ \ x_{N_3} = -3\ \ ;\ \ x_{N_4} = -2$

$e)\ \ x_{N_1} = -2\ \ ;\ \ x_{N_2} = -1\ \ ;\ \ x_{N_3} = 2$

$f)\ \ x_{N_1} = 1\ \ ;\ \ x_{N_2} = 2\ \ ;\ \ x_{N_3} = 3\ \ ;\ \ x_{N_4} = -1\ \ ;\ \ x_{N_5} = -2\ \ ;\ \ x_{N_6} = -3$

$g)\ \ x_{N_{1,2}} = -1 \pm \sqrt{7}\ \ ;\ \ x_{N_3} = 0$

$h)\ \ x_{N_1} = 1\ \ ;\ \ x_{N_2} \approx -1,55409$

$i)\ \ x_{N_{1,2}} = \pm\frac{\sqrt{3\left(\sqrt{5}+1\right)}}{2}$

$j)\ \ x_{N_1} = 0\ \ ;\ \ x_{N_2} \approx 2,44487$

$k)\ \ x_{N_1} = 0\ \ ;\ \ x_{N_2} = -1$

$l)\ \ x_{N_{1,2}} = \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}$

$m)\ \ x_{N_1} = 0\ \ ;\ \ x_{N_2} \approx -1,28705$

$n)\ \ x_{N_1} \approx -46,9555\ \ ;\ \ x_{N_2} \approx -1,10888\ \ ;\ \ x_{N_3} \approx 1,07166$

Aufgabe 2:

$a)$ $x_{E_1} \approx 2,26906$

$b)$ $x_{E_{1,2}} = \pm 9$; $x_{E_{3,4}} = \pm 5$

$c)$ $x_{E_{1,2}} = \pm 2$

$d)$ $x_{E_{1,2}} = \pm 4$; $x_{E_{3,4}} = \pm 8$; $x_{E_5} = 0$

$e)$ $x_{E_{1,2}} = \pm 1$; $x_{E_3} = 5$; $x_{E_4} = -3$; $x_{E_5} = 0$

$f)$ $x_{E_1} = -4$; $x_{E_2} = 6$; $x_{E_3} = 11$

$g)$ $x_{E_1} = 0$; $x_{E_2} \approx -0,470552$; $x_{E_3} \approx -0,185191$; $x_{E_4} \approx 0,655743$

$h)$ $x_{E_1} = 0$; $x_{E_2} \approx 1,08485$

$i)$ $x_{E_1} = 0$

$j)$ $x_{E_1} = 0$

$k)$ $x_{E_1} \approx -0,560426$; $x_{E_2} \approx 1,44403$

$l)$ $f(x) = x_{E_1} \approx -0,936992$; $x_{E_2} \approx 0,844197$

$m)$ $x_{E_1} \approx 0,436737$

$n)$ $x_{E_1} \approx 0,222482$; $x_{E_2} \approx 69,0807$

Aufgabe 3:

$a)$ $x_{W_1} = -3$; $x_{W_2} = 1$; $x_{W_3} = 2$

$b)$ $x_{W_{1,2}} = \pm 2$; $x_{W_{3,4}} = \pm 6$

$c)$ $x_{W_{1,2}} = \pm 6$; $x_{W_3} = 7$

$d)$ $x_{W_{1,2}} = \pm 1$; $x_{W_{3,4}} = \pm\frac{5}{2}$

$e)$ $x_{W_1} = 2$; $x_{W_2} = 3$; $x_{W_3} = 5$

$f)$ $x_{W_{1,2}} = \pm 2$; $x_{W_3} = 0$; $x_{W_4} = -17$

$g)$ $x_{W_1} = 0$

$h)$ $x_{W_1} \approx -0,163126$; $x_{W_2} \approx 0,632239$

$i)$ $x_{W_1} = 0$; $x_{W_2} \approx 0,090893$

$j)$ $x_{W_1} \approx -0,686038$; $x_{W_2} \approx 0,194299$

$k)$ $x_{W_1} \approx 0,042108$

$l)$ $x_{W_1} \approx 0,361975$

$m)$ $x_{W_1} \approx 0,41239$

$n)$ $x_{W_1} \approx 0,209693$; $x_{W_2} \approx 10,1423$

Aufgabe 4:

$a)$ $x_N = 25$ $b)$ $x_N = 83$ $c)$ $x_N = \frac{43}{4}$

$d)$ $x_N = 165$ $e)$ $x_N \approx 7,38849$ $f)$ $x_N \approx 2,66488$

Aufgabe 5:

$a)$ $x_E = -17$ $b)$ $x_E = -23$ $c)$ $x_E = -1$

$d)$ $x_E = -11$ $e)$ $x_E \approx 0,826876$ $f)$ $x_E = 6 - \sqrt{35}$

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (15.1.1).

18.10.110 Lösungen zu Regula-falsi-Verfahren

Zurück zu den Aufgaben durch folgenden Link: (15.2.1).

19 Glossar

Im Glossar können die wichtigsten mathematischen Begrifflichkeiten nachgeschlagen werden. Dabei gibt der Pfeil hinter einem Wort an, unter welchem Begriff mehr Informationen zu finden ist. Befindet sich kein Wort hinter dem Pfeil kann direkt das vorangegangene Wort gesucht werden.

Ableitung: Die Ableitung ist eine Funktion $f(x)$ auf die der Differentialoperator gewirkt hat und wird mit $f'(x)$ gekennzeichnet.
Abstand: Der Abstand ist die kürzeste Strecke ($\longrightarrow$) zwischen zwei Punkten ($\longrightarrow$) und ist immer positiv.
Abszisse: Die Abszisse ist im Koordinatensystem ($\longrightarrow$) die Achse auf der die Variablenwerte ($\longrightarrow$) zu finden sind.
Achsenabschnittsform: Eine Darstellungsform ($\longrightarrow$) von vektoriellen ($\longrightarrow$) Geraden ($\longrightarrow$) oder Ebenen ($\longrightarrow$).
Addition: Bei der Addition werden Summanden ($\longrightarrow$) zu einer Summe ($\longrightarrow$) zusammengezählt mit dem Operator + ($\longrightarrow$) .
Ähnlichkeit: Wenn zwei geometrische Objekte gegebenenfalls mit zentrische Streckungen ($\longrightarrow$) direkt übereinander geschobene werden können, wird von Kongruenz gesprochen. **Ankathete:** Die Ankathete ist die Kathete ($\longrightarrow$), die sich direkt am Winkel ($\longrightarrow$) eines rechtwinkligen Dreiecks ($\longrightarrow$) befindet.
Antiproportional: Ein direktes inverses ($\longrightarrow$) Verhältnis ($\longrightarrow$), welches graphisch als Hyperbel ($\longrightarrow$) dargestellt werden kann.
Algebra: Die Algebra ist ein großes Teilgebiet der Mathematik und beschäftigt sich im Wesentlich mit dem lösen von Gleichungen ($\longrightarrow$). Dazu bedient sie sich der Äquivalenzumformung ($\longrightarrow$) und den Eigenschaften von Operatoren ($\longrightarrow$) und Funktionen ($\longrightarrow$).
Alternierend: Abwechselnde Termausdrücke ($\longrightarrow$) von Subtraktion ($\longrightarrow$) und Addition ($\longrightarrow$) mit ähnlicher Struktur.
Analysis: Die Analysis bildet ein großes Teilgebiet der Mathematik und beschäftigt sich im Wesentlich mit den Eigenschaften von Funktionen ($\longrightarrow$).
Anzahl: Die Anzahl gibt in der Regel ein natürliches ($\longrightarrow$) Vielfaches ($\longrightarrow$) einer Größe ($\longrightarrow$) an.
Äquidistant: Gleichbleibender Abstand ($\longrightarrow$) wie beim Zahlenstrahl ($\longrightarrow$).
Äquivalenzumformung: Die Äquivalenzumformung ist die Methode der Algebra ($\longrightarrow$) um

Gleichungen ($\longrightarrow$) zu lösen, dabei bedient sie sich der Eigenschaften von Operatoren ($\longrightarrow$) und Funktionen ($\longrightarrow$).

Assoziativ: Rechnungen bei denen Klammern ($\longrightarrow$ Ausmultiplizieren) nach belieben setzen kann ohne das sich das sich das Ergebnis ändert sind assoziativ.

Ausklammern: Es ist möglich Klammern zusetzen, indem gleiche Vorfaktoren ($\longrightarrow$ Koeffizienten) von mehreren Summanden ($\longrightarrow$) als Faktor ($\longrightarrow$) vor einer Klammer ($\longrightarrow$ assoziativ) gesetzt werden.

Ausmultiplizieren: Klammern können ausmultipliziert werden, dabei wirkt der Faktor ($\longrightarrow$) außerhalb der Klammern auf jeden Summanden ($\longrightarrow$) in den Klammern ($\longrightarrow$ assoziativ).

Axiom: Legitime Behauptung, welche keinen Beweis ($\longrightarrow$) bedürfen, aber durch Empirik ($\longrightarrow$) bestätigt wurden.

Axiome von Kolomogov: Diese Axiome ($\longrightarrow$) bilden den Ausgangspunkt der Stochastik ($\longrightarrow$), da sie Zusammenhänge zwischen den Ereignismengen ($\longrightarrow$) aufstellen.

Basis: Wenn eine Term ($\longrightarrow$) mehrfach mit sich selbst multipliziert ($\longrightarrow$) wird, dann bildet der Term die Basis, während die Anzahl der Multiplikationen durch den Exponenten ($\longrightarrow$) beziehungsweise der Potenz ($\longrightarrow$) beschrieben wird.

Bayes'sche Regel: Gibt einen Zusammenhang zwischen den Teilwahrscheinlichkeiten mit der Gesamtwahrscheinlichkeit ($\longrightarrow$) eines Ereignis ($\longrightarrow$) an.

Behauptung: Auch Hypothese oder Vermutung genannt, ist ein Sachverhalt, der weder verifiziert ($\longrightarrow$) noch falsifiziert ($\longrightarrow$) ist.

Betrag: Der Betrag sorgt dafür, dass ein positives Ergebnis erzeugt wird.

Beweis: Erst nach einem Beweis erhalten Gleichungen ($\longrightarrow$) beziehungsweise Sachverhalte eine Gültigkeit.

-Direkter Beweis: Durch Äquivalenzumformung ($\longrightarrow$) wird die Richtigkeit der Gleichung gezeigt.

-Herleitung: Durch Äquivalenzumformung und Einsetzverfahren ($\longrightarrow$) wird die Richtigkeit der Gleichung gezeigt.

-Beweis durch Widerspruch: Ein Sachverhalt wird invertiert ($\longrightarrow$) und anschließend gezeigt, dass der invertierte Sachverhalt nicht stimmt.

-Vollständige Induktion: Beweis von Gleichungen mit Summen- ($\longrightarrow$) oder Produktcharakter ($\longrightarrow$), welcher nach klar geordneten Schritten durchgeführt wird.

Binomialkoeffizient: Die Binomialkoeffizienten sind eine verkürzte Schreibweise von Brüchen ($\longrightarrow$) aus Fakultäten ($\longrightarrow$).

Binär: Ein Zahlensystem ($\longrightarrow$), welches die Antworten „Ja“ und „Nein“ kennt - Vergleiche Dualsystem.

Bogenmaß: Das Bogenmaß hat die Einheit Radiant ($\longrightarrow$) und kann aus der Einheit Grad ($\longrightarrow$) bestimmt werden.

Bruch: Ein Bruch besteht aus einem Zähler ($\longrightarrow$) und einem Nenner ($\longrightarrow$) und kann in eine Dezimalzahl ($\longrightarrow$) umgewandelt werden.

Darstellung (Zahl): Eine Zahl ($\longrightarrow$) kann verschieden dargestellt werden, so ist zum Beispiel: $0,5 = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ ($\longrightarrow$ Bruch).
Definition: Die Definition bildet den Anfang jeglicher Mathematik, da sie die wichtigsten Regeln festlegt.
Definitionslücke: Wenn eine Funktion ($\longrightarrow$) an einem Punkt ($\longrightarrow$) nicht definiert ($\longrightarrow$) ist und es sich dabei nicht um eine Polstelle ($\longrightarrow$) handelt, wird dies Definitionslücke genannt. Sie treten oftmals bei unecht gebrochen rationalen Funktionen auf.
Definitionsmenge: Die Definitionsmenge gibt an für welche Werte einer Variablen ($\longrightarrow$) die Gleichung ($\longrightarrow$) oder Funktion ($\longrightarrow$) berechenbar ist.
Determinante: Die Determinante ist ein spezifisches Skalar ($\longrightarrow$), welches zu einer $n \times n$-Matrix ($\longrightarrow$) gehört.
Dezimalzahlen: Ein Bruch ($\longrightarrow$) kann in eine Dezimalzahl umgewandelt werden. Dabei handelt es sich um eine andere Darstellung ($\longrightarrow$).
Diagonale: Diagonalen sind Strecken ($\longrightarrow$) zwischen gegenüberliegenden Eckpunkten ($\longrightarrow$) bei einem geometrischen Körper ($\longrightarrow$ Geometrie).
Diagonalgestalt: Gibt die Eigenschaften einer Matrix ($\longrightarrow$) nur durch ihre diagonalen Einträge ($\longrightarrow$) wieder.
Diagramm: Darstellung von Häufigkeiten ($\longrightarrow$) oder Funktionen ($\longrightarrow$) in Koordinatensystemen ($\longrightarrow$).

-Balken: Die Darstellung der Häufigkeit zur Seite.

-Säulen: Die Darstellung der Häufigkeit nach Oben.

-Histogramm: Darstellung der Häufigkeit nach Oben ohne Freiräume zwischen den Möglichkeiten und äquidistanter ($\longrightarrow$) Einteilung.

-Kreis: Prozentuelle ($\longrightarrow$) Darstellung von Häufigkeiten.

Differentialoperator: Der Differentialoperator wirkt nur nach rechts und kommt in zwei Formen ($\longrightarrow$ Differentiation) vor. Um mit ihm zu rechnen wird der Kommutator ($\longrightarrow$) benutzt. Wirkt ein Differentialoperator auf eine Funktion ($\longrightarrow$) wird die Ableitung ($\longrightarrow$) gebildet. Die Differentialoperatoren nehmen einen großen Teil der Analysis ($\longrightarrow$) ein.
Differentialquotient: Ein unendlich kleiner Differenzenquotient ($\longrightarrow$), welcher als momentane Steigung ($\longrightarrow$) einer Funktion ($\longrightarrow$) interpretiert wird und somit auf die Steigung einer Tangente ($\longrightarrow$) verweist.
Differentiation (partiell): Bei der partiellen Differentiation werden Unterabhängigkeiten nicht berücksichtigt. Der Differentialoperator ($\longrightarrow$) hat die Form $\frac{\partial}{\partial x}$.
Differentiation (total): Bei der totalen Differentiation werden Unterabhängigkeiten berücksichtigt. Der Differentialoperator ($\longrightarrow$) hat die Form $\frac{d}{dx}$.
Differenz: Die Differenz ist das Ergebnis einer Subtraktion ($\longrightarrow$).
Differenz (Mengen): Der Mengenoperator ($\longrightarrow$) Differenz wird auch als „Eine Menge ($\longrightarrow$) *ohne* einer anderen Menge “ gelesen.
Differenzenquotient: Ein Quotient ($\longrightarrow$) mit jeweils einer Differenz ($\longrightarrow$) im Zähler ($\longrightarrow$)

und Nenner (⟶), welcher das Steigungsdreieck (⟶) darstellbar ist.
Dimension: Die Anzahl von Dimensionen gibt die Ausbreitung von Objekten an und ist ein zentraler Begriff der Geometrie (⟶).
Diskret: Wenn ein Abstand (⟶) zwischen zwei direkt benachbarten Werten (⟶) existiert, wird von diskreten Werten gesprochen.
Distributivgesetz: Das Distributivgesetz beschreibt eine Rechenvorschrift für die Multiplikation (⟶) bei der mindestens ein Faktor (⟶) mittels Klammern (⟶) auf Summanden (⟶) besteht.
Division: Bei der Division wird eine Zahl (⟶) oder ein Term (⟶) (⟶ Dividend) durch eine andere Zahl oder einen anderen Term (⟶ Divisor) geteilt und bilden den Quotienten (⟶).
Divisor: Der Divisor ist eine Zahl (⟶) oder ein Term (⟶) durch den geteilt wird. Bei Brüchen (⟶) wird der Divisor auch Nenner (⟶) genannt.
Dividend: Der Dividend ist eine Zahl (⟶) oder ein Term (⟶) der geteilt durch den Divisor (⟶) wird. Bei Brüchen (⟶) wird der Divisor auch Nenner (⟶) genannt.
Drachen: Der Drachen ist ein spezielles Viereck (⟶ Rechteck), dass zwei gegenüberliegende gleich große Winkel (⟶) besitzt. Die Schenkel (⟶) der anderen Winkel sind jeweils gleichlang.
Dreieck: Ein Dreieck besteht aus drei Ecken (⟶) und drei Seiten (⟶). Es besitzt eine Winkelsumme (⟶) von 180 Grad (⟶).

-rechtwinkliges: Beim rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel ein rechter Winkel (⟶). Die gegenüberliegende Seite (⟶) wird Hypotenuse (⟶) genannt.

-gleichschenkliges: Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Winkel (⟶) gleich groß und zwei Seiten (⟶) gleich lang.

-gleichseitiges: Bei einem gleichseitigen Dreieck besitzen alle Winkel (⟶) 60 Grad (⟶) und alle Seiten (⟶) sind gleich lang.

Dreisatz: Der Dreisatz wird benutzt um Prozentanteile (⟶) einer Zahl (⟶) zu bestimmen.
Drehung: Ein geometrisches Objekt wird um einen Punkt (⟶) herum gedreht.
Durchmesser: Der Durchmesser ist die Strecke (⟶) von einem Punkt (⟶) am Kreisbogen (⟶) durch den Mittelpunkt (⟶) bis zum gegenüberliegenden Punkt auf dem Kreisbogen. Dabei ist der Durchmesser doppelt so groß wie der Radius (⟶).
Durchschnitt: Der Mengenoperator (⟶) Durchschnitt bestimmt die Zahlen (⟶), welche sich sowohl in einer Menge (⟶) als auch in einer anderen Menge befinden.

Ebene: Eine Ebene ist ein Objekt in zwei Dimensionen (⟶), welches nicht begrenzt ist.
Ecke: An einer Ecke treffen sich zwei Strecken (⟶) in einem Punkt (⟶), sodass sie einen Winkel (⟶) ungleich von 180 Grad (⟶) zu einander haben.
Eindeutigkeit: Eindeutigkeit ist die Forderung, dass zu jedem Variablenwert (⟶) nur ein Funktionswert (⟶) existiert. Erst wenn eine Funktion (⟶) eindeutig ist, ist sie auch tatsächlich eine Funktion.

Einheit: Die Einheit gibt einer Größe (⟶) einen Bezug zu anderen Größen. Somit wird einer Topologie (⟶) eine bestimmte, streng definierte Metrik (⟶) gegeben.
Einheitskreis: Der Einheitskreis ist ein Kreis (⟶) mit Radius (⟶) $r = 1$.
Einheitsvektor: Ein normierter (⟶) Vektor (⟶).
Einsetzungsverfahren: Um Gleichungen (⟶) nutzen zu können, müssen Werte oder Terme (⟶) in sie eingesetzt werden. Dies wird das Einsetzungsverfahren genannt.
Eintrag: Algebraische (⟶) Ausdrücke in einem Vektor (⟶), einer Matrix (⟶) oder einem Tensor (⟶).
Element: Befindet sich eine Zahl (⟶) in einer Menge (⟶), dann ist sie Element der Menge.
Ellipse: Die Ellipse ist ein Kreis (⟶), der nicht immer den gleichen Radius (⟶) besitzt. Dabei ist die Ellipse immer symmetrisch (⟶) bezüglich zwei Achsen (⟶).
Empirik: Das Bestätigen von Behauptungen (⟶) durch Experimente.
Euler'sche Zahl: $e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots$
Euler'sche Gerade: Auf der Euler'schen Geraden (⟶ Gerade) liegen die Schnittpunkte (⟶) der Höhen (⟶), der Mittelsenkrechten (⟶) und der Seitenhalbierenden (⟶) mit einem Abstandsverhältnis (⟶) von eins zu zwei.
Ereignis: Bei einer Wahrscheinlichkeitsrechnung (⟶) aufkommendes Ergebnis.
Ergebnis: Die gesuchte Zahl beziehungsweise der gesuchte Ausdruck.
Erweitern: Brüche (⟶) können durch Erweitern in eine andere Darstellung (⟶) überführt werden, sodass mit ihr die Addition (⟶) oder Subtraktion (⟶) leichter durchgeführt werden können.
Erwartungswert: Der Wert (⟶) eines Experiments, der am häufigsten vorkommt und somit das Maximum (⟶) der Verteilung (⟶) darstellt.
Exponent: Ein Exponent gibt an wie oft eine Basis (⟶) mit sich selbst multipliziert (⟶) wird.
Exponentialfunktion: Bei der Exponentialfunktion steht im Exponenten (⟶) die Variable (⟶). Die bedeutendste Funktion (⟶) dieser Art hat die Euler'sche Zahl (⟶) zur Basis (⟶).
Extremstelle: Extremstellen einer Funktion (⟶) sind Minimum (⟶) oder Maximum (⟶) und besitzen eine Tangente mit der Steigung (⟶) gleich Null.

Faktor: Bei der Multiplikation (⟶) werden Faktoren miteinander verrechnet.
Fakultät: Die Fakultät ist eine Abkürzung einer Kette von Multiplikationen (⟶), wobei zum Beispiel $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ ist und per Definition (⟶) $0! := 1$ gilt.
Fehler: Die Berechnung eines Fehlers kann über eine Unsicherheit (⟶) Aussage über einen Behauptung machen.

-1. Art: Gibt die Wahrscheinlichkeit (⟶) an, eine richtige Hypothese (⟶) fälschlicherweise zu verwerfen.

-2. Art: Gibt die Wahrscheinlichkeit (⟶) an, eine falsche Hypothese (⟶) fälschlicherweise als bestätigt einzusortieren.

-stochastisch: Unsicherheit ($\longrightarrow$) aufgrund von Standardabweichungen ($\longrightarrow$).

-systematisch: Unsicherheit ($\longrightarrow$) aufgrund von verfälschter Datenerhebung.

Fehlerfortpflanzung: Beschreibt die Vererbung eines Fehlers ($\longrightarrow$) bei weiterführenden Rechnungen.

Fläche: Eine Fläche ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt welches einen Rand ($\longrightarrow$) besitzt.

Flächeninhalt: Der Flächeninhalt gibt an wie viele Quadratmeter ($\longrightarrow$) in eine Fläche ($\longrightarrow$) passen.

Funktion: Eine Funktion bildet eine Zahl ($\longrightarrow$) auf eine andere Zahl ab und muss dabei eindeutig ($\longrightarrow$) sein. Sie besitzen immer eine Definitions- ($\longrightarrow$) und Wertemenge ($\longrightarrow$).

-echt gebrochen rational: Diese Funktionen besitzen in der Regel Polstellen ($\longrightarrow$), da sie für einige Zahlen ($\longrightarrow$) nicht definiert ($\longrightarrow$) sind. Zur Überprüfung dient die Polynomdivision ($\longrightarrow$).

-unecht gebrochen rational: Diese Funktionen besitzen in der Regel Definitionslücken ($\longrightarrow$), da sie nur aufgrund ihrer Darstellung ($\longrightarrow$) für einige Zahlen ($\longrightarrow$) nicht definiert ($\longrightarrow$) sind. Zur Überprüfung dient die Polynomdivision ($\longrightarrow$).

Funktionsschar: Eine Funktion ($\longrightarrow$) mit einem unbestimmten Parameter ($\longrightarrow$).

Funktionswert: Der Funktionswert ist das Ergebnis nachdem ein Variablenwert ($\longrightarrow$) in die Funktionsgleichung ($\longrightarrow$) eingesetzt ($\longrightarrow$) wurde.

Ganze Zahlen: Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist die Zahlenmenge ($\longrightarrow$) aller negativer Zahlen ($\longrightarrow$). Die natürlichen Zahlen ($\longrightarrow$) bilden dabei eine Teilmenge ($\longrightarrow$) der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.

Gegenkathete: Die Gegenkathete ist die Kathete ($\longrightarrow$), die sich gegenüber des betrachteten Winkel ($\longrightarrow$) eines rechtwinkligen Dreiecks ($\longrightarrow$) befindet.

Geometrie: Die Geometrie beschäftigt sich mit Formen wie Rechtecke ($\longrightarrow$), Kreisen ($\longrightarrow$), Quadern ($\longrightarrow$), Pyramiden ($\longrightarrow$), Zylindern ($\longrightarrow$) und vielem mehr. Dabei sind je nach Anzahl der Dimensionen ($\longrightarrow$) die gefragten Größen ($\longrightarrow$): Winkel ($\longrightarrow$), Streckenlänge ($\longrightarrow$), Umfang ($\longrightarrow$), Flächeninhalt ($\longrightarrow$), Oberfläche ($\longrightarrow$) oder Volumen ($\longrightarrow$).

Gerade: Eine Gerade ($\longrightarrow$) ist eine Funktion ($\longrightarrow$) erster Ordnung ($\longrightarrow$) und besitzt keinen Anfang und kein Ende. Sie wird beschreiben durch die Steigung ($\longrightarrow$) und dem Ordinatenschnittpunkt ($\longrightarrow$).

Gleichung: Eine Gleichung stellt einen Bezug zwischen Zahlen ($\longrightarrow$), Parametern ($\longrightarrow$), Variablen ($\longrightarrow$) und Funktionen ($\longrightarrow$) auf.

Gleichungssytem: Mehrere Gleichungen ($\longrightarrow$), die mit einander in Verbindung stehen.

-unterbestimmt: Es existieren weniger Gleichungen als Unbekannte ($\longrightarrow$).

-überbestimmt: Es existieren mehr Gleichungen als Unbekannte ($\longrightarrow$).

Grad: Grad ist die Einheit von Winkeln ($\longrightarrow$). Dabei hat ein Kreis ($\longrightarrow$) 360°.

Graph: Ein Graph ist die graphische Veranschaulichung einer Funktion ($\longrightarrow$) in einem Koordinatensystem ($\longrightarrow$).

Grenzen: Grenzen geben zum Beispiel die Größe eines Intervalls ($\longrightarrow$) oder den Bereich eines

Integrals ($\longrightarrow$) an.

-exklusiv: Die angegebene Zahl gehört nicht mehr mit zum angegebenen Intervall.

-inklusiv: Die angegebene Zahl gehört noch mit zum angegebenen Intervall.

Grenzwerte: Grenzwerte beschreiben ein Verhalten eines Terms ($\longrightarrow$) oder einer Funktion ($\longrightarrow$) in der Nähe von Definitionslücken ($\longrightarrow$), Polstellen ($\longrightarrow$) oder besonders hohen oder niedrigen Zahlen ($\longrightarrow$).

Größe: Eine Größe kann ein Parameter ($\longrightarrow$) oder eine Variable ($\longrightarrow$) sein.

Grundfläche: Bei geometrischen ($\longrightarrow$) Objekten in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) bildet die Grundfläche ($\longrightarrow$ Flächeninhalt) mit der Höhe ($\longrightarrow$) eine Beziehung zum Volumen ($\longrightarrow$).

Grundseite: Bei geometrischen ($\longrightarrow$) Objekten in zwei Dimensionen ($\longrightarrow$) bildet die Grundseite ($\longrightarrow$ Seite) mit der Höhe ($\longrightarrow$) eine Beziehung zum Flächeninhalt ($\longrightarrow$).

Grundwert: (im Bezug zu Geld oft auch Kapital genannt) Die Ausgangssituation einer sich verändernden Situation (oft Prozentaufgaben ($\longrightarrow$)).

Halbgerade: Eine Halbgrade besitzt einen Anfang aber kein Ende.

Häufigkeit: Gibt die Anzahl ($\longrightarrow$) einer Möglichkeit an.

Hesse'sche Normalform: Eine Darstellungsform ($\longrightarrow$) von vektoriellen ($\longrightarrow$) Geraden ($\longrightarrow$) oder Ebenen ($\longrightarrow$).

Höhe: Die Höhe spielt in der Geometrie ($\longrightarrow$) eine besonders bedeutende Rolle, da je nach Anzahl der Dimensionen ($\longrightarrow$), sie einen Bezug zu den gesuchten Größen ($\longrightarrow$) darstellt.

Höhensatz von Euklid: Der Höhensatz von Euklid beschreibt einen Zusammenhang zwischen der Höhe ($\longrightarrow$) eines rechtwinkligen Dreiecks ($\longrightarrow$) und der unterteilten Hypotenuse $c = p + q$ ($\longrightarrow$). Hierbei gilt $h^2 = qp$.

Hyperbel: Die Hyperbel ist eine Funktion ($\longrightarrow$) bei der sich die Variable ($\longrightarrow$) im Nenner ($\longrightarrow$) befindet. Sie besitzt eine Polstelle ($\longrightarrow$).

Hypotenuse: Die Hypotenuse ist die längste Seite ($\longrightarrow$) eines rechtwinkligen Dreiecks ($\longrightarrow$) und liegt gegenüber vom rechten Winkel ($\longrightarrow$).

Hypothese: Auch Behauptung oder Vermutung genannt, ist ein Sachverhalt, der weder verifiziert ($\longrightarrow$) noch falsifiziert ($\longrightarrow$) ist.

Identität: Beschreibt eine Äquivalenz ($\longrightarrow$) von zwei Ausdrücken.

Imaginärteil: Teil einer komplexen Zahl ($\longrightarrow$) mit dem Vorfaktor ($\longrightarrow$) $i = \sqrt{-1}$.

Index: Ein Index gibt zusätzliche Informationen bei einen Parameter ($\longrightarrow$), einer Variable ($\longrightarrow$) oder einer Funktion ($\longrightarrow$) an. In der Regel hat dieser keinen Einfluss auf Rechnungen.

Infimum: Unterste Schranke einer Zahlenmenge ($\longrightarrow$).

Innenkreis: Der Innenkreis ist ein Kreis ($\longrightarrow$) der alle Seiten eines Dreiecks ($\longrightarrow$) tangiert ($\longrightarrow$) und den Schnittpunkt ($\longrightarrow$) der Winkelhalbierenden ($\longrightarrow$) als Mittelpunkt ($\longrightarrow$) besitzt.

Integral: Das Integral bildet den Operator ($\longrightarrow$), um die Stammfunktion ($\longrightarrow$) einer Funktion ($\longrightarrow$) zu bestimmen. Mit der Stammfunktion kann der Flächeninhalt ($\longrightarrow$) unter einem Graphen ($\longrightarrow$) bestimmt werden.

Integration: Die Integration wir durch das Integral ($\longrightarrow$) beschrieben und nimmt einen großen Teil der Analysis ($\longrightarrow$) ein.

-partielle: Die partielle Integration wird verwendet, wenn die Stammfunktion ($\longrightarrow$) von einem Produkt ($\longrightarrow$) von Funktionen ($\longrightarrow$) gesucht wird.

-durch Substitution: Die Integration durch Substitution ($\longrightarrow$) wird verwendet, wenn die Stammfunktion ($\longrightarrow$) von verketteten ($\longrightarrow$ Kettenregel) Funktionen ($\longrightarrow$) gesucht wird.

Intervall: Ein Intervall beherbergt eine Menge ($\longrightarrow$) von Zahlen ($\longrightarrow$). Dabei gibt es verschiedene Arten von Grenzen ($\longrightarrow$), sodass die Grenzen zur Menge gehören (inklusive) oder gegebenenfalls nicht (exklusiv).

Invertierung: Bei einer Invertierung handelt es sich um eine Umkehrung und kann bei allen Objekten durchgeführt werden.

Iterativ: Ein iteratives Verfahren ist eine schrittweise Annäherung an das richtige Ergebnis und wird oftmals bei besonders komplexen Rechnungen zur Vereinfachung benutzt ($\longrightarrow$ Reihen).

Kanten: Als Kanten werden bei geometrischen ($\longrightarrow$) Objekten in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) die Strecken ($\longrightarrow$) zwischen Eckpunkten ($\longrightarrow$) bezeichnet.

Kathete: In einem rechtwinkligen Dreieck ($\longrightarrow$) heißen die Schenkel ($\longrightarrow$) vom rechten Winkel ($\longrightarrow$) Katheten .

Kathetensatz: Bei einem rechtwinkligen Dreieck ($\longrightarrow$) gilt, dass die Hypotenuse ($\longrightarrow$) multipliziert ($\longrightarrow$) mit einem durch die Höhe ($\longrightarrow$) geteilten Teilstück der Hypotenuse gleich der gegenüberliegenden Kathetenlänge ($\longrightarrow$) zum Quadrat ist.

Kegel: Der Kegel besitzt einen Kreis ($\longrightarrow$) als Grundfläche ($\longrightarrow$) und läuft in einem Punkt ($\longrightarrow$) in einer bestimmten Höhe ($\longrightarrow$) zusammen. Ein Kegel besitzt eine Kante ($\longrightarrow$) und einen Eckpunkt ($\longrightarrow$).

Kegelstumpf: Ein Kegelstumpf besitzt einen Kreis ($\longrightarrow$) als Grundfläche ($\longrightarrow$) und einen gegenüberliegenden kleineren Kreis sowie eine Höhe ($\longrightarrow$). Dies sieht so aus als ob von einem großen Kegel ($\longrightarrow$) die Spitze abgetrennt wurde.

Kehrwert: Bei der Bildung des Kehrwerts in der Bruchrechnung ($\longrightarrow$) werden Nenner ($\longrightarrow$) und Zähler ($\longrightarrow$) vertauscht.

Kettenregel: Bei der Kettenregel werden Funktionen ($\longrightarrow$), in denen sich wiederum Funktionen befinden abgeleitet ($\longrightarrow$).

Klammern: Klammern können je nach Bedeutung unterschiedliche Aussagen besitzen, wie zum Beispiel der Kommutator ($\longrightarrow$) oder Zahlenmengen ($\longrightarrow$). Im algebraischen ($\longrightarrow$) Bereich werden Klammern in der Regel für Distributiv- ($\longrightarrow$) und Assoziativgesetzanwendungen ($\longrightarrow$) verwendet.

Koeffizient: Koeffizienten sind Parameter ($\longrightarrow$) oder Zahlen ($\longrightarrow$) die an einer Variable ($\longrightarrow$) multipliziert ($\longrightarrow$) sind.

Komplexe Zahlen: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden die letzte Erweiterung der Zahlenmengen ($\longrightarrow$) durch die Zahl ($\longrightarrow$) $i = \sqrt{-1}$ und spannen dabei einen Zahlenstrahl ($\longrightarrow$) auf der orthogonal (⟶) zu den reellen Zahlen (⟶) steht. Eine komplexe Zahl besitzt einen Real- (⟶) und einen Imginärteil (⟶).

Kommandostrich: Der Kommandostrich befindet sich hinter einer Gleichung (⟶), die mittels Äquivalenzumformung (⟶) algebraisch (⟶) verändert wird. Dabei wird hinter dem Kommandostrich stets der nächste Rechenschritt angegeben.

Kommutativ: Als kommutativ werden alle Rechnungen bezeichnet, bei denen die Reihenfolge vor oder hinter dem Operator (⟶), das Ergebnis nicht verändert. Dies kann über den Kommutator (⟶) bestimmt werden.

Kommutator: Der Kommutator dient zur Überprüfung des Kommutativgesetzes (⟶). Dabei wird der zu überprüfende Operator (⟶) anstelle des Kommas des Kommutators $[a, b]$ geschrieben. Dabei gilt zum Beispiel für die Multiplikation (⟶) $[a.b] = a \cdot b - b \cdot a$.

Kongruenz: Wenn zwei geometrische Objekte ohne zentrische Streckungen (⟶) direkt übereinander geschobene werden können, wird von Kongruenz gesprochen.

Konjugation: Invertierung (⟶) des Vorzeichen (⟶) des Imaginärteils (⟶) einer komplexen Zahl (⟶).

Kontingenzstafel: Ein tabellarisches Verfahren, um eine Wahrscheinlichkeit (⟶) aus mit einander in verbindungstehenden Aussagen, die verschiedene Fallunterscheidungen besitzen, zu berechnen. Dabei bildet die Vierfeldertafel (⟶) den einfachsten Spezialfall.

Kontinuität: Wenn im Grenzwert (⟶) kein Abstand (⟶) zwischen zwei direkt benachbarten Werten (⟶) existiert, wird von kontinuierlichen Werten gesprochen.

Koordinatenform: Eine Darstellungsform (⟶) von vektoriellen (⟶) Geraden (⟶) oder Ebenen (⟶).

Koordinatensystem: Im Koordinatensystem können Punkt (⟶) und Graphen (⟶) eingetragen werden. Es besteht aus der Ordinate (⟶) und der Abszisse (⟶).

Kosinus: Der Kosinus ist eine trigonometrische (⟶) Funktion (⟶), die einen verschobenen Sinus (⟶) darstellt.

Kotangens: Der Kotangens ist der Kehrwert (⟶) vom Tangens (⟶).

Konvergenz: Wenn eine Reihe (⟶) oder Folge (⟶) im Grenzwert (⟶) gegen einen bestimmten Wert (⟶) (nicht unendlich), dann wird von Konvergenz gesprochen.

Kreis: Ein Kreis ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶), das durch die Kreiszahl (⟶) beschrieben wird.

Kreisabschnitt: Der Kreisabschnitt ist ein Kreisstück (⟶), dass durch eine Sekante (⟶) abgeschnitten wurde.

Kreisausschnitt: Der Kreisausschnitt ist ein Bruchteil (⟶) eines Kreises (⟶).

Kreisbogen: Der Kreisbogen ist ein Teil des Umfangs (⟶) des Kreises (⟶).

Kreiszahl: $\pi = 3,14159265359...$

Kreuzprodukt: Die Multiplikation (⟶) zwischen zwei Vektoren (⟶), welches als Produkt (⟶) wieder ein Vektor ergibt, der orthogonal (⟶) zu den beiden Vektoren ist, wird Kreuzprodukt $\times$ genannt.

Krümmung: Gibt die Form eines Objektes an (zum Beispiel einer Funktion (⟶)).

-konvex: Beispiel: Die Steigung($\longrightarrow$) der Funktion nimmt kontinuierlich zu.

-konkav: Beispiel: Die Steigung der Funktion nimmt kontinuierlich ab.

Kubisch: Als kubisch werden Größen ($\longrightarrow$) und Objekte in drei Dimensionen ($\longrightarrow$), wie der Würfel ($\longrightarrow$), bezeichnet.

Kugel: Die Kugel ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$), dass radialsymmetrisch ($\longrightarrow$) mit einem Radius ($\longrightarrow$) ist. Eine Kugel besitzt keine Kanten ($\longrightarrow$) oder Ecken ($\longrightarrow$).

Kugelabschnitt: Der Kugelabschnitt ist ein Teilstück der Kugel ($\longrightarrow$), dass durch eine Ebene ($\longrightarrow$) abgeschnitten wurde.

Kugelausschnitt: Der Kugelausschnitt ist im Wesentlichen ein Bruchteil ($\longrightarrow$) einer Kugel ($\longrightarrow$).

Kürzen: Brüche ($\longrightarrow$) können oftmals gekürzt werden, was bedeutet, dass der Zähler ($\longrightarrow$) und der Nenner ($\longrightarrow$) durch etwas gleiches dividierbar ($\longrightarrow$) sind.

Länge: Gibt in Einheiten ($\longrightarrow$) die Ausdehnung eines Objektes an. Bei Vektoren ($\longrightarrow$) gleichzusetzen mit dem Betrag ($\longrightarrow$).

Laplace-Entwicklungssatz: Ist ein Verfahren zur Bestimmung der Determinante ($\longrightarrow$).

Laplace-Experiment: Wenn in einem Experiment alle Ereignisse ($\longrightarrow$) die gleiche Wahrscheinlichkeit ($\longrightarrow$) besitzen, dann wird von einem Laplace-Experiment gesprochen.

Leibnizregel: siehe Produktregel ($\longrightarrow$).

Lemma: Ein Beweis ($\longrightarrow$), der jedoch nur in dem engen Rahmen Gültigkeit besitzt, schwächer als ein Satz ($\longrightarrow$) und Theorem ($\longrightarrow$).

Linearkombination: Bilden zwei Vektoren ($\longrightarrow$) einen dritten Vektor, ist dieser eine Linearkombination der beiden Vektoren.

Linear unabhängig: Wenn Vektoren ($\longrightarrow$) orthogonal ($\longrightarrow$) zu einander stehen, können diese nicht aufeinander projektiert ($\longrightarrow$) werden, dann sind diese Vektoren linear unabhängig.

Logarithmus: Der Logarithmus wird benutzt um nach einem Exponenten ($\longrightarrow$) bei der Äquivalenzumformung ($\longrightarrow$) aufzulösen. Er bildet die Umkehrfunktion ($\longrightarrow$) zur Exponentialfunktion ($\longrightarrow$).

Lotfußpunkt: Der Punkt ($\longrightarrow$) auf einer Geraden ($\longrightarrow$) oder Ebene ($\longrightarrow$), um den Abstand ($\longrightarrow$) zu einem Punkt, einer Geraden oder einer Ebene zu bestimmen.

Mantelfläche: Die Mantelfläche ist die Oberfläche ($\longrightarrow$) ohne die Grund- und Deckelfläche ($\longrightarrow$).

Maßstab: Ein Verhältnis ($\longrightarrow$) von einheitenbehafteten ($\longrightarrow$) Größen ($\longrightarrow$).

Matrix: Ein $n \times m$-Tensor ($\longrightarrow$), der eine rechteckige Anordnung von Einträgen ($\longrightarrow$) besitzt.

Maximum: Ein Maximum ist ein Punkt ($\longrightarrow$) einer Funktion ($\longrightarrow$) mit einer Tangente ($\longrightarrow$) mit der Steigung ($\longrightarrow$) gleich Null. Wobei sich der Graph ($\longrightarrow$) stets unterhalb der Tangente befindet.

Mengen: Mengen sind zusammengefasste Zahlen ($\longrightarrow$). Wenn alle Zahlen einer Art in einer

Menge vorhanden sind, ist die Rede von Zahlenmengen ($\longrightarrow$).
Mengenoperatoren: Mengenoperatoren ermöglichen das Rechnen mit Mengen ($\longrightarrow$). Siehe dazu Differenz ($\longrightarrow$), Durchschnitt ($\longrightarrow$) und Vereinigung ($\longrightarrow$).
Metrik: Eine Unterteilung in Einheiten ($\longrightarrow$).
Minimum: Ein Minimum ist ein Punkt ($\longrightarrow$) einer Funktion ($\longrightarrow$) mit einer Tangente ($\longrightarrow$) mit der Steigung ($\longrightarrow$) gleich Null. Wobei sich der Graph ($\longrightarrow$) stets oberhalb der Tangente befindet.
Minuend: Der Minuend ist bei der Subtraktion ($\longrightarrow$) der Term ($\longrightarrow$) von dem der Subtrahend ($\longrightarrow$) abgezogen wird.
Mittelsenkrechte: Die Mittelsenkrechte ist eine Gerade ($\longrightarrow$), die orthogonal ($\longrightarrow$) zur betrachten Seite ($\longrightarrow$) ist. Dabei ist der Schnittpunkt ($\longrightarrow$) der Seite und der Geraden direkt in der Mitte der Strecke.
Mittelwert: Der Mittelwert kann gebildet werden, indem alle Zahlen ($\longrightarrow$) aufaddiert ($\longrightarrow$) und durch die Anzahl der Zahlen dividiert ($\longrightarrow$) werden.
Multiplikation: Bei der Multiplikation werden Faktoren ($\longrightarrow$) miteinander verrechnet und bilden das Produkt ($\longrightarrow$).

Natürliche Zahlen: Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bilden eine Zahlenmenge ($\longrightarrow$) mit den Zahlen ($\longrightarrow$) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
Näherungsverfahren: Ein Verfahren um Ergebnisse ($\longrightarrow$) von schwer bestimmbaren Sachverhalten zu ermitteln.
-Newton: Ein iteratives ($\longrightarrow$) Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen ($\longrightarrow$).
-Regula-Falsi: Ein iteratives ($\longrightarrow$) Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen ($\longrightarrow$).
Nenner: Der Nenner ist bei der Bruchrechnung ($\longrightarrow$) der Divisor.
Netz: Ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) kann aufgeklappt werden, sodass die Flächen ($\longrightarrow$) nebeneinander liegen. Dieses neue zweidimensionale Objekt aus Flächen wird Netz genannt.
Neutrales Element: Als neutrales Element werden Zahlen ($\longrightarrow$) bezeichnet, die bei einer Operation ($\longrightarrow$) das Ergebnis nicht verändern. Die Null ist das neutrale Element der Addition ($\longrightarrow$) und die Eins das neutrale Element der Multiplikation ($\longrightarrow$).
Norm: Eine Normierung behält die Eigenschaften des Objekt (zum Beispiel Vektor ($\longrightarrow$)), reduziert jedoch den Betrag ($\longrightarrow$) auf 1.
Normalform: Eine Darstellungsform ($\longrightarrow$) von vektoriellen ($\longrightarrow$) Geraden ($\longrightarrow$) oder Ebenen ($\longrightarrow$).
Nullstellen: Als Nullstellen werden die Punkte ($\longrightarrow$) bezeichnet, in denen der Graph ($\longrightarrow$) die Abszisse ($\longrightarrow$) schneidet.

Oberfläche: Alle Flächen ($\longrightarrow$) eines Netzes ($\longrightarrow$) aufaddiert ($\longrightarrow$) heißen zusammen Oberfläche.

Obersumme: Der Flächeninhalt (⟶) der durch eine Funktion (⟶) und der Abszisse (⟶) eingeschlossen wird, der durch eine Summe (⟶) von Rechtecken (⟶), die über die Funktion hinausragen wird Obersumme genannt.
Offset: siehe Ordinatenschnittpunkt (⟶).
Operation: Als Operation wird eine Rechnung bezeichnet, die durchgeführt wird.
Operator: Der Operator gibt eine Anweisung für eine Operation (⟶).
Ordinate: Die Ordinate ist der Zahlenstrahl (⟶) im Koordinatensystem (⟶), der sich orthogonal (⟶) zur Abszisse (⟶) befindet. Auf ihm sind die Funktionswerte (⟶) zu finden.
Ordinatenschnittpunkt: Der Ordinatenschnittpunkt ist der Punkt, an dem sich Graph (⟶) und Ordinate (⟶) schneiden.
Ordnung: Die Ordnung eines Polynoms (⟶) oder einer Funktion (⟶) ist gegeben durch die höchste Potenz (⟶) einer Variable (⟶).
Orthogonalität: Haben zwei Strecken (⟶), Halbgeraden (⟶), Geraden (⟶) oder sonstige Objekte einen rechten Winkel (⟶) zu einander, dann wird von Orthogonalität gesprochen.
Orthonormal: Orthogonal (⟶) und normiert (⟶).
Ortskurve: Ist eine Funktion (⟶), die die Position von speziellen Punkten (⟶) einer Funktionsschar (⟶) an, wenn von dieser der Parameter (⟶) variiert wird.
Ortsvektor: Ein Vektor (⟶) der einen Punkt (⟶) beschreibt.

Parabel: Die Parabel ist eine Funktion (⟶) zweiter Ordnung (⟶). Sie besitzt einen Scheitelpunkt (⟶), der gleichzeitig ein Extrempunkt (⟶) ist. Sie wird außerdem noch beschrieben durch den Ordinatenschnittpunkt (⟶) und der Stauchung (⟶).
Parallelität: Wenn zeig Strecken (⟶), Halbgeraden (⟶) oder Geraden (⟶) immer den gleichen Abstand (⟶) zu einander besitzen, dann sind die parallel zu einander.
Parallelogramm: Ein Parallelogramm ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶). Wobei die gegen überliegenden Seiten (⟶) parallel (⟶) zu einander sein müssen. Außerdem sind die gegenüberliegenden Seiten (⟶) gleich lang und Winkel (⟶) gleich groß.
Parameter: Ein Parameter ist ein Platzhalter für eine Zahl (⟶).
Parameterform: Eine Darstellungsform (⟶) von vektoriellen (⟶) Geraden (⟶) oder Ebenen (⟶).
Pascal'sches Dreieck: Das Pascal'sche Dreieck gibt an wie sich die Koeffizienten (⟶) von binomischen Formel (⟶) mit höherer Potenz (⟶) verhalten.
Periodizität: Wiederholt sich ein Muster bei einer Zahl oder der Graph fortlaufend, dann wird von Periodizität gesprochen.
Pfadregeln: Pfadregeln werden zur Bestimmung von Teil- und Gesamtwahrscheinlichkeiten (⟶) von Ereignissen (⟶) in Baumdiagrammen (⟶) benutzt.
Primzahlen: Die Primzahlen sind die Zahlenmenge (⟶) aller natürlichen Zahlen (⟶), die nur durch sich selbst oder eins dividierbar (⟶) sind.
Produktregel: Die Produktregel dient dazu die Ableitung (⟶) von einem Produkt (⟶) von Funktionen (⟶) zu bilden.

Polstelle: Eine Polstelle einer Funktion ($\longrightarrow$) beschriebt ein extremales Verhalten in der Nähe einer Lücke der Definitionsmenge ($\longrightarrow$) und tritt in der Regel bei echt gebrochen rationalen Funktionen auf.
Polynom: Ein Polynom ist eine Summe ($\longrightarrow$) von verschiedenen Potenzen ($\longrightarrow$) einer Variable ($\longrightarrow$) mit ihren jeweiligen Koeffizienten ($\longrightarrow$).
Polynomdivision: Die Polynomdivision dient dazu zu überprüfen, ob es sich um eine echt oder unecht gebrochen rationale Funktion ($\longrightarrow$) handelt und wird wie die schriftliche Division ($\longrightarrow$) gehandhabt.
Potenz: Die Potenz einer Größe ($\longrightarrow$) ist die Zahl ($\longrightarrow$) wie oft die Größe mit sich selbst multipliziert ($\longrightarrow$) wird.
Primzahl: Eine Zahl, die nur durch sich selbst oder 1 teilbar ($\longrightarrow$) ist.
Prisma: Ein Prisma ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) mit eckiger Grundfläche ($\longrightarrow$). Dabei ist die Grundfläche gegenüberliegend wieder vorzufinden mit einen Abstand ($\longrightarrow$) der Höhe ($\longrightarrow$).
-regelmäßiges: Die Kantenlängen ($\longrightarrow$) der Grundfläche sind gleich lang.
-schiefes: Die Grundflächen sind zwar parallel zu einander, aber die zusammengehörigen Punkte sind nicht durch eine Orthogonale (Höhe) verbunden.
Produkt: Das Produkt ist das Ergebnis der Multiplikation ($\longrightarrow$).
Projektion: Wenn ein geometrisches Objekt zu Teilen auf andere Objekte abgebildet ($\longrightarrow$) werden kann, wird von einer Projektion auf eines der Objekte gesprochen.
Proportional: Ein direktes Verhältnis ($\longrightarrow$), welches graphisch als Ursprungsgerade (durch den Koordinatenurspung) dargestellt werden kann.
Prozent: $\frac{1}{100} = 1\%$ ($\longrightarrow$ Bruch).
Prozentfuß: Gibt die Zahl in der Einheit ($\longrightarrow$) Prozent an (66 in 66%) .
Prozentsatz: Ist der Prozentfuß mit Einheit (66%).
Prozentwert: Der prozentuale Anteil des Grundwertes ($\longrightarrow$).
Prozentzahl: Neu eingeführter Begriff für Schulen mit gleicher Bedeutung von Prozentfuß.
Punkt: Ein Punkt in einem Koordinatensystem ($\longrightarrow$) in zwei Dimensionen ($\longrightarrow$) wird beschrieben durch den Variablenwert ($\longrightarrow$) und Funktionswert ($\longrightarrow$).
Pyramide: Eine Pyramide ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) mit einer Grundfläche ($\longrightarrow$). Diese läuft in einer Höhe ($\longrightarrow$) spitz zusammen. Eine Pyramide besitzt fünf Seiten ($\longrightarrow$), fünf Ecken ($\longrightarrow$) und acht Kanten ($\longrightarrow$).
Pyramidenstumpf: Bei einem Pyramidenstumpf wurde von einer Pyramide ($\longrightarrow$) die Spitze parallel ($\longrightarrow$) zur Grundfläche ($\longrightarrow$) abgeschnitten.

Quader: Ein Quader ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$), dessen parallelen ($\longrightarrow$) Kanten ($\longrightarrow$) gleich lang sind. Alle Seiten ($\longrightarrow$) sind Rechtecke ($\longrightarrow$), wobei die gegenüberliegenden gleichgroß sind. Ansonsten besitzt der Quader die gleichen Eigenschaften wie der Würfel ($\longrightarrow$), der ein Spezialfall des Quaders ist.
Quadrant: In einem Koordinatensystem ($\longrightarrow$) gibt es vier Quadranten, die durch die Ordinate

(⟶) und Abszisse (⟶) unterteilt sind.
Quadrat: Ein Quadrat ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶), welches sich dadurch auszeichnet, dass alle Winkel (⟶) rechte Winkel sind und alle Seiten (⟶) gleich lang sind.
Quadratische Ergänzung: Die quadratische Ergänzung ist ein Mittel der Algebra (⟶) um Gleichungen (⟶) zu lösen. Dabei wird mithilfe des neutralen Elements (⟶) eine binomische Formel (⟶) erzeugt.
Quadratmeter: Ein Quadratmeter bildet die Einheit der Flächenberechnung (⟶) und beschreibt wieviele Quadrate (⟶) mit einem Meter mal einem Meter in ein geometrisches (⟶) Objekt passen.
Quersumme: Blöcke von Ziffern einer Zahl werden aufaddiert (⟶) (Ohne Beisatz, werden die einzelnen Ziffern aufaddiert).
Quotient: Der Quotient ist das Ergebnis der Division (⟶).

Radiant: Radiant ist die Einheit von Winkeln (⟶) in Bogenmaß (⟶). Dabei gilt: $2\pi rad = 360°$.
Radius: Der Radius ist der Abstand (⟶) des Kreisbogens (⟶) zum Mittelpunkt (⟶) eines Kreises (⟶).
Rand: Der Rand ist in der Geometrie (⟶) die Begrenzung eines Objekts.
Rationale Zahlen: Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind eine Zahlenmenge (⟶) aller Zahlen (⟶) die durch einen Bruch (⟶) dargestellt (⟶) werden können.
Raum: Ein Raum kann eine verschiedene Anzahl von Dimensionen (⟶), eine definierte Metrik (⟶) und Topologie (⟶) besitzen.
Raute: Die Raute ist ein geometrisches (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶), welches sich dadurch auszeichnet, dass die gegenüberliegenden Winkel (⟶) gleich groß sind und alle Seiten (⟶) gleich lang sind.
Realteil: Teil einer komplexen Zahl (⟶) ohne den Vorfaktor (⟶) $i = \sqrt{-1}$.
Reelle Zahlen: Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind alle Zahlen (⟶) der Zahlenmenge (⟶) ohne die komplexen Zahlen (⟶).
Regel von Sarrus: Ist ein Verfahren zur Bestimmung der Determinante (⟶).
Regression: Ein Verfahren, um aus Messdaten mit Unsicherheiten (⟶) eine Funktionsgleichung (⟶) zu ermitteln.
Reihe: Eine Reihe ist eine verkürzte Schreibweise einer langen Reihe von Additionen (⟶) oder Multiplikationen (⟶).

-Summenreihe: Die Summenreihe beschreibt eine Kette von Additionen (⟶).

-Produktreihe: Die Produktreihe beschreibt eine Kette von Multiplikationen (⟶).

-Taylorreihe: Die Taylorreihe beschreibt ein iteratives (⟶) Verfahren durch Ableitungen (⟶) sich einer Funktion (⟶) anzunähern.

-Fourierreihe: Die Fourierreihe beschreibt ein iteratives (⟶) Verfahren durch trigonometrische (⟶) Funktionen (⟶) sich einer periodischen (⟶) Funktion anzunähern.

Rest: Bei einer Division (⟶) mit natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (⟶) kann eine Zahl (⟶) nicht dividierbar durch den Divisor (⟶) sein. Diese Zahl wird Rest genannt.
Runden: Das Runden dient zur besseren Präsentation von Ergebnissen.

Satz: Ein Satz ist ein mathematisch bewiesener Fakt, der nahezu immer gilt. Schwächer als ein Theorem (⟶) oder stärker als ein Lemma (⟶).
Satz des Pythagoras: Der Satz des Pythagoras stellt einen Zusammenhang zwischen den Katheten (⟶) und der Hypotenuse (⟶) eines rechtwinkligen Dreiecks (⟶) auf.
Satz von Cavallerie: Der Satz von Cavallerie sagt aus, dass das Volumen (⟶) von zwei geometrischen (⟶) Objekten gleich ist, wenn sie in jeder Höhe (⟶) den gleichen Flächeninhalt (⟶) besitzen.
Satz von Moivre-Laplace: Der Satz von Moivre-Laplace beschreibt den Übergang zwischen einer diskreten (⟶) zu einer kontinuierlichen (⟶) Verteilung (⟶), wie zum Beispiel von einer Binomial- (⟶) zur Gauß-Verteilung (⟶).
Scheitelpunkt: Der Scheitelpunkt einer Parabel (⟶) ist der Punkt (⟶), an dem eine Tangente (⟶) mit der Steigung (⟶) gleich Null angelegt werden kann.
Schenkel: Schenkel sind die Strecken (⟶) oder Halbgeraden (⟶) die von einem Schnittpunkt (⟶) bezüglich des betrachteten Winkels (⟶) ausgehen.
Schwerpunkt: Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt (⟶) der Seitenhalbierenden (⟶).
Seite: Eine Seite ist bei einem geometrischen (⟶) Objekt in zwei Dimensionen (⟶) eine Strecke (⟶) zwischen zwei Eckpunkten (⟶). Während in drei Dimensionen oftmals damit eine Fläche (⟶) gemeint ist.
Seitenhalbierende: Die Seitenhalbierden ist eine Gerade (⟶) durch die Mitte einer Seite (⟶) und dem gegenüberliegenden Punkt (⟶).
Sekante: Eine Sekante ist eine Gerade (⟶), die ein geometrisches (⟶) Objekt genau zwei mal schneidet.
Sinus: Der Sinus ist eine trigonometrische (⟶) Funktion (⟶), die durch den Quotient (⟶) Gegenkathete (⟶) durch Hypotenuse (⟶) bei einem rechtwinkligen Dreieck (⟶) beschrieben wird.
Skalar: Eine Zahl (⟶) ohne Richtung.
Skalarprodukt: Die Multiplikation (⟶) zwischen zwei Vektoren (⟶), welches als Produkt (⟶) ein Skalar (⟶) ergibt, wird Skalarprodukt $\cdot$ genannt.
Spannvektor: Zwei linear unabhängige (⟶) Vektoren (⟶) spannen eine Ebene (⟶) auf.
Spat: Auch Parallelotops genannt, ist ein schiefes Prisma (⟶) mit einem Parallelogramm (⟶) als Grundfläche.
Spatprodukt: Nach einem Kreuzprodukt (⟶) wird ein Skalarprodukt (⟶) durchgeführt. Das Spatprodukt kann als Volumen (⟶) eines Prismas (⟶) interpretiert werden.
Spur: Die Spur einer $n \times n$-Matrix (⟶) ist die Summe (⟶) der diagonalen Einträge (⟶).
Skizze: Graphische Darstellung eines Sachverhalts ohne Maßstabstreue.
Spiegelung: Eine Spiegelung kann an einer Geraden (⟶) oder einem Punkt (⟶) durch

geführt werden, dabei wird das geometrische (⟶) Objekt oder der Graph (⟶) neu abgebildet, wobei der Abstand (⟶) zum Punkt (⟶) oder zur Geraden (⟶) gleich bleiben muss, sich allerdings auf der anderen Seite befindet.
Stammfunktion: Die Stammfunktion ist die integrierte (⟶) Funktion (⟶).
Standartabweichung: Ein Maß zur Breite einer Verteilung (⟶), welches benutzt wird um Hypothesen (⟶) zu verifizieren (⟶).
Stauchungsparameter: Der Stauchungsparameter ist ein Koeffizient (⟶) der die Steigung (⟶) von Funktionen (⟶) beeinflusst.
Steigung: Die Steigung gibt an um wie viel sich der Funktionswert (⟶) erhöhen würde bei einem weiteren Schritt beim Variablenwert (⟶).
-momentane: Die Steigung einer Funktion in einem bestimmten Punkt (⟶).
Stochastik: In diesem großen Teilgebiet der Mathematik stehen alle Größen (⟶) um Wahrscheinlichkeiten (⟶) im Vordergrund.
Strecke: Eine Strecke ist beschreibt einen Abstand (⟶) zwischen zwei Punkten (⟶).
Substitution: Die Substitution ist die Umkehrung des Einsetzverfahren (⟶).
Subtrahend: Von einem Subtrahenden wird bei der Subtraktion (⟶) abgezogen.
Subtraktion: Bei der Subtraktion wird von einem Subtrahend (⟶) der Minuend (⟶) abgezogen und der Ergebnis wird Differenz (⟶) genannt.
Summand: Wenn Summanden zusammengezählt werden entsteht die Summe (⟶). Diese Rechnung wird Addition (⟶) genannt.
Summe: Die Summe ist das Ergebnis der Addition (⟶) von Summanden (⟶).
Supremum: Die obere Schranke einer Zahlenmenge(⟶).
Symmetrie: Es wird von einer Symmetrie gesprochen wenn nach einer Spiegelung (⟶) sich das geometrische (⟶) Objekt oder der Graph (⟶) nicht verändert hat.
-Achsensymmetrie: Spiegelung (⟶) an einer Geraden (⟶) ohne Veränderung wird achsensymmetrisch genannt.
-Punktsymmetrie: Spiegelung (⟶) an einem Punkt (⟶) ohne Veränderung wird punktsymmetrisch genannt.
-Radiale Symmetrie: Drehung um einen beliebigen Winkel (⟶) ohne Veränderung wird radialsymmetrisch genannt.

Tangens: Der Tangens ist der Quotient (⟶) von Sinus (⟶) durch Kosinus (⟶).
Tangente: Eine Tangente berührt aber schneidet ein geometrisches (⟶) Objekt oder einen Graphen (⟶) nicht.
Teilbarkeit: Wenn eine natürliche Zahl (⟶) mittels Division (⟶) wieder eine natürliche Zahl ergibt, ist diese Zahl durch den Divisor (⟶) teilbar.
Teiler: Wenn eine natürliche Zahl (⟶) mittels Division (⟶) wieder eine natürliche Zahl ergibt, ist der Zahl ein Teiler vom Dividenden (⟶).
Teilmengen: Eine Teilmenge ist ein Teil einer anderen Menge (⟶).
Tensor: Ein Anordnung von Einträgen (⟶) in beliebig vielen Dimensionen (⟶).

Term: Ein Term ist ein Block von Operationen ($\longrightarrow$).

Tetraeder: Ein Tetraeder ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) mit vier Eckpunkten ($\longrightarrow$), sechs Kanten ($\longrightarrow$) und vier Seiten ($\longrightarrow$), die jeweils gleichschenklige Dreiecke ($\longrightarrow$) sind.

Theorem: Ein Theorem ist ein mathematisch bewiesener Fakt, der immer gilt. Stärker als Satz ($\longrightarrow$) und Lemma ($\longrightarrow$).

Theorie: Eine bestätigte Hypothese ($\longrightarrow$), die in ihrem Rahmen die Wirklichkeit beschreibt und somit in dem Rahmen als bewiesen ($\longrightarrow$) gilt.

Transponation: Wird eine Matrix ($\longrightarrow$) transponiert, werden die Einträge ($\longrightarrow$) neu angeordnet, wobei die Zeilen- und Spaltenposition vertauscht wird.

Topologie: Grundlegende Eigenschaft eines Raumes ($\longrightarrow$), welche dessen Form angibt.

Trapez: Ein Trapez ist ein Viereck ($\longrightarrow$ Rechteck), dass zwei parallel Seiten besitzt.

Trigonometrie: Die Trigonometrie stellt werden Zusammenhang zwischen Winkeln ($\longrightarrow$) und Seitenlängen ($\longrightarrow$) auf.

Unbekannte: siehe Parameter ($\longrightarrow$) und Variable ($\longrightarrow$).

Ungleichung: Eine Gleichung ($\longrightarrow$) ohne Äquivalenz ($\longrightarrow$) sondern mit der Forderung, dass eine Seite größer (oder größer gleich) ist als die andere.

Unsicherheit: Die Unsicherheit ist eine Größe ($\longrightarrow$), welche durch die Standardabweichung ($\longrightarrow$) und steigender Wiederholung von Experimenten abnimmt.

Untersumme: Der Flächeninhalt ($\longrightarrow$) der durch eine Funktion ($\longrightarrow$) und der Abszisse ($\longrightarrow$) eingeschlossen wird, der durch eine Summe ($\longrightarrow$) von Rechtecken ($\longrightarrow$), die nicht über die Funktion hinausragen wird Untersumme genannt.

Umfang: Der Umfang eines geometrischen ($\longrightarrow$) Objekts in zwei Dimensionen ($\longrightarrow$) ist gegeben als die Summe ($\longrightarrow$) der Strecken ($\longrightarrow$) des Randes ($\longrightarrow$).

Umkehrfunktion: Zu jeder Funktion ($\longrightarrow$) existiert eine Umkehrfunktion, die die Funktion wieder aufhebt.

Umkehroperation: Zu jeder Operation ($\longrightarrow$) existiert eine Umkehroperation, die die Operation rückgängig machen kann.

Umkreis: Der Umkreis ist ein Kreis ($\longrightarrow$) der alle Eckpunkte eines Dreiecks ($\longrightarrow$) schneidet mit dem Mittelpunkt ($\longrightarrow$) der Schnittpunkt ($\longrightarrow$) der Mittelsenkrechten ($\longrightarrow$) entspricht.

Variable: Eine Variable ist eine Veränderlich und beschreibt bei einer Funktion ($\longrightarrow$) alle Zahlen ($\longrightarrow$) der Definitionsmenge ($\longrightarrow$).

Variablenwert: Der Variablenwert ist ein spezieller Wert einer Variablen ($\longrightarrow$) und wird auf der Abszisse ($\longrightarrow$) gefunden.

Varianz: Eine Hilfsgröße, die die Form der Verteilung ($\longrightarrow$) beschreibt.

Vektor: Eine Richtungsanweisung in einem Koordinatensystem ($\longrightarrow$) beziehungsweise eine Größe mit einer Richtung.

Vereinigung: Die Vereinigung ist ein Mengenoperator ($\longrightarrow$), der die Zahlen ($\longrightarrow$) von zwei

Mengen ($\longrightarrow$) zusammenfasst.
Verhältnis: Ein Verhältnis gibt an wie oft eine Größe ($\longrightarrow$) auf einer anderen abgebildet ($\longrightarrow$) werden kann, bis eine Äquivalenz ($\longrightarrow$) hergestellt werden kann ($\longrightarrow$ Vielfaches).
Vermutung: Auch Behauptung oder Hypothese genannt, ist ein Sachverhalt, der weder verifiziert ($\longrightarrow$) noch falsifiziert ($\longrightarrow$) ist.
Verteilung: Diskrete ($\longrightarrow$) oder kontinuierliche ($\longrightarrow$) Darstellung von Wahrscheinlichkeiten ($\longrightarrow$) in einem Koordinatensystem ($\longrightarrow$).

-Binomial: Wahrscheindlichkeitsverteilung von zwei Ereignissen mit endlicher Wiederholung des Experiment - also diskret.

-Gauß: Die kontinuierliche Vorsetzung der diskreten Binomialverteilung.

Vielfaches: Eine resultierende Zahl die mit einer natürlichen Zahl ($\longrightarrow$) multipliziert ($\longrightarrow$) wurde.
Vierfeldertafel: Ein tabellarisches Verfahren, um eine Wahrscheinlichkeit ($\longrightarrow$) aus zwei mit einander in verbindungstehenden Aussagen, die jeweils zwei Fallunterscheidungen besitzen, zu berechnen.
Vorfaktor: siehe Koeffizient ($\longrightarrow$).
Volumen: Das Volumen ist eine Größe ($\longrightarrow$) in drei Dimensionen ($\longrightarrow$) und wird von Flächen ($\longrightarrow$) umrandet ($\longrightarrow$). Das Volumen beschreibt wieviele Würfel ($\longrightarrow$) mit der Kantenlänge ($\longrightarrow$) von einem Meter in ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt passen.
Vorzeichen: Zu jeder Zahl gehört der Additions- ($\longrightarrow$) oder Subtraktionsoperator ($\longrightarrow$) als Vorzeichen.

Wahrscheinlichkeit: Ein prozentualer ($\longrightarrow$) Ausdruck, der angibt ob ein Ereignis ($\longrightarrow$) eintreten könnte.
Wahrscheinlichkeitsdichte: Ein Maß für die Wahrscheinlichkeiten ($\longrightarrow$) unter einem Integral ($\longrightarrow$) oder einer Summe ($\longrightarrow$).
Wendestelle: Die Wendestelle einer Funktion ($\longrightarrow$) beschreibt den Punkt ($\longrightarrow$), an dem die Steigungsänderung ($\longrightarrow$) ihr Vorzeichen wechselt.
Wertemenge: Alle Funktionswerte ($\longrightarrow$) werden in der Wertemenge zusammengefasst.
Wertepaar: Zu jedem Variablenwert ($\longrightarrow$) passt genau ein Funktionswert ($\longrightarrow$). Diese beiden Werte bilden ein Wertepaar.
Wertetabelle: In einer Wertetabelle können Wertepaare ($\longrightarrow$) berechnet werden.
Windschief: Geraden ($\longrightarrow$), die keinen Schnittpunkt ($\longrightarrow$) besitzen und auch nicht parallel ($\longrightarrow$) zu einander sind.
Winkel: Ein Winkel beschreibt wie groß der Anteil eines Kreises ($\longrightarrow$) zwischen zwei Geraden ($\longrightarrow$), Strecken ($\longrightarrow$) oder Halbgeraden ($\longrightarrow$) ist.

-überspitz: Als überspitzer Winkel wird ein Winkel zwischen $0°$ und $45°$ bezeichnet.

-spitz: Als spitzer Winkel wird ein Winkel zwischen $45°$ und $90°$ bezeichnet.

-recht: Als rechter Winkel wird ein Winkel von genau $90°$ bezeichnet.

-stumpf: Als stumpfer Winkel wird ein Winkel zwischen $90°$ und $180°$ bezeichnet.

-gestreckt: Als gestreckter Winkel wird ein Winkel von genau 180° bezeichnet.

-überstumpf: Als überstumpfer Winkel wird ein Winkel zwischen 180° und 360° bezeichnet.

-voll: Als voller Winkel wird ein Winkel von genau 360° bezeichnet.

-Nebenwinkel: Zwei Geraden, Strecken oder Halbgeraden, die sich schneiden unterteilen sich in jeweils 180°-Winkel. Die beiden Winkel, die 180° bilden und somit in Beziehung zueinander stehen, werden Nebenwinkel genannt.

-Scheitelwinkel: Zwei Geraden, Strecken oder Halbgeraden, die sich schneiden unterteilen sich in jeweils 180°-Winkel. Die gegenüberliegenden Winkel müssen gleich groß sein und durch diese Beziehung werden Scheitelwinkel genannt.

-Stufenwinkel: Zwei Geraden, Strecken oder Halbgeraden, die sich schneiden unterteilen sich in jeweils 180°-Winkel. Bei einer weiteren Parallelen ($\longrightarrow$), werden die Winkelbeziehungen weiter gegeben, dabei werden die Winkel in gleicher Position Stufenwinkel genannt.

-Wechselwinkel: Zwei Geraden, Strecken oder Halbgeraden, die sich schneiden unterteilen sich in jeweils 180°-Winkel. Bei einer weiteren Parallelen ($\longrightarrow$), werden die Winkelbeziehungen weiter gegeben, dabei werden die Winkel in entgegengesetzter Position Stufenwinkel genannt.

Winkelhalbierende: Die Winkelhalbierende ist eine Gerade ($\longrightarrow$), die einen Winkel ($\longrightarrow$) genau halbiert.

Winkelsumme: Die Winkelsumme ist die Summe ($\longrightarrow$) aller Winkel ($\longrightarrow$) in einem geometrischen ($\longrightarrow$) Objekt in zwei Dimensionen ($\longrightarrow$).

Würfel: Ein Würfel besitzt acht Ecken ($\longrightarrow$), zwölf Kanten ($\longrightarrow$) und sechs Seiten ($\longrightarrow$). Alle Seiten sind gleich lang und haben einen rechten Winkel ($\longrightarrow$) zu einander. Der Würfel ist ein geometrisches ($\longrightarrow$) Objekt in drei Dimensionen ($\longrightarrow$).

Wurzel: Die Wurzel hebt die Potenz ($\longrightarrow$) auf. Dabei hebt die Quadratwurzel die Potenz zweiter Ordnung ($\longrightarrow$) auf.

Zahl: Eine Zahl besteht aus Ziffern ($\longrightarrow$).

Zahlenmengen: Eine Zahlenmenge ist eine Menge ($\longrightarrow$) in der sich Zahlen ($\longrightarrow$) einer Art befinden.

Zahlenstrahl: Ein Zahlenstrahl ist eine Gerade ($\longrightarrow$), die in gleichbleibenden Abständen ($\longrightarrow$) wachsende Zahlen vorzuweisen hat.

Zahlensysteme: Je nach Zahlensystem existiert eine unterschiedliche Anzahl von Ziffern ($\longrightarrow$).

-Dual: Es existieren nur zwei Ziffern $\{0, 1\}$.

-Oktal: Es existieren acht Ziffern $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

-Dezimal: Es existieren zehn Ziffern $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

-Hexadezimal: Es existieren sechszehn Ziffern $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$.

Zentrische Streckung: Ein geometrisches Objekt wird durch Geraden ($\longrightarrow$) zu einem Punkt ($\longrightarrow$) verkleinert oder vergrößert.

Zähler: Der Zähler ist bei der Darstellung ($\longrightarrow$) als Bruch ($\longrightarrow$) der Dividend ($\longrightarrow$).

Zeichnung: Exakte graphische Darstellung eines Sachverhalts mit Maßstabstreue.

Ziffer: Ziffern sind die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Aus ihnen setzen sich weitere Zahlen ($\longrightarrow$)

zusammen.

Zylinder: Ein Zylinder hat einen Kreis (⟶) zur Grundfläche (⟶), der ebenso der Grundfläche gegenüberliegt. Die Kreise sind in der Höhe (⟶) mit einander verbunden und bilden den Rand (⟶) eines Volumens (⟶). Der Zylinder besitzt drei Flächen (⟶), zwei Kanten (⟶) und keine Ecke (⟶).